# OSNOVE AUTOMATIZACIJE

Prof.dr.sc. Joško Petrić
Mihael Cipek, dipl.inž.

## Uvodna riječ

Proizvodno inženjerstvo, 4. semestar

Predavanja – ponedjeljak 11-14 h; (dvorana II)
Vježbe – utorak 10-12 h; (dvorana I)

Cilj kolegija

## Uvod – ciljevi kolegija

- razumijevanje zašto je automatizacija, odnosno automatska regulacija korisna inženjeru strojarstva
- ključne ideje, pojmovi i koncepti
- upoznavanje temeljne teorijske podloge (matematičke)
- mogućnost rješavanja jednostavnih problema
- upoznavanje s osnovnim računarskim alatima (Matlab/Simulink)

## Pohađanje nastave i ispiti

- Za potpis: 70 % predavanja ili vježbi
- Kolokviji: 2 kolokvija – namijenjeno onima koji redovito pohađaju predavanja i vježbe;
  - Prolaz: ≥ 40% od oba kolokvija, prolaz zamjenjuje pismeni + usmeni
  - nije predviđen rezervni rok za kolokvije
  - 1. kolokvij: uvjet izlaska na 1. kolokvij je pohađanje barem 70 % prethodne nastave.
  - 2. kolokvij: uvjet izlaska na 2. kolokvij je pohađanje barem 70 % prethodne nastave i rješenje ≥ 25 % 1. kolokvija.
- Redoviti ispit – pismeni i usmeni, prolaz pismenog ≥ 50 %, pismeni vrijedi za dva usmena; (≥ 45 % pismeni vrijedi jedan usmeni)

## Sadržaj kolegija

Uvod – što je automatizacija?
- Osnovne definicije i pojmovi
- Primjeri iz primjene
- Povijest

Matematički prikaz dinamike tehničkih sustava
- Analitički modeli (mehanički, električni i elektromehanički sustav)
- Prijenosna funkcija
- Metoda prostora stanja
- Linearizacija, eksperimentalna identifikacija

## Analiza sustava u vremenskom području

- Standardne pobudne funkcije
- Rješenje dif. jednadžbe
- Značajke dinamičkog sustava
- Osnovni dinamički članovi
- Zahtjevi kod vremenskog odziva

- Osnovna načela povratne veze
  - Djelovanje povratne veze
  - Regulatori
  - Stabilnost i točnost

- Analiza sustava u frekvencijskom području
  - Grafički prikaz
  - Frekvencijski odziv osnovnih članova
  - Značajke sustava u frekvencijskom području
- Elementi regulacijskog kruga
  - Mjerni, izvršni i upravljački članovi

## Literatura


- T.Šurina "Automatska regulacija", Šk. knjiga Zagreb 1981.
- http://www.engin.umich.edu/group/ctm/

- Materijali s predavanja, obavijesti na: www.fsb.hr/~mcipek

## UVOD

- Što je automatizacija?
- **Automatizacija** – teorija i tehnika koja proces čini automatskim, samogibajućim ili samoupravljivim
- Automatizacija je proces kojim se nešto pravi automatskim, a također je stanje koje je rezultat tog istog procesa.
- Automatizacija je nastavak procesa mehanizacije, zato jer se automatskim može učiniti samo onaj proces koji je u dovoljnoj mjeri mehaniziran.
- Automatizacija u širem smislu obuhvaća sve mjere i procese kojima se smanjuje udio ljudskog rada, opažanja i odlučivanja.

- **Automatska regulacija** po definiciji je automatsko održavanje željenog stanja nekog procesa ili mijenjanje tog stanja po određenom zakonu, bez obzira na djelovanje vanjskih i unutarnjih poremećaja.
- To se postiže pomoću **povratne veze**, koja omogućava usporedbu izmjerene vrijednosti neke veličine reguliranog procesa sa njenom željenom vrijednosti (referencijom), te se na temelju razlike tih dviju veličina odlučuje kako proces usmjeriti.

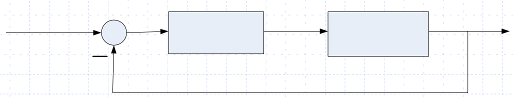
"Srce svakog sustava automatske regulacije jest ideja povratne veze" (*A.Isidori*)

Ideja p.v.? Usporediti aktuelni rezultat sa željenim i djelovati na temelju njihove razlike!

p.v. je **jednostavni princip** koji pokriva sve principe regulacije u prirodi (npr. rast živih organizama, tjelesna temperatura, tlak, zatim ravnoteža, gibanje, odziv na stres, ....)

## Regulacijska petlja ili zatvoreni krug

- Proces se usmjerava upravljanjem tokom energije ili tvari. Skica navedenoga „zatvorenog kruga" ili **regulacijske petlje** dana je na slici:



- Pridjev **automatsko**, tj. **automatika**?

  Razni uređaji su zaduženi za mjerenje, uspoređivanje, odlučivanje i izvršenje upravljačke odluke.

  U lancu regulacije može biti i čovjek koji će nešto od toga (ili sve to) raditi, no takva regulacija nije automatska.

- Varijable podložne automatskom vođenju?
  - U mehanici?
  - Čovjek?
  - Državno gospodarstvo?

- **Kibernetika** je znanost o općim zakonitostima procesa vođenja, reguliranja, dobivanja, pohranjivanja, pretvorbe i prijenosa informacija u sustavima, neovisno o njihovoj fizikalnoj prirodi.

- Automatska regulacija jedan je od brojnih ogranaka kibernetike, no sustav s povratnom vezom smatra se najvažnijim oblikom osnovnog sustava za kibernetiku i za automatizaciju.

- Potrebno je naglasiti da sustav s povratnom vezom nije nužno tehnički, nego je svojstven i biološkim, ekonomskim, socijalnim, političkim, psihološkim, i inim sustavima. Dakle regulacija nije samo postupak u tehnici, nego prije svega je prirodni zakon.

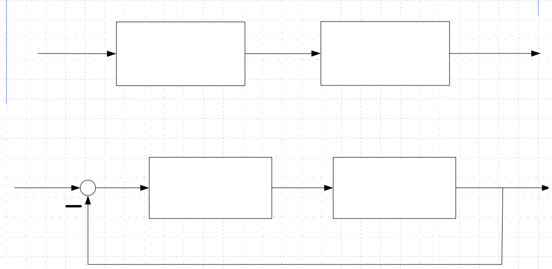
- Povratna veza (feedback) temeljni je pojam automatske regulacije.

- Varijabla koju se želi regulirati mjeri se, i šalje se nazad u uređaj namijenjen vođenju. Pri tom se uspoređuje željena i stvarna vrijednost, na temelju njihove razlike djeluje neki regulacijski zakon, koji šalje naredbu izvršnom uređaju da bi se smanjila razlika između željene i stvarne vrijednosti. To zovemo regulacijom.

- Napomena: regulaciju dijelimo na čvrstu i slijednu.

## Pojmovi upravljanja i regulacije

Upravljanje vs. regulacija



- **Upravljanje** je postupak pri kojem jedna ili više ulaznih veličina utječu na jednu ili više izlaznih veličina nekog procesa prema zakonitostima svojstvenim upravljanom procesu. Pri tom se upravljanje odvija u „otvorenom krugu“.
- To znači da, za razliku od regulacije, kod upravljanja nema povratne veze koja će omogućiti usporedbu željene i stvarne vrijednosti, niti će se proces usmjeravati na temelju njihove razlike. Stoga nema mogućnosti popravljanja upravljačke odluke na temelju promatranja odvijanja procesa.

## Pojmovi upravljanja i regulacije

| **Upravljanje** | **Regulacija** |
|---|---|
| Otvoreni krug | Zatvoreni krug – povratna veza |
| planiranje | Reagiranje po događaju |
| Nije robusno na pogreške modela | Robusno na pogreške u nekom području |
| Nema rizika nestabilnosti (*kada su svi elementi stabilni*) | Rizik nestabilnosti |

- **Vođenje** procesa općenitiji je pojam koji obuhvaća <u>i upravljanje i regulaciju</u>
- U pravilu je vođenje povezano uz upravljanje i regulaciju složenijih sustava pomoću računala.
- U ovom kolegiju pojam vođenje se koristi kada je obuhvaćeno upravljanje i regulacija, ali i kada nije izričito određeno na koji se od ta dva postupka misli. Dakle, vođenje se može smatrati hrvatskim pojmom općenitog engleskog pojma *control*. (*<u>prof. Božićević</u>*)

Zašto je povratna veza negativna?

Veličine u krugu:

Izlaz = regulirana veličina

Željena vrijednost = referentna veličina, vodeća v. (slijedna), nazivna v. (čvrsta)

Regulacijska pogreška ili odstupanje

Postavna veličina

Poremećajna veličina

## Moderni sustav regulacije

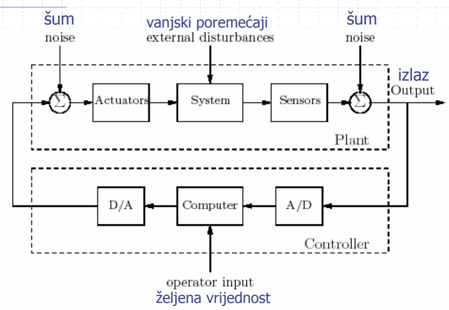
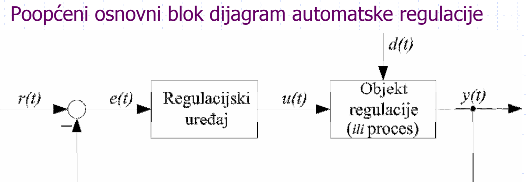


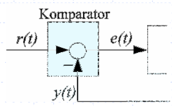
Figure 2.1. *Components of a modern control system.*

## Poopćeni osnovni blok dijagram automatske regulacije

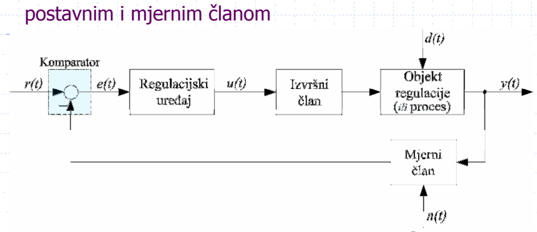



*r(t)* – referentna veličina, ili referencija (nazivna veličina - čvrsta regulacija; vodeća veličina - slijedna regulacija. Referentna veličina (*reference input*) je vanjski signal primjenjen na sustavu automatske regulacije na komparatoru. *y(t)* – regulirana veličina. Često se kaže samo *izlaz*. Regulirana veličina (*controlled variable* ili *controlled output,* ili najčešće samo *output*) predstavlja izlaznu veličinu reguliranog procesa.
*e(t)* – regulacijsko odstupanje, ili regulacijska pogreška. Regulacijsko odstupanje (*actuating signal,* ili *error signal*) je razlika između referentne i regulirane veličine, koja ulazi u regulacijski uređaj i potiče njegovo djelovanje.
*u(t)* – postavna veličina. Postavna veličina (*control signal* ili *manipulated variable*) je signal koji predstavlja izlaz iz regulacijskog uređaja, i ulaz u proces.
*d(t)* – poremećajna veličina. Poremećajna veličina (*disturbance*) je ulazni signal koji ima neželjeni utjecaj na reguliranu veličinu.

- Regulacijski uređaj (*controller*) – dio sustava automatske regulacije koji generira postavnu veličinu koja će djelovati na regulirani proces. Regulacijski uređaj ili regulator obično sadrži pojačalo, nekakvo vremensko djelovanje, te komparator. U širem smislu regulator uz to može obuhvatiti i generator referentne veličine, te razne elemente za obradbu signala (npr. filtere, analogno-digitalnu i digitalno-analognu konverziju, itd.).
- Objekt regulacije ili proces (*process, plant*) – obuhvaća sustav, podsustav ili proces čija veličina (ili veličine) je predmet regulacije.
- Negativna povratna veza i komparator (*comparator*) – osnovna funkcija povratne veze, usporedba željene i stvarne vrijednosti veličine koju se želi regulirati obavlja se komparatorom. Prirodno je stoga da povratna veza ima negativnu vrijednost.




Osnovni blok dijagram automatske regulacije s postavnim i mjernim članom




Izvršni član - sastoji se od postavnog pogona, (*npr. elektromotor*) i postavnog člana (*npr. ventil*) –

Mjerni član – sastoji se od mjernog osjetila i pretvarača

*n(t)* – mjerni šum

- Jednovarijabilni sustavi (SISO)
- Multivarijabilni sustavi (MIMO)

- Osnovni zahtjevi pri regulaciji su:
  - stabilnost
  - točnost
  - brzina (kvaliteta) odziva
  - (robusnost)

- **Sustav**: kombinacija komponenti koje djeluju zajedno da bi ostvarili funkciju koja se ne može ostvariti pojedinačnim djelovanjem
- **Signal** je fizikalna veličina koja se mijenja s vremenom.
- Analiza sustava bavi se odnosima među signalima koji mogu biti bilo kakve fizikalne veličine koje se mijenjaju s vremenom.
- **Proces** je općenito skup aktivnosti kojima se ulazni elementi transformiraju u izlazne elemente sa specifičnim svojstvima, a sama transformacija određena je parametrima i ograničenjima.
- Promatranje odnosa ulaza i izlaza, odnosno pobude i odziva, odnosno uzroka i posljedice (kauzalnost) bitna je tema ovog kolegija

Da bi vodili (ili regulirali) neki sustav, što je potrebno? (Osim uređaja s kojima ćemo se poslužiti)

Kako se formalizira znanje o nekom tehničkom sustavu (kako ga opisujemo?)

