



# Osnove aerodinamike i mehanike leta helikoptera

---

*odabrana predavanja kolegija Helikopteri I*

Milan Vrdoljak

Ovaj tekst pripremljen je za potrebe nastave na Studiju zrakoplovstva, Fakulteta strojarstva i brodogradnje (FSB) Sveučilište u Zagrebu.



Copyright © 2007., 2017. dr. sc. Milan Vrdoljak, Zavod za zrakoplovno inženjerstvo, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Sveučilište u Zagrebu  
e-mail: [milan.vrdoljak@fsb.hr](mailto:milan.vrdoljak@fsb.hr)

Ovo je djelo dano na korištenje pod licencom *Imenovanje-Nekomercijalno-Bez prerada 4.0 međunarodna (CC BY-NC-ND 4.0)*. Licenca je dostupna na <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>.

Copyright © 2007., 2017. dr. sc. Milan Vrdoljak, Department of Aeronautical Engineering, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture, University of Zagreb  
e-mail: [milan.vrdoljak@fsb.hr](mailto:milan.vrdoljak@fsb.hr)

This work is shared under the licence *Attribution-NonCommercial-NoDerivatives 4.0 International (CC BY-NC-ND 4.0)*. Licenca is available at <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>.

Verzija: 0.23/ 16. listopada 2017.

Sistem: L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X 2<sub>ε</sub>

# Sadržaj

<b>Predgovor</b>	<b>V</b>
<b>Popis oznaka</b>	<b>VI</b>
<b>1. Uvod</b>	<b>1</b>
1.1. Složenost slike strujanja oko helikoptera . . . . .	1
<b>2. Vertikalni let</b>	<b>5</b>
2.1. Teorija diska – teorija idealnog rotora . . . . .	5
2.1.1. Osnovne jednačbe teorije diska . . . . .	6
2.1.2. Teorija diska u lebdenju . . . . .	9
2.1.3. Vertikalno spuštanje . . . . .	11
2.1.4. Karakteristike inducirane brzine za vertikalni let . . . . .	14
2.1.5. Potrebna snaga za vertikalni let . . . . .	14
2.1.6. Bezdimenzionalni koeficijenti . . . . .	15
2.1.7. Efekti ne-idealnog rotora . . . . .	16
2.1.8. Učinkovitost rotora u lebdenju . . . . .	17
2.1.9. Autorotacija . . . . .	17
2.1.10. O rezultatima teorije diska za vertikalni let . . . . .	18
2.2. Teorija elementarnog kraka rotora u vertikalnom letu . . . . .	19
2.2.1. Osnove teorije elementarnog kraka . . . . .	19
2.2.2. Aproksimacija za konstantnu vertikalnu brzinu . . . . .	22
2.2.3. Kombinirana teorija elementarnog kraka i teorije diska . . . . .	25
Primjer 1. – Raspodjela koeficijenta vertikalne brzine $\lambda$ . . . . .	26
2.2.4. Idealni kut uvijanja . . . . .	28
2.2.5. Srednja vrijednost koeficijenta sile uzgona za krak . . . . .	30
2.2.6. Koeficijent gubitaka na vrhu kraka . . . . .	30
2.2.7. Utjecaj stlačivosti . . . . .	32
<b>3. Dinamika rotora</b>	<b>33</b>
3.1. Uvod . . . . .	33
3.2. Ravnoteža u zglobu mahanja . . . . .	35
3.3. Jednačbe gibanja mahanja kraka . . . . .	37
3.4. Postavni kut kraka – upravljanje rotorom . . . . .	40
3.5. Referentne osi rotora . . . . .	42
3.5.1. Transformacija kutova između referentnih ravnina . . . . .	42

<b>4. Horizontalni let</b>	<b>45</b>
4.1. Teorija diska za horizontalni let . . . . .	45
4.1.1. Inducirana brzina u horizontalnom letu . . . . .	46
4.1.2. Strujanje pod nultim napadnim kutom . . . . .	47
4.1.3. Snaga na rotoru . . . . .	48
4.2. Teorija elementarnog kraka za horizontalni let . . . . .	50
4.2.1. Sile na kraku . . . . .	50
4.2.2. Polje inducirane brzine . . . . .	51
4.2.3. Aproksimacija koeficijenata rotora u horizontalnom letu . . . . .	53
4.2.4. Aproksimacija kuta mahanja . . . . .	57
<b>5. Ravnotežni let</b>	<b>59</b>
5.1. Opis problema . . . . .	59
5.1.1. Oblici rješenja ravnotežnog leta . . . . .	61
5.2. Jednadžbe ravnotežnog leta . . . . .	61
5.2.1. Jednadžbe uzdužnog ravnotežnog leta . . . . .	62
Primjer 2. – Ravnotežni let transportnog helikoptera . . . . .	66
5.3. Model gibanja središta mase helikoptera u ravnotežnom letu . . . . .	70
<b>6. Performanse helikoptera</b>	<b>71</b>
6.1. Lebdenje i vertikalni let . . . . .	71
6.2. Horizontalni let . . . . .	72
Primjer 3. – Potrebna snaga u horizontalnom letu . . . . .	72
6.3. Penjanje u napredujućem letu . . . . .	75

# Predgovor

Ovaj tekst namjenjen je studentima zadnje godina Studija zrakoplovstva kao dio nastavnog materijala za kolegij Helikopteri I. U danom vremenskom okviru predavanja dan je pregled i postavke osnovna aerodinamike te dinamike rotora. Pored toga kratko su prezentirane osnovne ravnotežnog leta i performansi helikoptera.

Zagreb, 16. listopada 2017.

Autor



# Popis oznaka

$A$	površina diska rotora, [m <sup>2</sup> ] . . . . .	7
$a_0$	kut konusa, <i>engl.</i> coning angle . . . . .	37
$a_{1_s}$	uzdužni kut mahanja za SNP ravninu . . . . .	59
$A_1$	bočni ciklinčni postavni kut, kosinusni koeficijent prvog harmonika . . . . .	40
$A_b$	ukupna površina $N$ krakova rotora, $A_b = \sigma A$ , [m <sup>2</sup> ] . . . . .	71
$a_1$	uzdužni ciklinčni kut mahanja, kosinusni koeficijent prvog harmonika . . . . .	38
$b_{1_s}$	bočni kut mahanja za SNP ravninu . . . . .	59
$B_1$	uzdužni ciklinčni postavni kut, sinusni koeficijent prvog harmonika . . . . .	40
$b_1$	bočni ciklinčni kut mahanja, sinusni koeficijent prvog harmonika . . . . .	38
$B$	koeficijent gubitaka na vrhu kraka . . . . .	30
$c_d$	koeficijent sile otpora profila kraka . . . . .	21
$C_H$	koeficijent sile otpora rotora . . . . .	55
$C_{H_0}$	koeficijent sile otpora profila rotora . . . . .	55
$C_{H_i}$	koeficijent sile inducirano gubitaka rotora . . . . .	55
$c_l$	koeficijent sile uzgona profila kraka . . . . .	21
$\bar{C}_L$	srednja vrijednost koeficijenta sile uzgona za krak . . . . .	30
$C_P$	koeficijent snage . . . . .	16
$C_Q$	koeficijent okretnog momenta . . . . .	16
$C_{Q_0}$	koeficijent okretnog momenta rotora od otpora profila . . . . .	56
$C_{Q_i}$	koeficijent okretnog momenta rotora od inducirano gubitaka . . . . .	56
$C_T$	koeficijent pogonske sile . . . . .	16
$D$	sila otpora, na kraku, [N] . . . . .	21
$DL$	opterećenje diska, <i>engl.</i> disc loading, $DL = \frac{T}{A}$ , [Pa] . . . . .	10
$e$	bezdimenzionalna udaljenost zgloba mahanja kraka od osi rotacije . . . . .	35
$F$	Prandtlov koeficijent korekcije inducirane brzine, Prandtlove metode gubitaka na vrhu kraka . . . . .	31
$f$	ekvivalentna površina ravne ploče, [m <sup>2</sup> ] . . . . .	72
$F_C$	centrifugalna sila na kraku rotora, [N] . . . . .	36
$F_x$	sila na kraku u ravnini rotacije, [N] . . . . .	20
$F_z$	sila na kraku duž osi rotacije, [N] . . . . .	20
$H$	sila otpora rotora, [N] . . . . .	54
$i_M$	kut osi vratila glavnog rotora prema $z$ osi k.s. letjelice . . . . .	65
$k$	koeficijent empirijske korekcije koeficijenta snage za horizontalni let . . . . .	57
$k_x$	koeficijent uzdužne promjene inducirane brzine prema linearnom modelu . . . . .	52
$k_y$	koeficijent bočne promjene inducirane brzine prema linearnom modelu . . . . .	52

## VIII POPIS OZNAKA

$L$	sila uzgona, na kraku, [N] . . . . .	21
$l$	udaljenosti od vrha letjelice, [m] . . . . .	62
$L$	moment valjanja, duž osi $x$ koordinatnog sustava letjelice, [Nm] . . . . .	62
$\frac{dL}{dy}$	lokalni koeficijent sile uzgona kraka rotora . . . . .	36
$\Delta l$	udaljenosti od središta mase letjelice, npr. $\Delta l_v = l_v - l_m$ , [m] . . . . .	62
$\dot{m}$	maseni protok, [kg/s] . . . . .	6
$M$	moment propinjanja, duž osi $y$ koordinatnog sustava letjelice, [Nm] . . . . .	62
$M_A$	aerodinamički moment kraku rotora u zglobu mahanja, [Nm] . . . . .	36
$M_C$	centrifugalni moment kraka rotora u zglobu mahanja, [Nm] . . . . .	36
$\bar{m}$	masa kraka po jedinici duljine, [kg/m] . . . . .	35
$N$	broj krakova rotora . . . . .	21
$N$	moment skretanja, duž osi $y$ koordinatnog sustava letjelice, [Nm] . . . . .	62
$P$	snaga, [W] . . . . .	8
$PL$	opterećenje diska po jedinici snage, <i>engl.</i> power loading, $PL = \frac{T}{P}$ , [N/W] . . . . .	10
$Q$	okretni moment rotora, [Nm] . . . . .	21
$R$	najveći radijus kraka rotora, [m] . . . . .	19
$\bar{r}$	bezdimenzionalni radijus kraka, $\bar{r} = \frac{y}{R}$ . . . . .	21
$T$	pogonska sila glavnog rotora, [N] . . . . .	7
$U$	ukupna brzina na elementarnom presjeku kraka, [m/s] . . . . .	20
$U_t$	tangencijalna komponenta brzine na elementarnom presjeku kraka, [m/s] . . . . .	20
$U_z$	vertikalna komponenta brzine na elementarnom presjeku kraka, [m/s] . . . . .	20
$V_c$	vertikalna brzina penjanja, [m/s] . . . . .	6
$v_h$	inducirana brzina na disku za lebdenje, [m/s] . . . . .	10
$v_i$	inducirana brzina na disku, [m/s] . . . . .	8
$W$	težina helikoptera, [N] . . . . .	56
$X$	aksijalna sila, duž osi $x$ koordinatnog sustava letjelice, [N] . . . . .	62
$Y$	bočna sila, duž osi $y$ koordinatnog sustava letjelice, [N] . . . . .	62
$y$	radijalna koordinata na kraku rotora, [m] . . . . .	19
$Z$	normalna sila, duž osi $z$ koordinatnog sustava letjelice, [N] . . . . .	62
$\alpha$	napadni kut lokalnog presjeka kraka . . . . .	20
$\alpha_r$	napadni kut diska u horizontalnom letu, pozitivan kada je disk nagnut prema naprijed . . . . .	45
$\beta$	kut mahanja kraka, <i>engl.</i> blade flapping angle . . . . .	36
$\beta$	kut klizanja . . . . .	61
$\eta_M$	koeficijent učinkovitosti rotora u lebdenju, <i>engl.</i> figure of merit . . . . .	17
$\gamma$	Lockov broj, vidi jednadžbu (4.10) . . . . .	58
$\gamma$	kut penjanja . . . . .	65
$\kappa$	koeficijent inducirane snage . . . . .	16
$\lambda$	koeficijent vertikalne brzine struje . . . . .	21
$\lambda_0$	srednja vrijednost koeficijenta inducirane brzine u linearnom modelu . . . . .	52
$\lambda_i$	koeficijent inducirane brzine, koef. vertikalne brzine $\lambda$ za lebdenje . . . . .	16
$\mu$	koeficijent napredovanja, vidi jednadžbu (3.1) . . . . .	33
$\mu_x$	koeficijent napredovanja paralelan ravnini diska . . . . .	52
$\mu_z$	koeficijent napredovanja okomit na ravninu diska . . . . .	52
$\Omega$	kutna brzina rotora, [rad/s] . . . . .	19



$\Omega R$	tangencijalna brzina na vrhu kraka, referentna brzina, [m/s] . . . . .	21
$\Phi$	kut valjanja helikoptera . . . . .	61
$\phi$	kut nagiba struje, <i>engl.</i> inflow angle . . . . .	20
$\psi$	kut položaja kraka rotora, azimutni kut . . . . .	33
$\rho$	gustoća, [kg/m <sup>3</sup> ] . . . . .	6
$\sigma$	koeficijenta ispunjenosti rotora, <i>engl.</i> solidity ratio . . . . .	17
$\theta$	postavni kut lokalnog presjeka kraka, kut uvijanja, <i>engl.</i> pitch angle . . . . .	20
$\Theta$	kut propinjanja helikoptera . . . . .	61
$\theta_0$	kolektivni postavni kut . . . . .	23
$\theta_{0.75}$	referentni postavni kut za referentni radijus $3/4R$ . . . . .	23
$\theta_{0T}$	kolektivni postavni kut repnog rotora . . . . .	59
$\theta_{tw}$	linearni koeficijent promjene postavnog kuta po rasponu . . . . .	23

### Indeksi

$f$	tijelo, trup helikoptera . . . . .	62
$h$	horizontalni rep . . . . .	62
$h$	lebdenje, <i>engl.</i> hover . . . . .	10
$i$	inducirano . . . . .	8
$M$	glavni rotor . . . . .	62
$T$	repni rotor . . . . .	62
$v$	vertikalni rep . . . . .	62
$w$	krilo . . . . .	62

### Kratice

CP	upravljačka ravnina, <i>engl.</i> control plane . . . . .	42
IGE	let (lebdenje) u blizini tla, <i>engl.</i> in ground effect . . . . .	72
NFP	ravnina bez promjene postavnog kuta, <i>engl.</i> no feathering plane . . . . .	42
OGE	let (lebdenje) daleko od tla, <i>engl.</i> out of ground effect . . . . .	72
SA	os rotacije, os vratila motora, <i>engl.</i> shaft axis . . . . .	42
SNP	ravnina okomita na os rotacije, os vratila motora, <i>engl.</i> shaft normal plane . . . . .	42
TPP	ravnina vrhova krakova rotora, <i>engl.</i> tip path plane . . . . .	42

**X** POPIS OZNAKA

# Poglavlje 1.

## Uvod

Naglasak u ovom tekstu je na opisu aerodinamike rotora: u vertikalnom i horizontalnom napredujućem letu. Pri tome se primjenjuju dvije osnovne teorije: teorije diska i teorije elementarnog kraka. Zbog ograničenog opsega predavanja bit će izostavljene detaljnije analize te će se uvesti određene pretpostavke kako bi se dobio generalni uvid u razmatrane pojave. Tako će se npr. krakovi razmatrati samo kao kruta tijela, pojednostavljene dinamike te uz pretpostavku položaja zgloba mahanja na osi rotacije. Razmatrat će se gibanje mahanja, dok se gibanje zabacivanja i uvijanja kraka neće razmatrati. Za definiranje polja inducirane brzine na rotoru primjenjen je isključivo linearni model.

U poglavlju 5. dan je opis ravnotežnog leta, te su postavljene jednadžbe ravnotežnog gibanja helikoptera: gibanja središta mase. U zadnjem poglavlju analizirane su odabrane performanse u horizontalnom letu (potrebna snaga). U ova dva poglavlja helikopter se razmatra kao letjelica u cjelini, za razliku od prethodnih poglavlja gdje je težište analize na rotoru.

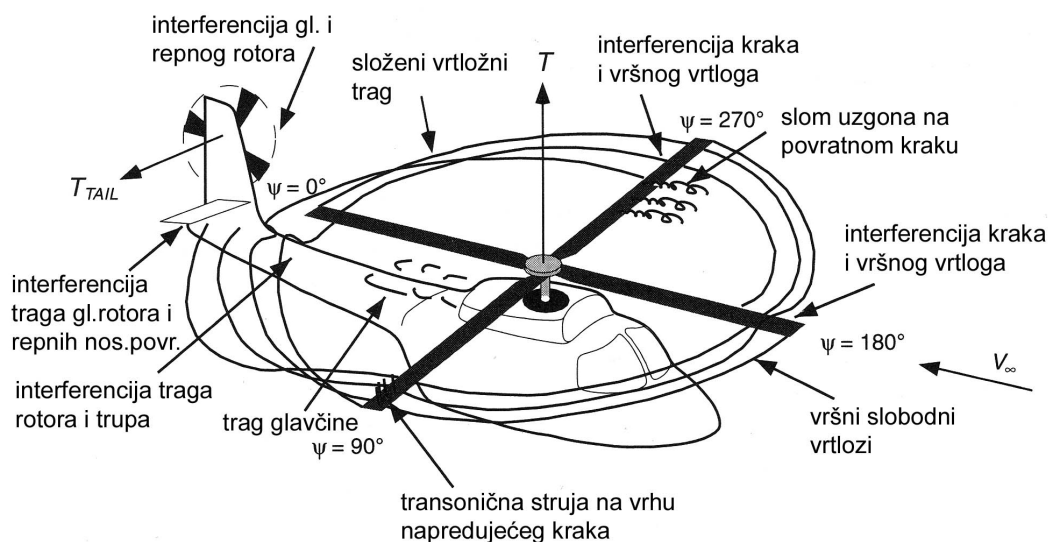
Kroz tekst se nastojalo da uvedene oznake ne odudaraju od ranije usvojenih oznaka (iz kolegija Aerodinamike, Mehanike leta), no zbog kompleksne geometrije, opisa gibanja krakova rotora, te aerodinamike krakova, aerodinamike cijele letjelice, . . . , u nekim situacijama nije bilo moguće izbjeći primjenu istih oznaka za dvije iste veličine. Najvećim dijelom oznake prate NACA notaciju, a detaljno su opisane u “Popisu oznaka”. Pri tome se oznake mogu preklapati između dvije cjeline: dinamika i aerodinamika rotora (vertikalni i horizontalni let); te mehanika leta – ravnotežni let i performanse. Karakterističan je primjer napadnog kuta rotora koji je u poglavlju horizontalnog leta suprotnog predznaka od usvojene notacije i notacije primijenjene u poglavlju o ravnotežnom letu.

### 1.1. Složenost slike strujanja oko helikoptera

Značaj rotora za let helikoptera je višestruk. Pogonska sila rotora omogućava savladavanje težine za što je kod aviona sila uzgona fiksnih nosećih površina. Pored toga pogonska sila rotora predstavlja propulzivnu silu što je kod aviona predstavljala pogonska sila motora (mlaznog ili sila na propeleru). Iz mehanike leta aviona poznato je da se promjena smjera gibanja realizira promjenom ravnine sile uzgona. I za tu funkciju zadužen je rotor helikoptera: promjenom smjera pogonske sile mijenja se smjer gibanja

helikoptera.

Složena slika strujanja svoj izvor ima u samom rotoru (slika 1.1.). Ukoliko se razmatra samo horizontalni let kod kojeg se uz brzine od rotacije na krakovima rotora pridodaje i brzina horizontalnog leta helikoptera može se uočiti da postoji zona u kojoj je strujanje suprotnog smjera od neporemećene struje (što će biti kasnije detaljnije pokazano).



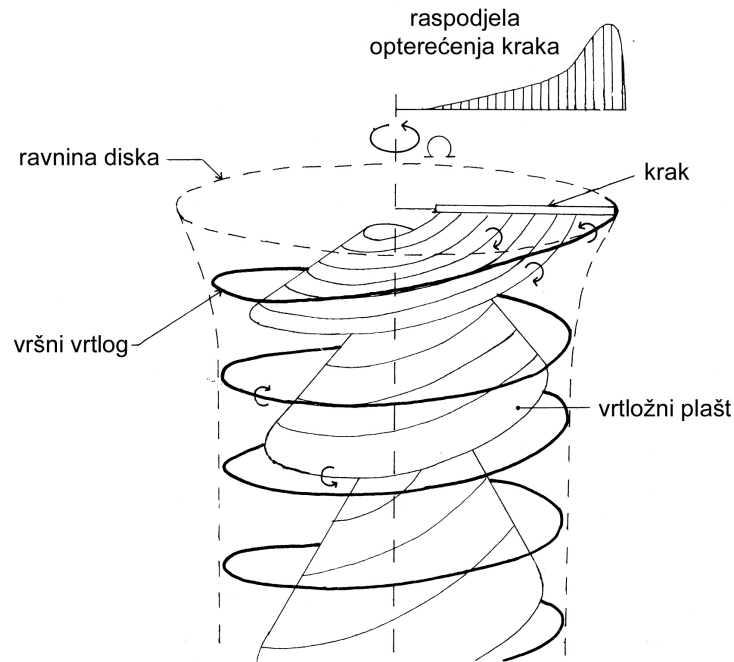
Slika 1.1.: Osnovne pojave stvarne slike strujanja oko helikoptera

Nadalje, za razliku od fiksnih nosećih površina koje imaju relativno uniformnu raspodjelu cirkulacije, dakle opterećenja po rasponu kod lopatice rotora opterećenje je značajnije koncentrirano u blizini vrhova čime se stvaraju koncentrirani vrtlozi relativno jače cirkulacije (slika 1.2.). Takvi vršni vrtlozi formiraju se na izlaznim rubovima svih lopatica, te ih napuštaju u približno helikoidnim trajektorijama.

Upravo ovakvi složeni vrtlozi koji se formiraju iza svake lopatice rotora i pored kojih te lopatice prolaze i više puta čine tu bitnu razliku u tragu od slike vrtložnog traga iza aviona fiksnih nosećih površina (da se podsjetimo: slobodni vrtlozi, napuštajući izlazni rub noseće površine, udaljavaju se i time se smanjuje utjecaj na samu noseću površinu ili neke druge komponente konfiguracije aviona, npr. repnih nosećih površina). Za detaljnu analizu traga rotora primjenjuje se teorija vrtloga no pri tome potrebno je poznavati geometriju traga za što se koristi nekoliko metoda: metoda predodređenog traga (*engl.* prescribed wake) ili metoda slobodnog traga (*engl.* free wake).

Na krakovima, prolazeći u ponovnim rotacijama kroz izrazito vrtložnu struju, induciraju se izrazito promjenjive brzine po smjeru i intenzitetu uslijed čega dolazi i do promjenjive pogonske sile (po smjeru i intenzitetu) što je izvor vibracija na helikopteru i izrazite buke.

Dodatne komplikacije nastupaju sa značajnijim utjecajem stlačivosti i pojavom lokalnih udarnih valova – ukoliko se u horizontalnom letu dostižu visoke lokalne brzine  $Ma_{cr}$  i veće (na vrhovima lopatica). U takvim slučajevima buka je još više izražena. S druge strane, na kraku u povratku  $\psi \approx 270^\circ$  lokalne brzine (rezultanta brzine od rotacije



Slika 1.2.: Tipična raspodjela opterećenja i trag za rotor u lebdenju

i brzine leta helikoptera) mogu dosegnuti vrlo velike napadne kutove dovodeći do sloma uzgona (dinamički slom uzgona, *engl.* dynamic stall)<sup>1</sup>. Ova pojava je odgovorna za ograničavanje horizontalnog leta i manevarskih sposobnosti helikoptera, kao i za pojavu dodatnih vibracija i buke.

U konačnici značajan je i utjecaj interferencija traga rotora i preostalih dijelova konfiguracije helikoptera.

