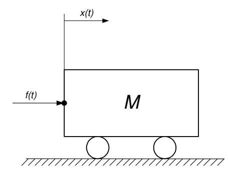
OSNOVNA NAČELA POVRATNE VEZE

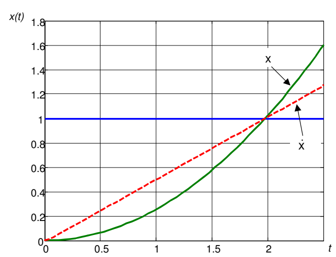
Prof.dr.sc. Joško Petrić

DJELOVANJE POVRATNE VEZE

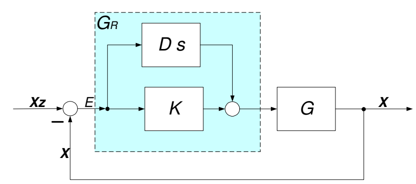
- Primjer zatvaranja regulacijskog kruga

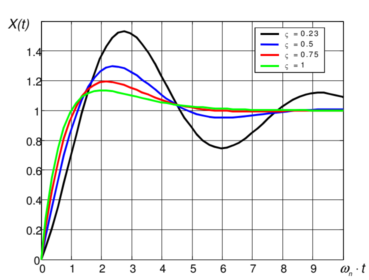


- Prijelazni odziv



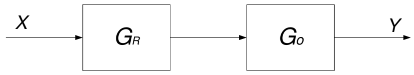
- Blok shema zatvorenog kruga sa PD regulacijskim djelovanjem





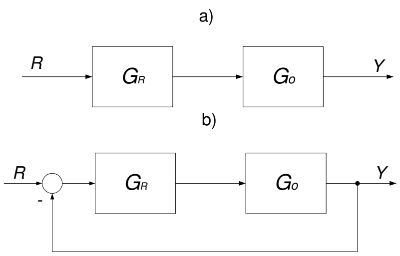
- Prijelazni odzivi samog mehaničkog sustava, i sustava u zatvorenom krugu, mogu se usporediti. Razlike odziva su bitne, pa se može ukazati na nekoliko zaključaka:
- – Uvođenjem povratne veze sa određenim regulacijskim djelovanjem originalni sustav može potpuno promijeniti svoju dinamičku narav. Od originalnog sustava kojeg su mogla predstaviti dva serijski spojena I_0 člana, došlo se do P_2 člana sa dodanom nulom.
- – Regulacijsko djelovanje u ovom slučaju oponaša oprugu i prigušenje. Dakle, nekakvi aktuator (npr. električni motor koji pogoni kotače, čije postojanje i dinamika u ovom slučaju je zanemarena radi pojednostavljenja) svojim djelovanjem *glumi* djelovanje opruge i viskoznog prigušivača, kojih fizički uopće nema.
  - Samo ponašanje sustava u zatvorenom krugu ovisi o parametrima regulatora (ovdje pojačanjima *K* i *D*), koji se kod modernih elektroničkih uređaja vrlo lako mogu podesiti. Kod stvarnih opruga i prigušivača parametri se, jednom zadani, teško dadu mijenjati.

Zamisao idealnog regulatora

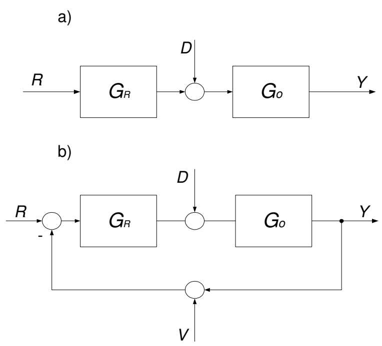


Osnovna obilježja povratne veze:

a)otvoreni krug i b) zatvoreni krug



Uključenje poremećajnih veličina



$$Y_a(s) = G_O(s)\, D(s) \qquad Y_b(s) = \frac{G_O(s)}{1+G_R(s)G_O(s)} D(s)$$

- Iz (414.3) može se uočiti da se upravljačkim djelovanjem $G_R(s)$ ne može utjecati na poremećaj. No, kod povratne veze mehanizam smanjivanja djelovanja poremećaja na odziv jednak je kao kod smanjivanja utjecaja promjena na objektu upravljanja. Dakle povećanjem $|G_O G_R|$, smanjuje se utjecaj poremećaja. Dakle, i u slučaju otklanjanja poremećaja očita je prednost zatvorenog kruga nad otvorenim.
- Ipak, potrebno je razmotriti i utjecaj mjernog šuma kod povratne veze. Toga nema kod otvorenog kruga, naprosto zato što se pretpostavlja da se ništa ne mjeri, jer to je svojstveno otvorenom krugu. Utjecaj šuma jest:

$$Y_b(s) = \frac{G_R(s)G_O(s)}{1+G_R(s)G_O(s)} \cdot \big(R(s) - V(s)\big)$$

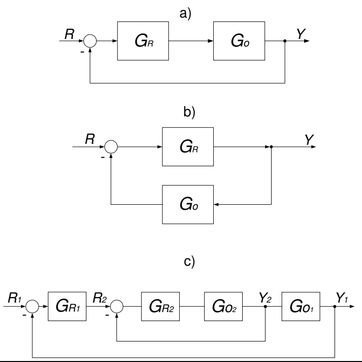
- Dakle, mjerni šum pojavljuje se na odzivu preko iste prijenosne funkcije kao i ulazna veličina. Stoga će se smanjenje utjecaja šuma odraziti i na ulazni signal istim mehanizmom. Kako mjerni signal nikada u praksi nije idealan, pojačanje regulatora, ako ničim drugim, uvijek je ograničeno kvalitetom mjernog signala.
-
- U ovom poglavlju slijedeći su naglasci glede povratne veze:
- – Odziv u zatvorenom krugu manje je osjetljiv na promjene parametara sustava od odziva otvorenog kruga. Što je veće pojačanje regulatora, osjetljivost je manja.
- – U zatvorenom krugu može se utjecati na djelovanje poremećaja, za razliku od otvorenog kruga. Što je veće pojačanje regulatora, djelovanje poremećaja se smanjuje.
  - Kvaliteta mjernog signala ograničava pojačanja regulatora.

- U idealnom slučaju, neki regulator bi trebao zadovoljiti slijedeće zahtjeve:

1. Zatvoreni krug mora biti stabilan.
2. Utjecaj poremećaja treba biti minimalan.
3. Odziv na promjene vodeće veličine treba biti brz i ravnomjeran.
4. Odziv u stacionarnom stanju treba biti točan.
5. Potrebno je izbjeći pretjeranu aktivnost izvršnih organa.
6. Sustav upravljanja treba biti što je moguće manje osjetljiv na promjene unutar kruga, te na nepreciznosti modela.