Ovaj kolegij bavi se upoznavanjem osnovnih elemenata automatskog vođenja, upoznavanjem sustava i načina njihovog opisa, te ciljevima i zahtjevima pri upravljanju sustava, te načinu postizavanja tih ciljeva i zahtjeva.

## Uvod – nastanak i povijest

- *Kybernetes*, grčka riječ za kormilara odnosno navigatora, povezana s Latinskim gubernatorom (*governor*). U Platonovoj Republici (3-4. st. B.C.) upravljanje (vođenje) brodom uspoređuje se s upravljanjem (vođenjem) društvom.
- A.M.Ampere (fr. fizičar iz 18-19. st.) – *nauka o upravljanju (vođenju) trebala bi se zvati kibernetika* – iz "Essai sur la philosophie des science".
- N. Wiener – "Cybernetics or control and communication in the animal and the machine" MIT Press 1948
- Etimologija: do riječi kibernetike došlo se proučavajući etimologiju engleske riječi *governor* (regulator, upravitelj), odnosno latinske *gubernare*, odnosno originalne grčke *κυβερνάν* (kormilar)
- U tehnici (na zapadu pogotovo) pojam kibernetike zamjenjuje se upravljanjem, regulacijom, *vođenjem* (*control, feedback control, feedforward control, Regelung, Steuerung*)

Dakle, automatsko upravljanje nije tehnički izum već prirodni zakon.

Automatsko upravljanje s povratnom vezom jedno je od osnovnih načela na kojima počiva kibernetika.

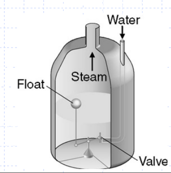
## Povijest automatizacije (kratki osvrt)

- Rana faza
- Počeci (do II svj. rata) – parni strojevi, mlinovi, avioni, brodovi, procesna industrija, telekomunikacije
- II svjetski rat – naglo širenje u industriju, obrazovanje , organizacije (okupljanje ljudi iz raznih područja, te iz teorije i prakse! – početak sustavnog mišljenja)
- 60-te – zahtjevne primjene (svemirska istraživanja, i sve ostalo), počinje era digitalnog računala
- Nova faza – ugrađeno (*embedded*) vođenje, mreže, biologija, fizika – autonomija i distribucija, eksplozija primjena

## Povijest automatizacije (kratki osvrt)

- Ktesibios, Grk iz Aleksandrije, 250. g.p.n.e., smatra se ocem automatike (vodeni sat s regulatorom protoka (uz to i vodene orgulje, katapult, pumpa, itd.)
- Philon, Bizantinac, nešto mlađi od Ktesibiosa (uljna lampa, također regulator protoka)
- Heron, Grk, I st p.n.e. (knjiga "Pneumatica" s opisom različitih regulatora protoka)
- Mehanizam upravljanja nivoom tekućine s plovkom (senzor i aktuator)

Vodeni satovi (9.-12.st., Arapi, Kina,)



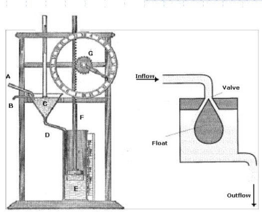




Figure 1.1: 250 BC water clock by Ctesibius of Alexandria, and his level controlled floating valve

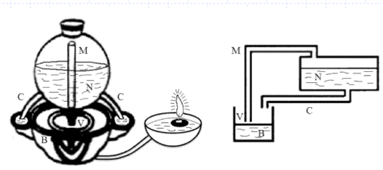



Figure 1.2: 200 BC Self re-filling oil lamp by Philon of Byzantium

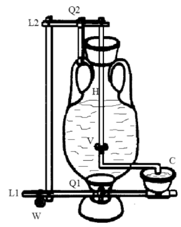
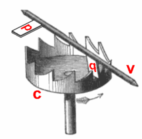


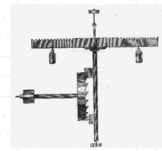

Figure 1.3: 1st century AD weight regulated liquid filling device by Heron of Alexandria, Egypt

## Povijest automatizacije (kratki osvrt)

- Satni mehanizam

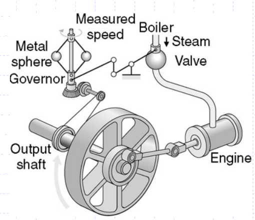
Prijašnja „kontinuiranost" u mjerenju vremena (pijesak, voda, problem kontinuiteta) promijenjena je razbijajući vrijeme mehanizmom ("verge-and-foilot mechanism") u intervale, koji se broje. Kruna je pogonjena teretom, a svaki udarac ležaja u zubac krune trenutno uspori brzinu rotacije, i njihovo međusobno djelovanje predstavlja povratnu vezu. Inače, svaka zasebno komponenta bi se vrtila neprestano, a povratnom vezom dobiva se konačna, trajna brzina krune, kojom mjerimo proticanje vremena.



## Povijest automatizacije (kratki osvrt)

- Regulacija temperature (inkubator) sa staklenom cijevi ispunjenom alkoholom i živom kojom se regulira plamen (Drebbel, 1620. g.)
- Centrifugalni regulator brzine parnog stroja (James Watt 1788. g.)



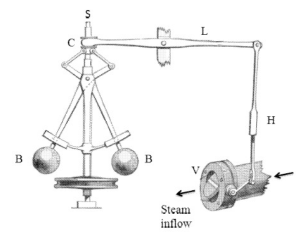




Figure 1.4: Flyball governor

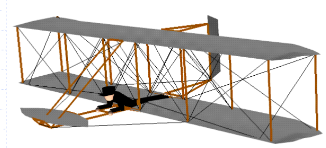
## Povijest automatizacije (kratki osvrt)

- 18. i 19. stoljeće
- Razvoj teorije aut.reg., Maxwellova rasprava o regulatorima iz 1868. g.
- Nastavak, Routh, Hourwitz, Lyapunov (1892.), ..

## Povijest automatizacije (kratki osvrt)

- Zrakoplovstvo

(Braća Wright, Kitty Hawk, NC, 17.12.1903.)



- Žiroskopi, Sperry je konstruirao automatski pilot za zrakoplove na bazi signala iz žiroskopa (el.signal – stlačeni zrak – krilca) 1909.g.

**W. Wright at Western Society of Engineers 1901:**

"Men already know how to construct wings or airplanes, which when driven through the air at sufficient speed, will not only sustain the weight of the wings themselves, but also that of the engine, and of the engineer as well. Men also know how to build engines and screws of sufficient lightness and power to drive these planes at sustaining speed ... **Inability to balance and steer still confronts students of the flying problem.** ... When this one feature has been worked out, the age of flying will have arrived, for all other difficulties are of minor importance."

Wright was right!

## Povijest automatizacije (kratki osvrt)

- Telekomunikacije nakon I svj.rata. (Bellovi laboratoriji, SAD) – operacijsko pojačalo s povratnom vezom (H. Black 1927 g.)
- PID regulator, između dva rata
- Nakon II svj. rata, zrakoplovna i svemirska tehnika

## Povijest automatizacije (kratki osvrt)

- 50-godine "moderna" teorija aut. Upravljanja – multivarijabilni sustavi, koncept prostora stanja
- mikroprocesori (1969-70 g. Intel, 4004, 4 bitni) i mikrokontroleri
- industrijska elektronika (frekv. pretvarači)

- Današnje doba!

## Povijest automatizacije (kratki osvrt)

Osvrt na automobilske motore

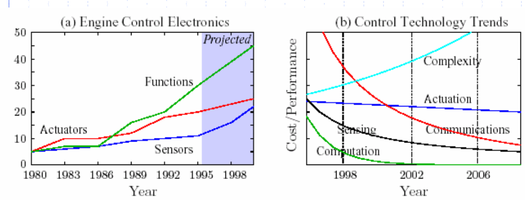



**Figure 2.2.** *Trends in control technology: (a) the number of sensors, actuators and control functions in engine controls [6] and (b) illustration of cost/performance trends for component technologies.*

## Budućnost automatizacije

"Everything will, in some sense, be smart; that is, every product, every service, and every bit of infrastructure will be attuned to the needs of the humans it serves and will adapt its behavior to those needs."

Sensing, actuation, and control
*USA National Academy of Engineering,*
*The Engineer of 2020*

**Flight International, Aug 5, 2010**

Control science tops list of USAF science and technology priorities
By Stephen Trimble

If the chief scientist of the US Air Force is correct, the key technology challenge for airpower over the next two decades is not directed energy, cruise missile defence or even satellite-killing weapons.
In a sweeping new 153-page report Technology Horizons, USAF chief scientist Werner Dahm instead identifies advances in "control science", an obscure niche of the software industry, as potentially the most important breakthrough for airpower between now and 2030.

## Primjene

Proizvodnja i distribucija energije
Komunikacije
Transport
Industrijski procesi
Pojedinačna proizvodnja
Mehatronika
Precizni instrumenti
Potrošačka elektronika
Ekonomija
Biologija
Medicina

## Primjeri

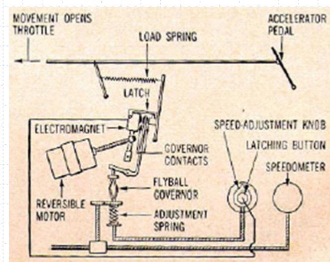
( www.fsb.hr/acg )

- Automobilski sustavi
  - Upravljanje radom motora (Powers, *Ford* – u 20 g. Automobili su 10 x čišći i 2 x učinkovitiji zahvaljujući ponajviše "*distributed microprocessor based control system*")
  - Pogoni (4x4, automatski mjenjači, *dual clutch* mjenjači, AD i TVD)
  - Tempomat, adaptivni tempomat
  - TCS, ESP
  - Pomoć držanja vozne trake
  - Vožnja u koloni
  - Poluaktivni i aktivni ovjesi

## Primjeri

- Tempomat ?
- Segway ?

## Tempomat (regulator brzine vozila)

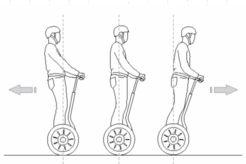


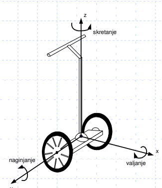

Chrysler cruise control, Chrysler Imperial 1958.

## Segway

Aktuatori - dva istosmjerna servomotora bez četkica koji su smješteni unutar kotača s prijenosom preko reduktora.
Baterije – Li-Ion
Senzori – 5 žiroskopa (mjere promjenu orijentacije koristeći Coriolisov efekt, izvedeni su kao MEMS-ovi (*micro electro-mechanical system*) sa vibrirajućim prstenom (*vibrating ring rate-gyroscope*))

Upravljanje – više umreženih mikroprocesora






## Što omogućava povratna veza (neka zadivljujuća svojstva):

- Sustav može biti neosjetljiv na poremećaje i promjene svojih elemenata (op-amp, H.Black 1927.g.)
- Može napraviti dobar sustav od loših elemenata (primjer e-zaklopka)
- Stabilizirati nestabilan sustav (Segway, neki zrakoplovi)
- Stvoriti neko poželjno ponašanje sustava (npr. linearno ponašanje sustava iz nelinearnih komponenti)

## Koji je osnovni problem s povratnom vezom?

- Može unijeti nestabilnost

## Zašto bi inženjeri strojarstva trebali učiti (i znati nešto) o vođenju?

- pojavljuje se svugdje
- daje dodatnu slobodu projektantu tehničkih sustava (npr. MB A)
- integralno projektiranje "strojarskog" sustava i vođenja postaje sve važnije (prožimanje, sinergija, ideja mehatronike!)
- koncepti i alati su široko primjenljivi

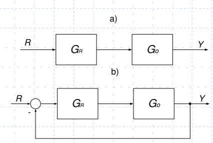
## Povratna veza

- Dobar sustav od loših elemenata: primjeri e-zaklopka, poluaktivni ovjes, ...