<sup>1</sup>Zanimljivo je primjetiti da se kod aviona slom uzgona javlja kod malih brzina za razliku od helikoptera kod kojih je ta pojava karakteristična za velike brzine leta.

#### 4 Poglavlje 1. Uvod

## Poglavlje 2.

# Vertikalni let

Optjecanje helikoptera strujom zraka izuzetno je složeno i u općem slučaju optjecanje je nesimetrično s obzirom na rotor. Za početnu analizu od interesa je krenuti od jednostavnijeg slučaja strujanja: osnosimetrično strujanje koje se javlja kod lebdenja, penjanja ili spuštanja – ukratko vertikalnog leta.

Danas, i pored svih naprednih matematičkih modela strujanja oko rotora nije moguće precizno procijeniti performanse u lebdenju. No osnovne zakonitosti vertikalnog leta mogu se analizirati jednostavnim pristupom. Prvi i najjednostavniji je primjenom teorije diska.

### 2.1. Teorija diska – teorija idealnog rotora

Prilikom lebdenja rotor helikoptera stvara pogonsku silu provlačenjem stupca zraka nadole kroz ravninu rotora. Analitički opis ovog strujanja može se dati poznatim jednadžbama o očuvanju mase, količine gibanja i energije. Takav pristup poznat je pod nazivom teorija diska (teorija količine gibanja rotora, *engl.* momentum theory). Temelje ove teorije postavio je Rankine 1865<sup>1</sup>, a koju je detaljnije razvio Froude, te potom i Glauert primijenivši je na avionske propelere.

Ovom teorijom rotor helikoptera opisuje se kao beskonačno tanki disk (aktuator disk) preko kojeg se statički tlak skokovito mijenja. Pretpostavke teorije diska su:

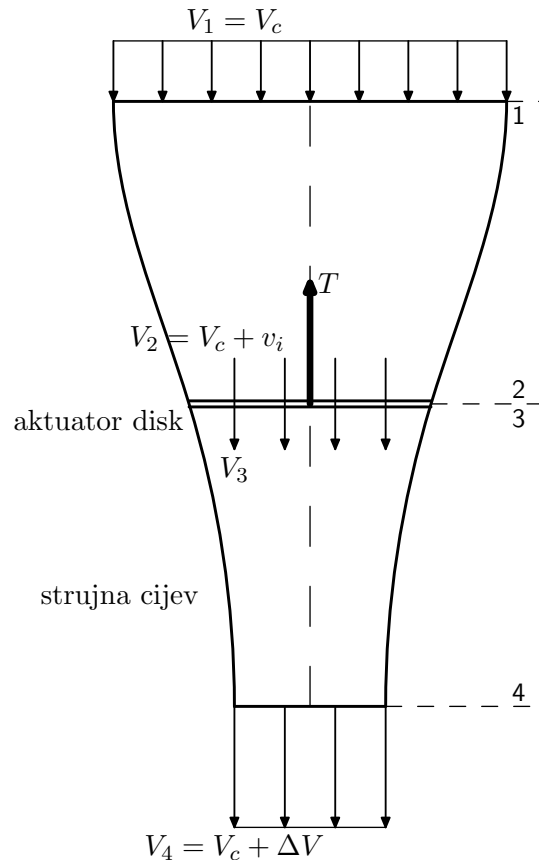
- brzina na disku je konstantna,
- tlak na disku je konstantan,
- rotacija struje zraka koji prolazi kroz rotor je zanemarena,
- struja zraka koja prolazi kroz propeler odvajaju se od okolnog zraka zamišljenom strujnom cijevi,
- strujanje je nestlačivo.

Promatramo rotor za slučaj *vertikalnog penjanja* i pripadajuću strujnu cijev prema slici (2.1.). Pri tome analiziramo presjeke 1 (dovoljno daleko iznad diska), 2 (neposredno

---

<sup>1</sup>koju je primijenio na brodske propelere

iznad diska), 3 (neposredno ispod diska) i 4 (dovoljno daleko ispod diska) s pripadajućim veličinama: tlakom  $p$ , površinom  $A$  i brzinom  $V$ . Brzina vertikalnog penjanja helikoptera  $V_c$  jednaka je brzini zraka koji nastrojava kroz presjek 1:  $V_c = V_1$ .



Slika 2.1.: Idealni rotor: aktuator disk i strujna cijev za slučaj vertikalnog penjanja

### 2.1.1. Osnovne jednadžbe teorije diska

#### Jednadžba kontinuiteta

Za vertikalno penjanje i pretpostavljenu strujnu cijev sa slike (2.1.) primjenjiva je jednadžba kontinuiteta kojom se  $\dot{m}$  maseni protok, odnosno masa zraka koja prolazi kroz rotor u jedinici vremena definira da je konstantan. Ukoliko se jednadžba kontinuiteta primjeni na rotor skiciran na slici (2.1.) za presjeka 1, 2, 3 i 4 može se zapisati

$$\dot{m} = \rho_1 A_1 V_1 = \rho_2 A_2 V_2 = \rho_3 A_3 V_3 = \rho_4 A_4 V_4 . \quad (2.1)$$

Budući da je pretpostavljeno nestlačivo strujanje gornja jednadžba kontinuiteta ima oblik

$$A_1 V_1 = A_2 V_2 = A_3 V_3 = A_4 V_4 . \quad (2.2)$$



Ako za površinu diska vrijedi  $A = A_2 = A_3$  iz jednadžbe (2.2) slijedi da se brzina struje pri prolasku kroz sami disk ne mijenja

$$V_2 = V_3. \quad (2.3)$$

### Jednadžba očuvanja količine gibanja

Rotor uzima određenu količinu zraka iznad njega koja se prolaskom kroz disk ubrzava prema dole. Na rotor, odnosno dovoljno ispred njega (u presjeku 1) nastupaju struja neporemećenog zraka brzinom penjanja  $V_c = V_1$  koja se nakon prolaska kroz rotor ubrza za iznos  $\Delta V = V_4 - V_1 = V_4 - V_c$ . Prema jednadžbi očuvanja količine gibanja može se reći da je brzina promjene količine gibanja jednaka pogonskoj sili rotora.

Za ovu analizu rotora koja predstavlja jednodimenzionalno strujanje u stacionarnim uvjetima, vrijedi da je produkt masenog protoka i promjene brzine struje kroz rotor jednak brzini promjene količine gibanja

$$T = \dot{m}\Delta V. \quad (2.4)$$

U skladu s ranijom definicijom masenog protoka (2.1), pogonska sila se može zapisati kao

$$T = \rho A_2 V_2 (V_4 - V_1). \quad (2.5)$$

### Bernulijeva jednadžba

Za slučaj nestlačivog strujanja duž strujnice za presjke 1 i 2 (slika 2.1.) može se primijeniti Bernulijeva jednadžba

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^2, \quad (2.6)$$

kao i za presjke 3 i 4

$$p_3 + \frac{1}{2}\rho V_3^2 = p_4 + \frac{1}{2}\rho V_4^2. \quad (2.7)$$

Kako je atmosferski tlak upravo jednak tlaku na presjecima 1 i 4:  $p_a = p_1 = p_4$  te je brzina na samom disku rotora  $V_2 = V_3$  slijedi zbrajanjem (2.6) i (2.7)

$$p_3 - p_2 = \frac{1}{2}\rho(V_4^2 - V_1^2). \quad (2.8)$$

Pogonska sila na rotoru jednaka je umnošku razlike tlaka i površine diska rotora

$$T = A(p_3 - p_2) = \frac{1}{2}\rho A_2(V_4^2 - V_1^2). \quad (2.9)$$

Izjednačavanjem izraza (2.5) i (2.9) dobiva se da je brzina struje zraka na disku rotora

$$V_2 = \frac{1}{2}(V_4 + V_1). \quad (2.10)$$

Promotrimo povećanje brzine između presjeka 1 i 2 primjenom relacije (2.10)

$$v_i = V_2 - V_1 = \frac{1}{2}(V_4 + V_1) - V_1 = \frac{1}{2}(V_4 - V_1) = \frac{1}{2}\Delta V$$

i između presjeka 3 i 4 primjenom (2.3) i (2.10)

$$V_4 - V_3 = V_4 - V_2 = V_4 - \frac{1}{2}(V_4 + V_1) = \frac{1}{2}(V_4 - V_1) = \frac{1}{2}\Delta V = v_i .$$

Dakle teorija diska pokazuje da je povećanje brzine struje zraka daleko iza diska dva puta veće od povećanja brzine na samom disku

$$\begin{aligned} V_2 = V_3 = V_1 + \frac{1}{2}\Delta V = V_1 + v_i , \\ V_4 = V_1 + \Delta V = V_1 + 2v_i . \end{aligned} \quad (2.11)$$

Brzinu  $v_i$  nazivamo inducirana brzina na disku.

### Jednadžba očuvanja energije

Potrebna snaga na rotoru jednaka je povećanju kinetičke energije masenog protoka zraka kroz rotor

$$P = \frac{1}{2}\dot{m}[(V_c + \Delta V)^2 - V_c^2] \quad (2.12)$$

$$P = \dot{m}\Delta V(V_c + \frac{1}{2}\Delta V) = \dot{m}\Delta V(V_c + v_i) .$$

Primjenom izraza (2.4) za pogonsku silu rotora može se pokazati da je potrebna snaga rotora

$$\begin{aligned} P = \dot{m}\Delta V(V_c + v_i) = T \cdot (V_c + v_i) = \\ = TV_c + Tv_i = TV_c + \frac{1}{2}T\Delta V \end{aligned} \quad (2.13)$$

jednaka zbroju dvije komponente:

- korisne snage koju čini produkt pogonske sile rotora i brzine struje, odnosno brzine gibanja rotora i
- gubitka zbog ubrzavanja struje  $\frac{1}{2}T\Delta V$ .

### Ubrzanje struje i inducirana brzina

Struja zraka se prolaskom kroz disk rotora na presjeku 4 ubrza za iznos  $\Delta V = V_4 - V_1 = V_4 - V_c$ . Relacija za pogonsku silu (2.5) primjenom rezultata za brzinu  $V_2$  (2.10) može se zapisati u obliku

$$T = \rho A(V_c + \frac{1}{2}\Delta V)\Delta V = \rho A(V_c + v_i)\Delta V = 2\rho A(V_c + v_i)v_i .$$

Iz ove jednadžbe slijedi da je za pogonsku silu  $T$  povećanje brzine

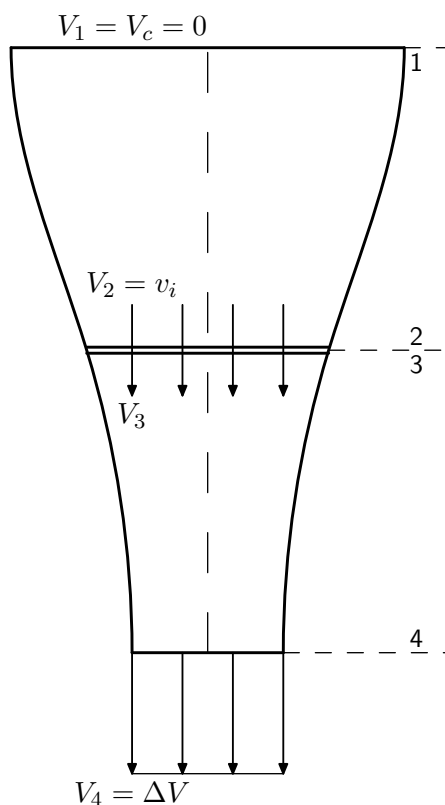
$$\Delta V = -V_c + \sqrt{V_c^2 + \frac{2T}{\rho A}} \quad (2.14)$$

te je inducirana brzina na disku

$$v_i = \frac{1}{2} \left( -V_c + \sqrt{V_c^2 + \frac{2T}{\rho A}} \right). \quad (2.15)$$

### 2.1.2. Teorija diska u lebdenju

U slučaju lebdenja brzina kojom zrak nastrujava na disk rotora jednaka je nuli  $V_c = V_1 = 0$ , dok je brzina dovoljno daleko ispod diska  $V_4 = \Delta V$  (slika 2.2.). Inducirana



Slika 2.2.: Idealni rotor helikoptera pri lebdenju

brzina u ravnini diska predstavlja u općem slučaju razliku brzina na presjecima 1 i 2 za koju je temeljem Bernulijeve jednadžbe pokazano da vrijedi sljedeća relacija

$$v_i = V_2 - V_1 = V_2 = \frac{1}{2} \Delta V.$$

Za ubrzanje struje zraka kroz disk vrijedi (2.14), a njenom primjenom za slučaj lebdenja inducirana brzina na disku označava se sa  $v_h$  i izosi

$$v_h = v_i = \frac{1}{2} \Delta V = \sqrt{\frac{T}{A} \frac{1}{2\rho}}. \quad (2.16)$$

Pri tome je uvedena posebna oznaka za induciranu brzinu u lebdenju  $v_h$ , koja će u kasnijim analizama poslužiti kao referentna vrijednost. U gornjoj relaciji omjer  $DL = \frac{T}{A}$  poznat je kao opterećenje diska (*engl.* disk loading, DL)<sup>2</sup>.

Snaga potrebna za lebdenje

$$P = P_h = T \cdot v_i = T \cdot v_h = \frac{T^{3/2}}{\sqrt{2\rho A}}. \quad (2.17)$$

Primjenom ove teorije zanemaren je utjecaj viskoznosti te je ova snaga idealna snaga rotora u lebdenju. Ista se veličina može zapisati alternativno

$$P_h = T \cdot v_h = (2\rho A v_i^2) \cdot v_i = 2\rho A v_i^3.$$

Slijedom gornje relacije, snaga potrebna za lebdenje raste s kubom inducirane brzine (ili protokom, *engl.* inflow) na disku. Kako bi rotor određene mase lebdio s danom pogonskom silom, a pri minimalnoj induciranoj snazi potrebno je da inducirana brzina bude što manja, time je potrebno da protok zraka kroz disk bude što veći. Kako bi se to ostvarilo potrebna je velika površina diska. Ovaj zaključak jedan je od temeljnih obilježja konstrukcija svih helikoptera<sup>3</sup>.

\* \* \*

Opterećenje diska rotora jednako je skoku tlaka (za koji je pretpostavljeno da je uniforman po cijelom disku) za koji je pokazano (2.8) da je jednak dinamičkom tlaku u tragu rotora

$$DL = \frac{T}{A} = \Delta p = p_3 - p_2 = \frac{1}{2}\rho\Delta V^2.$$

Opterećenja diska po jedinici snage (*engl.* power loading) definira se kao omjer  $PL = \frac{T}{P}$ . Iz ranije iznesenih relacija može se uočiti da je  $PL$  inverzno proporcionalno induciranoj brzini na disku

$$v_i = \sqrt{\frac{T}{2\rho A}} = \sqrt{\frac{DL}{2\rho}} = \frac{P}{T} = \frac{1}{PL}.$$

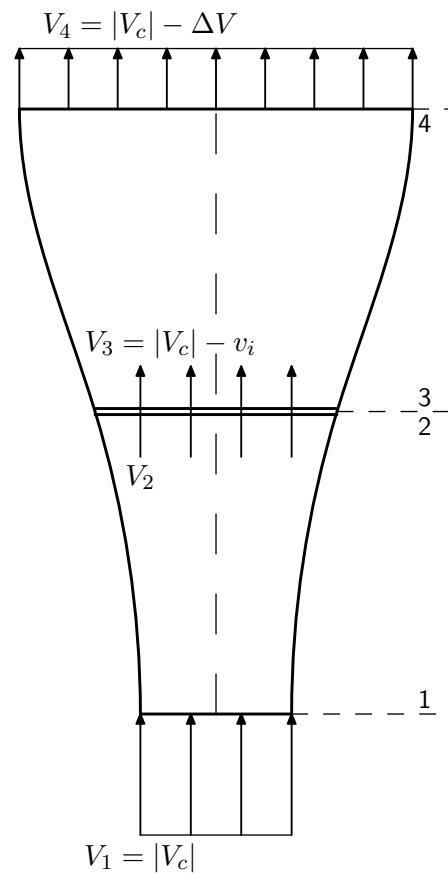
Opterećenje po jedinici snage  $PL$  brzo opada s porastom opterećenja diska  $DL$ . Slijedom toga će rotori malih vrijednosti  $DL$  trebati manju snagu po jedinici pogonske sile ( $PL$ ) i tako biti učinkovitiji (rotor tada zahtjeva manje snage i time manju potrošnju goriva kako bi generirao potrebnu pogonsku silu za lebdenje). Za realne izračune  $PL$  i učinkovitosti rotora potrebno je uključiti gubitke zbog viskoznosti. Helikopteri u lebdenju imaju vrijednosti  $DL = 24 \dots 48 \text{ kg/m}^2$  i za relativno malu snagu stvaraju relativno veliku silu uzgona (pogonsku silu rotora). Tako je helikopter vrlo učinkovit u lebdenju za razliku od drugih letjelica s vertikalnim uzlijetanjem i slijetanjem (*engl.* vertical takeoff and landing, VTOL). Letjelice s zakretnim rotorima (*engl.* tilt rotors) se mogu opisati kao hibridi helikoptera i VTOL letjelice fiksnih krila s nešto većim opterećenjem diska i tako su nešto manje učinkoviti u lebdenju od klasičnih helikoptera.

<sup>2</sup>Za helikoptere s mlaznim motorima uobičajene vrijednosti opterećenja diska su  $\frac{T}{A} = 290 \dots 390 \text{ N/m}^2$ .

<sup>3</sup>Slično se kod propelera može pokazati da je efikasniji propeler većeg promjera.

### 2.1.3. Vertikalno spuštanje

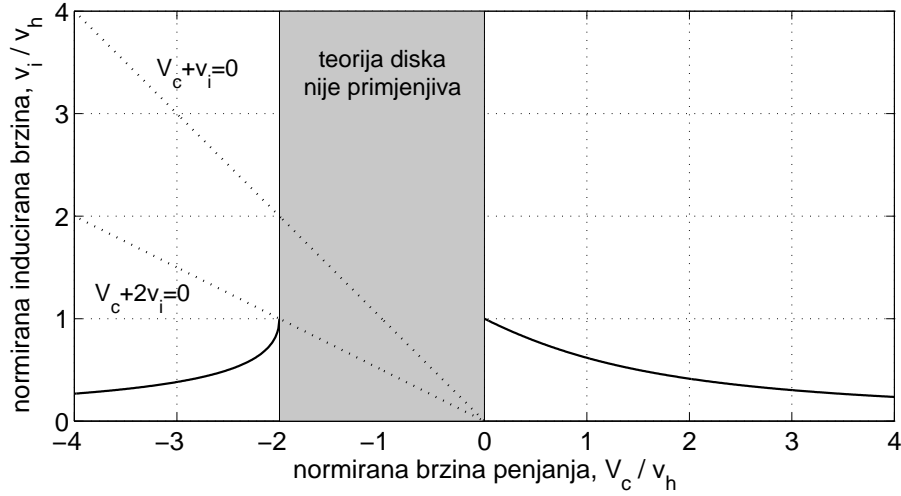
Kod vertikalnog spuštanja slika strujanja se značajno mijenja. Brzina zraka u odnosu na rotor  $V_c$  postaje negativna (prema gore,  $V_c < 0$ , slika 2.3.) dok je inducirana brzina  $v_i$  i dalje pozitivna kako bi se ostvario uzgon na rotoru, a time i pogonska sila. Slika (2.3.) vrijedi za slučaj kada je brzina spuštanja  $|V_c|$  veća od dvostruke srednje vrijednosti inducirane brzine na disku. Za manje brzine spuštanja kada je  $-2v_h < V_c < 0$  brzina kroz disk može biti u oba smjera te uz turbulentno strujanje: tada nije primjenjiva teorija diska budući da nisu zadovoljene njene osnovne pretpostavke.



Slika 2.3.: Idealni rotor helikoptera pri vertikalnom spuštanju

Razmotrimo prvo vertikalno spuštanje u području gdje teorija diska nije primjenjiva:  $-2v_h < V_c < 0$ . Pri toj analizi karakteristična su 2 pravca prikazana na dijagramu promjene inducirane brzine  $v_i$  u ovisnosti o brzini penjanja  $V_c$  normiranih sa induciranom brzinom u lebdenju  $v_h$  (slika 2.4.). Prvi pravac ima jednadžbu  $V_c + v_i = 0$  te za točke desno od njega vrijedi da rotor troši snagu sa vratila, a za točke lijevo (ispod) njega rotor snagu dobija iz struje zraka.

Za male brzine spuštanja,  $|V_c|$  manja od  $v_i$ , dolazi do interferencije između okolnog zraka koji ima negativnu brzinu i zraka kroz disk pozitivne brzine (giba se prema dole). Usljed toga formira se tzv. vrtložni prsten koji obuhvaća vrh diska (slika 2.5. (b)). U ovakvom režimu vrtložnog prstena strujanje oko rotora vrlo je nestacionarno i na rotoru



Slika 2.4.: Ovisnost inducirane brzine o vertikalnoj brzini

se javljaju velike vibracije te dolazi do fluktuacija sile uzgona koje uzrokuju propinjanje i valjanje helikoptera.

Za nešto veće brzine spuštanja (kada je vrijednost približno jednaka vrijednosti  $v_i$ , odnosno za pravac  $V_c + v_i = 0$  na slici 2.4.) kroz disk nema strujanja (ili je vrlo malo). Kod takvog režima karakteristični su vrtlozi koji nalikuju turbulentnim vrtlozima iza ravne ploče. Ovaj režim naziva se režim turbulentnog traga (slika 2.5. (c)). Let u ovom režimu nije ugodan, ali je ugodniji od leta u režimu vrtložnog prstena. Za ove režime leta, odnosno za  $-2 < V_c/v_h < 0$ , nije primjenjiva teorija diska zbog disipacije energije.

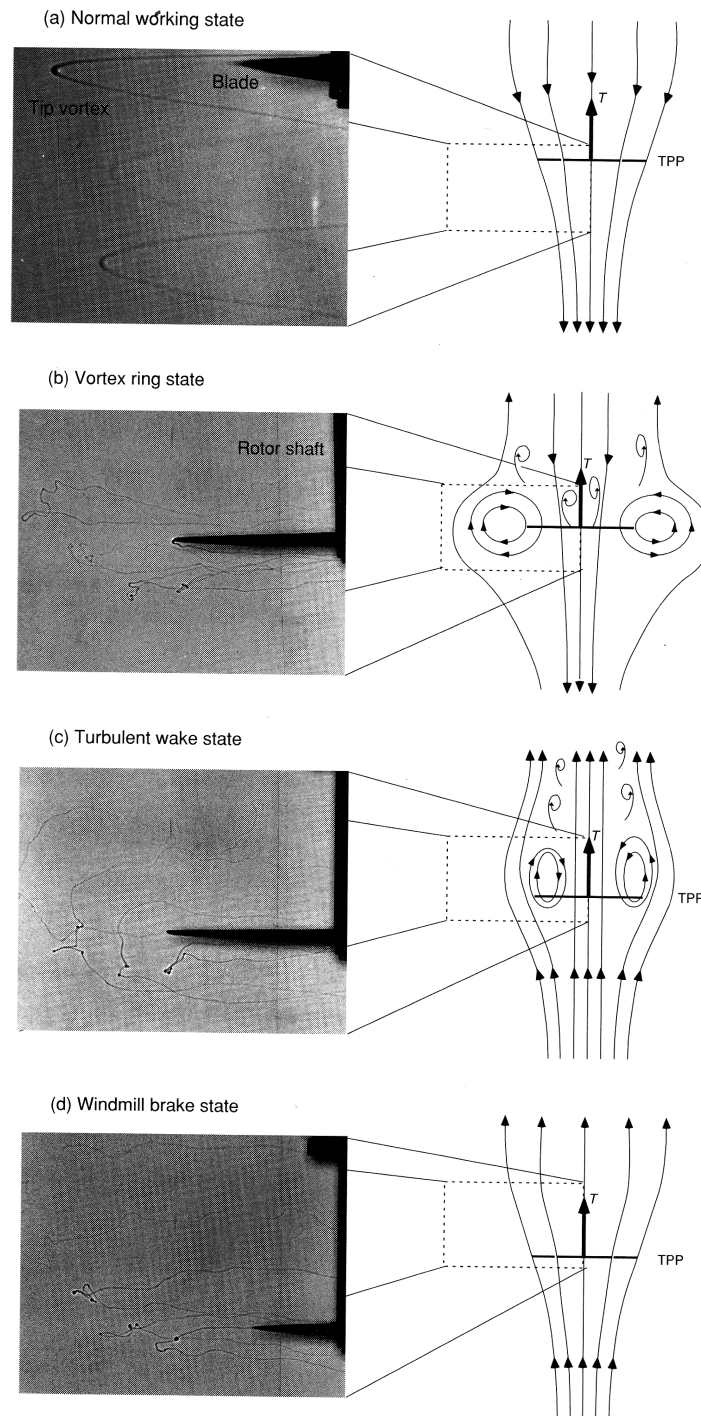
Za veće brzine spuštanja (kada je  $|V_c| > 2v_i$  odnosno desno od pravca  $V_c + 2v_i = 0$  na slici 2.4.) brzina struje zraka je na cijelom disku prema gore. U takvom režimu snaga se prenosi sa zraka na rotor pa se naziva režim vjetrenjače (slika 2.5. (d), *engl.* windmill-brake state, kao i kod vjetrenjača ili turbina vjetrogeneratora). Teorija diska daje sljedeću aproksimaciju za pogonsku silu ( $V_c < 0$ ,  $v_i > 0$ )

$$T = -2\rho A(V_c + v_i)v_i.$$

Inducirana brzina, prema ranije izvedenim relacijama za vertikalno penjanje, primijenjena za slučaj spuštanja

$$v_i = \frac{1}{2} \left( -V_c - \sqrt{V_c^2 - \frac{2T}{\rho A}} \right). \quad (2.18)$$

Za snagu pri spuštanju vrijedi ranije izvedena relacija (2.13), ali za gore izvedenu pogonsku silu pri spuštanju.