Smještaj regulatora unutar zatvorenog kruga:

a) u direktnoj vezi, b) u povratnoj vezi i c) kaskadni regulator

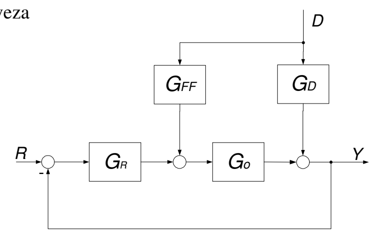


$$G_a(s) = \frac{G_R(s)G_O(s)}{1+G_R(s)G_O(s)} = \frac{G_{R\,br}(s)G_{O\,br}(s)}{G_{R\,na}(s)G_{O\,na}(s)+G_{R\,br}(s)G_{O\,br}(s)}$$

$$G_b(s) = \frac{G_O(s)}{1+G_R(s)G_O(s)} = \frac{G_{R\,na}(s)G_{O\,br}(s)}{G_{R\,na}(s)G_{O\,na}(s)+G_{R\,br}(s)G_{O\,br}(s)}$$

- Razlike se mogu uočiti na brojnicima prijenosne funkcije zatvorenog kruga.
- Teško se mogu dati neka opća načela glede pitanja smještaja regulatora, odnosno kada koji koristiti. To može ovisiti o vrsti upravljačkog sustava (da li je mehanički, hidraulički ili električni), o pitanjima upravljačkih uređaja i senzora koje se koriste, te o prethodnim iskustvima.
- Kaskadni regulator (c) ima vanjsku petlju sa regulatorom G_{R1} (*master*) koji daje nazivnu vrijednost unutarnjoj petlji sa ragulatorom G_{R2} (*slave*). Takva regulacija koristi se kada treba izolirati dinamiku jednog dijela upravljačkog sustava od drugog dijela cjelokupnog sustava. Naime, na taj način se može djelovati na neku promjenu u sustavu prije nego bi se djelovalo ako te *interne* petlje ne bi bilo, i tako se poboljšavaju svojstva upravljanog sustava. To je određena alternativa unaprijednom upravljanju, ali tada treba poznavati, odnosno mjeriti poremećajne veličine.

Unaprijedna veza



$$\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{G_D(s)+G_{FF}(s)G_O(s)}{1+G_R(s)G_O(s)}$$

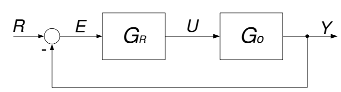
- Da bi se moglo uspješno ukloniti djelovanje poremećaja, potrebno je:
- – Mjeriti poremećajne veličine.
- – Kvaliteta upravljanja unaprijednom vezom ovisi o kvaliteti modela sustava. Štoviše, potrebno je poznavati također kako se sustav odazivlje na promjene poremećajnih veličina (u primjeru dano sa $G_D(s)$).
- Gore navedeno svakako predstavlja nedostatke unaprijedne veze.
- No, i povratna veza ima nedostataka:
- – Radnja ispravljanja pogreške ne događa se prije nego se pogreška u izlaznoj varijabli dogodi. Stoga nije moguće idealno upravljanje, u kojem uopće ne bi bilo razlike između izlazne varijable i željene vrijednosti.
- – Regulacija sustava sa dugim vremenskim konstantama ili mrtvim vremenom može dati nezadovoljavajuće rezultate.
- – Ako se izlazna varijabla ne može mjeriti, regulacija se ne može primijeniti (za ovu tvrdnju zanemaruje se pojam estimatora kod sustava sa više varijabli).

Stoga uspješno upravljanje vrlo često objedinjava unaprijednu i povratnu vezu.

Regulatori

- Dani su osnovni regulatori kojima se djeluje na regulacijsku pogrešku: riječ je o proporcionalnom (P), integralnom (I) i derivacijskom (D) regulatoru, gdje se I ili D regulator rijetko susreću samostalno, ali svojom kombinacijom tvore svugdje prisutni proporcionalno-integralno-derivacijski (PID) regulator.
- Česte su i kombinacije proporcionalno-integralnog (PI) i proporcionalno-derivacijskog (PD) regulatora. Ponegdje se ti regulatori vezuju uz pojam idealni, jer podrazumijevaju idealnu mogućnost izračuna derivacije i integrala regulacijske pogreške, svojstvenu primjeni digitalnih algoritama regulacije.
- Regulatori mogu biti sastavljenih od nekoliko umreženih elektroničkih (čak i pneumatskih ili mehaničkih) elemenata, koji aproksimiraju PD, PI ili PID djelovanje, a tada je često svojstven naziv *lead* (predvodeći), *lag* (zaostajući), odnosno *lead-lag* (predvodeći-zaostajući) regulator. Ti nazivi ukazuju na prirodu regulacijskih djelovanja, gdje se derivacijskim dijelom regulatora odgovara na tendenciju, trend regulacijske pogreške. Integralnim dijelom odgovara se na kumulativnu (zaostalu) vrijednost pogreške tijekom nekog vremena.

Proporcionalno, derivacijsko i integralno djelovanje regulatora



$$u(t) = K_p\, e(t) \qquad G_{R\_P} = K_p$$

$$u(t) = K_p T_d \frac{de(t)}{dt} \qquad G_{R\_D} = K_p T_d\, s$$

$$u(t) = \frac{K_p}{T_i}\int_{t_0}^{t} e(t)\,dt \qquad G_{R\_I} = \frac{K_p}{T_i\, s}$$

- Pojačanjem proporcionalnog djelovanja K_p ubrzava se odziv zatvorenog kruga (smanjuje vrijeme porasta t_r), no pri tom se smanjuje stupanj prigušenja ζ (za sustave drugog ili višeg reda) i tako povećava maksimalni prebačaj odziva.
- Derivacijsko regulacijsko djelovanje reagira na tendenciju kretanja regulacijske pogreške, odnosno njen trend, te time općenito poboljšava stabilnost zatvorenog sustava. U kombinaciji sa proporcionalnim, odnosno proporcionalno-integralnim djelovanjem smanjuje maksimalni prebačaj i skraćuje vrijeme smirivanja odziva t_s.
- Glavna svrha integralnog regulacijskog djelovanja je poboljšanje točnosti zatvorenog kruga, to jest potpuno uklanjanje ili barem smanjivanje trajne regulacijske pogreške. Ipak, to ide na teret ugrožavanja stabilnosti sustava, odnosno povećanja prebačaja, te dužeg vremena smirivanja odziva zatvorenog sustava.