## Povratna veza

- Sustav može biti neosjetljiv na poremećaje i promjene svojih elemenata
  - Osjetljivost predstavlja omjer postotne promjene neke mjere svojstava sustava (što može biti odziv $Y(s)$) i postotne promjene nekog parametra sustava $a_i$. Što se odziv manje mijenja kao posljedica promjene koeficijenata sustava, to je manje osjetljiv. Za male promjene koeficijenta $\Delta a_i$ od početne vrijednosti $a_0$ može se pisati da je osjetljivost $S$:

$$S_a^Y \cong \frac{\Delta Y(s)/Y_0(s)}{\Delta a_i / a_0}$$

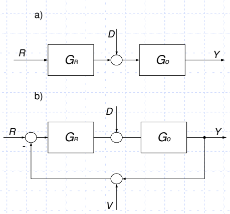



$$S_G^Y = 1$$

$$S_G^Y = \frac{1}{1 + G_R \cdot G_O(s)}$$

## Povratna veza

- Djelovanje vanjskog poremećaja $D$:




$$Y_a(s) = G_O(s)\, D(s)$$

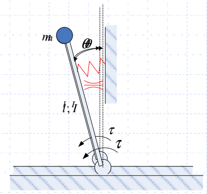
$$Y_b(s) = \frac{G_O(s)}{1 + G_R(s) G_O(s)} D(s)$$

- Opasnost (i ograničenje): šum $V$ !!!

## Povratna veza

- Može stabilizirati nestabilan sustav:

$$I \cdot \ddot{\theta} - m \cdot g \cdot l \cdot \sin\theta = \tau$$




- Linearizacija, polovi su: $p_{1/2} = \pm\sqrt{g/l}$
- Zakon vođenja:

$$\tau = -K_D\,\dot{\theta} - K_P\,\theta - m \cdot g \cdot l \cdot \sin\theta$$

- Dobiva se:

$$I \cdot \ddot{\theta} + K_D\,\dot{\theta} + K_P\,\theta = 0$$

- Ne samo stabilan, nego i linearan!
- "Umjetna" opruga i prigušivač!

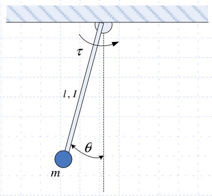
Povratna veza

- Dalje:

$$\tau = -K_D\,\dot{\theta} - 2\cdot m\cdot g\cdot l\cdot \sin\theta$$

- dobiva se ...

$$I\cdot\ddot{\theta} + K_D\,\dot{\theta} + m\cdot g\cdot l\cdot \sin\theta = 0$$




- njihalo (s viskoznim prigušenjem)!

---

Povratna veza

- Može stvoriti neko poželjno ponašanje sustava: npr. linearno od nelinearnog (prethodni primjer, ali i primjeri sa samog početka automatike – vodeni sat)
- Opasnost povratne veze: duboko mijenja sustav, i od stabilnog sustava može postati nestabilan (kašnjenja; šum senzora ili vodeće veličine sa derivacijskim ili čak proporcionalnim djelovanjem regulatora mogu biti jako potencirane; preveliko traženje od ograničenih aktuatora (*integrator windup*), prevelika pojačanja, itd.)

---

Povratna veza

- Temeljna ograničenja svojstava koja se mogu postići povratnom vezom:
  - pitanje smještaja polova i nula, odnosno pitanje stabilnosti (fazna-neminimalnost) – pitanje konstrukcije
- Bodeov integral – predstavlja zakon održanja (*čega*?) – određena količina (vrijednost integrala logaritma amplitude funkcije osjetljivosti) je sačuvana djelovanjem povratne veze, odnosno ukupna vrijednost je uvijek jednaka. Ona je jednaka nuli za stabilne polove/nule, ili je jednaka nekoj pozitivnoj vrijednosti za nestabilne polove/nule:

$$\int_0^\infty \ln\left|S(j\omega)\right|\,d\omega = \pi\sum_{k=1}^{n} p_k$$

$$\int_0^\infty \frac{\ln\left|T(j\omega)\right|}{\omega^2}\,d\omega = \pi\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{z_i}$$

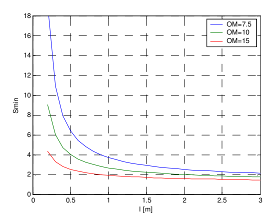
- Ako se uzme u obzir ograničenja upravljačkog hardvera, što je vrlo važno, onda postaje: $\infty \longrightarrow \Omega$

---

Povratna veza

- Ako se to primjeni na prethodni primjer inverznog njihala:

$$\Omega\cdot\ln|S| = \pi\cdot\sqrt{g/l} \Rightarrow S_{\min} = \exp\left[\pi\sqrt{g/l}/\Omega\right]$$




- "kvaliteta" vođenja ovisi o dužini njihala i ograničenju hardvera

---

# MATEMATIČKI PRIKAZ DINAMIKE TEHNIČKIH SUSTAVA

Prof.dr.sc. Joško Petrić

---

## Uvod

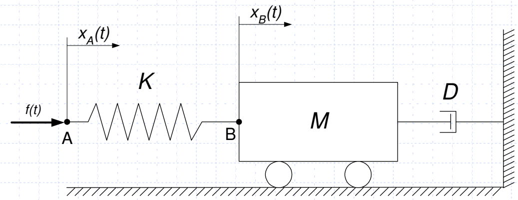
- Poznavanje sustava – preduvjet upravljanja
- Poznavanje sustava – predstavljeno je modelom
- Model – matematički, ali i kvalitativni, te statistički
- Model dinamike sustava namijenjen upravljanju: opisuje vezu između uzroka i posljedica promjena stanja sustava u vremenu
- Model omogućava analizu i sintezu upravljanja
- "Control oriented model" – kompaktni
- Linearni vremenski invarijantni sustavi – opisuju se linearnim D.J. s konstantnim koeficijentima

## Analitički modeli

- Modeliranje dobiveno teoretskim ili analitičkim putem (jednadžbe održanja mase, energije i impulsa, te fizikalni ili kemijski zakoni)
- Eksperimentalnim putem
- Kombinacije (verifikacija, parametriranje)

## Mehanički sustav (translatorni)

3. Newtonov zakon (suma primjenjenih sila jednaka je silama koje im se suprostavljaju)




## Mehanički sustav (translatorni)

Iz ravnoteže sila:

Točka A $$f = f_K = K(x_A - x_B)$$

Točka B $$f_K = f_M + f_D = M\frac{d^2 x_B}{dt^2} + D\frac{dx_B}{dt}$$

## Mehanički sustav (translatorni)

*f* označava vanjsku silu koja djeluje na točku A; $f_K$, $f_M$ i $f_D$ su sile opružnog djelovanja, sila inercije i sila prigušenja; sa *x* su označeni pomaci u točkama A i B; a *K*, *M* i *D* označavaju konstantu krutosti opruge, masu i konstantu viskoznog prigušenja amortizera.

Ovaj sustav je drugog reda, sa dva spremnika energije, gdje masa u gibanju čuva kinetičku energiju, a opruga potencijalnu. Tijekom gibanja, potaknutim vanjskom silom *f* ili pohranjenom energijom unutar sustava (na što ukazuju početni uvjeti u modelu), energija prelazi iz jednog oblika u drugi, gubeći se prigušenjem.

Omjeri mase, elastičnosti i prigušenja određuju kakav će biti oblik tih prijelaza.

- integrator, spremnik energije, kašnjenje
- Primjer: hidr.cilindar

$v = Q/A$

$$x = \int_0^t v\, dt$$

## Mehanički sustav izražen pomoću prijenosne funkcije (prijenosnih funkcija)

Kako je cilj modela dinamike sustava dobiti apstraktan opis veza između posljedica nekih promjena (izlazne veličine) sa pobudama koje su ih uzrokovale, ovdje se nameću tri takva para: $x_a$ i $f$, $x_b$ i $x_a$, te konačno $x_b$ i $f$. Parovi će se dati pomoću prijenosnih funkcija.

## Mehanički sustav izražen pomoću prijenosne funkcije (prijenosnih funkcija)

$$f(t) = K\,(x_A(t) - x_B(t))$$

$$f(t) = M\,\frac{d^2 x_B(t)}{dt^2} + D\,\frac{dx_B(t)}{dt}$$

Transformacijom se dobiva :

$$F(s) = K\,(X_A(s) - X_B(s))$$

$$F(s) = M\,s^2 X_B(s) + D\,s\,X_B(s)$$

*Napomena: velikim slovima označavaju se varijable u s-području, a malim u vremenskom (t) području*

Iz prve jedn. može se izlučiti izraz za $X_B$ i uvrstiti u drugu, pa se sređivanjem dobiva veza između sile $F(s)$ kao ulazne varijable i $X_A(s)$ kao izlazne:

$$\frac{1}{K}(M\,s^2 + D\,s + K)\,F(s) = (M\,s^2 + D\,s)\,X_A(s)$$

U drugoj jednadžbi izražena je veza između $F(s)$ kao ulazne varijable i $X_B(s)$ kao izlazne:

$$F(s) = (M\,s^2 + D\,s)\,X_B(s)$$

Nameće se još traženje veze između gibanja u čvoru A kao ulaza (pobude) i gibanja u čvoru B kao izlaza (posljedice). Ta veza lako se dobije izjednačavanjem prve i druge jednadžbe gibanja meh. sustava:

$$K\,X_A(s) = (M\,s^2 + D\,s + K)\,X_B(s)$$

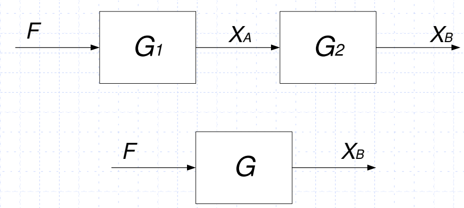
Iz prethodne 3 jednadžbe mogu se dobiti 3 prijenosne funkcije:

$$G_1(s) = \frac{X_A(s)}{F(s)} = \frac{M\,s^2 + D\,s + K}{(M\,s^2 + D\,s)\,K}$$

$$G_2(s) = \frac{X_B(s)}{X_A(s)} = \frac{K}{M\,s^2 + D\,s + K}$$

$$G(s) = \frac{X_B(s)}{F(s)} = \frac{1}{M\,s^2 + D\,s}$$

Prethodne prijenosne funkcije možemo prikazati slijedećim blok dijagramima:



## Prijenosna funkcija

- **Prijenosna funkcija (*transfer function*)** jedan je od nekoliko osnovnih pojmova svojstvenih automatizaciji, i općenito teoriji sustava. Prijenosna funkcija povezuje ulaz i izlaz nekog sustava ili elementa, odnosno uzrok i posljedicu promjena, te tako predstavlja dinamičko ponašanje sustava ili nekog pojedinog elementa.

- Prijenosna funkcija zamjenjuje klasično rješavanje diferencijalne jednadžbe. Iako je matematička teorija na kojoj se temelji prijenosna funkcija dosta složena, njeno korištenje je razmjerno jednostavno, i nije uvjetovano poznavanjem te teorije. To je svakako jedan od razloga njene široke primjene i popularnosti. Ipak, potrebno je poznavati njena ograničenja odnosno njeno područje primjene.

**Prijenosna funkcija** načelno je povezana uz područje linearnih vremenski invarijantnih sustava. Ona se temelji na operatorskom računu, odnosno preslikavanju funkcije na funkciju. Na taj način je engleski fizičar Heaviside krajem 19. stoljeća pojednostavnio rješavanje linearnih diferencijalnih jednadžbi, ali bez čvrstih matematičkih dokaza. Kasnije je na temelju Laplaceove transformacije ta metoda matematički dokazana, te se za nju i koristi taj naziv – **Laplaceova transformacija**.

Dana je linearna diferencijalna jednadžba s konstantnim koeficijentima u slijedećem obliku:

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) =$$

$$= b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1}\frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \ldots + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t)$$

$y(t)$ je izlazna veličina, $x(t)$ je ulazna veličina, dok su $a_k$ i $b_k$ pripadajući koeficijenti, pretpostavka je da su realni brojevi. Sustav je dan povezanošću između ulazne i izlazne veličine opisane diferencijalnom jednadžbom.

Gornja D.J. je $n$-tog reda, pa se i za sustav kojeg ona predstavlja kaže da je $n$-tog reda. U pravilu je $n \geq m$ (ali može biti iznimaka).

Uvodi se transformacija, tako da funkcija $x(t)$ postaje $X(s)$, odnosno $y(t)$ postaje $Y(s)$. Derivacija se zamjenjuje operatorom $s$, odnosno integracija se zamjenjuje sa $1 / s$.

*Napomena: Operator preslikava funkciju na funkciju, dok funkcija preslikava brojeve na brojeve*.

$$\frac{dx(t)}{dt} \equiv s\,X(s) \qquad \int x(t)\,dt \equiv \frac{1}{s} X(s)$$

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} \equiv s^2 X(s) \qquad \iint x(t)\,dt \equiv \frac{1}{s^2} X(s)$$

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \equiv s^n X(s)$$

Prethodna D.J. transformiranjem postaje:

$$a_n s^n Y(s) + a_{n-1} s^{n-1} Y(s) + \ldots + a_1 s\,Y(s) + a_0 Y(s) =$$

$$= b_m s^m X(s) + b_{m-1} s^{m-1} X(s) + \ldots + b_1 s\,X(s) + a_0 X(s)$$

Dakle, diferencijalna jednadžba postala je algebarska jednadžba, što njeno rješavanje čini znatno lakšim. Međutim, važno je uočiti da rješenje alg. j. neće biti funkcija vremena $t$, odnosno neće biti u vremenskom području nego u području operatora $s$.