Slika 2.5.: Režimi strujanja oko rotora u vertikalnom letu: a) normalni režim leta (penjanje), b) režim vrtložnog prstena, c) režim turbulentnog traga, d) režim vjetrenjače

### 2.1.4. Karakteristike inducirane brzine za vertikalni let

Pri analizi rotora helikoptera uobičajena je bezdimenzionalna analiza s referentnim vrijednostima pri lebdenju. Tako se analizira normirana inducirana brzina pri čemu je za referentnu vrijednost odabrana inducirana brzina za lebdenje (2.16). Normirana inducirana brzina za vertikalno penjanje primjenom rezultata (2.15) iznosi

$$\frac{v_i}{v_h} = -\frac{V_c}{2v_h} + \sqrt{\left(\frac{V_c}{2v_h}\right)^2 + 1}. \quad (2.19)$$

Za vertikalno spuštanje normirana inducirana brzina prema (2.18) ima oblik

$$\frac{v_i}{v_h} = -\frac{V_c}{2v_h} - \sqrt{\left(\frac{V_c}{2v_h}\right)^2 - 1}. \quad (2.20)$$

Na dijagramu ovisnosti normirane inducirane brzine  $v_i/v_h$  o normiranoj brzini penjanja  $V_c/v_h$  (slika 2.4.) u normalnom režimu leta (strujanja prema slici 2.5.(a), temeljem relacije (2.19)), uočava se smanjenje inducirane brzine na disku s porastom brzine penjanja. Za vertikalno spuštanje, dakle od  $V_c/v_h < 0$  do pravca  $V_c + 2v_i = 0$  (slika 2.4.) teorija diska nije primjenjiva iz ranije opisanih razloga. Presjek pravca  $V_c + 2v_i = 0$  (koji definira granicu režima turbulentnog traga i režima vjetrenjače) i relacije (2.20) za spuštanje definira domenu  $-2 \leq V_c/v_h \leq 0$  u kojoj teorija diska nije primjenjiva. Pravac  $V_c + v_i = 0$  definira granicu režima vrtložnog prstena i režima turbulentnog traga. Pri tome se s porastom brzine spuštavanja (u režimu vjetrenjače) inducirana na disku smanjuje.

### 2.1.5. Potrebna snaga za vertikalni let

Slično normiranoj induciranoj brzini definira se i normirana potrebna snaga uz referentnu vrijednost  $P_h$  – snagu potrebnu za lebdenje  $P_h = T v_h$ . Normirana snaga potrebna za penjanje u skladu s izrazom (2.13) iznosi

$$\frac{P}{P_h} = \frac{V_c}{2v_h} + \sqrt{\left(\frac{V_c}{2v_h}\right)^2 + 1}. \quad (2.21)$$

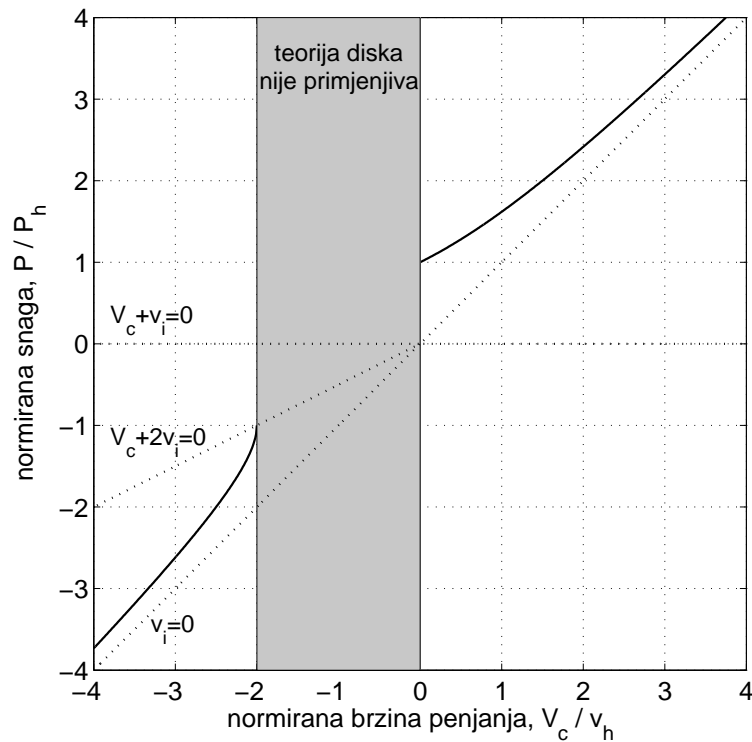
Normirana snaga za spuštanje, u skladu s ranijim rezultatom, daje relaciju

$$\frac{P}{P_h} = \frac{V_c}{2v_h} - \sqrt{\left(\frac{V_c}{2v_h}\right)^2 - 1}. \quad (2.22)$$

Oba rezultata dana su na dijagramu sa slike (2.6.) koji se naziva i krivulja univerzalne snage (*engl.* universal power curve). Snaga potrebna za stvaranje pogonske sile u vertikalnom spuštavanju se smanjuje s povećavanjem brzine spuštavanja (slika 2.6., za  $V_c/v_h < -2$ ). Za brzine spuštavanja na dijagramima sa slika (2.4. i 2.6.) u području<sup>4</sup>  $-2 \leq V_c/v_h \leq 0$  teorija diska nije primjenjiva jer struja zraka može imati smjer i prema

<sup>4</sup>Ovo područje definirano je kao i ranije presjekom pravca  $V_c + 2v_i = 0$  i relacije (2.22)





Slika 2.6.: Ovisnost snage potrebne za vertikalni let o vertikalnoj brzini

gore i prema dole tako da jedna od polaznih pretpostavki, kojom se definira struja zraka kroz strujnu cijev, nije ispunjena.

Snaga potrebna za stvaranje pogonske sile u vertikalnom spuštanju se smanjuje s povećanjem brzine spuštanja, izuzev režim vrtložnog prstena (zbog sloma uzgona pri odvajanju vrtloga)<sup>5</sup>.

### 2.1.6. Bezdimenzionalni koeficijenti

Kao što je uobičajeno u aerodinamici tako se i kod aerodinamike rotora primjenjuju bezdimenzionalne karakteristike. Pri tome se za rotor maksimalnog promjera  $R$  koji rotira brzinom vrtnje  $\Omega$  kao referentna veličina uzima brzina rotacije vrha kraka  $\Omega R$ . Tako su bezdimenzionalni koeficijenti rotora:

- za induciranu brzinu:  $\lambda_i = \frac{v_i}{\Omega R}$
- za pogonsku silu:  $C_T = \frac{T}{\rho A \Omega^2 R^2}$
- za snagu:  $C_P = \frac{P}{\rho A \Omega^3 R^3}$

<sup>5</sup>Ovaj porast može biti značajniji kada slijetanje nije u potpunosti vertikalno pod uvjetima kada je snaga motora relativno mala: veliko opterećenje helikoptera, visoka okolna temperatura.

- za okretni moment rotora:  $C_Q = \frac{Q}{\rho A \Omega^2 R^3}$ .

Za ovako definirane koficijente u režimu lebdenja vrijede relacije

$$\begin{aligned} \lambda_i = \lambda_h &= \sqrt{\frac{C_T}{2}} \\ C_P = \lambda_i C_T &= \frac{C_T^{3/2}}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Kako je veza snage i okretnog momenta rotora  $P = \Omega Q$  to su koficijenti snage i okretnog momenta jednaki  $C_P = C_Q$ .

Ovakva definicija koficijenata, uobičajena u SAD-u, bit će nadalje ovdje primijenjena, no u uporabi su i definicije koje uključuju  $1/2$  u nazivniku:

$$C_T = \frac{T}{\frac{1}{2}\rho(\Omega R)^2}, \quad C_Q = \frac{Q}{\frac{1}{2}\rho(\Omega R)^2 R}, \quad C_P = \frac{P}{\frac{1}{2}\rho(\Omega R)^3}.$$

### 2.1.7. Efekti ne-idealnog rotora

Induciranu snaga pri lebdenju uobičajeno se opisuje relacijom

$$C_P = \kappa \frac{C_T^{3/2}}{\sqrt{2}},$$

pri čemu je  $\kappa$  faktor korekcije inducirane snage (koficijent inducirane snage). Ovim empirijskim koficijentom temeljem eksperimenata korigira se rezultat teorije diska (2.23) tako da obuhvaća efekte poput ne-uniformne vertikalne brzine na disku, gubitaka na vrhu kraka, realan oblik traga i vrtloženje u njemu, konačan broj krakova ... Vrijednost koficijenta  $\kappa = 1$  jest za idealne gubitke – samo od inducirane brzine, dok za  $\kappa \geq 1$  obuhvaćeni su ne-idealne gubitke, a tipična procijenjena vrijednost jest  $\kappa = 1.15$ .

Pored toga u realnim uvjetima potrebno je uključiti i gubitke snage  $P_0$  na profilu – gubitke zbog otpora trenja na profilu krakova rotora. No za to je potrebno poznavati karakteristike aeroprofila. Sila otpora na jediničnom rasponu kraka na udaljenosti  $y$  od osi rotacije

$$D = \frac{1}{2}\rho(\Omega y)^2 c \cdot c_d.$$

Uz pretpostavku da je koficijent otpora profila konstantan  $c_d = c_{d_0}$  te da je krak pravokutnog oblika tetive  $c$  snaga potrebna za savladavanje otpora profila bila bi

$$P_0 = \Omega N_b \int_0^R D y dy = \frac{1}{8}\rho N_b \Omega^3 c c_{d_0} R^4.$$

Pripadajući koficijent snage je

$$C_{P_0} = \frac{P_0}{\rho A (\Omega R)^3}.$$

Uvođenjem koeficijent ispunjenosti rotora (*engl.* solidity ratio)  $\sigma$  koji je definiran kao omjer površine pravokutnih lopatica rotora i površine diska rotora

$$\sigma = \frac{NcR}{\pi R^2} = \frac{Nc}{\pi R},$$

za koeficijent snage za savladavanje otpora profila može se zapisati

$$C_{P_0} = \frac{1}{8}\sigma c_{d_0}.$$

### 2.1.8. Učinkovitost rotora u lebdenju

Inducirana snaga  $P_i$  predstavlja glavni dio snage rotora u lebdenju, no kako bi se savladala sila otpora lopatica rotora potrebna je dodatna komponenta snage:  $P_0$  za savladavanje gubitka snage na profilu. Učinkovitost rotora u lebdenju (poznata i kao *engl.* figure of merit)<sup>6</sup>, omjer je potrebne snage za lebdenje idealnog rotora i ukupne snage rotora koja uključuje i gubitke  $P_0$

$$\eta_M = \frac{P_i}{P_i + P_0} = \left(1 + \frac{P_0}{P_i}\right)^{-1} = \left(1 + \frac{C_{P_0}\sqrt{2}}{C_T^{3/2}}\right)^{-1}.$$

Za promatrani rotor otpor profila lopatica neće imati veće promjene s promjenom pogonske sile, ukoliko ne dođe do sloma uzgona ili do povećanja otpora zbog utjecaja stlačivosti. Tako će učinkovitost rotora u lebdenju rasti s porastom koeficijenta pogonske sile rotora.

Zadovoljavajuća vrijednost koeficijenta učinkovitosti je  $\eta_M = 0.75$  dakle  $P_0$  je 1/4 ukupne snage rotora. Promatrajući helikopter u cijelini postoje i gubici zbog pogona repnog rotora, gubici na transmisiji te gubici zbog pogona dodatnih uređaja. Pri takvom razmatranju inducirana snaga iznosi 60–65% ukupne snage motora.

### 2.1.9. Autorotacija

Stanje idealne autorotacije definirano je presjekom krivulje za induciranu brzinu  $v_i/v_h$  i pravca  $V_c + v_i = 0$  — tada nema strujanja kroz rotor i inducirana snaga jednaka je nuli (slika 2.4.). No u području  $-2 \leq V_c/v_h \leq 0$  gdje se nalazi navedeni presjek teorija diska nije primjenjiva te se  $v_i/v_h$  procjenjuje se na osnovu eksperimentalnih rezultata.

Autorotacija izuzetno je važna za let helikoptera budući da omogućava stvaranje pogonske sile približno jednake težini i kada dođe do prestanka rada motora čime se dopušta mogućnost sigurnog slijetanja i u takvoj izvanrednoj situaciji. No kako je potrebno da rotor savlada i gubitke na profilu  $P_0$  realna autorotacija javlja se pri nešto većoj brzini spuštanja

$$V_c + v_i = -\frac{P_0}{T},$$

tako da bude zadovoljeno

$$P_i + P_0 = T(V_c + v_i) + P_0 = 0.$$

Idealna autorotacija javlja se pri  $V_c/v_h = -1.75$ , dok se realna autorotacija javlja za  $V_c/v_h = -1.85 \dots -1.95$ .

<sup>6</sup>ekvivalentna je koeficijentu učinkovitosti statičke pogonske sile

### **2.1.10. O rezultatima teorije diska za vertikalni let**

Značaj ove jednostavne teorije diska je u tome da daje rezultate nužne za kvalitetno usvajanje opće slike strujanja oko rotora. Ona daje osnovne relacije između inducirane brzine i potrebne snage helikoptera.

Na primjenom teorije diska nismo u mogućnosti opisati kako se generira sila uzgona na krakovima rotora razmatrajući detaljnu geometriju krakova. To nam omogućava teorija elementarnog kraka.

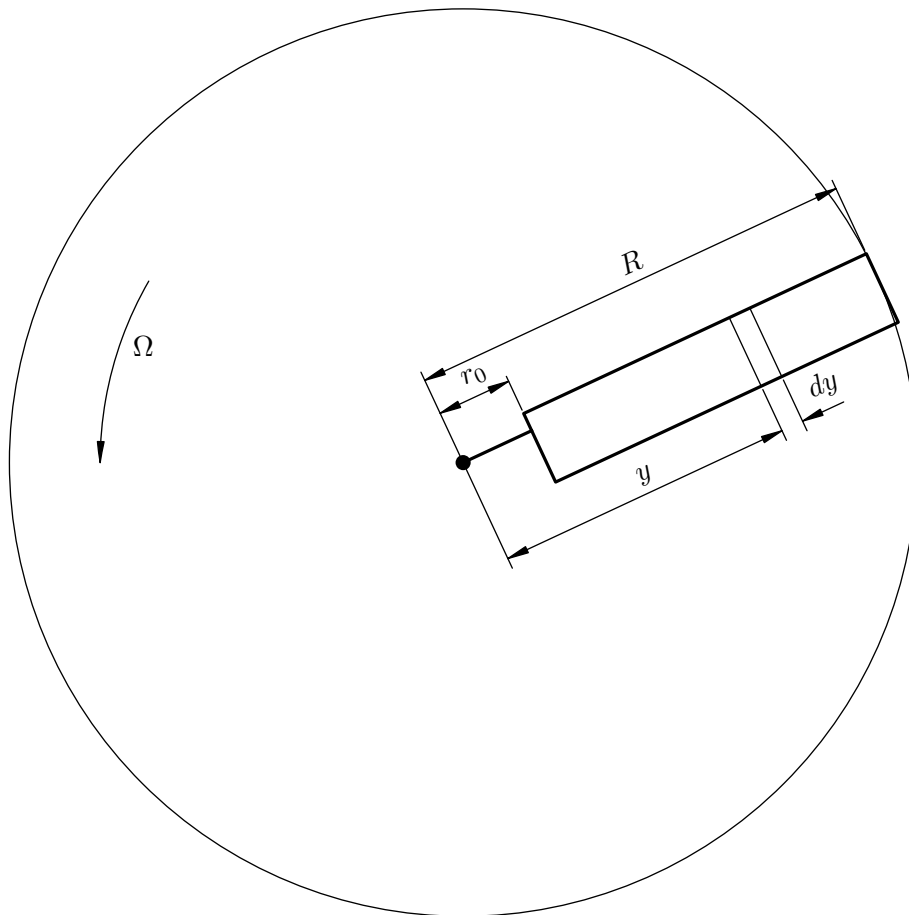
## 2.2. Teorija elementarnog kraka rotora u vertikalnom letu

Teorijom diska možemo analizirati samo idealni rotor kod kojeg nema gubitaka uslijed rotacije zraka u njegovom tragu, otpora profila kraka ili interferencije između krakova propelera. Jedini gubitak obuhvaćen ovom teorijom je gubitak kinetičke energije. Teorija diska ne obuhvaća nikakve informacije o samom kraku rotora. Uvođenje geometrije kraka u analizu brodskih propelera inicira Froude 1878. godine [7] kroz teoriju elementarnog kraka, te je Drzewiecki [5] detaljno postavlja i primjenjuje na zrakoplovne propelere.

U ovom tekstu lopatice rotora isključivo se razmatraju kao kruta tijela.

### 2.2.1. Osnove teorije elementarnog kraka

Promatramo rotor radijusa  $R$  koji ima kutnu brzinu  $\Omega$  prikazan pogledom odozgo na slici (2.7.)<sup>7</sup>. Teorija elementarnog kraka razmatra sile na infinitezimalnom radijalnom dijelu kraka rotora,  $dy$ , na udaljenosti  $y$  od osi rotacije. Na promatranom presjeku

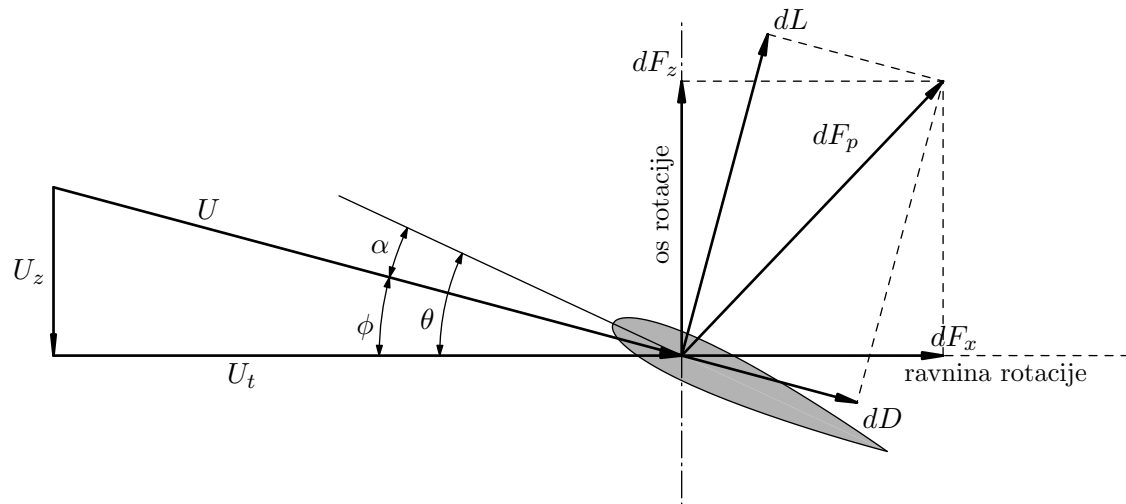


Slika 2.7.: Elementarni presjek  $dy$  kraka rotora na radijusu  $y$ : pogled odozgo

<sup>7</sup>U zapadnim zemljama je uobičajen smjer vrtnje rotora kao na slici – suprotan smjeru kazaljke na satu gledano iznad rotora.

kraka širine tetive  $c$  (slika 2.8.) prikazane su brzine: tangencijalna brzina od rotacije kraka  $U_t = \Omega \cdot y$  te vertikalna brzina  $U_z$ . Za slučaj vertikalnog leta brzinom penjanja  $V_c$  slijedi da je ukupna vertikalna brzina zbroj brzine penjanja i inducirane brzine na rotoru  $U_z = V_c + v_i$ . Ukupna brzina na promatranom presjeku je rezultanta ove dvije brzine<sup>8</sup>

$$U = \sqrt{U_t^2 + U_z^2}.$$



Slika 2.8.: Brzine i sile na elementarnom presjeku  $dy$  kraka rotora na radijusu  $y$

Kut ukupne brzine prema ravnini rotacije  $\phi$  naziva se nagib struje (kut nagiba struje, *engl.* inflow angle) i za male vrijednosti kuta vrijedi

$$\phi = \arctg \left( \frac{U_z}{U_t} \right) \approx \frac{U_z}{U_t}.$$

Ako je postavni kut  $\theta$  kut između profila lokalnog presjeka i ravnine rotacije tada za napadni kut na promatranom presjeku vrijedi

$$\alpha = \theta - \phi = \theta - \frac{U_z}{U_t}.$$

Od interesa je odrediti sile na ovom elementarnom kraku u ravnini rotacije i okomito na nju:

$$\begin{aligned} dF_z &= dL \cos \phi - dD \sin \phi \\ dF_x &= dL \sin \phi + dD \cos \phi \end{aligned}$$

Pri tome je elementarna sila uzgona okomita na ukupnu brzinu na promatranom kraku dok je sila otpora paralelna s ukupnom brzinom dok su intenziteti navedenih sila

$$\begin{aligned} dL &= \frac{1}{2} \rho U^2 c \cdot c_l \cdot dy \\ dD &= \frac{1}{2} \rho U^2 c \cdot c_d \cdot dy. \end{aligned}$$

<sup>8</sup>Pri ovoj analizi zanemarena je radijalna brzina na elementarnom kraku.