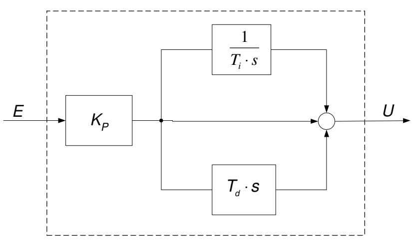
PID regulator

- Proporcionalno-integralno-derivacijski (PID) regulator, ili njegove reducirane inačice poput proporcionalno-derivacijski (PD) ili proporcionalno-integralnog (PI) regulatora, svugdje su prisutne u svijetu automatizacije. Čak i vrlo složeni, napredni upravljački algoritmi, u pravilu sadrže osnovne elemente djelovanja PID regulatora. Ova kombinacija regulacijskih djelovanja svojim kompromisom često može dati prihvatljivu kvalitetu odziva. To jest, odziv će biti dovoljno brz i točan, sa dopustivim oscilacijama (prebačajem).

$$u(t) = K_P\, e(t) + \frac{K_P}{T_i}\int_{t_0}^{t} e(t)\,dt + K_P\, T_d\, \frac{de(t)}{dt}$$

K_p je pojačanje proporcionalnog djelovanja, T_d derivacijsko vrijeme ili vremenska konstanta derivacije, a T_i integralno vrijeme ili vremenska konstanta integracije. Umnožak $K_p T_d$ ponegdje se označava sa K_d (pojačanje derivacijskog djelovanja), odnosno K_p/T_i sa K_i (pojačanje integralnog djelovanja).

PID regulator



$$G_{R\_PID} = K_P\left(1 + \frac{1}{T_i\, s} + T_d\, s\right)$$

Primjer implementacije PID regulatora na digitalnom računalu

$$u_n = \bar{u} + K_P\left[e_n + \frac{\Delta t}{T_i}\sum_{k=1}^{n} e_k + \frac{T_d}{\Delta t}(e_n - e_{n-1})\right]$$

$$\int_{t_0}^{t} e(t)dt \approx \sum_{k=1}^{n} e_k\, \Delta t$$

$$\frac{de}{dt} \approx \frac{e_n - e_{n-1}}{\Delta t}$$

Načela podešavanja parametara PID regulatora

$$G_{R\_PID} = K_P\left(1 + \frac{1}{T_i\, s} + T_d\, s\right)$$

1. Za simulaciju jednostavnijih slučajeva mogu se slijediti ove smjernice: Iz odziva u otvorenom krugu odrediti što se treba popraviti.
2. Dodaje se P djelovanje radi poboljšanja brzine odziva (vremena porasta).
3. Dodaje se D djelovanje radi smanjenja oscilacija odziva (maks. prebačaja).
4. Dodaje se I dio radi uklanjanja trajnog regulacijskog odstupanja.
5. Podešavaju se parametri regulatora dok se ne dobije željeni odziv zatvorenog kruga.

Tipične upute praktičnog podešavanja PID regulatora su slijedeće:

1. Uklanja se D i I djelovanje postavljanjem T_d na minimalnu, a T_i na maksimalnu moguću vrijednost.
2. K_p se postavlja na neku malu vrijednost, a zatim se postupno povećava malim korakom do trenutka kada se pojavi odziv ravnomjernih oscilacija konstantne amplitude.
3. K_p treba smanjiti na polovinu vrijednosti.
4. T_i se smanjuje malim koracima dok se ponovno ne pojavi odziv ravnomjernih oscilacija konstantne amplitude.
5. T_i se postavlja na tri puta veću vrijednost.
6. T_d se povećava malim koracima dok se ne pojavi odziv ravnomjernih oscilacija konstantne amplitude.
7. T_d se postavlja na jednu trećinu te vrijednosti.

PI-D i I-PD oblik regulatora

Ziegler-Nichols podešavanje parametara regulatora

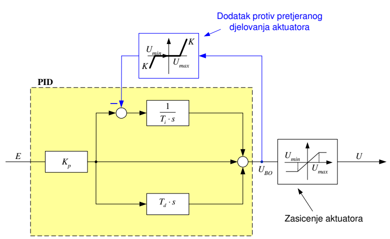
	Kp	Ti	Td
P	1/a		
PI	0.9/a	3τ	
PID	1.2/a	2τ	0.5τ

τ – vremenska konst.

a – parametar vezan uz mrtvo vrijeme

Prekomjerno djelovanje regulatora

- “Antiwindup integrator”

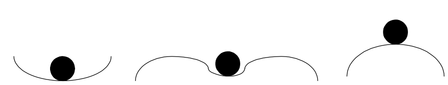


Stabilnost

- Za stabilnost sustava može se reći da je njegovo najvažnije svojstvo. Naime, ono je preduvjet ostalih važnih svojstava, poput točnosti ili brzine odziva, jer bez stabilnosti ostala pitanja postaju bespredmetna. Svojstvo stabilnosti nije svojstveno samo sustavima sa povratnom vezom.
- Razmatranje stabilnosti u ovom poglavlju odnosi se na <u>linearne sustave</u>

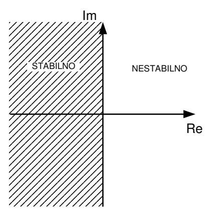
Definicija stabilnosti

- Stabilnost sustava može se opisati na više načina. Stabilan sustav može se smatrati onaj koji započinjanjem rada u blizini svoje radne točke, zauvijek i ostaje u njenoj okolini. Može se još reći, stabilan sustav je onaj čiji izlaz ostaje *pod kontrolom* cijelo vrijeme.
- Navedene tvrdnje potrebno je i formalno, matematički definirati.
- Postoji više matematičkih definicija stabilnosti. Često se koristi definicija ograničena pobuda – ograničeni odziv, to jest *BIBO* (*bounded input – bounded output*), koja kaže:
- Stabilan sustav je onaj koji daje ograničeni odziv na bilo koju ograničenu pobudu, uvjetno stabilan sustav je onaj koji daje ograničeni odziv na neke, ali ne sve, ograničene pobude, a nestabilan sustav je onaj koji daje neograničen odziv na svaku ograničenu pobudu različitu od nule.