Operator $s$ je kompleksna varijabla, ili kompleksna frekvencija, stoga je rješenje u području kompleksne varijable. (*Dakle, frekvencijsko područje*).

Prijelaz u vremensko područje ponovno zahtijeva transformaciju koja se zove obrnutom ili inverznom

Laplaceovom transformacijom.

## Definicija prijenosne funkcije

Prethodnu algebarsku jednadžbu u s području možemo izraziti kao omjer izlazne (*Y*) i ulazne (*X*) veličine:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + ... + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + ... + a_1 s + a_0}$$

Gornji izraz predstavlja prijenosnu funkciju sustava, koja se obično označava sa *G*(*s*) (ponegdje također *H*(*s*)).

Dakle, prijenosna funkcija *G*(*s*) nekog sustava jest transformirani omjer izlazne i ulazne funkcije uz početne uvjete jednake nuli: *G*(*s*) = *Y*(*s*) / *X*(*s*)

Iz pojma *transformirani* uočava se da je prijenosna funkcija povezana uz područje kompleksne varijable *s*. Osim toga, može se uočiti da prijenosna funkcija opisuje dinamiku sustav samo povezujući utjecaj pobude na izlaznu veličinu, a isključuje utjecaj pohranjene energije u sustavu, pošto su početni uvjeti po definiciji jednaki nuli.

**Red prijenosne funkcije** je red polinoma njenog nazivnika *n*. Članovi u nazivniku predstavljaju **kašnjenja** u sustavu (broj integracija), dok članovi u brojniku predstavljaju ponašanje sustava s obzirom na pobudu. U pravilu je red polinoma nazivnika prijenosne funkcije veći ili jednak redu polinoma njenog brojnika ($n \geq m$), uz moguće iznimke.

## Karakteristična jednadžba, polovi i nule

$$G(s) = K \frac{\prod_{i=1}^{m}(s - z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s - p_i)}$$

Vrijednosti $s = p_i$ za koje je polinom nazivnika prijenosne funkcije jednak nuli zovu se **polovi prijenosne funkcije**, ili polovi sustava kojeg prijenosna funkcija predstavlja. Za te vrijednosti kompleksne varijable, ili kompleksne frekvencije *s* prijenosna funkcija poprima beskonačne iznose (dijeljenje nulom).

Vrijednosti $s = z_i$ za koje je polinom brojnika prijenosne funkcije jednak nuli zovu se **nule prijenosne funkcije**. Za te vrijednosti kompleksne varijable *s* prijenosna funkcija biti će jednaka nuli. Drugim riječima, za te vrijednosti *s* izlaz iz sustava biti će jednak nuli, bez obzira kakva pobuda djeluje na ulazu.

*K* je omjer $b_0$ / $a_0$ i predstavlja **pojačanje** prijenosne funkcije. Kako je to pojačanje pri kompleksnoj frekvenciji *s* = 0, često se naziva *DC gain* (*direct current*).

Dakle, polovi prijenosne funkcije rješenja su jednadžbe koja nastaje kada se nazivnik prijenosne funkcije iz (223.1) izjednači sa nulom. Takva jednadžba naziva se **karakteristična jednadžba**:

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + ... + a_1 s + a_0 = 0$$

To je ista karakteristična jednadžba koju treba riješiti kada se traži opće rješenje homogene diferencijalne jednadžbe koja opisuje sustav uz pobudu jednaku nuli. Njeno rješenje, odnosno korijenovi odgovaraju polovima (klasično rješenje diferencijalne jednadžbe analizira se kasnije).

Karakteristična jednadžba, odnosno polovi i nule vrlo su važni pojmovi u automatizaciji. Poznavajući broj i smještaj polova, te nula (prikazanih u Gaussovoj ravnini) može se znati mnogo o svojstvima linearnog vremenski invarijatnog sustava, poput stabilnosti i brzine odziva.

## Laplaceova transformacija

Operacija Laplaceove transformacije vremenske funkcije dana je nepravim integralom:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt$$

gdje je s kompleksna varijabla (ili kompleksna frekvencija):

$$s = \sigma + j\omega$$

$\sigma$ predstavlja realni dio a $\omega$ imaginarni dio kompleksne varijable.

Simbolička oznaka Laplaceove transformacije: operator *L*, dok je inverzna transformacija *L*-1.

## Laplaceova transformacija

Sve funkcije **ne mogu** se transformirati. *f*(*t*) će imati Laplaceovu transformaciju ako je eksponencijalnog reda, odnosno ako je nepravi integral apsolutno konvergentan.

To je onda kada realna vrijednost Sigma je veća od realne pozitivne vrijednosti Sigma_a koja zadovoljava nejednadžbu:

$$\int_0^{\infty} |f(t)|\, e^{-\sigma_a t}\, dt < \infty$$

$$\sigma > \sigma_a$$

*Primjer* funkcije koja se ne može transformirati:

(jer raste brže nego što "prigušenje" *e*^(-*st*) pada s vremenom)

$$e^{t^2}$$

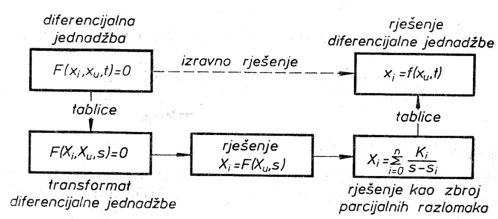
## Laplaceova transformacija

Obrnuta Laplaceova transformacija prijenosne funkcije predstavlja **težinsku funkciju** $g(t)$, odnosno odziv sustava na pobudu u obliku impulsne funkcije

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} F(s) e^{st} ds$$

*Nap: Detaljni prikaz teorije Laplaceove transformacije, njena svojstva i teoremi, usporedbe sa Fourierovom transformacijom, te tablice transformacije funkcija u knjizi (prof. Šurina)*

## Laplaceova tensformacija (naokolo je lakše)




Sl. 4—1. Shematski prikaz primjene Laplaceove transformacije pri rješavanju diferencijalnih jednadžbi

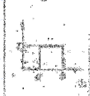
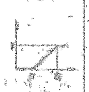
## Laplaceova transformacija:

- Transformacija operacija
  - Derivacije
  - Integracije
- Teoremi:
  - Teorem linearnosti
  - Teorem prigušenja
  - Teorem pomaka
  - Teorem početne vrijednosti
  - Teorem konačne vrijednosti
  - Teorem konvolucije

Tablica 4—1. Laplaceova transformacija funkcija

| $f(t)$ | $F(s)$ | $f(t)$ | $F(s)$ |
|---|---|---|---|
| $\delta(t)$ | $1$ | $\sin \omega t$ | $\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ |
| $u(t)$ | $\frac{1}{s}$ | $\cos \omega t$ | $\frac{s}{s^2+\omega^2}$ |
| $t$ | $\frac{1}{s^2}$ | $\sin(\omega t + \varphi)$ | $\frac{s \sin\varphi + \omega \cos\varphi}{s^2+\omega^2}$ |
| $t^n$ | $\frac{n!}{s^{n+1}}$ | $\cos(\omega t + \varphi)$ | $\frac{s \cos\varphi - \omega \sin\varphi}{s^2+\omega^2}$ |
| $e^{-at}$ | $\frac{1}{s+a}$ | $1 - \cos \omega t$ | $\frac{\omega^2}{s(s^2+\omega^2)}$ |
| $t^{n-1} e^{-at}$ | $\frac{(n-1)!}{(s+a)^n}$ | $t \cos \omega t$ | $\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$ |
| $e^{-t/\alpha}$ | $\frac{\alpha}{1+\alpha s}$ | $\sin^2 \omega t$ | $\frac{2\omega^2}{s(s^2+4\omega^2)}$ |
| $t^{n-1} e^{-t/\alpha}$ | $\frac{\alpha^n (n-1)!}{(1+\alpha s)^n}$ | $\cos^2 \omega t$ | $\frac{s^2+2\omega^2}{s(s^2+4\omega^2)}$ |
| [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] |
| [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] |
| [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] |
| [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] |

Tablica 4—2. Laplaceova transformacija nekontinuiranih funkcija

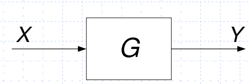
| $f(t)$ | $F(s)$ | $f(t)$ | $F(s)$ |
|---|---|---|---|
|  | $\frac{1}{s} e^{-as}$ |  | $\frac{1}{s^2} e^{-as}$ |
|  | [illegible] |  | [illegible] |

Tablica 4—3. Laplaceova transformacija derivacije i integracije

| $f(t)$ | $F(s)$ | $f(t)$ | $F(s)$ |
|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | $sF(s) - f(0+)$ | $f^{(-1)}(t)$ | $\frac{F(s)}{s} + \frac{f^{(-1)}(0+)}{s}$ |
| [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] |
| [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] |

## Blok dijagrami

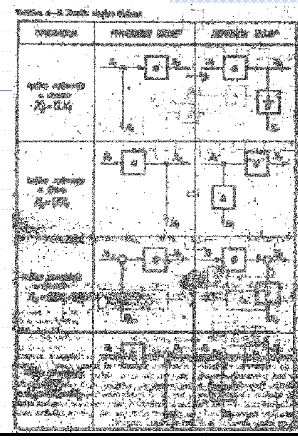
Rašireni oblik prikazivanja modela sustava su blok dijagrami. Pojedini elementi, ili dijelovi sustava povezuju se međusobno i prikazuju na slikoviti način. Ako blokovi predstavljaju prijenosne funkcije dijelova sustava, te ako se tok signala označi odgovarajućom varijablom, onda je riječ o strukturnom blok dijagramu, koji čini model sustava. Pri sastavljanju sveukupnog modela poštuju se pravila operacija među blokovima.




Funkcionalni odnosi među elementima nekog sustava također se često prikazuju grafički pomoću blokova, no oni se obično crtaju ležernije, bez strogih matematičkih pravila. Takvi blok dijagrami zovu se funkcionalni.

## Algebra blokova

- Točke račvanja i zbrajanja signala
- Algebra blokova:
  - Serijska veza
  - Paralelna veza
  - Povratna veza
    (jedinična pov. veza)



## Metoda prostora stanja

- Metoda prostora stanja način je prikaza i analize matematičkog modela sustava u vremenskom području.
- Prijenosna funkcija (ili njen grafički prikaz pomoću strukturnog blok dijagrama) nalazi se u području kompleksne varijable, odnosno kompleksne frekvencije.
- Brojna ograničenja koja se pojavljuju uslijed neizravne analize dif.jednadžbi kod prijenosne fkc. moguće je prevladati metodom prostora stanja. Npr. multivarijabilni sustavi, nelinearni sustavi ili sustavi s vremenski promjenljivim parametrima. Optimalne metode odabira parametara regulatora prikladne su opisu sustava metodom prostora stanja.

- Metoda prostora stanja koristi zapis diferencijalne jednadžbe *n*-tog reda kao *n* diferencijalnih jednadžbi 1. reda, odnosno pišu se kao takozvani normalni sustavi prvog reda.
- Isto tako ako postoji simultane diferencijalne jednadžbe koje su ukupno *n*-tog reda, zapisuju se kao *n* diferencijalnih jednadžbi 1. reda.
- Koristi se standardni oblik upisivanja parametara u matrice, te se s njima računa pravilima matričnog računa.
- Razvoj i primjena metode prostora stanja naročito potaknuta sve širom uporabom računala u drugom dijelu prošlog stoljeća, pa se uz tu metodu često vezuje pridjev *moderna*, iako i njena teorijska osnova potječe iz 19. stoljeća.
- Upoznavanje sa metodom prostora stanja zahtijeva poznavanje osnovnih operacija matričnog računa (zbrajanje i množenje matrica)

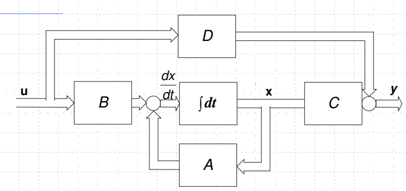
## Opis sustava metodom prostora stanja

- Odabirom takozvanih varijabli stanja, kojih ima *n*, model se pretvara u *n* diferencijalnih jednadžbi prvog reda. Varijable stanja upisuju se u vektor stanja **x**, ulazne varijable upisuju se u vektor ulaza **u**, dok se izlazne varijable upisuju u vektor izlaza **y**. Matrice koeficijenata sustava, ulaza, izlaza i prijenosa, koje se označavaju sa **A**, **B**, **C** i **D** povezuju navedene vektore i tvore zapis matematičkog modela u obliku prostora stanja:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\,\mathbf{u}(t)$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\,\mathbf{u}(t)$$

**x**(*t*) – vektor stanja, dimenzija [*n*]
**u**(*t*) – vektor ulaza, dimenzija [*m*]
**y**(*t*) – vektor izlaza, dimenzija [*p*]
**A** – matrica sustava, dimenzija [*n* x *n*]
**B** – matrica ulaza, dimenzija [*n* x *m*]
**C** – matrica izlaza, dimenzija [*p* x *n*]
**D** – matrica prijenosa, dimenzija [*p* x *m*]

## Matrični blok dijagram metode prostora stanja




- Veze između blokova su dane širokom linijom zbog toga što predstavljaju vektore.
- Uočava se uloga matrice prijenosa **D**, koja direktno povezuje ulazne i izlazne varijable, odnosno povezuje ih bez *kašnjenja*, koje predstavlja integrator.
- U većini primjera matrica **D** će biti nul-matrica, dakle nema direktne veze ulaza i izlaza. Primjer kada postoji neki koeficijent unutar **D** matrice različit od nule, jest primjer čistog pojačanja ($P_0$ dinamičkog člana)

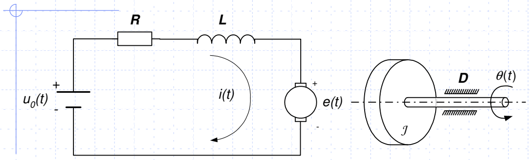
## Pojmovi i definicije metode prostora stanja

- Stanje sustava - predstavlja matematički oblik koji sadržava skup od $n$ varijabli $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_i(t)$,...,$x_n(t)$, nazvanih varijable stanja, a taj oblik je takav da su početne vrijednosti $x_i(t_0)$ toga skupa uz varijable ulaza $u_j(t)$ dovoljni da jednoznačno opišu odziv sustava u nekom budućem trenutku $t > t_0$.
- Vektor stanja – skup varijabli stanja $x_i(t)$ predstavlja $n$-dimenzionalni vektor stanja $\mathbf{x}(t)$.
- Prostor stanja – jest $n$–dimenzionalni prostor gdje varijable stanja predstavljaju njegove koordinatne osi.
- Trajektorija stanja – definirana je kao putanja u prostoru stanja proizvedena od vektora stanja $\mathbf{x}(t)$ kako se on mijenja sa vremenom.
- Varijable stanja – one mogu imati neko fizikalno značenje ali mogu biti i apstraktne matematičke veličine bez nekog određenog fizikalnog značenja. Odabir varijabli stanja obično je prvi korak u opisivanju sustava metodom varijabli stanja.