Doprinos svih elementarnih presjeka  $N$  krakova ukupnoj pogonskoj sili odnosno okretnom momentu i snazi rotora je

$$\begin{aligned}dT &= N \cdot dF_z \\dQ &= N \cdot dF_x \cdot y \\dP &= N \cdot dF_x \cdot \Omega y.\end{aligned}$$

Odnosno nakon uvrštavanja elementarnih sila uzgona i otpora:

$$\begin{aligned}dT &= N \cdot (dL \cos \phi - dD \sin \phi) \\dQ &= N \cdot (dL \sin \phi + dD \cos \phi) \cdot y \\dP &= N \cdot (dL \sin \phi + dD \cos \phi) \cdot \Omega y.\end{aligned}\tag{2.24}$$

Za vertikalni let helikoptera mogu se usvojiti sljedeće pretpostavke:

- Vertikalna brzina  $U_z$  zanemariva je u odnosu na tangencijalnu brzinu  $U_t$  te je  $U = \sqrt{U_t^2 + U_z^2} \approx U_t$ . Za presjeke malog radijusa (u blizini korijenske tetive kraka) ova pretpostavka nije korektna, ali u tom području aerodinamičke sile su manjeg iznosa.
- Kut nagiba struje  $\phi$  je mali.
- Sila otpora je za red veličine manja od sile uzgona na promatranom presjeku kraka.

Primjenom ovih pretpostavki može se zapisati

$$\begin{aligned}dT &= N \cdot dL \\dQ &= N \cdot (\phi dL + dD) \cdot y \\dP &= N \cdot (\phi dL + dD) \cdot \Omega y.\end{aligned}\tag{2.25}$$

Pogonsku silu, okretni moment i snagu uobičajeno je prikazati u bezdimenzionalnom obliku primjenom odgovarajućih koeficijenata. U tu svrhu uvode se bezdimenzionalne veličine: za duljinu normiranjem s  $R$  tako da je  $\bar{r} = \frac{y}{R}$ , za brzinu normiranjem s tangencijalnom brzinom na vrhu kraka  $\Omega R$  i koeficijent ispunjenosti kraka  $\sigma$ .

Pored toga koeficijent brzine struje na radijusu  $\bar{r}$  definiran kao omjer vertikalne brzine i tangencijalne brzine vrha kraka ima oblik

$$\lambda = \frac{V_c + v_i}{\Omega R} = \frac{V_c + v_i}{\Omega y} \frac{\Omega y}{\Omega R} = \frac{U_z}{U_t} \bar{r} = \phi \bar{r}.$$

Elementarni doprinos koeficijentu pogonske sile iznosi

$$dC_T = \frac{NdL}{\rho A (\Omega R)^2} = \frac{N \frac{1}{2} \rho U_t^2 c_{cl} dy}{\rho \pi R^2 (\Omega R)^2} = \frac{1}{2} \sigma c_l \bar{r}^2 d\bar{r},\tag{2.26}$$

gdje je  $\sigma = \frac{N c}{\pi R}$  koeficijent ispunjenosti kraka. Na sličan način može se definirati i elementarni doprinos koeficijenta snage za koji je pokazano da je jednak koeficijentu okretnog momenta (pogl. 2.1.6., str. 15)

$$dC_P = dC_Q = \frac{N(\phi dL + dD)y}{\rho \pi R^2 (\Omega R)^2 R} = \frac{1}{2} \sigma (\phi c_l + c_d) \bar{r}^3 d\bar{r}.\tag{2.27}$$

Integracijom ovih elementarnih doprinosa koeficijenta po normiranom radijusu kraka rotora od korijena do vrha  $\bar{r} = 0 \cdots 1$  slijede relacije za ukupne koeficijente pogonske sile, snage i okretnog momenta:

$$\begin{aligned} C_T &= \frac{1}{2}\sigma \int_0^1 c_l \bar{r}^2 d\bar{r} \\ C_P = C_Q &= \frac{1}{2}\sigma \int_0^1 (\phi c_l + c_d) \bar{r}^3 d\bar{r} = \frac{1}{2}\sigma \int_0^1 (\lambda c_l \bar{r}^2 + c_d \bar{r}^3) d\bar{r} \end{aligned} \quad (2.28)$$

Kako bi se odredile vrijednosti ovih koeficijenata potrebno je poznavati lokalni koeficijent vertikalne brzine koji je promjenjiv s radijusom,  $\lambda(\bar{r})$  i lokalne koeficijente sile uzgona  $c_l$  i otpora  $c_d$ . Pri tome su za poznate aeroprofile aerodinamički koeficijenti funkcije napadnog kuta  $\alpha$  te Reynoldsovog i Machovog broja. Napadni kut na promatranom lokalnom presjeku funkcija je brzine penjanja, lokalnog postavnog kuta i inducirane brzine,  $\alpha(V_c, \theta, v_i)$ . Za zadanu vertikalnu brzinu penjanja i poznatu geometriju (odnosno poznati kut  $\theta$ ) potrebno je definirati induciranu brzinu  $v_i(\bar{r})$ .

Ove složene ovisnosti u općem slučaju nije moguće prikazati jednostavnim analitičkim izrazima te se pristupa numeričkoj integraciji izraza (2.28). No uvođenjem određenih aproksimacija moguće je izvesti koeficijente (2.28) kako bi se dobila opća ovisnost o režimu leta i geometrijskim karakteristikama rotora.

### 2.2.2. Aproksimacija za konstantnu vertikalnu brzinu

Za male napadne kutove vrijedi linearna ovisnost koeficijenta sile uzgona o napadnom kutu

$$c_l = c_{l_\alpha} (\alpha - \alpha_0) = c_{l_\alpha} (\theta - \alpha_0 - \phi),$$

gdje je  $c_{l_\alpha}$  gradijent sile uzgona po napadnom kutu za profil promatranog kraka, a  $\alpha_0$  kut nulte sile uzgona. Može se pretpostaviti da se za  $c_{l_\alpha}$  uzme konstantna vrijednost za sve lokalne presjeke kraka (iako se u općem slučaju po rasponu mijenja aeroprofil te  $Re$  i  $Ma$ ). Nadalje ukoliko se razmatraju isključivo simetrični aeroprofil vrijedi da je  $\alpha_0 = 0$ . Uz navedene pretpostavke za koeficijent pogonske sile iz (2.28) vrijedi

$$\begin{aligned} C_T &= \frac{1}{2}\sigma c_{l_\alpha} \int_0^1 (\theta - \phi) \bar{r}^2 d\bar{r} \\ &= \frac{1}{2}\sigma c_{l_\alpha} \int_0^1 (\theta \bar{r}^2 - \lambda \bar{r}) d\bar{r}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Za krakove bez uvijanja (*engl.* zero twist) po rasponu vrijedi  $\theta = \theta_0 = \text{const}$ <sup>9</sup>. Primjenom rezultata teorije diska koja pretpostavlja uniformnu brzinu na disku slijedi da je koeficijent vertikalne brzine  $\lambda = \text{const}$  te za  $C_T$  slijedi

$$C_T = \frac{1}{2}\sigma c_{l_\alpha} \left[ \frac{\theta_0 \bar{r}^3}{3} - \frac{\lambda \bar{r}^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}\sigma c_{l_\alpha} \left[ \frac{\theta_0}{3} - \frac{\lambda}{2} \right]. \quad (2.30)$$

<sup>9</sup>Ta konstantna vrijednost postavnog kuta  $\theta_0$  predstavlja kolektivni postavni kut – upravljanje pilota.



Eliminacijom koeficijenta  $\lambda$  iz gornjeg izraza dobili bi direktnu vezu koeficijenta  $C_T$  i postavnog kuta  $\theta$  kraka rotora. Kako je ranije pokazano teorija diska za slučaj lebdenja dala je vezu koeficijenta vertikalne brzine u lebdenju  $\lambda_h = \lambda_i = \sqrt{\frac{C_T}{2}}$  tada vrijedi

$$C_T = \frac{1}{2}\sigma c_{l_\alpha} \left[ \frac{\theta_0}{3} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{C_T}{2}} \right]. \quad (2.31)$$

Prvi član s desne strane gornje relacije predstavlja postavni kut potreban za realizaciju pogonske sile dok je drugi član dodatni postavni kut potreban za kompenzaciju vertikalne brzine struje. Rješenje gornje relacije može se dobiti samo iterativnim postupkom. Za izračun postavnog kuta može se definirati relacija

$$\theta_0 = \frac{6C_T}{\sigma c_{l_\alpha}} + \frac{3}{2}\sqrt{\frac{C_T}{2}}.$$

Veza između koeficijenta vertikalne brzine  $\lambda$  i postavnog kuta  $\theta$  može se dati relacijom

$$\lambda = \frac{\sigma c_{l_\alpha}}{16} \left[ \sqrt{1 + \frac{64}{3\sigma c_{l_\alpha}}\theta_0} - 1 \right].$$

Na slici (2.9.) prikazana je ovisnost koeficijenta pogonske sile  $C_T$  o kutu uvijanja  $\theta_0$ , odnosno kolektivnog kuta, za različite koeficijente ispunjenosti  $\sigma$ <sup>10</sup>.

Krakovi rotora helikoptera uobičajeno imaju kut uvijanja različit od nule pa s pretpostavkom linearne raspodjele kuta uvijanja po rasponu kraka za postavni kut vrijedi  $\theta = \theta_0 + \bar{r} \cdot \theta_{tw}$ . Pri tome je  $\theta_{tw}$  linearni koeficijent promjene kuta uvijanja kraka po rasponu, dok je  $\theta_0 = \theta_{0.75}$  referentni postavni kut (kolektivni postavni kut) odnosno kut uvijanja za referentni radijus:  $\frac{3}{4}R$ . Tada je promjena postavnog kuta po rasponu kraka

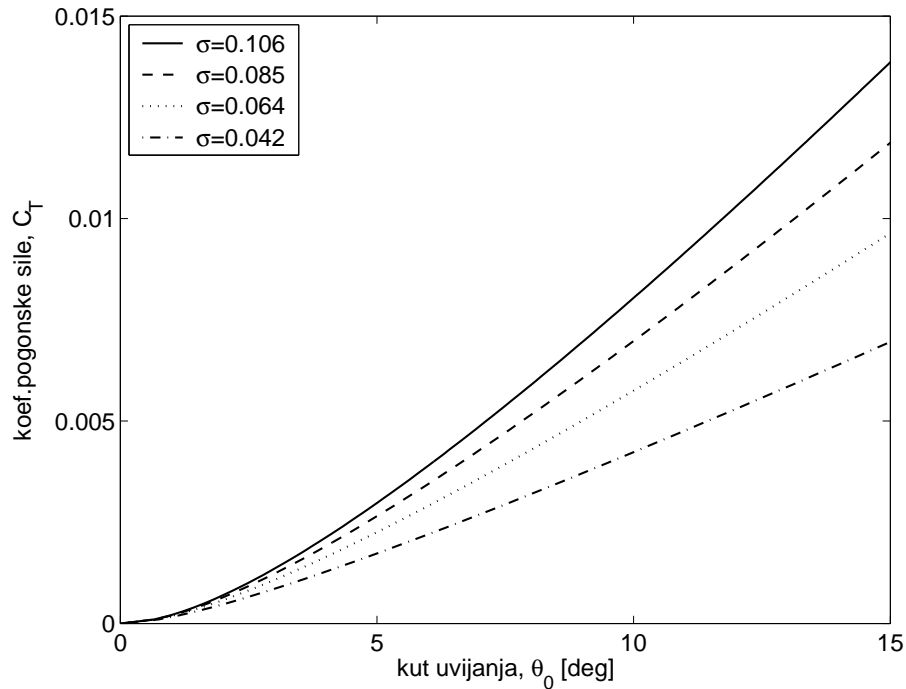
$$\theta = \theta_{0.75} + (\bar{r} - 0.75)\theta_{tw}.$$

Primjenom ovakve ovisnosti za  $C_T$  vrijedi

$$\begin{aligned} C_T &= \frac{1}{2}\sigma c_{l_\alpha} \int_0^1 (\theta_{0.75}\bar{r}^2 + \theta_{tw}\bar{r}^3 - 0.75\theta_{tw}\bar{r}^2 - \lambda\bar{r})d\bar{r} \\ &= \frac{1}{2}\sigma c_{l_\alpha} \left[ \frac{\theta_{0.75}}{3} + \frac{\theta_{tw}}{4} - \frac{\theta_{tw}}{4} - \frac{\lambda}{2} \right] \\ &= \frac{1}{2}\sigma c_{l_\alpha} \left[ \frac{\theta_{0.75}}{3} - \frac{\lambda}{2} \right]. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Usporedbom gornje relacije (2.32) s prethodnim rezultatom (2.30) za krak s konstantnim kutom uvijanja  $\theta_0$  može se zaključiti da je koeficijent pogonske sile  $C_T$  jednak za krak linearne promjene kuta uvijanja i za krak konstantnog kuta uvijanja s radijusa  $\frac{3}{4}R$ .

<sup>10</sup>Rezultati ove teorije imaju relativno male razlike u odnosu na mjerenja, posebno za manje vrijednosti  $\sigma$ . Kod većih  $\sigma$  teorija elementarnog kraka daje nešto veće vrijednosti za  $C_T$  što je posljedica zanemarenja gubitaka na vrhu kraka i pretpostavke uniformne vertikalne brzine.

Slika 2.9.: Promjena koeficijenta pogonske sile s promjenom kolektivnog kuta  $\theta_0$ 

\* \* \*

Adekvatno izvodu za koeficijent pogonske sile slijedi i izvod za koeficijent snage, odnosno okretnog momenta. Elementarni doprinos koeficijenta snage (2.27) može se zapisati u obliku

$$\begin{aligned} dC_P &= dC_Q = \frac{\sigma}{2} c_l \lambda \bar{r}^2 d\bar{r} + \frac{\sigma}{2} c_d \bar{r}^3 d\bar{r} \\ &= dC_{P_i} + dC_{P_0} . \end{aligned}$$

Prvi član s desne strane  $dC_{P_i}$  predstavlja induciranu snagu, a drugi  $dC_{P_0}$  snagu potrebnu za savladavanje otpora profila. Kako vrijedi relacija  $dC_T = \frac{1}{2} \sigma c_l \bar{r}^2$  slijedi da je  $dC_{P_i} = \lambda dC_T$  te je

$$dC_P = \lambda dC_T + dC_{P_0} ,$$

a ukupni koeficijent snage dobiva se integracijom po rasponu

$$C_P = \int_0^1 \lambda dC_T + \int_0^1 \frac{1}{2} \sigma c_d \bar{r}^3 d\bar{r} .$$

Za uniformnu raspodjelu vertikalne brzine  $\lambda = \text{const}$  i pretpostavku da je koeficijent otpora profila  $c_d = c_{d_0}$  nakon integracije slijedi

$$C_P = \lambda C_T + \frac{1}{8} \sigma c_{d_0} . \quad (2.33)$$

Za slučaj lebdenja vrijedi  $\lambda = \sqrt{\frac{C_T}{2}}$  te je koeficijent snage

$$C_P = \frac{C_T^{3/2}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{8}\sigma c_{d_0}. \quad (2.34)$$

Prvi član desne strane gornje relacije predstavlja snagu potrebnu za savladavanje inducirane brzine i eventualne brzine penjanja te se podudara s rezultatom teorije diska. Drugi član predstavlja dodatnu snagu potrebnu za savladavanje otpora trenja krakova rotora.

Realni koeficijent sile otpora ima oblik  $c_d = c_{d_0} + d_1\alpha + d_2\alpha^2$  tako da bi komponenta snage potrebne za savladavanje ovako opisanog otpora imala dodatna dva člana.

### 2.2.3. Kombinirana teorija elementarnog kraka i teorije diska

Ovom hibridnom teorijom kombiniraju se osnovne postavke teorije elementarnog kraka s teorijom diska, a kao rezultat dobit će se ne-uniformna raspodjela koeficijenta vertikalne brzine  $\lambda$ .

Prema teoriji elementarnog kraka, elementarni doprinos koeficijenta pogonske sile (2.26) uz pretpostavku linearne ovisnosti koeficijenta sile uzgona o napadnom kutu i simetrični aeroprofil daje rezultat

$$dC_T = \frac{1}{2}\sigma c_{l_\alpha} (\theta \bar{r}^2 - \lambda \bar{r}) d\bar{r}. \quad (2.35)$$

Promatrajmo u skladu s pretpostavkama teorije diska infinitezimalni kružni vijenac na disku rotora širine  $dy$ , a na radijusu  $y$  površine  $dA = 2\pi y dy$ <sup>11</sup>. Za takav kružni vijenac elementarni doprinos pogonskoj sili rotora je produkt masenog protoka kroz promatrani kružni vijenac i dvostruke vrijednosti inducirane brzine na njemu, u skladu s relacijom (2.5). Dakle u skladu s teorijom diska vrijedi

$$dT = 2\rho(V_c + v_i)v_i dA = 4\pi\rho(V_c + v_i)v_i y dy, \quad (2.36)$$

odnosno za elementarni doprinos koeficijenta pogonske sile

$$dC_T = 2 \frac{dT}{\rho(\pi R^2)(\Omega R)^2} = 4 \frac{V_c + v_i}{\Omega R} \cdot \frac{v_i}{\Omega R} \cdot \frac{y}{R} \cdot \frac{dy}{R} = 4\lambda\lambda_i \bar{r} d\bar{r}. \quad (2.37)$$

Kako je koeficijent vertikalne brzine  $\lambda_i = \lambda - \lambda_c$  slijedi

$$dC_T = 4\lambda(\lambda - \lambda_c) \bar{r} d\bar{r}. \quad (2.38)$$

Kombiniranjem relacija za elementarni doprinos pogonskoj sili (2.35) i (2.38) može se dobiti kvadratna jednadžba po koeficijentu  $\lambda$  koja ima realno rješenje oblika

$$\lambda = \sqrt{\left(\frac{\sigma c_{l_\alpha}}{16} - \frac{\lambda_c}{2}\right)^2 + \frac{\sigma c_{l_\alpha}}{8}\theta \bar{r}} - \left(\frac{\sigma c_{l_\alpha}}{16} - \frac{\lambda_c}{2}\right). \quad (2.39)$$

<sup>11</sup>Uz pretpostavku da navedeni kružni vijenac nema utjecaja na isti takav do njega. Za očekivati je da je ta pretpostavka zadovoljavajuća izuzev u području uz vrh rotora što će se posebno obuhvatiti gubitcima na vrhu kraka.

Za slučaj lebdenja  $\lambda_c = 0$  slijedi

$$\lambda = \lambda_i = \frac{\sigma c_{l_\alpha}}{16} \left[ \sqrt{1 + \frac{32}{\sigma c_{l_\alpha}} \theta \bar{r}} - 1 \right]. \quad (2.40)$$

Ovom relacijom opisana je promjena koeficijenta vertikalne brzine  $\lambda$  po rasponu kraka  $\bar{r}$  za poznate funkcije bezdimenzionalnog radijusa  $\bar{r}$ : vrijednosti postavnog kuta  $\theta(\bar{r})$ , promjene tetive po rasponu  $c(\bar{r})$  te karakteristike aeroprofila ( $c_{l_\alpha}$  i  $\alpha_0$ ). Tako određenim ne-uniformnim koeficijentom vertikalne brzine  $\lambda(\bar{r})$  može se integracijom izraza (2.38) odrediti ukupna pogonska sila.

#### PRIMJER 1. – RASPODJELA KOEFICIJENTA VERTIKALNE BRZINE $\lambda$

*Promatrajmo krak rotora s linearnom raspodjelom kuta uvijanja ( $12^\circ$  na korijenskoj i  $6^\circ$  na vršnoj tetivi), koeficijenta ispunjenosti  $\sigma = 0.08$  s poznatim karakteristikama aeroprofila  $c_{l_\alpha} = 5.7$ . Potrebno je za slučaj lebdenja odrediti koeficijent pogonske sile uz pretpostavku konstante vertikalne brzine i usporediti je s rješenjem primjenom kombinirane teorije elementarnog kraka i teorije diska.*

Rješenje.

*Uz pretpostavku konstantne vertikalne brzine na disku  $\lambda = \text{const}$  za  $\theta_{0.75} = 7.5^\circ$  primjenom relacije (2.31) iterativnim postupkom dobiva se za koeficijent pogonske sile  $C_T = 0.004526$ .*

*Za slučaj lebdenja  $\lambda_C = 0$ ,  $\lambda = \lambda_i$  te je prema (2.40) definiran koeficijent inducirane brzine kao funkcija radijusa  $\lambda_i(\bar{r})$ . Rezultat je prikazan na slici (2.10.). Integracijom elementarnog doprinosa za koeficijent pogonske sile (2.38) slijedi  $C_T = 0.004588$ .*

*Usporedbom rezultata za uniformnu raspodjelu  $\lambda$  i rezultata kombinirane teorije elementarnog kraka i teorije diska s ne-uniformnom raspodjelom  $\lambda$  razlika koeficijenta pogonske sile svega je 1.4%.*

Sa dijagrama na slici (2.10.) može se uočiti izrazita promjena koeficijenta vertikalne brzine<sup>12</sup> po rasponu kraka (prema fm. (2.40)) te se uvelike razlikuje od konstantne vrijednosti  $\lambda = \sqrt{C_T/2}$ . No, kako je pokazano primjerom, pretpostavka uniformne raspodjele koeficijenta vertikalne brzine za koeficijent pogonske sile donosi grešku manju od 2% u odnosu na ne-uniformnu raspodjelu  $\lambda$ .

\* \* \*

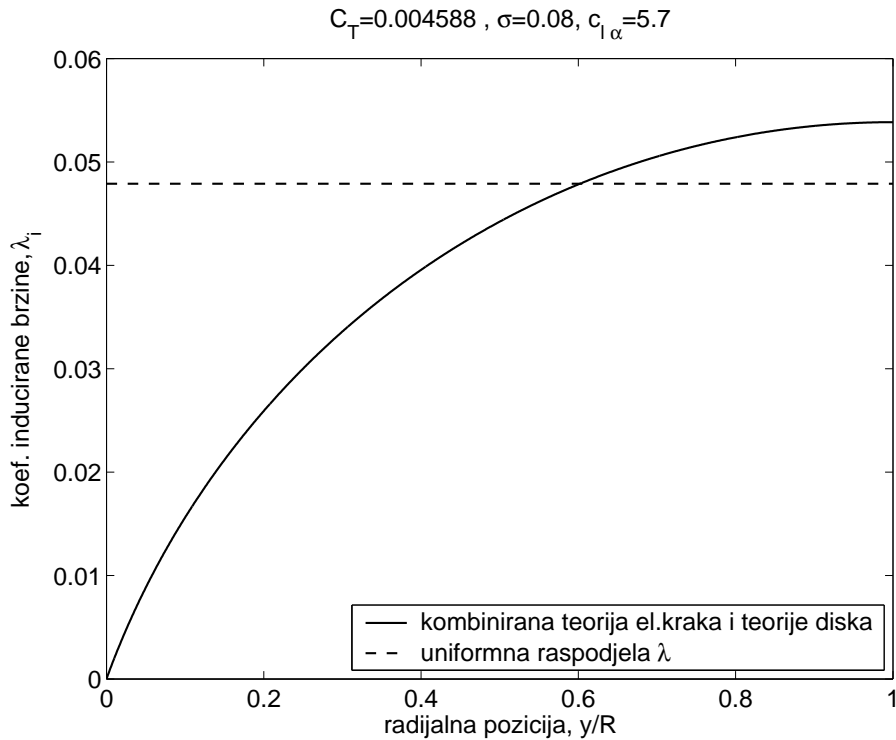
Adekvatno izvodu za elementarni doprinos pogonske sile od kružnog vijenca primjenom teorije diska, može se dati elementarni doprinos inducirane snage

$$dC_{P_i} = 4\lambda^2(\lambda - \lambda_c)\bar{r}d\bar{r}.$$

Za slučaj lebdenja vrijedi

$$C_{P_i} = 4 \int_0^1 \lambda^3 \bar{r} d\bar{r}.$$

<sup>12</sup>što je u slučaju lebdenja iz primjera ujedno koeficijent inducirane brzine



Slika 2.10.: Promjena koeficijenta inducirane brzine po rasponu kraka

Kako je već opisano za koeficijent pogonske sile rješenje gornjeg izraza ovisi o raspodjeli koeficijenta vertikalne brzine po disku. Ukoliko se pretpostavi jednostavan oblik

$$\lambda(\bar{r}) = \lambda_{tip} \cdot \bar{r}^n \quad \text{za } n \geq 0 .$$

Za koeficijent pogonske sile vrijedi

$$C_T = \frac{4\lambda_{tip}^2}{2n+2} ,$$

što daje

$$\lambda_{tip} = \sqrt{n+1} \cdot \sqrt{\frac{C_T}{2}} .$$

Za induciranu snagu vrijedi

$$C_{P_i} = \frac{4\lambda_{tip}^3}{3n+2} = \frac{2(n+1)^{3/2}C_T^{3/2}}{(3n+2)\sqrt{2}} ,$$

ili jednostavno

$$C_{P_i} = \kappa \frac{C_T^{3/2}}{\sqrt{2}} , \quad (2.41)$$

gdje je  $\kappa$  koeficijent inducirane snage

$$\kappa = \frac{2(n+1)^{3/2}}{3n+2} . \quad (2.42)$$

Na osnovu ove analize može se zaključiti da je idealna vrijednost  $\kappa = 1$  za  $n = 0$  tj. kada je raspodjela koeficijenta  $\lambda$  uniformna. Za  $n > 0$  tada je  $\kappa > 1$ . Ukupna potrebna snaga za lebdenje je

$$C_P = \kappa \frac{C_T^{3/2}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{8} \sigma c_{d_0}. \quad (2.43)$$

Pri tome se može primjetiti da se prvi član gornje relacije za  $\kappa = 1$ , inducirana snaga, poklapa s rezultatom teorije diska prema (2.23).