Iz matematičkog opisa linearnog, vremenski invarijantnog sustava može se znati da li je sustav stabilan: <u>sustav je stabilan onda i samo onda ako svi njegovi korijeni imaju negativne vrijednosti realnih dijelova.</u>

Područje stabilnosti u Gaussovoj ravnini

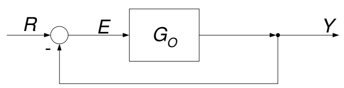


Točnost

- Jedna od važnih osobina sustava sa povratnom vezom svakako je njegova točnost.
- Svojstva dinamičkog sustava koja su se razmatrala prethodno, vezana su uz prijelazne pojave. Točnost sustava, ili njeno naličje, trajno regulacijsko odstupanje, vezane su uz stacionarno stanje dinamičkog sustava, odnosno vrijeme kada prijelazne pojave nestanu. U literaturi na engleskom jeziku uglavnom se susreće pojam trajnog regulacijskog odstupanja ili pogreške (*steady-state error*), a rjeđe točnosti sustava (*accuracy*).
- Uz točnost može se povezati partikularni integral (stacionarno rješenje) diferencijalne jednadžbe. Za analizu točnosti sustava, osim sustava samog važna je i pobuda. Za različite pobudne funkcije isti sustav imati će različita trajna regulacijska odstupanja. To je ono što razlikuje analizu točnosti od analize stabilnosti, gdje pobuda ne utječe na rješenje o tome da li je sustav stabilan ili ne.
- Pri tom treba imati na umu da analiza točnosti vrijedi samo za stabilne sustave

Analitičko izračunavanje trajnog regulacijskog odstupanja

Na primjeru zatvorenog kruga sa jediničnom povratnom vezom mogu se dati upute za analitičko izračunavanje trajnog regulacijskog odstupanja, ili trajne regulacijske pogreške.



$$G(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{G_O(s)}{1+G_O(s)} \quad \Rightarrow \quad Y(s)=\frac{G_O(s)}{1+G_O(s)}R(s)$$

$$E(s)=R(s)-Y(s)=\frac{1}{1+G_O(s)}R(s)$$

- Trajno regulacijsko odstupanje e_0 definira se kao razlika između nazivne i izlazne veličine kako $t \rightarrow \infty$. Dakle, da bi se trajno regulacijsko odstupanje izračunalo pomoću izraza s prethodne stranice, koji je u s području, koristi se teorem konačne vrijednosti. Teorem predstavlja jedno od niza svojstava Laplaceove transformacije.
- Teorem konačne vrijednosti glasi:

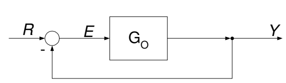
$$\lim_{t\to\infty} f(t)=\lim_{s\to 0} sF(s)$$

Primjena teorema daje izraz za trajno regulacijsko odstupanje:

$$e_0=\lim_{t\to\infty} e(t)=\lim_{s\to 0} sE(s)=\lim_{s\to 0} s\frac{R(s)}{1+G_O(s)}$$

Tipovi sustava

Sustavi se mogu svrstati prema svojoj mogućnosti praćenja određene pobude. Tako će sustav tipa 0 moći pratiti pobudu u obliku polinoma nultog stupnja, kao što je odskočna funkcija. On je prati sa nekakvim konačnim regulacijskim odstupanjem različitim od nule. Sukladno tome, sustav tipa 1 može pratiti sa nekom konačnom pogreškom polinom prvog stupnja, poput nagibne funkcije, a sustav tipa 2 može pratiti sa nekom konačnom pogreškom parabolnu funkciju, koja predstavlja polinom drugog stupnja.
Na slučaju zatvorenog kruga sa jediničnom povratnom vezom, može se pokazati svrstavanje sustava po tipovima, prema mogućnosti praćenja standardnih pobuda.



- Prijenosna funkcija $G_o(s)$ može se općenito izraziti kao:

$$G(s)=\frac{K(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{s^k\,(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)}$$

k predstavlja tip sustava, odnosno k predstavlja broj čistih integratora u sustavu.
Red sustav ne treba miješati sa tipom, jer je red prijenosne funkcije iz (453.1) $n+k$.
Ponašanje sustava:
Tip 0 ($k = 0$) – konstantna pobuda daje konstantnu vrijednost izlazne veličine. Dakle, tip 0 moći će pratiti odskočnu funkciju sa određenom pogreškom.
Tip 1 ($k = 1$) – konstantna pobuda daje konstantnu promjenu izlazne veličine.
Tip 2 ($k = 2$) – konstantna pobuda daje konstantnu drugu derivaciju izlazne veličine.

Primjer sustava različitog tipa mogu biti razni motori, koji ovisno o realizaciji povratne veze, postaju različiti po tipu.

Mogućnost praćenja standardnih pobuda

Uvraštavanjem $G_o(s)$ za različite tipove sustava, te uvrštavanjem Laplaceovih transformacija različitih pobuda, dobija se mogućnost praćenja koja se može sažeti prema donjoj tabeli.

(Napominje se da navedeno vrijedi za jediničnu povratnu vezu)

Tip sustava	Odskočna fkc.	Nagiba fkc.	Parabolna fkc.
0	$e_0 = K / (1+ K_P)$	$e_0 = \infty$	$e_0 = \infty$
1	$e_0 = 0$	$e_0 = K / K_V$	$e_0 = \infty$
2	$e_0 = 0$	$e_0 = 0$	$e_0 = K / K_A$

Gdje je K amplituda pobude, a koeficijenti pogreške položaja K_P, brzine K_V i ubrzanja K_A su slijedeći:

$$K_P = \lim_{s\to 0} G_o(s) \qquad K_V = \lim_{s\to 0} s\,G_o(s) \qquad K_A = \lim_{s\to 0} s^2\,G_o(s)$$

Koeficijenti su nazvani prema veličinama u mehanici, mada problemi praćenja nisu ograničeni samo na te veličine, već vrijede i za sve druge.
Tabela ukazuje na neka načelna pravila glede mogućnosti praćenja:

- Broj integratora u sustavu povećava točnost.
- Veće pojačanje sustava smanjuje trajno regulacijsko odstupanje, obzirom da se svi koeficijenti pogreške nalaze u nazivniku.
- Tip 0 sustava može biti pogodan za neke primjene u čvrstoj regulaciji, gdje nazivna veličina eventualno može poprimiti nekoliko stalnih vrijednosti.
- Za precizno slijeđenje putanja, tip sustava trebao bi biti veći od 1.

ANALIZA SUSTAVA U FREKVENCIJSKOM PODRUČJU

Analiza u frekvencijskom području nudi drugačiji pogled na istu stvar. Metode u frekvencijskom području razlikuju se od onih u vremenskom.