## Varijable stanja

- Tri su vrste varijabli stanja: fizikalne, fazne i kanonske.
- Fizikalne varijable stanja odabiru se jednostavno svojim fizikalnim značenjem u modelu, kao npr. put, brzina, napon, sila, tlak, protok, temperatura, itd.
- Fazne varijable stanja odabiru se tako da matrica sustava A čini tzv. Frobeniusovu matricu, koja ima jedinice iznad glavne dijagonale, a koeficijenti nazivnika prijenosne funkcije su elementi posljednjeg reda. U tom slučaju može se razviti blok dijagram sustava razmjerno lako, metodički, što se često koristi prilikom formiranja modela u Matlab/Simulinku.
- Kanonske varijable stanja, matrica sustava **A** postaje dijagonalna (označava se sa $\boldsymbol{\Lambda}$), gdje su u glavnoj dijagonali korijeni karakteristične jednadžbe, to jest vlastite vrijednosti matrice. Karakteristika je takvog odabira varijabli stanja da je sustav raspregnut, bez međusobnih utjecaja varijabli stanja.
- Važno je uočiti da odabir varijabli stanja ne mora biti uvijek jednoznačan. Također, varijable stanja mogu se matričnim operacijama transformirati iz jednog oblika u drugi.

## Primjer: elektromehanički sustav (DC motor)




Umjesto korištenja zakona motora i generatora koji povezuju magnetsku gustoću i geometrijske karakteristike motora, moment razvijen motorom $T$ dan je pomoću konstante motora $K_m$ i struje armature $i$, dok je suprostavljajući napon $e$ stvoren gibanjem u magnetskom polju (elektromotorna sila) dan pomoću konstante generatora $K_g$ i brzine gibanja (kutna brzina rotora):

$$T = K_m\, i \qquad\qquad e = K_g\, \dot{\theta}$$

Konstanta motora $K_m$ i generatora $K_g$ jednake i označene su sa $K$.

- Iz Newtonovih zakona za mehanički dio i Kirchoffovih zakona za električni krug, mogu se dobiti jednadžbe koje opisuju gibanje istosmjernog motora:

$$J\,\ddot{\theta} + D\,\dot{\theta} = K\, i$$

$$L\frac{di}{dt} + R\, i = u_0 - K\,\dot{\theta}$$

$J$ je moment tromosti rotora i povezanih opterećenja,
$D$ koeficijent viskoznog trenja.
$L$ je induktivitet,
$R$ otpor armature,
$u_0$ je napon izvora (ulazna varijabla)

## Elektromehanički sustav, prijenosna funkcija

Transformacijom pomoću operatora $s$ prethodne diferencijalne jednadžbe postaju:

$$J\,s^2\theta(s) + D\,s\,\theta(s) = K\,I(s)$$

$$L\,s\,I(s) + R\,s\,I(s) = U_0(s) - K\,s\,\theta(s)$$

Nakon uvrštavanja $I(s)$ dobivenog iz gornje u donju alg. jedn., te nakon ponešto sređivanja, dobiva se:

$$\left(\frac{1}{K}J\,Ls^3 + \frac{1}{K}(D\,L + J\,R)\,s^2 + \frac{1}{K}(D\,R + K^2)\,s\right)\theta(s) = U_0(s)$$

Odatle se može napisati prijenosna funkcija između napona izvora kao ulazne varijable i zakreta osovine motora kao izlazne varijable:

$$G(s) = \frac{\theta(s)}{U_0(s)} = \frac{K}{s\,(JLs^2 + (DL + JR)\,s + (DR + K^2))}$$

## Elektromehanički sustav, metoda prostora stanja

Kako je ukupan red modela tri, biti će i tri varijable stanja. Odabir varijabli ulaza, stanja i izlaza je slijedeći:

$$u(t) = u_0(t)$$
$$x_1(t) = \theta(t)$$
$$x_2(t) = \dot{\theta}(t) = \dot{x}_1(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = \ddot{\theta}(t)$$
$$x_3(t) = i(t)$$
$$\dot{x}_3(t) = di(t)/dt$$
$$y(t) = u_C(t) = x_1(t)$$

Da bi se model upisao u matrični oblik metode prostora stanja, izraziti će se druga derivacija zakreta (kutno ubrzanje), te prvu derivaciju struje po vremenu:

$$\ddot{\theta}(t) = -\frac{D}{J}\dot{\theta}(t) + \frac{K}{J}i(t)$$

$$\frac{di(t)}{dt} = -\frac{R}{L}i(t) - \frac{K}{L}\dot{\theta}(t) + \frac{1}{L}u_0(t)$$

Prethodne jednadžbe upisuju se u oblik metode prostora stanja poštujući pravila matričnog množenja i zbrajanja, pa model istosmjernog elektromotora u prostoru stanja izgleda na slijedeći način:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -D/J & K/J \\ 0 & -K/L & -R/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/L \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + 0 \cdot u$$

## Matematički model u Simulinku,

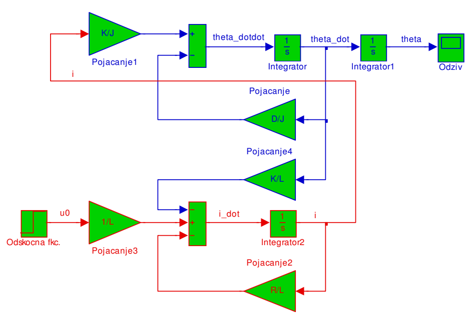
Matematički model prikazan grafički Matlab/Simulinkom stvara se koristeći načela dana u prethodnim primjerima.

Kao osnova grafičkog modela u Simulinku može se koristiti izražavanje najviše derivacije (isto vrijedi i za modele dane metodom prostora stanja sa faznim varijablama stanja)

U prošlosti se ista metoda koristila kod simulacija analognim računalima pod nazivom direktno programiranje.

## Matematički model u Simulinku,

## primjer elektromehaničkog sustava




## Linearizacija

Linearizacijom se matematički opisuje zamisao da će se nelinearni sustav ponašati približno kao njegova linearna aproksimacija u okolnom području svoga ravnotežnog stanja.

Sustav obično radi u okolini nekog od svojih ravnotežnih stanja. U tim točkama odziv sustava je bez promjene, odnosno stacionaran, pa se takve točke mogu i nazvati radnim. Traženje ravnotežnih stanja sustava, te pitanja stabilnosti sustava (asimptotska ili eksponencijalna, lokalna ili globalna) vezano je uz Lyapunovu teoriju stabilnosti.

Linearizacija se može provesti razvojem funkcije u Taylorov red u okolini radne točke, te odbacivanjem članova čiji red je viši od dva.

Nehomogeni sustav (pobuda $\neq 0$) dan je nelinearnom diferencijalnom jednadžbom:

$$\frac{dy}{dt} = f(y, x)$$

gdje je *y* je izlazna varijabla, a *x* ulazna. Razvojem funkcije u Taylorov red dobiva se:

$$\frac{dy}{dt} \cong f(\bar{y}, \bar{x}) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{RT} \frac{y - \bar{y}}{1!} + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{RT} \frac{x - \bar{x}}{1!} + \cdots$$

*RT* - ravnotežna točka

Članovi čiji red je viši od dva se odbacuju. Uz pretpostavku da je u ravnotežnoj točki (po definiciji), zatim uz uvođenje novih varijabli *y'* i *x'* koje predstavljaju male pomake oko nul točke, te zamjenjujući *dy*/*dt* sa *dy'*/*dt*, dobiva se linearni izraz. Parcijalne derivacije predstavljaju različite koeficijente, koji su nagibi funkcije u ravnotežnoj točki.

$$\frac{dy'}{dt} = \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{RT} y' + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{RT} x'$$

# ANALIZA SUSTAVA U VREMENSKOM PODRUČJU

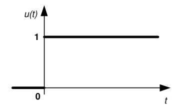
Prof.dr.sc. Joško Petrić

## STANDARDNE POBUDNE FUNKCIJE

- Za potrebe analize sustava važno je imati osnovicu za usporedbu različitih sustava. Jedan vrlo prihvaćen način usporedbe je promatranje odziva dinamičkih sustava na ulazne pobude koje su standardne.
- Standardne pobudne funkcije su odskočna funkcija, nagibna funkcija, parabolna funkcija i impulsna funkcija.
- Iako su standardne pobudne funkcije nekontinuirane u ishodištu, pa stoga nisu analitičke funkcije, ipak se s njima formalno izvode sve matematičke operacije kao i s analitičkim funkcijama (još se i nazivaju singularne funkcije (*singularity functions*))
- Kao standardne pobudne funkcije u širem smislu može se navesti općenito red potencija koji se koristi ponekad za analitički izračun nekih odziva, te sinusna funkcija koja se kao pobuda koristi za analizu u frekvencijskom području
- postoji niz drugih funkcija koje se mogu koristiti kao pobude, ali su prisutnije u drugim područjima poput npr. teorije signala, pa se ovdje posebno ne spominju.

## Odskočna funkcija

- Odskočna funkcija (*step function*) ili jedinični odskok (*unit step function*): najčešće se označava sa $u(t)$, a prema O. Heavisideu koji ju je često koristio naziva se ponekad i Heavisideova funkcija.




$$f(t) = u(t) \equiv \begin{cases} 0 & \text{za } t < 0 \\ 1 & \text{za } t \geq 0 \end{cases}$$

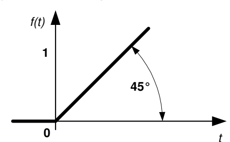
Laplaceova transformacija odskočne fkc. odgovara transformaciji integracije:

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s} U(s)$$

- Odziv sustava na pobudu u obliku jedinične odskočne funkcije zove se prijelazna funkcija, a često se označava sa $h(t)$.
- Napominje se da kod praktične, eksperimentalne primjene odskočne funkcije, nije moguće ostvariti njen idealni, teoretski oblik. No, važno je da skok bude dovoljno brz, što znači da je skok funkcije znatno kraći od promjena sustava na koji se odskočna funkcija primjenjuje. Mjera brzine promjene nekog sustava jest njegova vremenska konstanta (ili vremenske konstante). Odskočna funkcija bi trebala dostići jediničnu vrijednost u vremenu barem 5 puta kraćem od vremenske konstante ispitivanog sustava. Ista napomena važi i za eksperimentalnu primjenu impulsne funkcije.

## Nagibna funkcija

Nagibna funkcija (*ramp function*): predstavlja umnožak varijable vremena $t$ i jedinične odskočne funkcije $u(t)$, pa se može nazvati i jediničnim nagibom: $t\,u(t)$



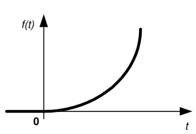

$$f(t) \equiv \begin{cases} 0 & \text{za } t < 0 \\ t & \text{za } t \geq 0 \end{cases}$$

Laplaceova transformacija nagibne funkcije:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s^2} F(s)$$

## Parabolna funkcija

Parabolna funkcija, ili jedinična parabola, dana je umnoškom nagibne funkcije i vremenske varijable: $t^2 u(t)$.




$$f(t) \equiv \begin{cases} 0 & \text{za } t < 0 \\ t^2 & \text{za } t \geq 0 \end{cases}$$

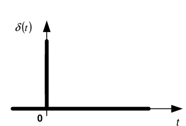
Laplaceova transformacija:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s^3} F(s)$$

## Impulsna funkcija

Derivacijom odskočne funkcije dobiva se impulsna funkcija (*impulse function*), koja prema tome ima vrijednost 0 u svakom trenutku, osim u trenutku $t$ = 0, kada je njena amplituda beskonačna.