\* \* \*

Koeficijent učinkovitosti za lebdenje (*engl.* figure of merit) ima oblik

$$\eta_M = \frac{C_{P_{ideal}}}{C_{P_i} + C_{P_0}} = \frac{C_T^{3/2}}{\kappa C_T^{3/2} + \frac{\sigma c_{d_0}}{4\sqrt{2}}}.$$

Kako bi se za zadani koeficijent pogonske sile ostvarila veća učinkovitost potrebno je smanjiti  $\sigma$  što se može provesti do određene mjere no tada postavni kut poprima veće vrijednosti čime se značajno povećava i otpor. Drugi pristup bio bi smanjenjem koeficijent otpora  $c_{d_0}$ .

#### 2.2.4. Idealni kut uvijanja

Relacija (2.40) za koeficijent inducirane brzine  $\lambda_i$  ima konstantnu vrijednost po rasponu za slučaj kada je  $\theta \bar{r}$  konstantno. Odnosno kada je promjena kuta uvijanja dana funkcijom

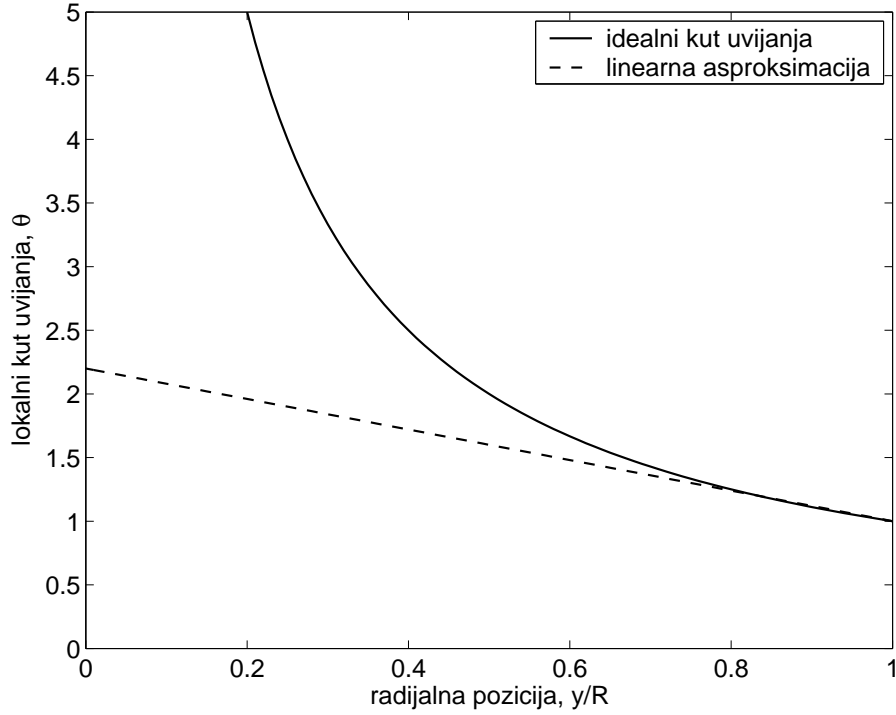
$$\theta = \frac{\theta_{tip}}{\bar{r}}, \quad (2.44)$$

gdje je  $\theta_{tip} = \text{const}$  vrijednost kuta uvijanja na vršnoj tetivi. Ovakva raspodjela kuta uvijanja, prikazana na slici (2.11.), naziva se idealni kut uvijanja (*engl.* ideal twist). Idealni kut uvijanja, raspodjela kuta uvijanja po rasponu prema (2.44), od interesa je pri konstruiranju rotora helikoptera budući da uniformnoj raspodjeli koeficijenta vertikalne brzine  $\lambda$  na rotoru odgovara minimalna inducirana snaga rotora u lebdenju ili u vertikalnom penjanju. Prema (2.41) za idealan slučaj  $\kappa = 1$  inducirana snaga je manja od realnog slučaja kada je  $\kappa > 1$ . Idealni kut uvijanja nije moguće realizirati za  $r \rightarrow 0$ . Pored toga zbog konstrukcijske realizacije korijena, poprečni presjek kraka ima oblik aeroprofila tek od nekog određenog radijusa – korijenskog odsječka kraka<sup>13</sup>. Za radijuse manje od korijenskog odsječka aerodinamičke karakteristike su velikog otpora i malog uzgona budući da su unutar tog radijusa smještene glavčina rotora, zglobovi mehanizma rotora<sup>14</sup> te pričvrtni dio kraka<sup>15</sup>. Slijedom toga na radijusu manjem od korijenskog odsječka idealni kut uvijanja nije od interesa. Analizom linearnog kuta uvijanja (slika 2.11.) može se uočiti zadovoljavajuće poklapanje s idealnim kutom uvijanja za radijuse pri vršnoj tetivi.

<sup>13</sup>korijenski odsječak kraka, *engl.* root cutout

<sup>14</sup>o kojim će biti više riječi u sljedećem poglavlju

<sup>15</sup>pričvrtni dio kraka, *engl.* blade shank



Slika 2.11.: Idealna raspodjela kuta uvijanja po radijusu kraka

Avionski propeleri imaju velike promjene kuta uvijanja krakova koje približno prate raspodjelu hiperboličke spirale po funkciji (2.44). Kod helikopterskih rotora takva promjena kuta uvijanja kraka nije optimalna za cjelokupno područje rada. Naime u horizontalnom letu velikih brzina leta, takve velike vrijednosti lokalnog kuta uvijanja dovele bi do manjih iznosa sile uzgona na krakovima na napredujućoj strani. No kako je za helikoptere značajan i vertikalni let krakovi rotora imaju određenu vrijednost kuta uvijanja.

Za idealni kut uvijanja može se primijeniti relacija (2.29) tako da je

$$\begin{aligned} C_T &= \frac{1}{2} \sigma c_{l_\alpha} \int_0^1 (\theta_{tip} - \lambda) \bar{r} d\bar{r} \\ &= \frac{1}{4} \sigma c_{l_\alpha} (\theta_{tip} - \lambda). \end{aligned}$$

Kako je  $\lambda = \bar{r}\phi = \phi_{tip} = \text{const}$  vrijedi

$$C_T = \frac{1}{4} \sigma c_{l_\alpha} (\theta_{tip} - \phi_{tip}) = \frac{1}{4} \sigma c_{l_\alpha} \alpha_{tip}.$$

Za koeficijent vertikalne brzine vrijedi

$$\lambda = \frac{\sigma c_{l_\alpha}}{16} \left[ \sqrt{1 + \frac{32 \cdot \theta_{tip}}{\sigma c_{l_\alpha}}} - 1 \right] = \sqrt{\frac{C_T}{2}} = \text{const}.$$

Iznos kuta uvijanja je tada

$$\theta_{tip} = \frac{4C_T}{\sigma c_{l\alpha}} + \sqrt{\frac{C_T}{2}},$$

pri čemu se prvi član gornje relacije može opisati kao kut uvijanja kraka potreban za realizaciju pogonske sile, a drugi član kao kut uvijanja potreban zbog inducirane brzine.

### 2.2.5. Srednja vrijednost koeficijenta sile uzgona za krak

Kako bi se dobila jednostavna aproksimacija koeficijenta sile uzgona krakova rotora u određenom režimu, od interesa je uvođenje srednje vrijednosti koeficijenta sile uzgona. Srednja vrijednost koeficijenta sile uzgona  $\bar{C}_L$  uniformno raspodjeljena po rasponu daje jednaki koeficijent pogonske sile kao za stvarnu raspodjelu uzgona

$$C_T = \frac{1}{2} \int_0^1 \sigma \bar{r}^2 c_l d\bar{r}.$$

Tada vrijedi

$$C_T = \frac{1}{2} \int_0^1 \sigma \bar{r}^2 \bar{C}_L d\bar{r} = \frac{1}{2} \sigma \bar{C}_L \int_0^1 \bar{r}^2 d\bar{r} = \frac{1}{6} \sigma \bar{C}_L,$$

što dovodi do relacije za srednju vrijednost koeficijenta sile uzgona na kraku

$$\bar{C}_L = 6 \frac{C_T}{\sigma}.$$

Time bi omjer  $\frac{\bar{C}_L}{c_{l\alpha}}$  predstavljao srednju vrijednost napadnog kuta na kraku. Kako su uobičajene srednje vrijednosti koeficijenta sile uzgona kraka  $\bar{C}_L = 0.5 \cdots 0.8$  tako se srednje vrijednosti napadnih kutova kod lebdenja kreću od  $5^\circ$  do  $8^\circ$ .

### 2.2.6. Koeficijent gubitaka na vrhu kraka

Gubici na vrhovima krakova nastaju zbog velikih lokalnih induciranih brzina uslijed snažnih vršnih slobodnih vrtloga. Posljedica toga je smanjenje cirkulacije, a time i lokalnog opterećenja na vrhu kraka rotora.

Prema teoriji elementarnog kraka na vrhu kraka ostvaruje se određena vrijednost sile uzgona što nije realno rješenje. Koeficijent gubitaka na vrhu kraka  $B$  opisuje ovaj gubitak uzgona razmatranjem rotora ekvivalentnog radijusa  $R_e = BR$ . Za helikopterske rotore uobičajene su vrijednosti koeficijenta  $B = 0.95 \cdots 0.98$ .

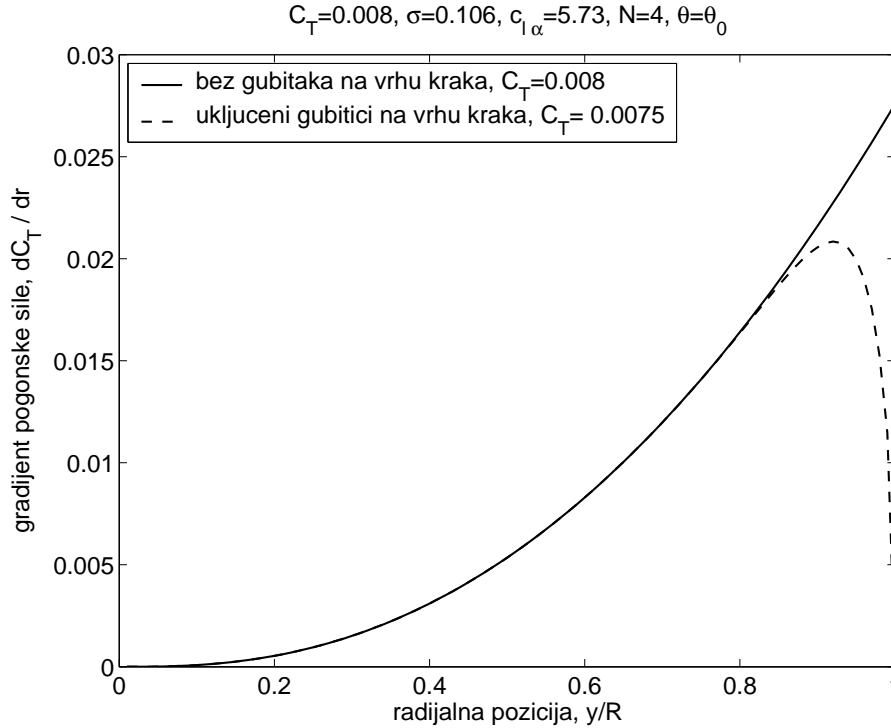
Koeficijent pogonske sile tada se može odrediti integracijom elementarnog doprinosa (2.26) do smanjenog, ekvivalentnog radijusa

$$C_T = \int_0^B \frac{1}{2} \sigma c_l \bar{r}^2 d\bar{r} = \frac{1}{2} \sigma c_{l\alpha} \int_0^B (\theta \bar{r}^2 - \lambda \bar{r}) d\bar{r}.$$

Za konstantni kut uvijanja  $\theta_0$  i uniformnu raspodjelu  $\lambda$  slijedi

$$C_T = \frac{1}{2} \sigma c_{l\alpha} B^2 \left( \frac{1}{3} \theta_0 B - \frac{1}{2} \lambda \right).$$





Slika 2.12.: Promjena koeficijenta pogonske sile po rasponu kraka s gubicima na vrhu kraka prema Prandtlovoj metodi

Za slučaj idealnog kuta uvijanja  $\theta = \frac{\theta_{tip}}{\bar{r}}$  koeficijent pogonske sile koji uključuje gubitke na vrhu kraka je

$$C_T = \frac{1}{4} \sigma c_{l\alpha} B^2 (\theta_{tip} - \lambda) .$$

Za navedene realne vrijednosti  $B$  od 0.95 do 0.98, za dani  $\theta$ , koeficijent pogonske sile prema gornjim relacijama daje 5% do 10% manje vrijednosti od relacije (2.30) gdje je  $B = 1$ .

Umjesto ovakvog pristupa s referentnim radijusom gubici na vrhu kraka mogu se odrediti primjenom metode koju je postavio Prandtl [1], a kasnije su je razvili Goldstein [11] i Lock [18]. Tom metodom uvodi se koeficijent korekcije inducirane brzine  $F$ , kao funkcija broja krakova  $N$ , promatranog radijusa  $\bar{r}$  i koeficijenta vertikalne brzine  $\lambda$ . Primjenom Prandtlovog koeficijenta  $F$  raspodjela koeficijenta pogonske sile po rasponu kraka<sup>16</sup> poprma realne vrijednosti.

Detaljni opis Prandtlovog koeficijenta  $F$  nije predviđen u okviru ovog teksta, ali slikoviti primjer realne raspodjele pogonske sile po rasponu kraka bez uvijanja ( $\theta = \theta_0$ ) prikazan je na slici (2.12.). Koeficijent pogonske sile (od  $C_T = 0.008$  za slučaj bez gubitaka) smanjen je za 6.3% uzimajući u obzir gubitke na vrhu kraka prema Prandtlovoj metodi.

<sup>16</sup>odnosno opterećenja kraka po rasponu

### 2.2.7. Utjecaj stlačivosti

Za primijenjene gradijente koeficijenta uzgona po napadnom kutu potrebno je primijeniti Glauertovu korekciju za utjecaj stlačivosti

$$c_{l_\alpha}(Ma) = \frac{(c_{l_\alpha})_{Ma=0}}{\sqrt{1 - Ma^2}},$$

gdje je  $(c_{l_\alpha})_{Ma=0}$  gradijent koeficijenta uzgona profila za male brzine (uobičajeno predstavljen u dijagramima kao rezultat mjerenja za  $Ma \approx 0.1$ ). Pri tome je Machov broj  $Ma(y) = \frac{U_t}{a} = \frac{\Omega}{a}y$ . Gore navedena Glauertova korekcija provodi se za koeficijent

$$\frac{1}{\sqrt{1 - Ma^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{\Omega}{a})^2 y^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - Ma_{tip}^2 \bar{r}^2}},$$

gdje je  $Ma_{tip}$  Machov broj na vrhu kraka. Za koeficijent pogonske sile može se izvesti relacija primjenom Glauertove korekcije za utjecaj stlačivosti

$$C_T = \frac{1}{4} \sigma K (c_{l_\alpha})_{Ma=0} (\theta_{tip} - \lambda),$$

gdje je faktor  $K$

$$K = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - Ma_{tip}^2}}.$$

Može se uočiti da za  $Ma \rightarrow 0$  slijedi  $K \rightarrow 1$  čime se dobiva rješenje za nestlačivo strujanje.

Utjecaj stlačivosti više je izražen kod horizontalnog leta kada se vrijednosti Machovog broja za napredujuće krakove približavaju transoničnom području. Tada koncept srednje vrijednosti koeficijenta sile uzgona po rasponu kraka više nije primjenjiv i potrebno je utjecaj stlačivosti analizirati specijalno po rasponu svakog kraka.

## Poglavlje 3.

# Dinamika rotora

### 3.1. Uvod

Za rotor helikoptera u horizontalnom letu opstrujavanje nije osnosimetrično, okomito na ravninu rotacije rotora, kao kod vertikalnog leta<sup>1</sup> već zrak nastrujava na rub rotora. Praktične izvedbe helikopterskih rotora uvjetovane kompliciranim strujanjem primjenjuju mehaničke uređaje, a posljedica čega je kompleksna aerodinamika rotora.

Za dani smjer rotacije kutnom brzinom  $\Omega$  i brzinu leta  $V$  (kada nema vjetra, što će biti slučaj za sva razmatranja u ovom tekstu, brzina leta jednaka je aerodinamičkoj brzini) definira se koeficijent napredovanja (*engl.* advance ratio)

$$\mu = \frac{V}{\Omega R}. \quad (3.1)$$

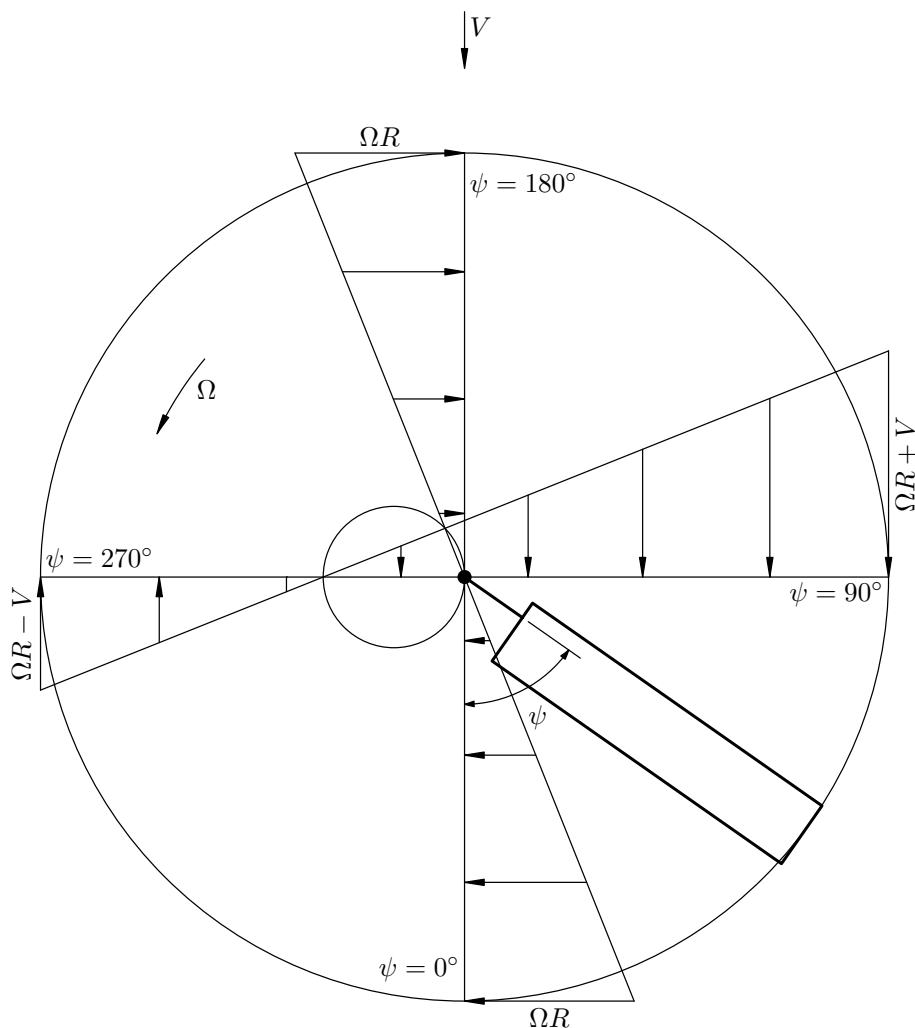
Promatrajmo promjenu brzine po radijusu na krakovima rotora, prema slici (3.1.), za karakteristične položaje kraka za azimut  $\psi = 90^\circ$  i  $\psi = 270^\circ$ . Ukoliko bi krak u ova dva položaja, s ovako različitim brzinama, rotirali s istim postavnim kutom tada bi se na napredujućoj strani ( $\psi = 90^\circ$ ) uslijed većih brzina javljala znatno veća sila uzgona (s kvadratom brzine) nego na povratnoj strani rotora ( $\psi = 270^\circ$ ). Posljedice koje bi ovakva nesimetrična raspodjela uzgona dovela bile bi naprezanja od savijanja u korijenu kraka i izrazit moment valjanja letjelice. S takvim helikopterom ne bi bilo moguće letjeti. Uvođenjem ciklične promjene postavnog kuta može se postići ravnoteža ove dvije strane diska. Uobičajeno konstrukcijsko rješenje predstavlja ju zglobovi mahanja krakova<sup>2</sup>. Slobodan zglob mahanja kraka, postavljen što bliže osi rotacije, omogućava kraku slobodnu rotaciju gore – dole (mahanje, *engl.* flapping). S ovakvim zglobom na napredujućem kraku povećanje brzine uzrokuje veću silu uzgona uslijed čega se krak diže, a kut mahanja se povećava. Uslijed toga se smanjuje efektivni napadni kut odnosno sila uzgona, zbog čega se krak spušta nazad (smanjenje kuta mahanja). Uvođenjem zgloba mahanja izjednačen je doprinos pogonskoj sili na napredujućem i povratnom kraku te prednji i stražnji dio diska nose glavni dio opterećenja.

Uslijed asimetrije brzina na disku (kako se vidi na slici 3.1.) postoji područje na kraku u povratku gdje je struja zraka suprotnog smjera u odnosu na profil kraka. Za

---

<sup>1</sup>što je za propelere uvijek slučaj

<sup>2</sup>Prvi ih je uveo Juan de la Cierva 1923. godine.



Slika 3.1.: Raspodjela tangencijalnih brzina po rasponu kraka za horizontalni let

položaj kraka na  $\psi = 270^\circ$  rezultatna brzina je

$$U = \Omega y - V ,$$

odnosno u bezdimenzionalnom obliku

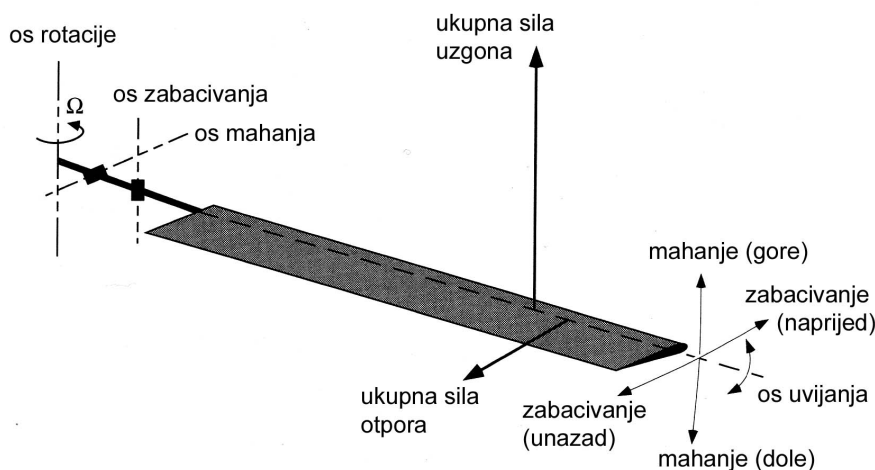
$$u = \frac{U}{\Omega R} = \bar{r} - \mu .$$

Dakle za radijuse  $\bar{r} < \mu$  strujanje je suprotnog smjera. Može se odrediti da je granica koja definira takvo strujanje krug promjera  $\mu$  sa centrom na  $r = \mu/2$  na  $\psi = 270^\circ$ .