Dakle, frekvencijsko područje nadopunjuje mogućnosti analize i sinteze sustava upravljanja, a ima svoje prednosti i nedostatke.

Prednosti frekvencijskog područja su razmjerno jednostavno dobivanje modela na osnovi eksperimentalnih podataka odziva cijelog sustava ili nekog njegovog dijela. Grafički prikaz frekvencijskog odziva omogućava djelotvornu sintezu regulacije upravo zbog svojstva transformacije funkcije. Naime, kao i kod srodne prijenosne funkcije, operacije derivacije i integracije zamjenjuju se algebarskim operacijama. Također, utjecaj šuma u podacima ili neki drugi nepoznati utjecaj u modelu na određenim frekvencijama lako se dade izolirati odgovarajućim filterima.

Nedostatak analize u frekvencijskom području jest složenost teorije koja stoji u njenoj pozadini. Predočenje dinamičkih pojava u frekvencijskom području može biti teže nego u vremenskom.

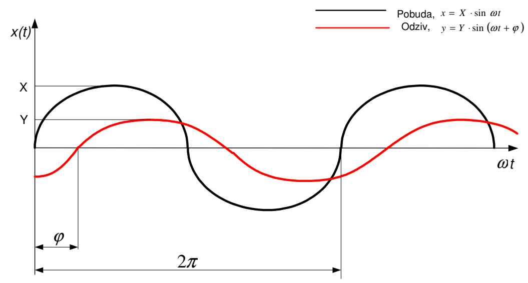
Neke pojave, poput vibracija, šumova, ili sličnih periodičkih signala lakše će se predočiti u frekvencijskom području.

Smisao analize u frekvencijskom području

Ako se na ulazu linearnog vremenski invarijantnog sustava narine pobuda u obliku sinusne funkcije određene frekvencije, nakon smirivanja prijelaznih pojava kao odziv dobiva se sinusoida iste frekvencije ali različite amplitude i uz određeni fazni pomak. Upravo te promjene amplitude i faznog pomaka na različitim frekvencijama govore o analiziranom dinamičkom sustavu .

Dobivanje frekvencijskih karakteristika

Ako se na ulazu linearnog vremenski invarijantnog sustava narine pobuda u obliku sinusne funkcije $x = X \sin\omega t$, na izlazu se, nakon nestanka prijelaznih pojava, dobiva odziv koji je također sinusoida, ali različite amplitude i faznog pomaka $y = Y \sin(\omega t + \varphi)$. Važno je uočiti da je frekvencija titranja (ili kružna frekvencija) sinusoide odziva jednaka frekvenciji titranja sinusoide pobude. Upravo je smisao frekvencijske analize ispitivanje promjena amplitude i faznog pomaka (faze) kod sustava u stacionarnom stanju, za narinute pobude različitih frekvencija.



Stoga se frekvencijski odziv može dobiti rješenjem slijedeće diferencijalne jednadžbe:

$$a_n \frac{d^n}{dt^n}\left[Y \sin(\omega t + \varphi)\right] + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\left[Y \sin(\omega t + \varphi)\right] + \ldots + a_0 Y \sin(\omega t + \varphi) = b_0 X \sin \omega t$$

Rješenje treba dati amplitudu Y i fazni pomak φ na različitim frekvencijama. Radi lakšeg rješenja trigonometrijski oblik harmoničkih funkcija zamjenjuje se eksponencijalnim pomoću Eulerove formule, pa se rješenje dobiva u obliku sinusne prijenosne funkcije.

Napominje se da se definicije i izrazi ovdje u pravilu odnose na kružnu frekvenciju ω [rad/s ili 1/s], makar se često koristi naziv samo *frekvencija*.
S frekvencijom f [1/s = Hz] veza je slijedeća: $\omega = 2\pi f$.

Sinusna prijenosna funkcija

Frekvencijski odziv svodi se na rješavanje prethodne diferencijalne jednadžbe. Radi pojednostavljenja trigonometrijski oblik harmoničkih funkcija mijenja se eksponencijalnim pomoću Eulerove formule:

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$$

Odatle slijedi:

$$a_n \frac{d^n}{dt^n}\left[Y e^{j\omega t} e^{j\varphi}\right] + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\left[Y e^{j\omega t} e^{j\varphi}\right] + \cdots + a_0 \left[Y e^{j\omega t} e^{j\varphi}\right] = b_0 X e^{j\omega t}$$

Odnosno:

$$\left[a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + .. + a_1 (j\omega) + a_0\right] Y e^{j\omega t} e^{j\varphi} = b_0 X e^{j\omega t}$$

Sinusna prijenosna funkcija predstavlja rješenje gornjih diferencijalnih jednadžbi u frekvencijskom području, uz sinusnu pobudu i u stacionarnim uvjetima:

$$G(j\omega) = \frac{Y e^{j\omega t} e^{j\varphi}}{X e^{j\omega t}} = \frac{b_0}{a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + .. + a_1 (j\omega) + a_0}$$

Sinusna prijenosna funkcija još se može izraziti na slijedeći način:

$$G(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{|Y|}{|X|} e^{j\varphi}$$

Amplituda, odnosno apsolutna vrijednost omjera amplituda, jest argument sinusne prijenosne funkcije:

$$|G(j\omega)| = \frac{|Y|}{|X|} = \sqrt{\left|\sum \mathrm{Re}[G(j\omega)]\right|^2 + \left|\sum \mathrm{Im}[G(j\omega)]\right|^2}$$

Fazni pomak ili faza, jest modul sinusne prijenosne funkcije:

$$\varphi = \angle G(j\omega) = \arctan \frac{\sum \mathrm{Im}[G(j\omega)]}{\sum \mathrm{Re}[G(j\omega)]}$$

Amplituda i faza funkcije su jedino kružne frekvencije ω kao nezavisne varijable.
<u>Sinusna prijenosna funkcija</u> predstavlja <u>Fourierovu transformaciju</u> prijelazne funkcije. Prijelazna funkcija u vremenskom području predstavlja odziv sustava na pobudu u obliku impulsne funkcije. Ili obrnuto, ona je inverzna Fourierova transformacija sinusne prijenosne funkcije sustava.