Impulsna funkcija ili jedinični impuls još se naziva i Diracova delta funkcija, prema P. Diracu koji je uveo u teorijsku fiziku, a označava se sa $\delta(t)$.




$$f(t) = \delta(t) \equiv \begin{cases} 0 & \text{za } t \rangle 0 \\ \infty & za \;\; t = 0 \\ 0 & \text{za } t \rangle 0 \end{cases}$$

U definiciju impulsne funkcije $\delta(t)$ uključen je podatak da impuls zatvara jediničnu površinu, što se može pokazati krećući iz izraza za derivaciju odskočne funkcije $u(t)$:

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

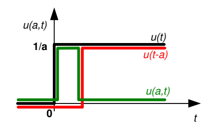
$$\Downarrow$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} du(t) = u(t)\Big|_{-\varepsilon}^{\varepsilon} = 1 - 0 = 1$$

Impulsna funkcija $\delta(t)$ može se definirati i na druge načine. Praktičnije definiranje impulsne funkcije jest da ona nastaje kao razlika dviju odskočnih funkcija $u(t)$ koje imaju amplitudu $1/a$ (dakle nisu jedinične), od kojih druga kasni za vremenski interval $a$. Kako $a$ teži k nuli, tako i navedena razlika dviju odskočnih funkcija postaje impulsna funkcija:

$$u(a,t) = \frac{1}{a}u(t) - \frac{1}{a}u(t-a)$$

$$\delta(t) = \lim_{a\to 0} u(a,t)$$




Impulsna funkcija sa slike može se praktično primijeniti, vodeći računa da je $a$ dovoljno kratak u odnosu na vremenske konstante sustava na koji se primjenjuje kao pobuda.

Impulsna funkcija nalazi veliku primjenu u analizi raznih sustava. Kako je primijenjeni impuls vrlo kratak, dobiveni odzivi odgovaraju praktički odzivima na pohranjenu unutarnju energiju u sustavu (dakle na početne uvjete).
Laplaceova transformacija impulsne funkcije iznosi jedan:

$$\mathcal{L}\,\{\delta(t)\} = 1 \cdot \Delta(s)$$

Imajući na umu definiciju prijenosne funkcije, odakle slijedi da je odziv u području kompleksne varijable $Y(s) = G(s)\ X(s)$. Kako je u slučaju impulsne funkcije kao pobude $X(s) = 1$, može se zaključiti da odziv na pobudu u obliku impulsne funkcije u vremenskom području odgovara prijenosnoj funkciji u području kompleksne varijable $s$.

Odziv na pobudu u obliku impulsne funkcije naziva se težinska funkcija, i obično se označava sa $g(t)$. Ona na neki način određuje "*težinu"* kojom pojedini impuls pridonosi vrijednosti odziva.

## RJEŠENJE DIFERENCIJALNIH JEDNADŽBI

- Diferencijalne jednadžbe dobivene modeliranjem opisuju dinamički sustav. No odnosi ulaza i izlaza sustava tada su opisani implicitno, to jest ulaz i izlaz međusobno su povezani diferencijalnom jednadžbom. Analiza jednog sustava u pravilu traži njeno eksplicitno rješenje, odnosno da varijabla izlaza bude izražena samo kao funkcija ulazne i vremenske varijable. D.j. se rješavaju egzaktnim analitičkim metodama ili numeričkim metodama.
- Poznavanje egzaktnih analitičkih metoda rješavanja diferencijalnih jednadžbi u pravilu nije nužno za rješavanje tehničkih problema u automatizaciji. Međutim, važno je za dublje razumijevanje analize i sinteze dinamičkih sustava koje se različitim metodama rabe u automatizaciji, jer to je usko povezano sa ključnim pojmovima u automatizaciji.
- Također, ponašanje različitih fizikalnih sustava prikazuje se unutar univerzalnog matematičkog okvira.

## Klasično rješenje

- Klasično rješenje obične linearne diferencijalne jednadžbe s konstantnim koeficijentima sastoji se od komplementarne funkcije i partikularnog integrala.
- Opće rješenje diferencijalne jednadžbe uz pobudu jednaku nuli naziva se komplementarna funkcija.
- Općenito diferencijalna jednadžba dana je u obliku:

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0\, y(t) = x(t)$$

gdje u okvirima automatizacije značenje $y(t)$ jest odziv sustava ili izlaz, a $x(t)$ pobuda ili ulaz.
Ako se uvede operator diferenciranja $D$, a pobuda $x(t)$ je jednaka nuli, dobiva se homogena jednadžba:

$$(a_n D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_0)\ y(t) = 0$$

Do konačnog rješenja dolazi se pretpostavkom rješenja (321.2) u obliku eksponencijalne funkcije:

$$y(t) = K\,e^{r\,t}$$

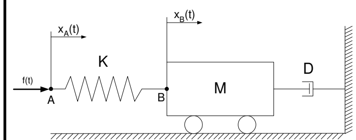
$y(t)$ uvrštava se u homogenu j. Kako eksponencijalna funkcija nije nula čitavo vrijeme (osim u trivijalnom slučaju), da bi se zadovoljila homogena jednadžba, slijedi da je njen polinom jednak nuli:

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \ldots + a_1 r + a_0 = 0$$

Gornja algebarska jednadžba naziva se karakteristična jednadžba, a njeno rješenje su korijeni sustava $r_i$, ili vlastite vrijednosti. Tako se opće rješenje homogene diferencijalne jednadžbe, odnosno komplementarna funkcija sastoji od $n$ izraza $K_i\, e^{r_i t}$ ako su korijeni realni i različiti. Također, korijeni se mogu ponavljati ili mogu biti kompleksni brojevi.

- Komplementarna funkcija nekada se naziva i prijelaznim odzivom (*transient response*) diferencijalne jednadžbe. Ovisi samo o sustavu samome, a ne i o pobudi (pobuda = 0). To će se moći povezati s analizom stabilnosti linearnog sustava, koja se odnosi također na sami sustav, ne vodeći računa o pobudi.
- Partikularni integral je posebno rješenje nehomogene diferencijalne jednadžbe (dakle, pobuda ≠ 0). Ono predstavlja bilo koje rješenje koje zadovoljava kompletnu diferencijalnu jednadžbu, a nije sadržano u komplementarnoj funkciji. Dok za komplementarnu funkciju postoje razrađene metode, to nije tako za partikularni integral, koji ovisi i o pobudnoj funkciji koje mogu poprimiti mnogo različitih oblika. Postoje metode za rješavanje nehomogene diferencijalne jednadžbe poput Cauchyevom metodom ili metodom varijacije konstanti, te operatorske metode.
- Partikularni integral naziva se i stacionarnim rješenjem (*steady state*) diferencijalne jednadžbe, koje ovisi i o pobudi i o sustavu. Analiza točnosti sustava, odnosno analiza stacionarne pogreške, također propituje i pobudu i sustav

Primjer klasičnog rješenja – mehanički sustav




$$M\frac{d^2x_B}{dt^2} + D\frac{dx_B}{dt} + K\,x_B = K\,x_A$$

Potrebno je izračunati gibanje $x_B(t)$, ako je pobuda (gibanje $x_A(t)$) u obliku jedinične odkočne funkcije $u(t)$.

Rješenje se sastoji od komplementarne funkcije koje određuje prijelazni odziv i partikularnog integrala koje određuje stacionarno stanje:

$$x_B = x_{B,kf} + x_{B,pi}$$

Najprije se može odrediti rješenje koje će se odnositi na stacionarno stanje. Pošto je pobuda konstanta, odziv $x_B$ će dostići neku fiksnu stacionarnu vrijednost (za stabilan sustav). Ako je $x_B$ konstanta, onda će brzina i ubrzanje biti jednaki nuli. Uvrštavajući ubrzanje i brzinu nula u d.j. sustava, slijedi da je partikularni integral:

$$K\,x_B = K\,x_A \quad\Rightarrow\quad x_{B,pi} = x_A = u = 1$$

Prijelazni odziv rješava se ako se pretpostavi rješenje homogene jednadžbe u obliku eksponencijalne funkcije. Karakteristična jednadžba tada izgleda slijedeće:

$$M\,r^2 + D\,r + K = 0$$

Radi jasnijeg prikaza, koeficijenti iz kvadratne jednadžba često se pišu izraženi pomoću neprigušene vlastite frekvencije $\omega_n$ i stupnja prigušenja $\zeta$, pa kvadratna jednadžba postaje:

$$r^2 + 2\zeta\,\omega_n\,r + \omega_n^2 = 0$$

Korijeni $r_1$ i $r_2$ sustava dobivaju se rješavanjem kvadratne jednadžbe:

$$r_{1,2} = -\zeta\,\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

Prijelazni odziv ovisi o tome da li je stupanj prigušenja $\zeta$ veći od 1 (slučaj a), jednak 1 (slučaj b), ili manji od 1 (slučaj c). Ovisno o tome korijeni $r_{1,2}$ su realni ili kompleksni brojevi.

*a)* $\zeta > 1$, korijeni su realni i različiti: $$x_{B,kf} = K_1\,e^{-r_1 t} + K_2\,e^{-r_2 t}$$

*b)* $\zeta = 1$, korijeni su realni i jednaki ($r_1 = r_2 = -\zeta\,\omega_n$):

$$x_{B,kf} = K_1\,e^{-\zeta\omega_n t} + K_2\,t\,e^{-\zeta\omega_n t}$$

*c)* $\zeta < 1$, korijeni su konjugirano-kompleksni par:

$$x_{B,kf} = K_1 e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t + K_2)$$

što se može napisati i kao: $$x_{B,kf} = K_1 e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_d\,t + \phi)$$

Ukupno rješenje suma je komplementarne funkcije i partikularnog integrala. Kako je partikularni integral jednak jedinici, rješenje je:

$$x_B = 1 + x_{B,kf}$$

gdje komplementarna funkcija poprima jedan od oblika dana u slučaju a), b) ili c).
Za jednoznačno rješenje potrebno je, osim pobude, poznavati i trenutačno stanje sustava, odnosno početne uvjete. Konstante integracije $K_1$ i $K_2$ određuju se iz početnih uvjeta, i to tako da se početni pomak $x_B(t = 0)$ uvrsti u prethodni izraz, odnosno početna brzina $dx_B/dt\ (t = 0)$ se uvrsti u derivaciju prethodnog izraza.
Primjer cjelokupnog rješenja za slučaj c), kada je $\zeta < 1$, je slijedeći:

$$x_B = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t + \cos^{-1}\zeta)$$

Uvrštavanjem brojčanih podataka za neprigušenu vlastitu frekvenciju $\omega_n$ i stupanj prigušenja $\zeta$ može se odrediti pomak $x_B$ u točki B u svakom trenutku $t$.

## ZNAČAJKE DINAMIČKOG SUSTAVA

### Stupanj prigušenja

Definiranje stupnja prigušenja i neprigušene vlastite frekvencije može se vidjeti na primjeru mehaničkog sustava sa masom, prigušenjem i oprugom, čija karakteristična jednadžba je:

$$M\,r^2 + D\,r + K = 0$$

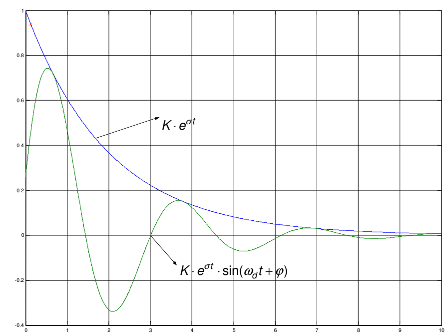
Rješenje karakteristične jednadžbe može biti konjugirano-kompleksni par:

$$r_{1,2} = -\frac{D}{2M} \pm j\sqrt{\frac{4MK - D^2}{4M^2}} = \sigma \pm j\omega_d$$

Prijelazni odziv u slučaju rješenja sa konjugirano-kompleksnim parom jest oscilacijski:

$$x_{B,kf} = K_1 e^{\sigma t}\sin(\omega_d\, t + \phi)$$

Oscilacijski prijelazni odziv




- Realni dio dan je sa $\sigma$ (sigma) i predstavlja eksponent od *e*.
- Vlastita prigušena frekvencija $\omega_d$ (*damped natural frequency*) je frekvencija oscilatornog dijela koji proizlazi iz konjugirano-kompleksnog para.
- *D* predstavlja konstantu prigušenja (viskoznog) u sustavu. U slučaju kada su rješenja karakteristične jednadžbe $r_1$ i $r_2$ jednaka (kada je brojnik pod korijenom = 0) kaže se da konstanta prigušenja ima kritičnu vrijednost $D_{kr}$:

$$D_{kr} = 2\sqrt{M\,K}$$

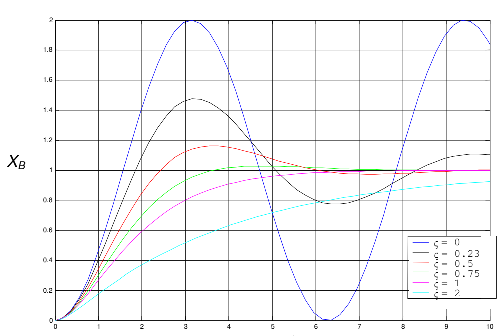
Stupanj prigušenja $\zeta$ (zeta, *damping ratio*) definiran je kao omjer aktualne i kritične konstante prigušenja:

$$\zeta = \frac{D}{D_{kr}} = \frac{D}{2\sqrt{M\,K}}$$

Prijelazni odzivi prema stupnju prigušenja mogu se podijeliti na:

- $0 < \zeta < 1$ korijeni su konjugirano-kompleksni parovi, odziv je prigušeno oscilacijski, tj. odziv je prigušena sinusoida (*underdamped*)
- $\zeta > 1$ korijeni su realni, odziv je aperiodski (*overdamped*)
- $\zeta = 1$ korijeni su jednaki i realni, odziv je granično aperiodski
- $\zeta = 0$ odziv su neprigušene oscilacije
- $\zeta < 0$ odziv su raspirene oscilacije (sustav je nestabilan)

Prikazi nekoliko normaliziranih odziva (kao funkcija $\omega_n t$) na pobudu u obliku jedinične odskočne funkcije za različite stupnjeve prigušenja:




### Neprigušena vlastita frekvencija

Karakteristična jednadžba iz prethodnog može se podijeliti sa koeficijentom *K*, a zatim napisati u takozvanom standardnom obliku kvadratne jednadžbe pomoću $\omega_n$ i $\zeta$ (umjesto koeficijenata označenih sa npr. *M*, *K* i *D*):

$$\frac{M}{K}r^2 + \frac{D}{K}r + 1 = \frac{1}{\omega_n^2}r^2 + \frac{2\zeta}{\omega_n}r + 1 = r^2 + 2\zeta\,\omega_n\,r + \omega_n^2$$

Neprigušena vlastita frekvencija $\omega_n$ (*undamped natural frequency*) definirana je kao frekvencija kontinuiranih oscilacija odziva ako je konstanta prigušenja *D* jednaka nuli:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{M}}$$

Slučaj kada je *D* = 0, odnosno stupanj prigušenja $\zeta$ = 0, znači da prijelazni odziv trajno oscilira (sinusoida konstantne amplitude).

Rješenja karakteristične jednadžbe mogu se napisati kao:

$$r_{1,2} = \sigma \pm j\omega_d = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

Prijelazni odziv za prigušeno oscilacijski slučaj dan pomoću $\omega_n$ i $\zeta$ postaje:

$$K_1 e^{\sigma t}\sin(\omega_d\, t+\phi) = K_1 e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\, t+\phi)$$

Iz gornjeg izraza može se uočiti da povećanje umnoška $\omega_n$ i $\zeta$ (tj. $\sigma$) ubrzava smirivanje oscilacija.

## Vremenska konstanta

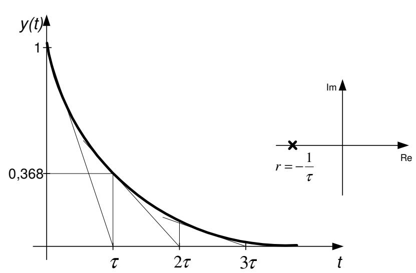
Sustav prvog reda uz pobudu jednaku nuli dan je homogenom d.j.:

$$\tau\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 0$$

Koeficijent $\tau$ u ovom slučaju može se nazvati vremenskom konstantom, a imati će jedinicu vremena (npr. sekunde).
Klasičnim rješenjem d.j. korijen karakteristične jednadžbe je $r = -1/\tau$, a prijelazni odziv prethodne d.j. u obliku je eksponencijalne funkcije:

$$y(t) = K\,e^{-\frac{1}{\tau}t}$$

Prijelazni odziv sustava prikazan je na slici uz početnu vrijednost *K* (koja je u ovom slučaju jednaka 1):

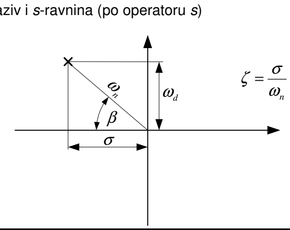



- Za vrijeme jednog intervala vremenske konstante $\tau$, odziv se smanjuje na 0.368 puta manju vrijednost od početne, pošto je $e^{-1} = 0.368$. Tako bi se, na primjer, za 5 vremenskih konstanti odziv smanjio na $0.368^5$ svoje početne vrijednosti, odnosno imao bi 0.68 % početne vrijednosti. Bio bi dakle, praktički nula (stoga se često uzima 5 vremenskih konstanti kao mjera dovoljno bržeg, odnosno sporijeg sustava kada je to potrebno). Teoretski, odziv nikada neće dostići nulu, no to nema praktične važnosti.
- Može se i drugim riječima definirati: vrijednost vremena kada se eksponent iznad *e* izjednači sa –1 zove se vremenska konstanta sustava.
- ako se promatra odziv na jediničnu odskočnu funkciju, tada je vremenska konstanta vrijeme potrebno da odziv sustava poprimi 0.632 puta konačne vrijednosti (ta vrijednost dobiva se iz $1 - e^{-1}$).
- U slučaju prigušeno oscilacijskog slučaja odziva vremenska konstanta odgovara realnom dijelu odziva $\sigma$, odnosno umnošku $\omega_n$ i $\zeta$: $$\tau = \frac{1}{|\sigma|} = \frac{1}{\zeta\,\omega_n}$$

- Važno je uočiti da što je korijen (pol) udaljeniji od ishodišta, to je vremenska konstanta kraća, a odziv sustava je brži.

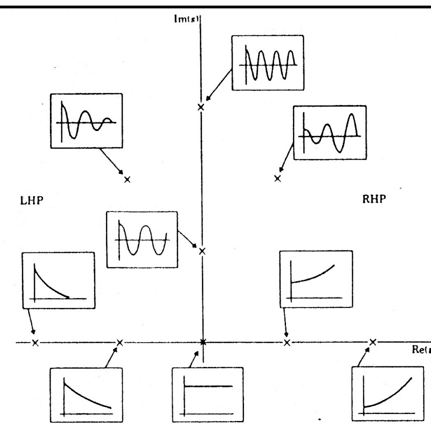
## Značajke sustava prikazane u Gaussovoj ravnini

- Prethodno definirani stupanj prigušenja $\zeta$ i neprigušena vlastita frekvencija $\omega_n$ značajke su koje određuju ponašanje dinamičkog sustava.
- Te se značajke mogu pokazati u Gaussovoj ravnini (kompleksna ravnina). Točke u ravnini predstavljaju korijene karakteristične jednadžbe, odnosno polove prijenosne funkcije, pa kompleksna ravnina dobiva naziv i *s*-ravnina (po operatoru *s*)




$$\zeta = \frac{\sigma}{\omega_n} = \cos\beta$$

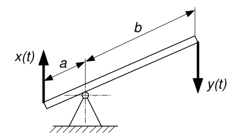
Ovisnost odziva o smještaju polova sustava



## OSNOVNI DINAMIČKI ČLANOVI

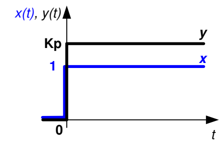
- Složeniji dinamički sustavi u pravilu se daju rastaviti na jednostavnije elemente, odnosno članove, što olakšava njihovo proučavanje.
- Osnovni dinamički članovi svrstavaju se prema tome kako pobuda djeluje na njih, pa postoje proporcionalni, integralni i derivacijski članovi, i označavaju se kao P, I i D.
- Osim toga, članovi se dijele i prema *kašnjenju*, odnosno broju integracija koje treba provesti da bi se dobila izlazna veličina. To odgovara broju spremnika energije, pa su osnovni članovi nultog, prvog ili drugog reda (npr. proporcionalni član $P_0$, $P_1$ ili $P_2$).
- Uz to se pojavljuje član sa mrtvim vremenom, koji se ne može svrstati po prethodnim kriterijima. Taj član naziva se i transportnim članom.
- Složeniji članovi, ili oni višeg reda, mogu se prikazati kao kombinacije osnovnih članova.
- *Dodaje se da je svrstavanje po članovim svojstvenije njemačkoj literaturi, uz nešto drugačije označavanje (npr.* $P_1$ *označava se sa* $PT_1$ gleid*), dok se u američkoj ne susreće tako često.*

## Proporcionalni član nultog reda - $P_0$

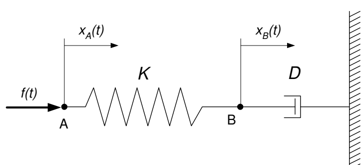



$$y(t) = \frac{b}{a} x(t) = K_P \, x(t)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = K_P$$

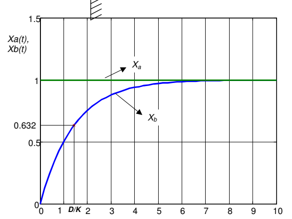



## Proporcionalni član prvog reda - $P_1$




$$\frac{D}{K}\frac{dx_B(t)}{dt} + x_B(t) = x_A(t)$$

$$x_B(t) = x_A(t)(1 - e^{-(K/D)t})$$



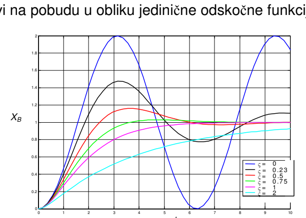

- Odziv $P_1$ člana ne može imati oscilacije, pošto nema izmjena energije među spremnicima, kojih ima samo jedan. U ovom primjeru to je opruga. Sa slike se vidi da odziv kasni, a kašnjenje ovisi o karakteristici opruge, te o otporu koji pruža prigušnik.
- Prijenosna funkcija $P_1$ člana općenito se može dati sa:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K_P}{\tau s + 1}$$

Primjeri $P_1$ člana su električni krug sa serijski spojenim otpornikom i kondenzatorom (RC), zatim jednostavan sustav prijelaza topline sa usredotočenim parametrima.

## Proporcionalni član drugog reda - $P_2$

- Primjeri su mehanički sustav s masom, prigušenjem i oprugom, prikazan, te električni sa otpornikom, svitkom i kondenzatorom (RLC), koji su opisani u poglavlju o matematičkom prikazu tehničkih sustava.
- Sustavi su opisani diferencijalnom jednadžbom 2. reda. Odzivi takvog sustava mogu biti oscilacijski ili aperiodski, ovisno o stupnju prigušenja sustava.
- Odzivi na pobudu u obliku jedinične odskočne funkcije:




Prijenosna funkcija $P_2$ člana općenito se može dati sa:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K_P}{s^2 + 2\zeta\,\omega_n\, s + \omega_n^2}$$

Stupanj prigušenja $\zeta$ i neprigušena vlastita frekvencija $\omega_n$ ovise o omjerima parametara sustava.

## Integralni član(ovi) - $I_0$ , $I_1$

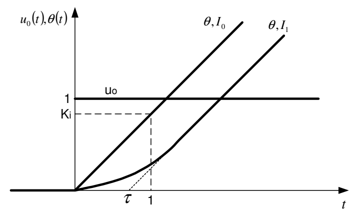
- Kod integralnog člana odziv sustava ovisi o integralu pobude, a označava se kao I član. Može biti nultog reda (bez kašnjenja), dakle $I_0$, ali može imati kašnjenje prvog reda, drugog reda, itd. Tada se označava sa $I_1$, $I_2$, ..
- Primjer integralnog člana jest istosmjerni elektromotor sa kutnim pomakom osovine kao izlaznom varijablom. Ako se pretpostavi da je struja armature konstanta, onda je kutna brzina osovine elektromotora proporcionalna naponu izvora $u_0$ (uz konstantni pomak za iznos *R i/K*).
- Ako je kutni pomak (zakret) $\theta$ osovine izlazna varijabla, onda je veza sa naponom izvora kao ulaznom varijablom dana putem njegovog integrala:

$$\theta(t) = K_i \int u_0(t)\,dt$$

To predstavlja $I_0$ član, koji je isključivanjem kašnjenja pretpostavljen kao idealan. $I_1$ član uključuje kašnjenje zbog momenta tromosti rotora i induktiviteta:

$$\tau \frac{d\theta(t)}{dt} + \theta(t) = K_i \int u_0(t)\,dt$$

Odziv $I_0$ i $I_1$ člana na pobudu u obliku jedinične odskočne funkcije:




Prijenosne funkcije:

$$G_{I0}(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K_i}{s} \qquad G_{I1}(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K_i}{s(\tau s + 1)}$$