Na rotirajući krak pri mahanju djeluje Coriolisova sila u ravnini diska koji nastoji ubrzati/usporiti krak – zabacivati krak. Kako ne bi došlo do dodatnih opterećenja u korijenu kraka uslijed ovog momenta uvodi se dodatni zglob zabacivanja (ili klaćenja, *engl.* lead-lag) koji omogućuje kraku slobodno gibanje zabacivanja. To gibanje u manjoj mjeri utječe na performanse helikoptera te se u ovom tekstu neće razmatrati.

Rotacija kraka oko uzdužne osi kraka (osi približno okomite osima rotacije mahanja i zabacivanja) potrebna je za upravljanje postavnim kutom kraka. Ovo gibanje oko uzdužne osi kraka nazivat ćemo uvijanje (*engl.* feathering), a zglob koji to omogućuje zglob uvijanja (*engl.* feathering hinge). Taj zglob povezan je sa sustvom upravljanja i pilotovim komandama. Standardni zglobni rotor (*engl.* articulated rotor) ima tri slobodne rotacije kraka realizirane s tri zgloba: zglob mahanja, zglob zabacivanja i zglob uvijanja koji su smješteni u glavčini rotora.

Kako je ranije napomenuto u ovom tekstu analizirat će se samo gibanje mahanja, te se relacije gibanja zanošenja i uvijanja neće razmatrati uz pretpostavku da su krakovi rotora kruti. Pored toga pretpostavlja se da je zglob mahanja smješten na osi rotacije. U realnim konstrukcijskim rješenjima zglob mahanja smaknut je s osi rotacije za 3-4% $R$ . Moderniji rotori imaju konstrukcijska rješenja bez zgloba mahanja i zabacivanja što je omogućeno elastičnom vezom kraka rotora. Krak s elastičnom vezom može se analizirati kao kruti krak sa zglobom mahanja uz ekvivalentni pomak zgloba od osi rotacije od 10-15% $R$ .

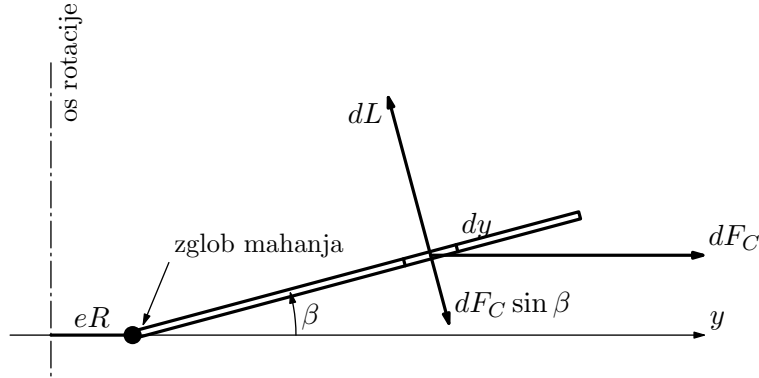


Slika 3.2.: Shematski prikaz gibanja kraka rotora: mahanje, zabacivanje i uvijanje

### 3.2. Ravnoteža u zglobu mahanja

Promatramo li ravnotežu momenata rotirajućeg kraka u zglobu mahanja (*engl.* flapping hinge, slika 3.3.) postavljenog na udaljenosti  $eR$  od osi rotacije. Kako je u uvodu napomenuto ovdje će se, radi pojednostavljene analize, razmatrati slučaj kada je zglob mahanja postavljen na osi rotacije  $e = 0$ . Pretpostavimo uniformnu raspodjelu mase po duljini kraka,  $\frac{dm}{dy} = \bar{m}$ ; tako da je ukupna masa kraka  $m = \bar{m}R$ .

Sile koje djeluju na elementarni dio kraka širine  $dy$  i mase  $\bar{m}dy$  su centrifugalna sila paralelna ravnini rotacije i sila uzgona okomita na krak. Centrifugalna sila na



Slika 3.3.: Mahanje kraka

promatranom elementu je

$$dF_C = \left( \frac{dm}{dy} dy \right) y \Omega^2 = \bar{m} \Omega^2 y dy .$$

Za ukupnu centrifugalnu silu kraka slijedi

$$F_C = \int_0^R \bar{m} \Omega^2 y dy = \frac{m \Omega^2 R}{2} .$$

Moment centrifugalne sile za elementarni dio kraka pod kutom mahanja  $\beta$  je moment komponente okomite na krak rotora  $dF_C \sin \beta \approx \bar{m} y \Omega^2 \beta dy$ . Moment te sile oko zgloba koji se nalazi na osi rotacije za cijeli krak rotora iznosi

$$M_C = \int_0^R \bar{m} \Omega^2 y^2 \beta dy = \frac{m \Omega^2 \beta R^2}{3} = \frac{2}{3} F_C R \beta .$$

Ovom momentu suprotstavlja se moment od aerodinamičke sile<sup>3</sup> – sile uzgona na elementarnom kraku  $\left( \frac{dL}{dy} \right) dy$ :

$$M_A = - \int_0^R \left( \frac{dL}{dy} \right) y dy$$

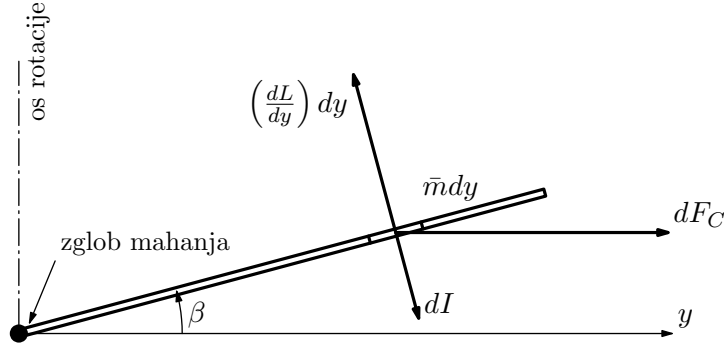
Za ravnotežu momenta u zglobu mahanja potrebno je

$$M_C + M_A = 0 ,$$

te se kut mahanja  $\beta$  za koji je ravnoteža zadovoljena naziva kut konusa (*engl.* coning angle)

$$\beta = a_0 = \frac{\int_0^R \left( \frac{dL}{dy} \right) y dy}{\frac{1}{3} m \Omega^2 R^2} .$$

<sup>3</sup>Pozitivan moment u zglobu mahanja je moment koji smanjuje kut mahanja  $\beta$ .



Slika 3.4.: Mahanje kraka: ravnoteža sila – zglob mahanja na osi rotacije

Analizom gornje relacije može se zaključiti da ukoliko želimo smanjiti kut konusa dovoljno je povećati masu kraka ili, još efikasnije, povećati brzinu okretanja ili duljinu kraka.

Sličnim postupkom može se izvesti vrijednost kuta konusa za slučaj kada se zglob mahanja ne nalazi na osi rotacije (potrebno je obratiti pažnju na granice integrala).

Analogno se može provesti analiza ravnoteže momenta u zglobu zabacivanja uslijed centrifugalne sile i sile otpora.

### 3.3. Jednadžbe gibanja mahanja kraka

Za slučaj vertikalnog leta rješenje za kut mahanja  $\beta$  ima konstantnu vrijednost neovisno o  $\psi$  azimutnom položaju kraka i jednak je kutu konusa:  $\beta = \alpha_0$ . Za horizontalni let, kako je u uvodu opisano, kut  $\beta$  mijenja se ciklično u ovisnosti o  $\psi$ . U zglobu mahanja elementarni dio kraka (slika 3.4.) ima centrifugalni moment

$$dM_C = \bar{m}y^2\Omega^2\beta dy ,$$

inercijski moment

$$dI = (\bar{m}dy)y^2\ddot{\beta} ,$$

i aerodinamički moment

$$dM_A = - \left( \frac{dL}{dy} \right) y dy .$$

Jednadžbu gibanja mahanja dobivamo raspisivanjem sume ukupnih momenata u zglobu mahanja:

$$\int_0^R dM_C + \int_0^R dI + \int_0^R dM_A = 0 ,$$

odnosno

$$\int_0^R \bar{m}\Omega^2\beta y^2 dy + \int_0^R \bar{m}\ddot{\beta}y^2 dy - \int_0^R \left( \frac{dL}{dy} \right) y dy = 0 . \quad (3.2)$$

Ako je moment tromosti kraka oko zgloba mahanja

$$I_b = \int_0^R \bar{m}y^2 dy ,$$

jednadžba mahanja (3.2) može se zapisati kao

$$I_b \ddot{\beta} + I_b \Omega^2 \beta = \int_0^R \left( \frac{dL}{dy} \right) y dy ,$$

ili kraće

$$I_b \ddot{\beta} + I_b \Omega^2 \beta = -M_A . \quad (3.3)$$

Budući da je  $\psi = \Omega t$  može se uvesti

$$\begin{aligned} \dot{\beta} &= \frac{\partial \beta}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial \beta}{\partial \psi} = \Omega \frac{\partial \beta}{\partial \psi} = \Omega^* \beta , \\ \ddot{\beta} &= \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} = \Omega^2 \frac{\partial^2 \beta}{\partial \psi^2} = \Omega^{**} \beta , \end{aligned}$$

tako da jednadžba mahanja (3.3) poprima oblik

$$\beta^{**} + \beta = \frac{-M_A}{I_b \Omega^2} . \quad (3.4)$$

Kako će se kasnije pokazati aerodinamički moment u zglobu mahanja za horizontalni let je funkcija nekoliko varijabli  $M_A = f(\theta, \mu, \lambda, \psi, \beta, \beta^*)$ . Njegovim uvrštavanjem u (3.4) može se dobiti rješenje za  $\beta$ .

Ovaj sistem drugog reda ima prirodnu frekvenciju  $\omega_n = \Omega$  dok je prigušenje aerodinamičkog porijekla (član uz  $\beta^*$ ). To je prigušenje kod uobičajenih konstrukcijskih rješenja veliko tako da je gibanje mahanja stabilno i prigušeno. Za slučaj horizontalnog leta  $\mu \neq 0$  rješenje jednadžbe mahanja (3.4) ima periodične koeficijente tako da nije moguće odrediti analitičko rješenje u zatvorenoj formi. U općem slučaju rješenje  $\beta$  je funkcija kuta položaja  $\psi$

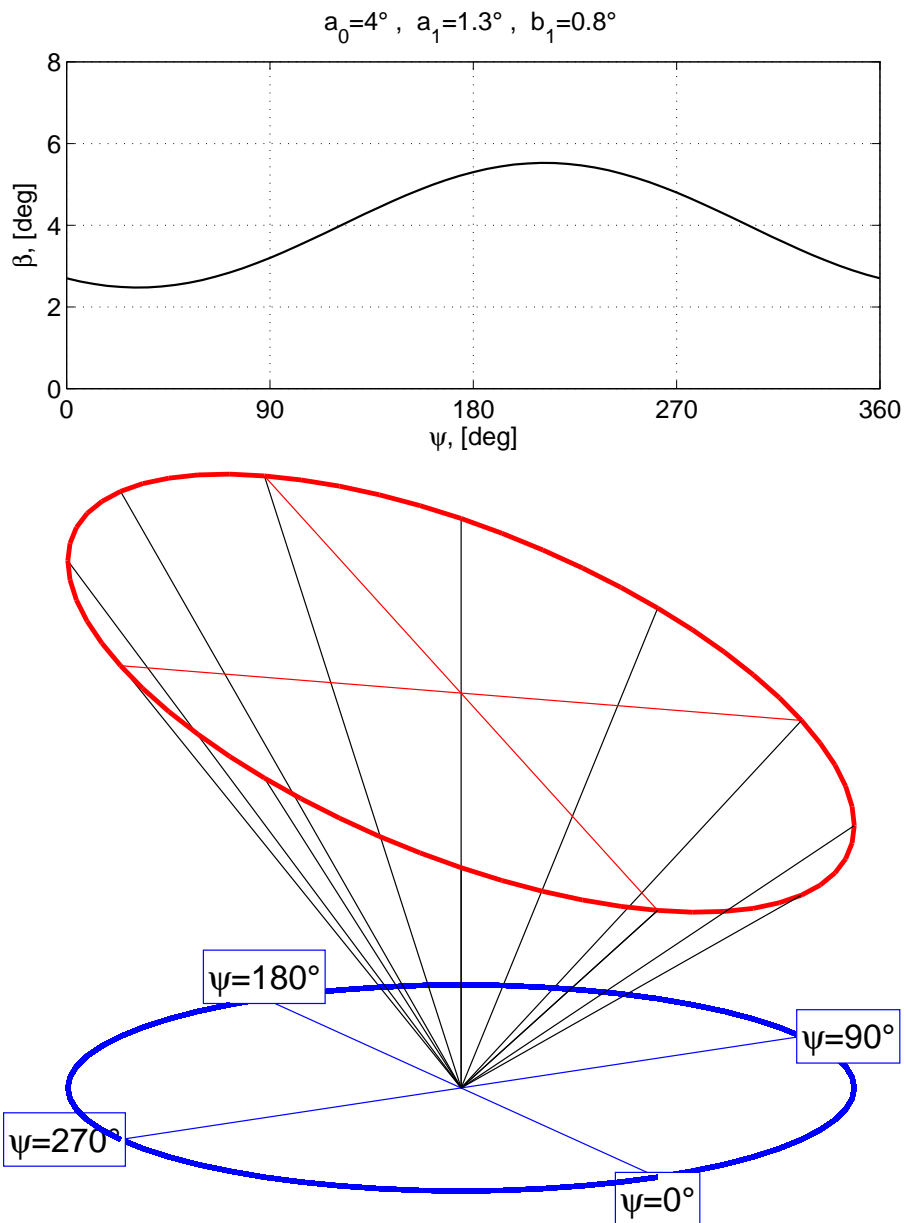
Kako nije moguće odrediti direktno analitičko rješenje jednadžba (3.4) se može analizirati numerički u iterativnom postupku za poznate vrijednosti  $\theta$  i  $\lambda_i$ . Drugi pristup je određivanje periodičkog rješenja stacionarnog stanja u obliku Fourierovog reda. Ako se u obzir uzmu samo prvi harmonici takav razvoj u red bio bi oblika

$$\beta(\psi) = a_0 - a_1 \cos \psi - b_1 \sin \psi . \quad (3.5)$$

Koeficijent  $a_1$  predstavlja uzdužni naklon rotora (uzdužni nagib ravnine diska, ravnine vrhova krakova), dok koeficijent  $b_1$  predstavlja bočni naklon rotora (bočni nagib ravnine diska, ravnine vrhova krakova). Uzdužno mahanje  $a_1$  definira se kao pozitivno kada se krak rotora na repu giba prema dole, a na vrhu letjelice prema gore – odnosno kada je disk rotora nagnut unazad. Bočno mahanje  $b_1$  definira se kao pozitivno kada se napredujući krak giba prema dole, a povratni krak prema gore – odnosno kada je disk rotora nagnut nadesno. Na slici (3.5.) shematski je prikazan položaj diska za pozitivne vrijednosti  $a_1$  i  $b_1$  zajedno s kutom konusa  $a_0$  (pri tome kut konusa nije prikazan u srazmjeri).

Koeficijent viših harmonika kuta mahanja su male veličine te nisu od interesa u ovom tekstu. Kod analize performansi pokazano je da se svi viši harmonici mogu zanemariti. Ukoliko bi se razmatrale vibracije i aeroelastične karakteristike tada bi utjecaj viših harmonika trebalo uzeti u obzir.





Slika 3.5.: Promjena kuta mahanja  $\beta$  i položaj ravnine vrhova krakova (ravnine diska) za  $a_0 = 4^\circ$ ,  $a_1 = 1.3^\circ$ ,  $b_1 = 0.8^\circ$

Adekvatno zapisu kuta mahanja (3.5) može se usvojiti zapis postavnog kuta u obliku Fourierovog reda

$$\theta(\psi) = \theta_0 - A_1 \cos \psi - B_1 \sin \psi . \quad (3.6)$$

Primjenom periodičkog rješenja stacionarnog stanja u obliku Fourierovog reda prema (3.5) te izjednačavanjem konstantnih i periodičnih članova (sinusnih i kosinusnih) sa obe strane jednadžbe gibanja mahanja (3.4) može se dobiti rezultat za koeficijente prvih harmonika kuta mahanja, što je kasnije pokazano relacijom (4.13), a prema [17]. Za slučaj lebdenja kada je  $\mu = 0$  iz relacija (4.13) može se pokazati da vrijedi

$$\begin{aligned} a_1 + B_1 &= 0 \\ b_1 - A_1 &= 0 \end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned} a_1 &= -B_1 \\ b_1 &= A_1 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Postavni kut (3.6) predstavlja komandu pilota te se može razmatrati kao pobuda. Tako definirana pobuda za slučaj lebdenja (3.7) za odziv će imat kut mahanja, nakon uvrštavanja u (3.5), oblika

$$\beta = a_0 - A_1 \cos\left(\psi - \frac{\pi}{2}\right) - B_1 \sin\left(\psi - \frac{\pi}{2}\right) .$$

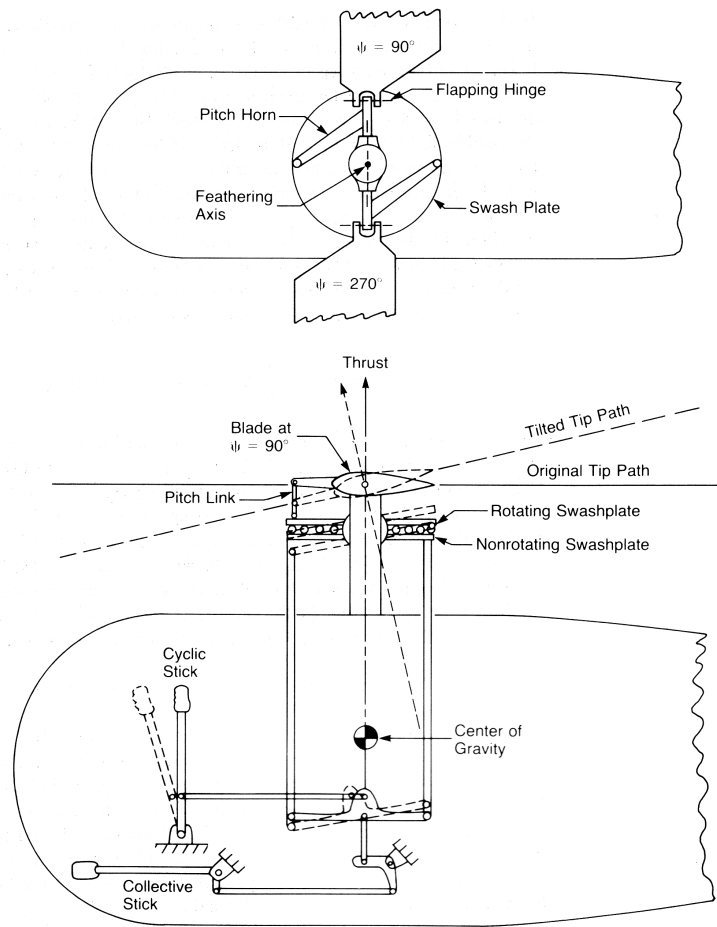
Dakle na pobudu postavnog kuta  $\theta$  odziv mahanja ima kašnjenje za  $90^\circ$  uslijed dinamike kraka<sup>4</sup>. Ovo je rješenje za slučaj rotora s zglobovima mahanja na osi rotacije. Efekt pomaka položaja zgloba od osi rotacije je smanjenje navedenog faznog kašnjenja. Za veće  $e$  udaljenosti zgloba mahanja od osi rotacije, kao što je npr. slučaj kod bez-zglobnih rotora koji imaju veliki efektivni pomak  $e$ , gore izvedeni fazni pomak iznosi od  $75^\circ$  do  $80^\circ$ .

### 3.4. Postavni kut kraka – upravljanje rotorom

Postavni kut kraka – kut uvijanja kraka (*engl.* blade pitch, feathering angle) opisuje se razvojem u Fourierov red

$$\theta(\psi) = \theta_0 - A_1 \cos \psi - B_1 \sin \psi , \quad (3.8)$$

pri čemu su viši harmonici zanemareni<sup>5</sup>. Tako definirani kut uvijanja predstavlja upravljački veličinu sustava upravljanja helikoptera. Uobičajeno konstrukcijsko rješenje je nagibna ploča *swashplate* čiju orijentaciju određuje pilot. Upravljačku veličinu čine kolektivni postavni kut  $\theta_0$ , bočni ciklični postavni kut  $A_1$  (*engl.* lateral cyclic pitch) i uzdužni ciklični postavni kut  $B_1$  (*engl.* longitudinal cyclic pitch). S kolektivnim postavnim kutom upravlja se prosječnim postavnim kutom pa tako i prosječnim iznosom pogonske

Slika 3.6.: *Swashplate* konstrukcija

sile. Ciklični postavni kutovi upravljaju naklon diska rotora pa tako i smjer pogonske sile.

Nagibna ploča (engl. *Swashplate*) sastoji se od dva diska simetrično postavljena na osi rotacije. Donji disk ne rotira i pilotu omogućuje da ga nagne u željenom smjeru leta (ciklična komanda) te da ga podigne/spusti (kolektivna komanda). Gornji disk povezan polugama s mehanizmom zgloba uvijanja, rotira zajedno s krakovima no uvijek ostaje paralelan donjem disku. Podizanje kolektivne poluge ( $\theta_0$  raste) povećava postavni kut krakova neovisno o položaju  $\psi$ . Ciklična komanda izaziva nagib diska zbog čega se postavni kut na krakovima ciklično mijenja tako da imaju konstantan postavni kut relativno u odnosu na gornji disk nagibne ploče.

Kako je ranije opisano za rotor s centralno postavljenim zglobovima između pobude i odziva postoji fazni pomak od  $90^\circ$ . Tako za slučaj čiste kosinusne ciklične pobude amplitude  $A_1$  maksimalnoj pobudi odgovara maksimalna aerodinamička sila za

<sup>4</sup>što predstavlja rezonantne uvjete

<sup>5</sup>Za analize performansi dovoljno je razmatrati samo prve harmonike; no kod analize elastičnih deformacija uvijanja potrebno je uzeti i utjecaje viših harmonika.

$\psi = 0^\circ$  te uz definirani fazni pomak maksimalni kut mahanja nastaje na  $\psi = 90^\circ$ . Dakle pobuda postavnog kuta za  $A_1$  uzrokuje nagib diska rotora nadesno (zbog negativnog predznaka ispred koeficijenta  $A_1$ ) zbog čega se naziva bočni ciklični postavni kut. Takav nagib ekvivalentan je mahanju kraka za koeficijent  $b_1$ . Analogno tome, pobudi postavnog kuta za  $B_1$  odgovara maksimalna aerodinamička sila na  $\psi = 90^\circ$  što, uz fazni pomak od  $90^\circ$ , dakle pri  $\psi = 180^\circ$  uzrokuje maksimalni kut mahanja, odnosno nagib diska rotora prema naprijed (u smjeru leta). Tako je uzdužni ciklični postavni kut  $B_1$  ekvivalentan uzdužnom kutu mahanja  $-a_1$ .

### 3.5. Referentne osi rotora

Za analizu helikoptera i opis gibanja krakova rotora primjenjuje se nekoliko referentnih ravnina, odnosno pripadajućih osi okomitih na njih.