Fourierova transformacija

Periodički signal može se predstaviti sumom kosinusa pomoću Forierovog reda. Proširenje navedene pretvorbe na aperiodičke signale omogućava Fourierov integral, proširujući vremenski period na beskonačno velik. Fourierova transformacija sastoji se od Fourierovog integrala, a funkciju iz vremenskog područja pretvara u frekvencijsko područje, dok inverzna Fourierova transformacija radi obrnuto:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \qquad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Fourierova transformacija nekog signala čini spektralnu gustoću tog signala. Drugim riječima, Fourierova transformacija izražava signal kao sumu sinusoida, a spektralna gustoća pokazuje razmjerni doprinos pojedine sinusoide ukupnoj sumi. Na frekvenciji gdje je spektralna gustoća velika, pripadajuća sinusoida doprinosi značajno valnom obliku signala i obrnuto.

Fourierovoj transformaciji srodna je Laplaceova transformacija.

Obje transformiraju vremensku funkciju u frekvencijsku i obrnuto.

Obje omogućavaju da se matematičke operacije derivacije i integracije pretvore u algebarske operacije množenja i dijeljenja.

Ono što ih razlikuje jest koje funkcije se mogu transformirati, obzirom na drugačije područje konvergencije (mogu se transformirati samo one funkcije čiji nepravi integrali konvergiraju, odnosno teže konačnoj vrijednosti).

Obzirom da je kompleksna frekvencija kod Laplaceove transformacije $s = \sigma + j\omega$, a kod Fourierove transformacije pošto je $\sigma = 0$, nema *prigušenja* , više funkcija zanimljivih u tehničkoj praksi može se transformirati Lapaceovom transformacijom.

Osim toga, područje integracije kod Fourierove transformacije je od $-\infty$ do $+\infty$, dok se Laplaceova transformacija počinje s nulom (postoji i dvostrana Laplaceova transformacija, koja ide od $-\infty$, ali ona se rijetko primjenjuje u regulaciji).

Dakle, Fourierova transformacija primjenjuje se na potpuno opuštene sustava, gdje su sve prijelazne pojave nestale.

Sinusna prijenosna funkcija $G(j\omega)$ može se smatrati posebnim slučajem prijenosne funkcije $G(s)$

Grafički prikaz frekvencijskog odziva

- U dobra svojstva analize u sinteze u frekvencijskom području svakako spadaju i mogućnosti grafičkog prikaza frekvencijskog odziva, odnosno pripadajućih frekvencijskih karakteristika sustava. Iako funkcija koja prikazuje frekvencijski odziv može biti dosta složena analitička funkcija, njen grafički prikaz obično je jednostavan i jasan.
- Grafički prikaz frekvencijskog odziva ima zadatak pokazati promjenu amplitude i faznog pomaka u ovisnosti o kružnoj frekvenciji kao nezavisnoj varijabli.
- U uporabi su tri grafička prikaza:
- – **Bodeovi dijagrami** – sastoje se od amplitudno-frekvencijskog (log-log mjerilo) i fazno-frekvencijskog (lin-log) dijagrama koji se crtaju jedan ispod drugog.
- – **Nyquistov dijagram** – polarni dijagram u Gaussovoj ravnini.
- – Nicholsov dijagram - amplitudno-fazni (log-lin) dijagram

Bodeovi dijagrami

Bodeovi dijagrami sastoje se od amplitudno-frekvencijskog i fazno-frekvencijskog dijagrama koji se crtaju jedan ispod drugog.

Tradicionalni naziv Bodeovih dijagrama su frekvencijske karakteristike, pa se dva dijagrama i nazivaju amplitudno-frekvencijska karakteristika (AFK), te fazno-frekvencijska karakteristika (FFK).

Na ordinatnoj osi gornjeg dijagrama (AFK) prikazuje se amplituda u logaritamskom mjerilu. Kao jedinica amplitude na ordinati koristi se decibel [dB], koji predstavlja logaritamski omjer amplituda:

$$|G(j\omega)|[dB] = 20\log|G(j\omega)|$$

Na ordinatnoj osi donjeg dijagrama (FFK) prikazuje se fazni pomak, ili kraće faza, u linearnom mjerilu. Na apscisnoj osi oba dijagrama kružna frekvencija je prikazana u logaritamskom mjerilu. Za omjer frekvencija 10:1 koristiti će se izraz dekada.

Logaritamskim mjerilom apscise postiže se preglednost na širokom području frekvencija. Logaritamsko mjerilo ordinate kod AFK dijagrama dobija se mogućnost da se pojedini elementi u regulacijskom krugu, koji su spojeni serijski, naprosto grafički zbrajaju.

Bodeovi dijagrami mogu se nacrtati izračunavanjem amplitude i faze uvrštavanjem različitih kružnih frekvencija ω u sinusnu prijenosnu funkciju. Na taj način dobiva se precizna frekvencijska karakteristika.

No upravo je jednostavno i brzo skiciranje frekvencijskih karakteristika nekog sustava velika pogodnost Bodeovih dijagrama. U tu svrhu koriste se aproksimativne frekvencijske karakteristike, koje su dane asimptotama na području niskih i visokih frekvencija. Na niskim frekvencijam $\omega \to 0$, dok na visokim frekvencijama $\omega \to \infty$.

Granica koja dijeli područje nisko i visoko-frekvencijske asimptote zove se lomna frekvencija. Lomna frekvencija definirana je polovima ili nulama sustava.

Bodeovi dijagrami na primjeru P_1 člana

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K_P}{\tau s + 1} \longrightarrow G(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{K_P}{\tau j\omega + 1}$$

Nisko-frekvencijska (NF) asimptota crta se za područje frekvencija gdje $\omega \to 0$. Uvrštenjem $\omega = 0$ u izraze za amplitudu i fazu sinusne prijenosne funkcije dobiva se slijedeće:

$$|G(j\omega)|_{NF} = 20\log K_P \Longrightarrow \varphi_{NF} = 0$$

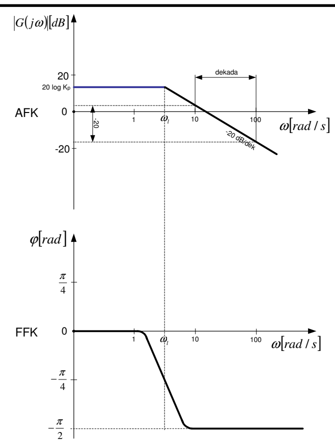
Visoko-frekvencijska (VF) asipmptota crta se za područje frekvencija gdje $\omega \to \infty$. Uvrštavanjem $\omega = \infty$ u izraze za amplitudu dobiva se:

$$|G(j\omega)|_{VF} = \frac{K_P}{\sqrt{1+\tau^2\omega^2}} = 20\log K_P - 20\log\tau\omega \Longrightarrow \varphi_{VF} = -\frac{\pi}{2}$$

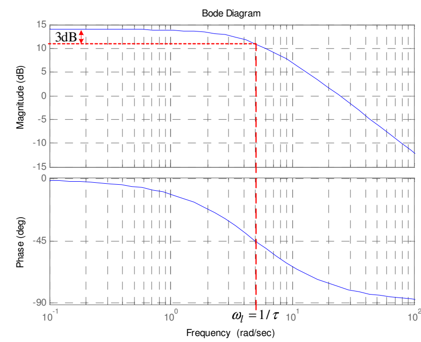
Nagib VF asimptote izračunava se na temelju razlike dvije frekvencije koje su udaljene za dekadu (ω_1 i $\omega_2 = 10 \cdot \omega_1$), pa u ovom slučaju nagib iznosi –20 dB/dek.