## Derivacijski član(ovi) - $D_0$ , $D_1$

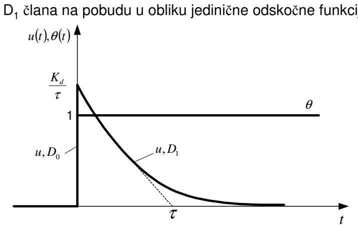
- Kod derivacijskog člana odziv sustava ovisi o derivaciji pobude, a označava se kao D član. Kao i I član, može biti nultog reda (bez kašnjenja), što se označava sa $D_0$. Može imati kašnjenje prvog reda, drugog reda, itd., a tada se označava sa $D_1$, $D_2$,
- Primjer derivacijskog člana može biti generator istosmjerne struje. To je preslikani problem istosmjernog elektromotora. Dakle, vrtnjom osovine generatora inducira se napon u električnom krugu. Ako se pretpostavi da je struja magnetiziranja konstanta, inducirani napon biti će proporcionalan broju okretaja, odnosno kutnoj brzini osovine. Ako je inducirani napon *u* izlazna varijabla, a ako se kao pobuda (ulazna varijabla) promatra zakret osovine $\theta$, međusobna veza je operacija derivacije:

$$u(t) = K_d \frac{d\theta(t)}{dt}$$

To predstavlja idealan derivacijski član zanemarivanjem kašnjenja uslijed momenta tromosti rotora i induktiviteta. $D_1$ član uključuje kašnjenje:

$$\tau \frac{du(t)}{dt} + u(t) = K_d \frac{d\theta(t)}{dt}$$

Odziv $D_0$ i $D_1$ člana na pobudu u obliku jedinične odskočne funkcije:

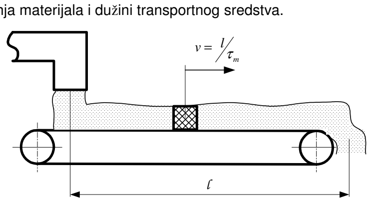



Prijenosne funkcije:

$$G_{D0}(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = K_d\, s \qquad G_{D1}(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K_d\, s}{\tau s + 1}$$

## Član s mrtvim vremenom - $T_m$

- Član s mrtvim vremenom pojavljuje se kada se materijal ili energija fizički premještaju, stoga se koristi i drugi naziv, transportni član, a označava se sa $T_m$.
- Primjer člana s mrtvim vremenom jest transportna traka za neki rasuti materijal. Od trenutka utovara do trenutka istovara određene cjeline materijala proći će neko vrijeme, koje se naziva mrtvim vremenom (*dead time*, *transportation lag*), a označava se $\tau_m$. Ono ovisi o brzini gibanja materijala i dužini transportnog sredstva.



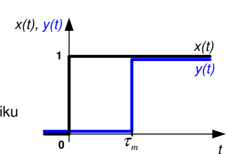

Veza izlazne varijable *y* i ulazne *x* člana s mrtvim vremenom može se izraziti slijedećim:

$$y(t) = x(t - \tau_m)$$

Prema teoremu pomaka Laplaceove transformacije, transformacija neke vremenske funkcije pomaknute za vrijeme $\tau_m$ jest , stoga je prijenosna funkcija člana s mrtvim vremenom slijedeća:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = e^{-\tau_m s}$$

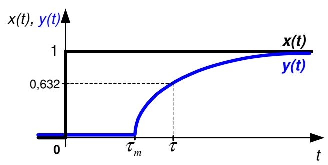
Odziv na pobudu u obliku odskočne funkcije:



Često procesi prijenosa materijala ili energije sadrže i obično kašnjenje prvog reda sa vremenskom konstantom $\tau$, pa se općenitije mogu izraziti prijenosnom funkcijom člana s mrtvim vremenom i kašnjenjem prvog reda:

$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{e^{-\tau_m s}}{\tau s+1}$$

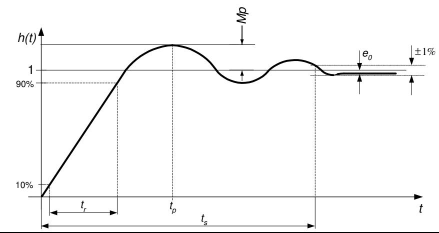
Odziv prethodnog člana pobudu u obliku jedinične odskočne funkcije jest:




# ZAHTJEVI KOD VREMENSKOG ODZIVA

## Osnovna svojstva odziva na odskočnu funkciju

- Da bi se odredili zahtjevi kod vremenskog odziva, može se koristiti pobuda u obliku odskočne funkcije (nije univerzalno pravilo, ali zahtjevi se najčešće definiraju upravo kao svojstva odziva na takvu pobudu)
- Na primjeru $P_2$ definirati će se svojstva odziva:




Gdje su:

- – $t_r$ vrijeme porasta (*rise time*) – najčešće označava vrijeme potrebno da odziv sustava poraste od 10% do 90% svoje konačne vrijednosti.
- – $t_s$ vrijeme smirivanja (*settling time*) – označava vrijeme potrebno da se prijelazni dio odziva smanji na neku malu vrijednost, tako da odziv poprimi gotovo ustaljenu vrijednost u stacionarnom stanju. Neka *mala* vrijednost može biti različito pretpostavljena, ovdje je ± 1% (može biti i do ± 5%).
- – $t_p$ vrijeme maksimalnog prebačaja (*peak magnitude time*) – označava vrijeme maksimalnog prebačaja.
- – $M_p$ maksimalni prebačaj (*peak magnitude*) – označava prebačaj odziva u postocima.
- – $e_0$ trajno regulacijsko odstupanje (*steady-state error*) – predstavlja regulacijsku pogrešku u stacionarnom stanju.

Vremena imaju vremenske jedinice, dok su $M_p$ i $e_0$ dani najčešće u postocima. Uz navedena svojstva može se dodati i mrtvo vrijeme sustava $\tau_m$, svojstveno sustavima reda višeg od dva.

Napominje se da zahtjevi mogu biti i drugačije definirani, pa je prilikom određivanja svojstava dinamičkog sustava potrebno obratiti pažnju i na definiranje samih svojstava.

## Svojstva odziva dana položajem polova

- Prethodno su dana svojstva kojima se može definirati odziv sustava. Sada će se ta svojstva povezati sa položajem polova sustava u Gaussovoj ravnini (neprigušena vlastita frekvencija $\omega_n$ i stupanj prigušenja $\zeta$ ) .
- Napomena: dane veze vrijede samo ograničeno (sustav sa konjugirano-kompleksnim parom polova i bez konačih nula), ali ipak općenito daju dobar uvid o povezanosti vremenskog odziva i položaja polova sustava.

$$t_r \approx \frac{1.8}{\omega_n}$$

$$t_s \approx \frac{4.6}{\zeta\,\omega_n}$$

$$M_p \approx 1-\frac{\zeta}{0.6} \quad za\ 0\le\zeta\le 0.6$$

Za željena svojstva odziva, iz prethodnog se dade pronaći gdje trebaju biti smješteni polovi sustava da bi se tražena svojstva postigla (ili nadmašila):

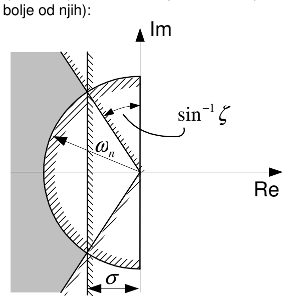
$$\omega_n \ge \frac{1.8}{t_r}$$

$$\sigma=\zeta\,\omega_n \ge \frac{4.6}{t_s}$$

$$\zeta \ge 0.6(1-M_p)$$

*Vremenske jedinice su sekunde, a vrijednosti $\omega_n$ i $\sigma$ su rad/s.*

Prethodne nejednadžbe mogu se nacrtati u Gaussovoj ravnini. Presjek sva tri uvjeta (osjenčano sivom) predstavlja rješenje (naime, polovi smješteni u sivoj zoni predstavljali bi sustav koji bi imao svojstva odziva prema zahtjevima, ili bolje od njih):



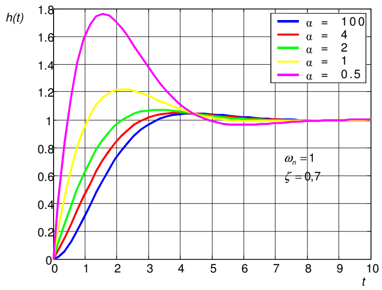

## Utjecaj nula na odzive

- Nule prijenosne funkcije su vrijednosti $s = n_i$ za koje je polinom brojnika prijenosne funkcije jednak nuli.
- Prethodno su razmatrani odzivi raznih dinamičkih članova, međutim utjecaj polova je određivao odziv.
- Nule sustava također imaju utjecaj na prijelazni odziv. Općenito, što je nula bliže ishodištu Gaussove ravnine, njen utjecaj na odzive je značajniji, i to tako da povećava maksimalni prebačaj $M_p$, a da pri tom bitno ne utječe na vrijeme smirivanja $t_s$.
- Vrlo značajan utjecaj imaju nule čije vrijednosti su manje od realnog dijela odziva polova ($\sigma = \zeta\,\omega_n$). Ako je vrijednost nule nekoliko puta veća od $\sigma$ (do 4 puta), još uvijek se zamjećuje povećanje maksimalnog prebačaja, posebno za slabije prigušene članove.

Na primjeru dinamičkog člana sa dva konjugirano-kompleksna pola, te sa jednom nulom, razmotriti će se utjecaj nule na odzive.

$$G(s)=\frac{\frac{1}{\alpha\zeta\omega_n}s+1}{\frac{1}{\omega_n^2}s^2+\frac{2\zeta}{\omega_n}s+1}$$

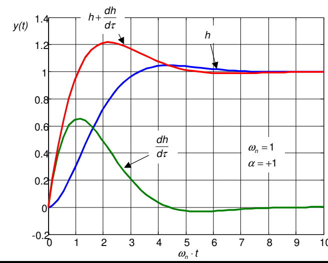
Dakle, položaj nule jest $n = -\alpha\zeta\omega_n$, odnosno $n = -\alpha\sigma$.




Da bi se objasnio utjecaj nula na odzive, prethodna prijenosna funkcija može se preurediti uvodeći normaliziranu frekvenciju, odnosno zamjenjujući $s/\omega_n$ sa $s$ (tada je odziv u normaliziranom vremenu $\tau = \omega_n t$). Osim toga, prijenosna funkcija može se rastaviti na dva dijela, gdje onaj desni predstavlja derivaciju onog *originalnog*, lijevog dijela (jer je $s\,X(s) \equiv dx(\tau)\,/\,d\tau$ :

$$G(s)=\frac{(1/\alpha\zeta)\,s+1}{s^2+2\zeta s+1}=\frac{1}{s^2+2\zeta s+1}+\frac{1}{\alpha\zeta}\frac{s}{s^2+2\zeta s+1}$$

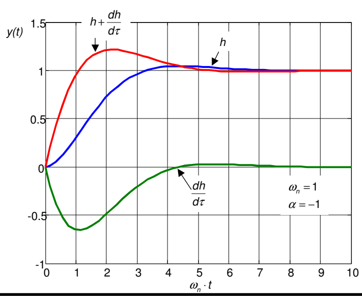
Odziv na pobudu u obliku odskočne funkcije prikazan je kao zbroj dvaju odziva. Očito je, što je manji $\alpha$ (nula bliže ishodištu u Gaussovoj ravnini), njen utjecaj na maksimalni prebačaj je veći:




## Fazno-neminimalni sustav

Kao posebni slučaj može se razmotriti sustav dan sa prethodnom prijenosnom funkcijom, ali čija nula je smještena u desnom dijelu Gaussove ravnine (može se reći da sustav ima pozitivnu nulu). Takvi sustavi nazivaju se fazno-neminimalni.

U ovom slučaju se ukupni odziv dobiva tako da se derivacija *originala* oduzima:




## Utjecaj dodatnih polova na odzive

U svjetlu razmatranja utjecaja nula na odzive $P_2$ člana u prethodna dva poglavlje, može se ispitati i utjecaj dodatnog pola. Dakle, $P_2$ članu dodati će se jedan $P_1$ član, što čini u stvari jedan $P_3$ član:

$$G(s)=\frac{1}{\left(\frac{1}{\alpha\zeta\omega_n}s+1\right)\left(\frac{1}{\omega_n^2}s^2+\frac{2\zeta}{\omega_n}s+1\right)}$$

Dodatni pol je $p = -\alpha\zeta\omega_n$, odnosno $p = -\alpha\sigma$ (što je $\alpha$ veći, to je pol udaljeniji od ishodišta Gaussove revnine).

Za $\alpha = 1$, dodatni pol ima iznos realnog dijela $P_2$ člana $\sigma$.

Za $\alpha > 1$, dodatni pol dalji je od $\sigma$

Za $\alpha < 1$, dodatni pol bliži je ishodištu od $\sigma$.

Što je dodatni pol dalji od ishodišta (što je $\alpha$ veći), to je utjecaj na odzive manji. Što je dodatni pol bliži, povećava se vrijeme porasta $t_r$ odziva sustava u odnosu na sustav bez dodatnog pola ($P_2$ član).
Ako je vrijednost dodatnog pola unutar 4 $\sigma$, vrijeme porasta se zamjetno povećava. Uz to smanjuje se maksimalni prebačaj.