- Ravnina okomita na os vratila motora (SNP) Glavnu os u analizi rotora helikoptera predstavlja os rotacije odnosno os vratila motora (SA, *engl.* shaft axis). Ravnina okomita na os rotacije (SNP, *engl.* shaft normal plane) predstavlja ravninu iz koje se vide promjene kuta mahanja i postavnog kuta.
- Ravnina bez promjene postavnog kuta (NFP, *engl.* no feathering plane) je ravnina iz koje nije moguće uočiti promjenu cikličnog postavnog kuta ( $A_1 = 0$  i  $B_1 = 0$  u ovoj ravnini), ali se vide ciklične promjene kuta mahanja.
- Ravnina vrhova krakova rotora (TPP, *engl.* tip path plane) definiraju svojom putanjom vrhovi krakova rotora. Os okomita na ovu ravninu predstavlja os konusa kojeg opisuju rotirajući krakovi. Iz ove ravnine nije moguće uočiti promjenu kuta mahanja (te vrijedi  $a_1 = 0$ ,  $b_1 = 0$ ).
- Upravljačka ravnina (CP, *engl.* control plane) je ravnina u kojoj je postavljen *washplate*.

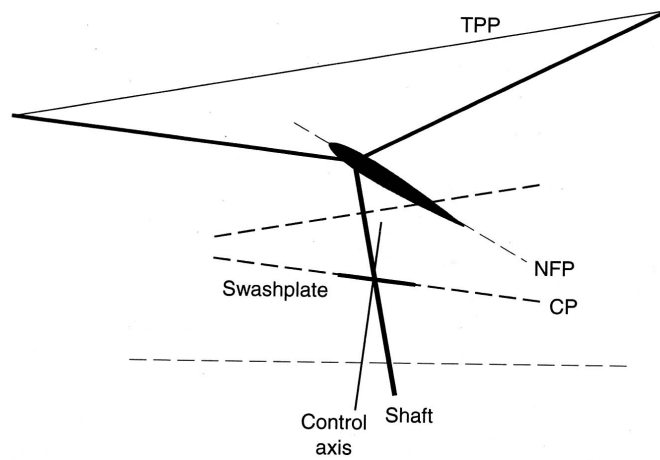
U općem slučaju za horizontalni let (slika 3.7.) normalne osi na ove ravnine se međusobno ne poklapaju te se ne poklapaju ni sa vertikalom ( $z$  osi lokalnog koordinatnog sustava).

Analizom općeg nagiba diska rotora: uzdužno i bočno, može se zaključiti da je iznos postavnog kuta u TPP jednak iznosu kuta mahanja u NFP. Tako je uzdužni kut mahanja  $a_1$  u odnosu na NFP ekvivalentan bočnom postavnom kutu u odnosu na TPP. Dakle postoji ekvivalentnost kuta mahanja i postavnog kuta<sup>6</sup>.

#### 3.5.1. Transformacija kutova između referentnih ravnina

Kutovi  $\beta$  i  $\theta$  definiraju orijentaciju ravnine krakove u odnosu na odabranu ref.ravninu. Komponente nagiba kraka u nerotirajućem koordinatnom sustavu (1) su:  $\theta \cos \psi + \beta \sin \psi$  – bočno;  $\theta \sin \psi - \beta \cos \psi$  uzdužno. Neka se ref.ravnina nagne (smanji) za kutove  $\phi_x$

<sup>6</sup>Strogo govoreći ovo vrijedi samo za rotore sa zglobovima mahanja na osi rotacije, no i za rotore pomaknutog zgloba mahanja ova ekvivalentnost je značajna.



Slika 3.7.: Shematski prikaz referentnih ravnina i osi rotora

bočno i  $\phi_y$  uzdužno: koord.sustav (2). Kako položaj kraka u prostoru mora ostati nepromijenjen, orijentacija kraka relativno prema koord.sustavima (1) i (2) vrijedi:

$$\begin{aligned}\theta_2 \cos \psi + \beta_2 \sin \psi &= \theta_1 \cos \psi + \beta_1 \sin \psi - \phi_x \\ \theta_2 \sin \psi - \beta_2 \cos \psi &= \theta_1 \sin \psi - \beta_1 \cos \psi - \phi_y\end{aligned}$$

odnosno u rotirajućem koordinatnom sustavu

$$\begin{aligned}\theta_2 &= \theta_1 - \phi_x \cos \psi - \phi_y \sin \psi \\ \beta_2 &= \beta_1 - \phi_x \sin \psi + \phi_y \cos \psi\end{aligned}$$

što definira transformaciju kuta mahanja i postavnog kuta. Njihovim raspisom u Fourierov red slijedi

$$\begin{aligned}(\theta_0 - A_1 \cos \psi - B_1 \sin \psi)_2 &= (\theta_0 - A_1 \cos \psi - B_1 \sin \psi)_1 - \phi_x \cos \psi - \phi_y \sin \psi \\ (a_0 - a_1 \cos \psi - b_1 \sin \psi)_2 &= (a_0 - a_1 \cos \psi - b_1 \sin \psi)_1 - \phi_x \sin \psi + \phi_y \cos \psi\end{aligned}$$

što grupiranjem članova uz  $\cos \psi$  i  $\sin \psi$  dovodi do

$$\begin{aligned}(A_1)_2 &= (A_1)_1 + \phi_x \\ (B_1)_2 &= (B_1)_1 + \phi_y \\ (a_1)_2 &= (a_1)_1 - \phi_y \\ (b_1)_2 &= (b_1)_1 + \phi_x.\end{aligned}$$

Eliminacijom  $\phi_x$  i  $\phi_y$  evidentno je da s transformacijom koordinatnih sustava veličina  $b_1 - A_1$  i  $a_1 + B_1$  ostaje nepromijenjena.

$$\begin{aligned}b_1 - A_1 &= \text{const} \\ a_1 + B_1 &= \text{const}\end{aligned}$$

Ukoliko razmatramo za referentne ravnine NFP (u kojoj je  $A_1 = 0$  i  $B_1 = 0$ ) i TPP (u kojoj je  $a_1 = 0$  i  $b_1 = 0$ ) transformacija iz NFP u TPP je

$$\begin{aligned} a_1 + B_1 &= \text{const} = (a_1)_{\text{NFP}} = (B_1)_{\text{TPP}} \\ b_1 - A_1 &= \text{const} = (b_1)_{\text{NFP}} = -(A_1)_{\text{TPP}} . \end{aligned}$$

### Napomena: razlike u nomenklaturi

Kako u području aerodinamike i mehanike leta helikoptera nema šire usvojenog standarda za nomenklaturu u literaturi se mogu naći različite oznake. Najčešća je nomenklatura koju je uvela NACA i ona je primijenjena u ovom tekstu. Drugu često korištenu nomenklaturu postavio je Johnson [14], a koristi je i Leishman [17]. Najčešće i najveće razlike navedenih pristupa su u označavanju koeficijenata kuta mahanja, odnosno uzdužnog i bočnog pomaka TPP, kao i postavnog kuta odnosno uzdužnog i bočnog cikličnog postavnog kuta. Prema toj nomenklaturi kut mahanja je

$$\beta(\psi) = \beta_0 + \beta_{1c} \cos \psi + \beta_{1s} \sin \psi ,$$

dok je postavni kut

$$\theta(\psi) = \theta_0 + \theta_{1c} \cos \psi + \theta_{1s} \sin \psi .$$

Razlika je i u definiciji napadnog kuta rotora što će se koristiti u sljedećem poglavlju: NACA definira pozitivan napadni kut kako je definiran i za sve letjelice – za takav napadni kut rotor ima pogonsku silu suprotno usmjerenu pravcu leta i takva definicija biti će primijenjena u ovom tekstu. Johnson suprotno definira napadni kut na rotoru tako da pozitivan napadni kut daje pogonsku silu rotora usmjerenu u pravcu gibanja.

## Poglavlje 4.

# Horizontalni let

### 4.1. Teorija diska za horizontalni let

U horizontalnom letu struja zraka nije okomita na disk rotora već zrak nastružava na rub rotora. Rotor svojom pogonskom silom mora kompenzirati težinu letjelice i generirati propulzivnu silu kojom bi savladao silu otpora u horizontalnom letu. U takvim uvjetima disk rotora (TPP ravnina) naginje se prema naprijed pod određenim napadnim kutom,  $\alpha_r$ .

Kod ovakvog strujanja evidentno je da je osnosimetričnost strujanja kroz disk rotora izgubljena no ipak jednostavna teorija diska može se proširiti kako bi obuhvatila analizu ovakvog strujanja. Primjenu teorije diska za horizontalni let prvi postavlja Glauert [8, 9].

Maseni protok kroz disk je

$$\dot{m} = \rho AU ,$$

gdje je  $U$  rezultantna brzina na disku

$$U = \sqrt{(V \cos \alpha_r)^2 + (V \sin \alpha_r + v_i)^2} = \sqrt{V^2 + 2Vv_i \sin \alpha_r + v_i^2}$$

Pri tome je brzina leta  $V$  (za slučaj bez vjetra, kako će ovdje biti razmatrano, jednaka je aerodinamičkoj brzini) ima komponentu okomitu na ravninu diska  $V \sin \alpha_r$  i komponentu u ravnini diska  $V \cos \alpha_r$ . Kut brzine leta i ravnine diska  $\alpha_r$  definiran je kao pozitivan prema slici (4.1.) kada je disk nagnut prema naprijed što je i prirodan položaj diska kojim se ostvaruje pogonska sila potrebna za horizontalni let<sup>1</sup>.

Primjenom jednadžbe očuvanja količine gibanja u smjeru normalnom na ravninu diska

$$T = \dot{m}(\Delta V + V \sin \alpha_r) - \dot{m}V \sin \alpha_r = \dot{m}\Delta V ,$$

dok primjenom jednadžbe za očuvanje energije slijedi

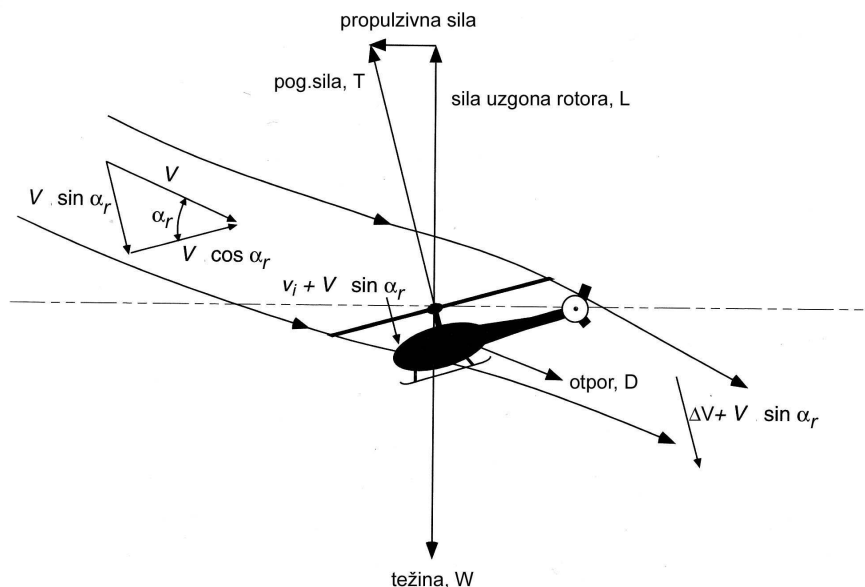
$$P = T(v_i + V \sin \alpha_r) = \frac{1}{2}\dot{m}(V \sin \alpha_r + \Delta V)^2 - \frac{1}{2}\dot{m}V^2 \sin^2 \alpha_r = \frac{1}{2}\dot{m}(2V\Delta V \sin \alpha_r + \Delta V^2).$$

Iz gornjih relacija slijedi

$$2\Delta V v_i + 2V\Delta V \sin \alpha_r = 2V\Delta V \sin \alpha_r + \Delta V^2$$

---

<sup>1</sup>Notacija ovog napadnog kuta  $\alpha_r$  suprotna je notaciji napadnog kuta  $\alpha_{TPP}$  u poglavlju 5.



Slika 4.1.: Glauertov model teorije diska za horizontalni let

$$\Delta V = 2v_i,$$

što je ekvivalentno rezultatu za osnosimetrično optjecanje rotora. Tako je pogonska sila

$$T = 2\dot{m}v_i = 2\rho A v_i \sqrt{V^2 + 2Vv_i \sin \alpha_r + v_i^2}.$$

Za slučaj lebdenja  $V = 0$  gornja relacija poprima poznati oblik  $T = 2\rho A v_i^2$ . Za velike brzine leta  $V \gg v_i$  vrijedi

$$T = 2\rho A v_i V.$$

Ovaj rezultat je upravo jednak rezultatu za silu uzgona krila eliptičnog opterećenja raspona  $R$ .

#### 4.1.1. Inducirana brzina u horizontalnom letu

U horizontalnom letu pogonska sila je

$$T = 2\dot{m}v_i = 2\rho A U v_i = 2\rho A v_i \sqrt{(V \cos \alpha_r)^2 + (V \sin \alpha_r + v_i)^2}.$$

Ako se iskoristi relacija za induciranu brzinu u lebdenju  $v_h^2 = T/2\rho A$  inducirana brzina u horizontalnom letu ima oblik

$$v_i = \frac{v_h^2}{\sqrt{(V \cos \alpha_r)^2 + (V \sin \alpha_r + v_i)^2}}. \quad (4.1)$$

Ukoliko se uvede koeficijent napredovanja (ili koeficijent horizontalne brzine, *engl.* advance ratio, ili tip speed ratio) kao bezdimenzionalna brzina paralelna ravnini rotacije rotora

$$\mu = \frac{V \cos \alpha_r}{\Omega R}$$



koeficijent vertikalne brzine

$$\lambda = \frac{V \sin \alpha_r + v_i}{\Omega R} = \frac{V \sin \alpha_r}{\Omega R} + \frac{v_i}{\Omega R} = \mu \operatorname{tg} \alpha_r + \lambda_i .$$

Također se može pokazati normiranjem relacije (4.1)

$$\lambda_i = \frac{\lambda_h^2}{\sqrt{\mu^2 + \lambda^2}} ,$$

odnosno kako je za lebdenje  $\lambda_h = \sqrt{C_T/2}$  slijedi

$$\lambda_i = \frac{C_T}{2\sqrt{\mu^2 + \lambda^2}} .$$

Tako za koeficijent vertikalne brzine slijedi

$$\lambda = \mu \operatorname{tg} \alpha_r + \frac{C_T}{2\sqrt{\mu^2 + \lambda^2}} . \quad (4.2)$$

Kako se  $\lambda$  nalazi na obe strane gornje relacije za njeno rješavanje koriste se numeričke metode.

#### 4.1.2. Strujanje pod nultim napadnim kutom

Ukoliko je napadni kut diska  $\alpha_r = 0$  moguće je odrediti egzaktno rješenje za koeficijent vertikalne brzine  $\lambda$ . Iako ovakvo strujanje nema fizikalnog značaja budući da za horizontalni let disk mora biti nagnut prema naprijed  $\alpha_r > 0$ , ono predstavlja osnovni dio rješenja za realni slučaj (a koristi se i za provjeru valjanosti numeričkih rješenja). Uvrštavanjem navedenog u relaciju (4.2) slijedi da je  $\lambda = \lambda_i$  odnosno za  $\lambda_i$  vrijedi

$$\lambda_i = \frac{\lambda_h^2}{\sqrt{\mu^2 + \lambda^2}} .$$

Gornja relacija može se svesti na oblik

$$\lambda_i^4 + \mu^2 \lambda_i^2 - \lambda_h^4 = 0$$

djeljenjem s  $\lambda_h^4$  dobiva se kvadratna jednadžba po  $\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_h}\right)^2$

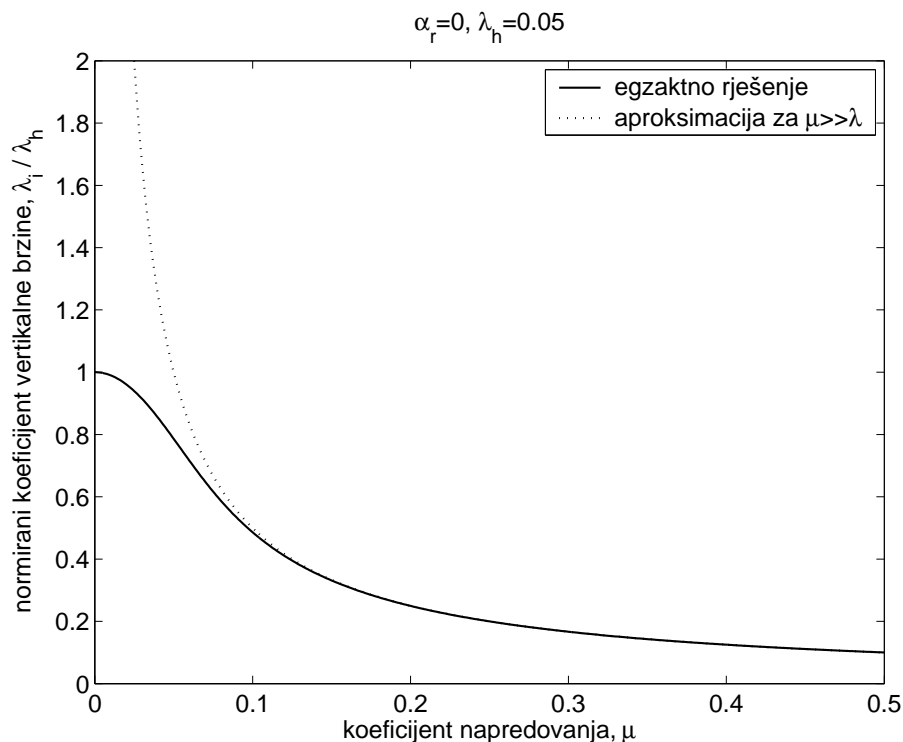
$$\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_h}\right)^4 + \left(\frac{\mu}{\lambda_h}\right)^2 \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_h}\right)^2 - 1 = 0$$

za koju je rješenje

$$\frac{\lambda_i}{\lambda_h} = \left[ \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{\mu}{\lambda_h}\right)^4 + 1} - \frac{1}{2} \left(\frac{\mu}{\lambda_h}\right)^2 \right]^{1/2}$$

Rješenje je prikazano na dijagramu sa slike (4.2). Za veće brzine leta,  $\mu \gg \lambda$  te je

$$\frac{\lambda_i}{\lambda_h} \rightarrow \frac{\lambda_h}{\mu} .$$



Slika 4.2.: Koeficijent vertikalne inducirane brzine u ovisnosti o koeficijentu napredovanja  $\mu$

Kako se vidi sa dijagrama (4.2.) aproksimacija ima malu razliku od egzaktnog rješenja za  $\mu/\lambda_h > 2$  (što uobičajeno vrijedi za  $\mu = 0.1$ ).

Bitno je podsjetiti raniji zaključak da teorija diska nije primjenjiva ako pri poniranju postoji vertikalna brzina između 0 i  $2v_i$  odnosno za domenu  $-2v_i \leq V \sin \alpha_r \leq 0$  teorija diska nije primjenjiva.

Numeričko rješenje za koeficijent vertikalne brzine (4.2) prikazano je na slici (4.3., prema [17]) kao funkcija omjera  $\mu/\lambda_h$  za nekoliko različitih napadnih kutova  $\alpha_r$ . Usporedbom egzaktnog rješenja za  $\alpha_r = 0$  može se uočiti da inducirani dio ukupne vertikalne brzine pada s povećanjem  $\mu$  gdje dominira član  $\mu t g \alpha_r$ .

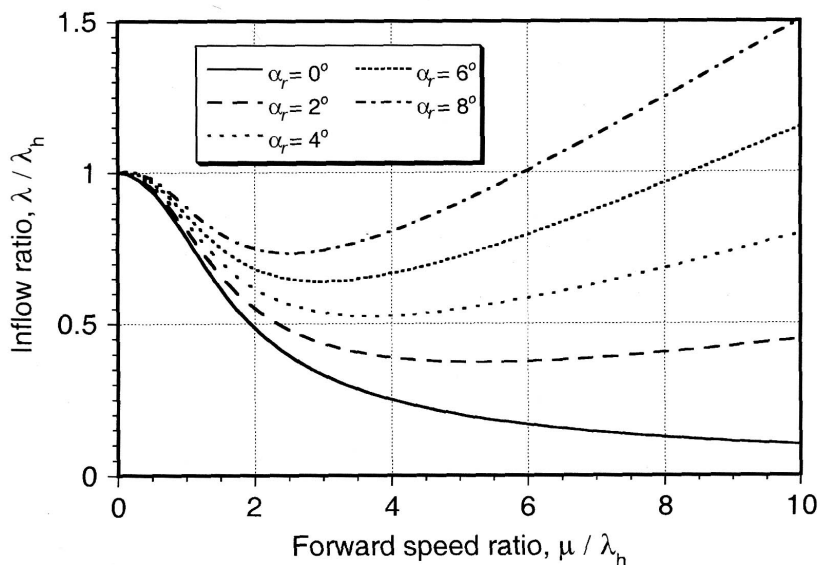
#### 4.1.3. Snaga na rotoru

Snaga na rotoru u horizontalnom letu dana je relacijom

$$P = T(V \sin \alpha_r + v_i) = TV \sin \alpha_r + Tv_i$$

pri čemu viskozni gubici nisu uključeni. Ako promatramo omjer snage u horizontalnom letu i u lebdenju slijedi

$$\frac{P}{P_h} = \frac{T(V \sin \alpha_r + v_i)}{Tv_h} = \frac{\lambda}{\lambda_h}.$$



Slika 4.3.: Koeficijent vertikalne inducirane brzine kao funkcija koeficijenta napredovanja  $\mu$  za različite vrijednosti  $\alpha_r$

Prema gornjoj relaciji sve analize i zaključci za koeficijent vertikalne brzine vrijede i za snagu na rotoru. Uvrštavanjem rezultata za  $\lambda$

$$\frac{P}{P_h} = \frac{\lambda}{\lambda_h} = \frac{\mu}{\lambda_h} \operatorname{tg} \alpha_r + \frac{\lambda_h}{\sqrt{\mu^2 + \lambda^2}}.$$

U ravnotežnom horizontalnom letu analogno relacijama izvedenim za avion [13] vrijedi:

$$\begin{aligned} T \cos \alpha_r &= W \\ T \sin \alpha_r &= D \cos \alpha_r \approx D. \end{aligned}$$

Dakle

$$\operatorname{tg} \alpha_r = \frac{D}{W} = \frac{D}{L} \approx \frac{D}{T}$$

Tako je potrebna snaga na rotoru

$$\frac{P}{P_h} = \frac{\mu}{\lambda_h} \frac{D}{T} + \frac{\lambda_h}{\sqrt{\mu^2 + \lambda^2}}.$$

Prvi član predstavlja parazitski dio snage, a proporcionalan sa  $V^3$ .

## 4.2. Teorija elementarnog kraka za horizontalni let

Kako je već navedeno, horizontalni let za rotor predstavlja vrlo kompleksno strujanje kod kojega je teško modelirati sve efekte. Primjenom teorije elementarnog kraka, uz određene pretpostavke i pojednostavljenja na strujanje, mogu se odrediti osnovne relacije za aerodinamičke sile. Ta rješenja mogu dati relacije u zatvorenoj formi. Kao takva koriste se za prve estimacije i za provjeru rezultata složenijih modela.

### 4.2.1. Sile na kraku

Elementarni presjek kraka, primijenjen u analizi vertikalnog leta s tamo uvedenim pretpostavkama, može se primijeniti i u analizi horizontalnog leta. U takvom letu na kraku s postavnim kutom  $\theta$  ukupnu brzinu možemo razložiti na:

- vertikalnu brzinu, normalnu na ravninu rotacije,  $U_z$
- tangencijalnu brzinu, u ravnini rotacije,  $U_t$
- radijalnu brzinu, duž kraka.