Sjecište NF i VF asimptota je lomna frekvencija ω_l . Dobiva se izjednačavanjem $|G(j\omega)|_{NF}$ i $|G(j\omega)|_{VF}$ iz izraza za amplitudu i fazu sinusne prijenosne funkcije, što u slučaju P_1 člana iznosi:

$\omega_l = 1 / \tau$

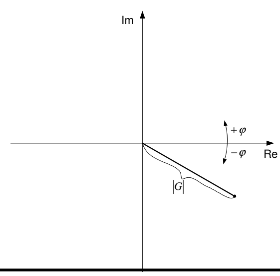


Egzaktan izgled dijagrama ponešto se razlikuje.
Slika Bodeovih dijagrama P_1 člana dobivena računarskim programom Matlab ($K_P = 5$ i $\tau = 0.2$) dana je na slici:

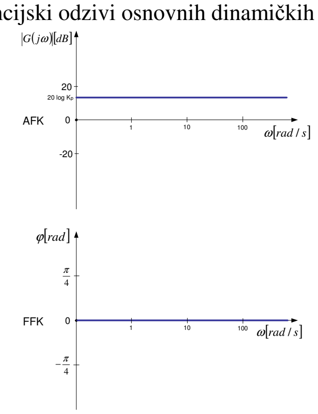


Nyquistov dijagram

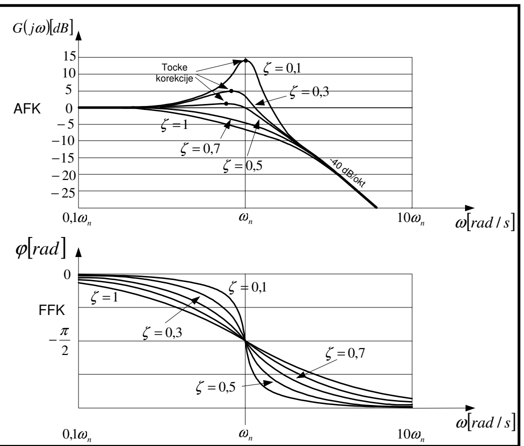
Frekvencijske karakteristike mogu se prikazati i u Nyquistovom dijagramu, koji je polarni dijagram u Gaussovoj ravnini. U Nyquistovom dijagramu polarna krivulja opisuje frekvencijske karakteristike. Udaljenost polarne krivulje od ishodišta Gaussove ravnine predstavlja amplitudu sinusne prijenosne funkcije, dok je njen fazni pomak predstavljen otklonom od pozitivne realne osi:



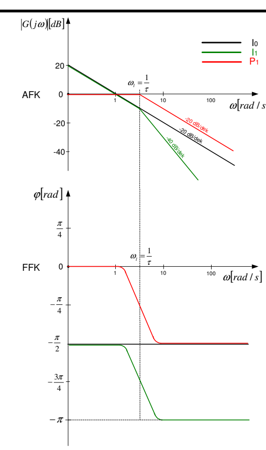
Frekvencijski odzivi osnovnih dinamičkih članova: P0



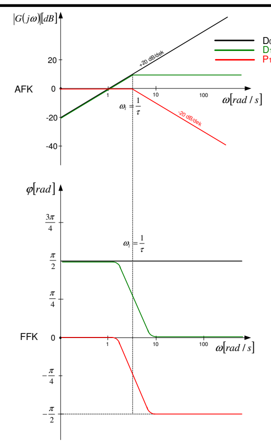
P2



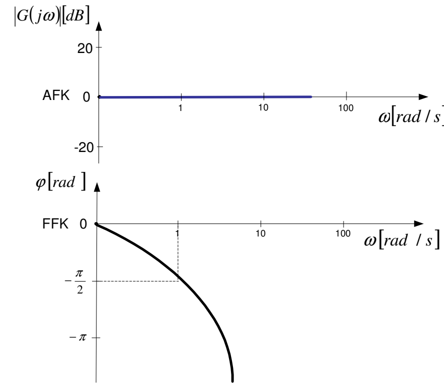
Integralni član

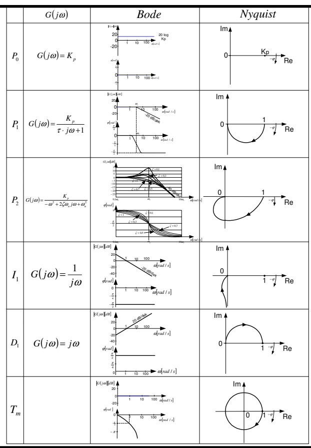


Derivacijski član



Član s mrtvim vremenom

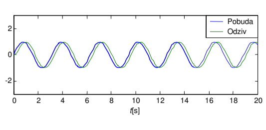


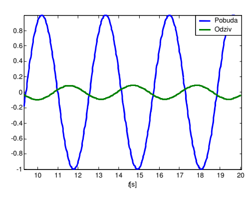


Značajke sustava u frekvencijskom području

Pojasna širina

- Pojasna širina (*bandwidth*) sustava predstavlja maksimalnu frekvenciju na kojoj će izlazna sinusoida sustava slijediti ulaznu bez značajnijeg slabljenja.
- Pojasna širina ovdje se označava sa ω_b, a najčešće se definira kao frekvencija kod koje se amplituda zatvorenog kruga smanji faktorom 0.707 od svoje vrijednosti kod frekvencije nula. Ta vrijednost odgovara 3 dB (y dB = 20log x), odnosno zbog smanjenja amplitude – 3 dB. Definiranje vrijednosti od –3 dB potiče iz signalne tehnike, i izvodi se iz smanjenja snage signala izlaza na ½ (*half-power bandwidth*).

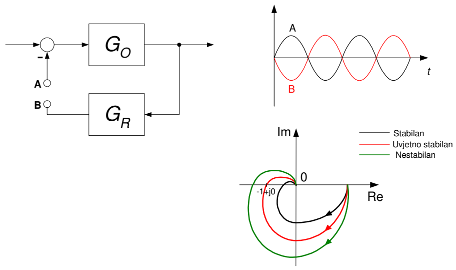




Stabilnost u frekvencijskom području

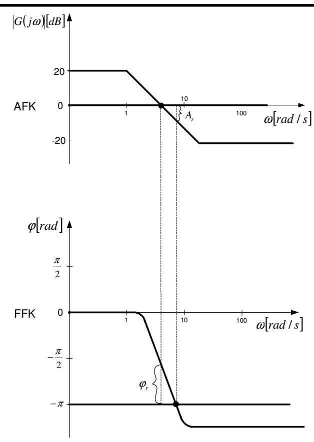
- Na stabilnost sustava ne utječe područje u kojem ga analiziramo. No u frekvencijskom području različite su metode ispitivanja stabilnosti od onih u vremenskom području. Ovdje se koristi Nyquistov kriterij stabilnosti, za koji je značajno da stabilnost zatvorenog kruga utvrđuje na temelju analize stabilnosti otvorenog kruga.
- Načelno polazište Nyquistovog kriterija stabilnosti je slijedeće – ako se zatvoreni krug dan na slici 542-1 prekine, i ako se u točki A narine sinusna pobuda, zatvoreni krug će biti nestabilan ako se u točki B prekinutog (otvorenog) kruga pojavi odziv čija amplituda je jednaka ili veća od amplitude pobude (dakle $|G(j\omega)| \geq 1$), te čiji fazni pomak je $-\pi$. Pobuda i odziv prema prethodnom opisu dani su također na slici 542-1. Naime, pretpostavka je da bi takav signal u zatvorenom krugu sa negativnom povratnom vezom bio dodatno pomaknut u fazi za $-\pi$ uslijed negativnog predznaka povratne veze, te da bi se pojačavao (pojačanje amplitude veće od 1), što ukazuje na nestabilnost.

- Pojačanje amplitude $|G(j\omega)|=1$, te fazni pomak od $\varphi = -\pi$ ukazuju na točku (-1 + j0) u Nyquistovom dijagramu. To znači da će sustavi čije polarne krivulje tu kritičnu točku u Nyquistovom dijagramu zaobilaze sa vanjske, lijeve strane u smjeru okretanja kazaljke na satu biti nestabilni. To je pokazano na slici 542-2 na primjeru proporcionalnog člana 3. reda (P_3).



Amplitudna i fazna rezerva

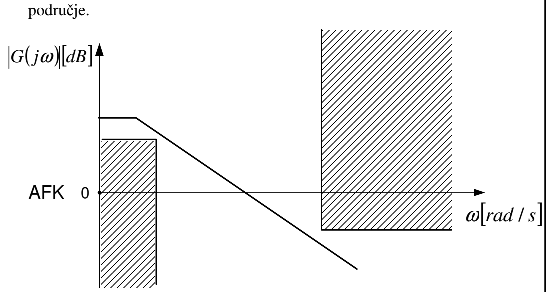
- Jedna od prednosti Nyquistovog kriterija stabilnosti (dan u prethodnom poglavlju 542) je što on ukazuje i na relativnu stabilnost sustava. Naime, što je polarna krivulja bliža kritičnoj točki, sustav će više oscilirati. Upravo tu mjeru stabilnosti zatvorenog sustava daju podaci o amplitudnoj i faznoj rezervi, koji se koriste za sintezu regulacije.
- Amplitudna rezerva je razlika amplitude sustava potrebna da bi sustav postao nestabilan, dok je fazna rezerva razlika faznog pomaka potrebna da bi sustav postao nestabilan.



Trajno regulacijsko odstupanje i osjetljivost

- Trajno regulacijsko odstupanje također se može odrediti iz frekvencijskih karakteristika. Ukazano je da broj integratora u sustavu određuje tip sustava. U Bodeovim dijagramima tome odgovara nagib amplitudno-fazne karakteristike na najnižim frekvencijama. Nagib 0 dB/dek odgovara tipu sustava 0, nagib –20 dB/dek odgovara tipu sustava 1, dok nagib od –40 dB/dek odgovara tipu sustava 2.
- Koeficijenti pogreške položaja K_P, brzine K_V i ubrzanja K_A mogu se odrediti iz AFK kao pojačanje amplitude $|G(j\omega)|$ na frekvenciji ω=1 (npr. $|G(j\omega)|$ pri ω=1 je 20 dB i ima nagib –20 dB/dek, radi se dakle o K_V iznosa 10). Što je veće pojačanje na niskim frekvencijama sustav je točniji.
- Osjetljivost sustava na mjerne šumove ili na nemodeliranu dinamiku na visokim frekvencijama može se smanjiti smanjivanjem pojačanja amplitude sustava na visokim frekvencijama. Na taj način se slabe signali visokih frekvencija, odnosno držanjem tog pojačanja ispod 1 (odnosno 0 dB), osigurava se stabilnost.

Zahtjevi točnosti i osjetljivosti mogu se prikazati u AFK Bodeovog dijagrama, što je dano na slici. Radi zahtjeva točnosti i neosjetljivosti na mjerne šumove, potrebno je da krivulja izbjegne obilježeno područje.



PID regulator u frekvencijskom području

Prijenosna funkcija idealnog PID regulatora je slijedeća:

$$G_{R\_PID} = K_P\left(1 + \frac{1}{T_i\, s} + T_d\, s\right)$$

Zamjenom operatora s sa jω, te uvrštavanjem u izraze za amplitudu i fazni pomak iz (512.6) i (512.7), te sređivanjem, dobiva se amplituda i faza PID regulatora:

$$|G(j\omega)| = K_P\sqrt{\left(\omega T_d - \frac{1}{\omega T_i}\right)^2 + 1} \qquad \varphi = \arctan\left(\omega T_d - \frac{1}{\omega T_i}\right)$$

Na slici je prikazan primjer frekvencijske karakteristike jednog PID regulatora.

Najmanje pojačanje jednako je K_P, i nalazi se na lomnoj frekvenciji .

Pridavajući različite vrijednosti T_d i T_i može se podesiti frekvencija i širina *usjeka* (*notch*, kao *notch filter*) frekvencijske karakteristike. Smanjenje T_i i povećanje T_d sužava usjek, i obrnuto.

Često se uzima $T_i \approx 4T_d$. Povećanje ili smanjenje K_P pomiče krivulju AFK gore ili dolje, bez utjecaja na širinu usjeka.