U teoriji elementarnog kraka pretpostavlja se da radijalna komponenta nema utjecaja na aerodinamičke efekte<sup>2</sup>. No radijalnu komponentu brzine potrebno je uzeti u obzir kod estimacije otpora rotora.

Dakle rezultanta brzina je

$$U = \sqrt{U_t^2 + U_z^2} \approx U_t,$$

jer je  $U_t \gg U_z$  na gotovo cijelom kraku. Kut nagiba struje (*engl.* inflow angle) za male vrijednosti kutova:

$$\phi = \arctg \frac{U_z}{U_t} \approx \frac{U_z}{U_t}.$$

Aerodinamički napadni kut na elementu kraka je  $\alpha = \theta - \phi$ .

Elementarna sila uzgona po jedinici duljine kraka

$$\begin{aligned} dL &= \frac{1}{2} \rho U^2 c_{l_i} dy = \frac{1}{2} \rho U_t^2 c_{l_i} (\theta - \phi) dy = \\ &= \frac{1}{2} \rho U_t^2 c_{l_i} \left( \theta - \frac{U_z}{U_t} \right) dy = \\ &= \frac{1}{2} \rho c_{l_i} (\theta U_t^2 - U_z U_t) dy. \end{aligned}$$

Elementarna sila otpora je

$$dD = \frac{1}{2} \rho U^2 c_{d_i} dy.$$

<sup>2</sup>Utjecaj na rezultate aerodinamike imaju samo komponente brzine okomite na napadni rub.

Za elementarne sile okomite na ravninu rotacije, duž osi  $z$  i silu u ravnini rotacije duž osi  $x$ , vrijedi

$$\begin{aligned} dF_z &= dL \cos \phi - dD \sin \phi \approx dL = \\ &= \frac{1}{2} \rho c c_{l_\alpha} (\theta U_t^2 - U_t U_z) dy \\ dF_x &= dL \sin \phi + dD \cos \phi \approx \phi dL + dD = \\ &= \frac{1}{2} \rho c c_{l_\alpha} \left( \theta U_z U_t - U_z^2 + \frac{c_d}{c_{l_\alpha}} U_t^2 \right) dy . \end{aligned}$$

Kako bi se odredile sile iz gornje relacije potrebno je definirati komponente brzine. U horizontalnom letu tangencijalna brzina je oblika

$$U_t(y, \psi) = \Omega y + V \cos \alpha_r \sin \psi = \Omega y + \mu \Omega R \sin \psi .$$

Vertikalna brzina ima tri komponente. Prva uključuje vertikalnu brzinu penjanja i induciranu brzinu. Preostale komponente posljedica su gibanja kraka, mahanja. Uslijed promjene kuta mahanja oko zgloba mahanja imamo komponentu brzine  $y\dot{\beta}$ . Treća komponenta posljedica je položaja kraka za određeni kut mahanja  $\beta$ : radijalna komponenta brzine  $V \cos \alpha_r \cos \psi$  ima vertikalnu komponentu  $V \cos \alpha_r \cos \psi \sin \beta$  odnosno  $\mu \Omega R \beta \cos \psi$ . Ukupna vertikalna brzina je

$$U_z(y, \psi) = (\lambda_c + \lambda_i) \Omega R + y \dot{\beta}(\psi) + \mu \Omega R \beta(\psi) \cos \psi$$

Brzine zapisane u bezdimenzionalnom obliku su:

$$\begin{aligned} u_t &= \frac{U_t}{\Omega R} = (\bar{r} + \mu \sin \psi) \\ u_z &= \frac{U_z}{\Omega R} = \left( \lambda + \frac{\bar{r} \dot{\beta}}{\Omega} + \mu \beta \cos \psi \right) \\ u_r &= \frac{U_r}{\Omega R} = \mu \cos \psi . \end{aligned} \tag{4.3}$$

#### 4.2.2. Polje inducirane brzine

Za izračun sila u horizontalnom letu potrebno je poznavati promjenu brzina prema (4.3) koja ovisi o postavnom kutu kraka te o gibanju mahanja, ali i o induciranoj brzini na disku rotora – polju inducirane brzine. Polje inducirane brzine unaprijed nije poznato budući da je direktno vezano s tragom rotora, dakle sa rješenjem za aerodinamičke karakteristike rotora i gibanje mahanja. Kako je opisano u uvodu radi se o izrazito promjenjivom polju brzina na disku rotora, po radijusu  $\bar{r}$  i po kutu položaja  $\psi$ . No karakteristike rotora mogu se analizirati i primjenom jednostavnijih modela, koji se nazivaju modeli protoka (*engl.* inflow models), kojima se opisuju osnovni efekti protoka u ovisnosti o tragu rotora. Ti modeli temeljeni su na eksperimentalnim rezultatima ili rezultatima kompleksnije i sveobuhvatnije teorije vrtloga.

Temeljni i najjednostavniji model protoka je linearni i u ovom tekstu bit će opisan samo taj model. Napredniji model koji se koriste su Mangler&Squire, Peters, te Peters&He model.

### Linearni model protoka

Za veće brzine horizontalnog leta<sup>3</sup>,  $\mu \geq 0.15$ , vremenski usrednjeni uzdužni protok ima približno linearni oblik i može se opisati relacijom

$$\lambda_i = \lambda_0 \left( 1 + k_x \frac{x}{R} \right) = \lambda_0 \left( 1 + k_x r \cos \psi \right),$$

koju je postavio Glauert. Koeficijent  $\lambda_0$  je srednja vrijednost inducirane brzine u sredini rotora prema uniformnom rezultatu teorije diska, tako da vrijedi

$$\lambda_i = \lambda_0 = \frac{C_T}{2\sqrt{\mu^2 + \lambda_i^2}}.$$

Linearni koeficijent  $k_x$  definira uzdužnu promjenu inducirane brzine na rotoru. Glauert je predložio  $k_x = 1.2$  uslijed kojeg je na položaju  $\psi = 0^\circ$  inducirana brzina kroz disk (prema dole) veća u odnosu na srednju vrijednost  $\lambda_0$ , dok je na napadnom kraju rotora ( $\psi = 180^\circ$ ) inducirana brzina kroz disk manja u odnosu na  $\lambda_0$  (moguće i suprotnog smjera, prema gore).

Pored toga može se proširiti model protoka koji bi obuhvatio uzdužnu i bočnu promjenu inducirane brzine

$$\lambda_i = \lambda_0 \left( 1 + k_x \frac{x}{R} + k_y \frac{y}{R} \right) = \lambda_0 \left( 1 + k_x r \cos \psi + k_y r \sin \psi \right). \quad (4.4)$$

Koeficijenti  $k_x$  i  $k_y$  kao težinski faktori predstavljaju devijacije u odnosu na uniformnu raspodjelu prema teoriji diska. Eksperimenti su pokazali da je kod uravnoteženih rotora, u općem slučaju, glavina protoka je na stražnjem dijelu diska (prema repu) i lagano usmjerena na stranu povratne strane.

Postoje razne estimacije koeficijenata  $k_x$  i  $k_y$ . Temeljem rezultata teorije vrtloga uz pretpostavku krutog cilindričnog traga Coleman i Johnson definirali su aproksimacije

$$k_x = \operatorname{tg} \frac{\chi}{2}$$

gdje je  $\chi$  kut nagiba traga (slika 4.4.)

$$\chi = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left( \frac{\mu_x}{\mu_z + \lambda_i} \right),$$

$\mu_x$  je koeficijenti napredovanja definiran paralelno, a  $\mu_z$  okomito na ravninu rotora (slika 4.4.).

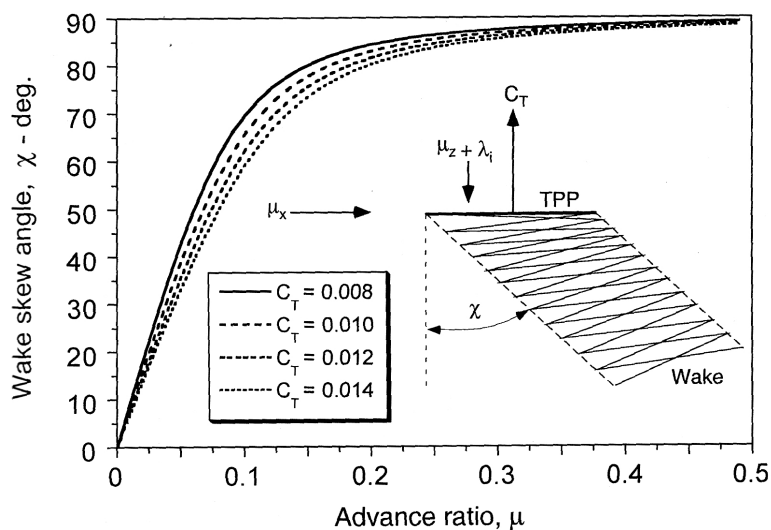
Linearni model prema Dreesu također je temeljen na teoriji vrtloga ima čestu primjenu u osnovnim analizama rotora

$$k_x = \frac{4}{3} \left( \frac{1 - \cos \chi - 1.8\mu^2}{\sin \chi} \right),$$

$$k_y = -2\mu.$$

Model Dreesa jednostavn za primjenu, a daje zadovoljavajuće rezultate opis protoka kroz rotor. Postoje i druge metode estimacije  $k_x$  i  $k_y$  koje su prezentirane u tablici (4.1.).

<sup>3</sup>brzine horizontalnog leta  $0 \leq \mu \leq 0.1$  karakteristične su za tranziciju iz vertikalnog leta u horizontalni



Slika 4.4.: Kut traga

model	$k_x$	$k_y$
Coleman i dr.	$\text{tg}(\chi/2)$	0
Drees	$\frac{4}{3}(1 - \cos \chi - 1.8\mu^2)/\sin \chi$	$-2\mu$
Payne	$\frac{4}{3}(\mu/\lambda/(1.2 + \mu/\lambda))$	0
White&Blake	$\sqrt{2} \sin \chi$	0
Pitt&Peters	$(15\pi/23)\text{tg}(\chi/2)$	0
Howlett	$\sin^2 \chi$	0

Tablica 4.1.: Estimacije koeficijenta linernog modela protoka

### 4.2.3. Aproximacija koeficijenta rotora u horizontalnom letu

U ovom poglavlju definirat će se koeficijenti pogonske sile, sile otpora, okretnog momenta (snage) uz pretpostavku uniformne raspodjele inducirane brzine  $\lambda = \text{const}$ , konstantnog koeficijenta ispunjenosti po rasponu kraka  $\sigma = \text{const}$ .

#### Koeficijent pogonske sile

Elementarni doprinos koeficijenta sile za  $N$  krakova je

$$\begin{aligned}
 dC_T &= \frac{dF_z}{\rho A (\Omega R)^2} = \frac{1}{2} N \rho c c_{l\alpha} (\theta U_t^2 - U_t U_z) dy \cdot \frac{1}{\rho A (\Omega R)^2} \\
 &= \frac{1}{2} \frac{Nc}{\pi R} c_{l\alpha} \left[ \theta \left( \frac{U_t}{\Omega R} \right)^2 - \frac{U_z U_t}{\Omega R \Omega R} \right] \frac{dy}{R} = \\
 &= \frac{1}{2} \sigma c_{l\alpha} (\theta u_t^2 - u_z u_t) d\bar{r}.
 \end{aligned}$$

Pri tome su uvedene bezdimenzionalne veličine  $u_t = \frac{U_t}{\Omega R}$  i  $u_z = \frac{U_z}{\Omega R}$  za bezdimenzionalne brzine. Kako su u horizontalnom letu  $U_t$ ,  $U_z$  i  $\theta$  funkcije kuta položaja  $\psi$  potrebno je provesti usrednjavanje (integracija) po  $\psi$  kutu položaja kraka te integraciju po  $\bar{r}$  rasponu kraka:

$$C_T = \int_0^1 \frac{1}{2} \sigma c_{l\alpha} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\theta u_t^2 - u_t u_z) d\psi \right] d\bar{r}. \quad (4.5)$$

Ukoliko za referentnu ravninu odaberemo NFP u kojoj nema promjene  $\theta$ , odnosno  $\theta = \theta_0$  tada je postavni kut konstantan po  $\psi$ . Pri izvodu gornjeg integrala mogu se primijeniti sljedeće relacije

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin \psi d\psi &= 0, & \int_0^{2\pi} \cos \psi d\psi &= 0, & \int_0^{2\pi} \sin \psi \cos \psi d\psi &= 0 \\ \int_0^{2\pi} \sin^2 \psi d\psi &= \pi, & \int_0^{2\pi} \cos^2 \psi d\psi &= \pi. \end{aligned}$$

Analizom dijela integrala u izrazu (4.5) slijede parcijalni rezultati

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \theta u_t^2 d\psi &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \theta_0 (\bar{r} + \mu \sin \psi)^2 d\psi = \theta_0 (\bar{r}^2 + \frac{1}{2} \mu^2), \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_z u_t d\psi &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\lambda + \beta \mu \cos \psi + \frac{\bar{r} \dot{\beta}}{\Omega}) (\bar{r} + \mu \sin \psi) d\psi = \lambda \bar{r}. \end{aligned}$$

Konačno za koeficijent pogonske sile može se napisati

$$\begin{aligned} C_T &= \int_0^1 \frac{1}{2} \sigma c_{l\alpha} \left[ \theta_0 (\bar{r}^2 + \frac{1}{2} \mu^2) - \lambda \bar{r} \right] d\bar{r} \\ &= \frac{1}{2} \sigma c_{l\alpha} \left[ \frac{1}{3} \theta_0 (1 + 3\mu^2/2) - \frac{1}{2} \lambda \right], \end{aligned} \quad (4.6)$$

što vrijedi i za slučaj linearne promjene kuta uvijanja po kraku uz  $\theta \equiv \theta_{0.75}$ .

### Sila otpora rotora

Sila otpora rotora ili H-sila (*engl.* H-force) u osnovi predstavlja silu otpora profila rotora. Kako je na napredujućem kraku veća sila otpora od odgovarajuće na povratnom kraku kao rezultat javlja se sila otpora rotora (slika 4.5). Elementarna sila otpora je

$$dH = (dD \cos \phi + dL \sin \phi) \sin \psi$$

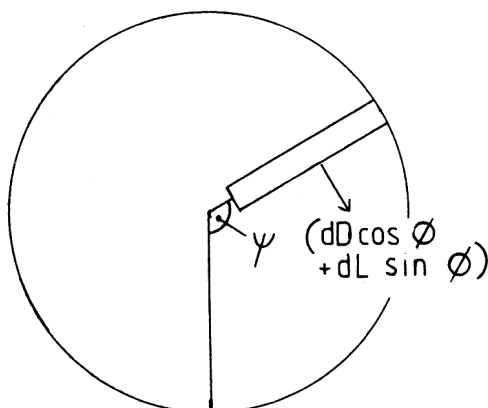
može se zapisati kroz doprinos sile otpora profila  $dH_0$  i induciranog otpora  $dH_i$ .

$$dH_0 = dD \sin \psi = \frac{1}{2} \rho U_T^2 c d y c_{d_0} \sin \psi$$

Za  $N$  krakova koeficijent sile otpora profila rotora bio bi

$$\begin{aligned} dC_{H_0} &= \frac{1/2 N \rho U_T^2 c c_{d_0} \sin \psi dy}{\rho \pi R^2 (\Omega R)^2} = \\ &= \frac{1}{2} \sigma c_{d_0} u_t^2 \sin \psi d\bar{r} = \\ &= \frac{1}{2} \sigma c_{d_0} (\bar{r} + \mu \sin \psi)^2 \sin \psi d\bar{r} \end{aligned}$$





Slika 4.5.: Sila otpora rotora

Integracijom po kutu  $\psi$  i integracijom po radijusu  $\bar{r}$  gornje relacije slijedi koeficijent sile otpora profila

$$\begin{aligned} C_{H_0} &= \frac{1}{2} \sigma c_{d_0} \int_0^1 \left[ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\bar{r} + \mu \sin \psi)^2 \sin \psi d\psi \right] d\bar{r} = \frac{1}{2} \sigma c_{d_0} \int_0^1 \mu \bar{r} d\bar{r} = \\ &= \frac{1}{4} \sigma c_{d_0} \mu . \end{aligned}$$

Ukupni koeficijent sile otpora rotora iznosi

$$C_H = \frac{1}{4} \sigma c_{d_0} \mu + C_{H_i} , \quad (4.7)$$

pri čemu je član induciranog otpora  $C_{H_i}$  funkcija  $\theta$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$  i  $\beta$ . Kako je taj član izuzetno složen, a nije od presudne važnosti za preostali dio teksta, ovdje se neće izvoditi. Pored toga u realnim uvjetima  $C_{H_i}$  je mali u odnosu na  $C_{H_0}$ .

### Okretni moment i snaga

Za elementarni okretni moment na kraku rotora može se zapisati

$$dQ = dF_x \cdot y = y(dD \cos \phi + dL \sin \phi) .$$

Kao i kod sile otpora rotora i za moment mogu se razmatrati dvije komponente gornjeg izraza:  $dQ_0$  okretni moment od otpora profila i  $dQ_i$  okretni moment od induciranog otpora (inducirani okretni moment). Koeficijent okretnog momenta od otpora profila slijedi iz dvostruke integracije gornjeg izraza

$$\begin{aligned} C_{Q_0} &= \frac{1}{2} \sigma c_{d_0} \int_0^1 \left[ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\bar{r} + \mu \sin \psi)^2 \bar{r} d\psi \right] d\bar{r} = \frac{1}{2} \sigma c_{d_0} \int_0^1 \left( \bar{r}^3 + \frac{1}{2} \mu^2 \bar{r} \right) d\bar{r} = \\ &= \frac{1}{8} \sigma c_{d_0} (1 + \mu^2) \end{aligned}$$

Za inducirani član može se izvesti relacija

$$C_{Q_i} = \lambda C_T - \mu C_{H_i} .$$

Ukupni koeficijent okretnog momenta je

$$\begin{aligned} C_Q &= \frac{1}{8} \sigma c_{d_0} (1 + \mu^2) + \lambda C_T - \mu C_{H_i} \\ C_Q &= \frac{1}{8} c_{d_0} (1 + \mu^2) + \lambda C_T - \mu C_H + \frac{1}{4} \sigma c_{d_0} \mu^2 = \\ &= \frac{1}{8} \sigma c_{d_0} (1 + 3\mu^2) + \lambda C_T - \mu C_H . \end{aligned}$$

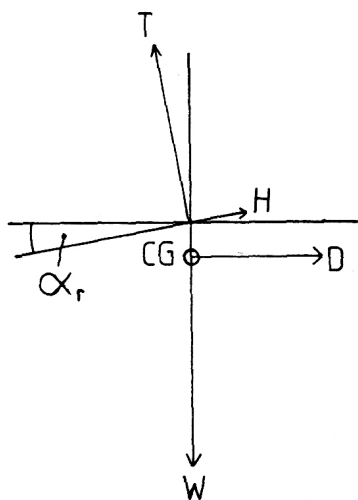
Kako je  $\lambda$  funkcija napadnog kuta ravnine rotora  $\alpha_r$

$$\lambda = \frac{V \sin \alpha_r + v_i}{\Omega R} = \frac{V \sin \alpha_r}{\Omega R} + \frac{v_i}{\Omega R} = \mu \operatorname{tg} \alpha_r + \lambda_i .$$

Napadni kut u ravnotežnom horizontalnom letu, uključujući i silu otpora rotora, može se odrediti iz jednadžbi ravnoteže (slika 4.6.)

$$\begin{aligned} T \cos \alpha_r &= W \\ T \sin \alpha_r &= H \cos \alpha_r + D \end{aligned}$$

Za male vrijednosti napadnog kuta



Slika 4.6.: Ravnotežni let

$$T \alpha_r = D + H ,$$

pri tome je  $D$  sila otpora tijela helikoptera, horizontalnog i vertikalnog repa te repnog rotora. Za napadni kut slijedi

$$\alpha_r = \frac{H}{T} + \frac{D}{W} = \frac{C_H}{C_T} + \frac{D}{W}$$

$$\lambda = \mu \operatorname{tg} \alpha_r + \lambda_i = \lambda_i + \mu \frac{C_H}{C_T} + \mu \frac{D}{W} .$$

Slijedi za koeficijent snage  $C_P$ , odnosno koeficijent okretnog momenta

$$C_P = C_Q = \lambda_i C_T + \frac{1}{8} \sigma c_{d_0} (1 + 3\mu^2) + \mu \frac{D}{W} C_T , \quad (4.8)$$

što se po komponentama može opisati kao: inducirana komponenta (vezana za uzgon; izvedena u teoriji diska), komponenta otpora profila kraka rotora i komponenta otpora tijela helikoptera (ostatka letjelice). U odnosu na eksperimente, rezultati dobiveni prema gornjoj relaciji za induciranu snagu i snagu kojom se savladava otpor profila su nešto manjih iznosa. S empirijskim koeficijentom  $\kappa$  nadoknađuje se zanemarenje utjecaja:

- vrha krakova,
- ne-uniformne raspodjele protoka kroz rotor,
- i drugih induciranih gubitaka.

S drugim empirijskim koeficijentom  $k$  nadoknađuje se zanemarenje utjecaja:

- radijalne komponente otpora,
- efekta na otpor profila kod postavnih kutova udaljenih od  $90^\circ$  i  $270^\circ$ ,
- opstrujavanja suprotnog smjera na povratnoj strani.

Kako bi se navedena razlika eliminirala, odnosno smanjila, uvode se empirijski korekcionni faktori tako da je koeficijent snage

$$C_P = C_Q = \kappa \lambda_i C_T + \frac{1}{8} \sigma c_{d_0} (1 + k\mu^2) + \mu \frac{D}{W} C_T . \quad (4.9)$$

Pri tome je uobičajena vrijednost<sup>4</sup>  $\kappa = 1.2$ , dok su uobičajene vrijednosti drugog koeficijenta  $k = 4.5 \dots 4.7$ .

#### 4.2.4. Aproksimacija kuta mahanja

Kako je ranije opisano kut mahanja određen je momentom sile uzgona u zglobu mahanja, prema diferencijalnoj jednadžbi mahanja (3.3).

Zapisom u Fourierov red kuta mahanja  $\beta$  (3.5) i njegove druge derivacije  $\beta^{**}$  te razmatranjem slobodnog člana, uz pretpostavku da je  $M_A$  neovisan o kutu položaja  $\psi$  slijedi

$$a_0 = \frac{M_A}{\frac{1}{3} \bar{m} R^3 \Omega^2} = \frac{M_A}{I_b \Omega^2} .$$

Za aerodinamički moment u zglobu mahanja može se zapisati

$$M_A = \int_0^R \frac{dF_z}{dy} y dy = \frac{1}{2} \rho c_{l_\alpha} c \int_0^R (\theta U_t^2 - U_z U_t) y dy ,$$

<sup>4</sup>nešto je veća za slučaj horizontalnog leta u odnosu na  $\kappa = 1.15$  kako je ranije navedeno za slučaj lebdenja

tako da za kut konusa slijedi

$$a_0 = \frac{1}{2}\gamma \int_0^R (\theta u_t^2 - u_z u_t) \bar{r} d\bar{r},$$

pri čemu je uvedena konstanta, Lockov broj

$$\gamma = \frac{\rho c_{l_\alpha} c R^4}{I_b}. \quad (4.10)$$

Koristeći činjenicu da je  $M_A$  neovisan o  $\psi$  te uvrštavanjem relacija za brzine (4.3) slijedi

$$a_0 = \frac{1}{2}\gamma \int_0^1 \left[ \theta(\bar{r}^3 + \frac{1}{2}\bar{r}\mu^2) - \lambda r^2 \right] d\bar{r},$$

odnosno

$$a_0 = \gamma \left[ \frac{\theta_0}{8}(1 + \mu^2) - \frac{\lambda}{6} \right]. \quad (4.11)$$

Izjednačavanjem članova prvih harmonika (uz sinus i kosinus; a kako je za  $M_A$  pretpostavljeno da ne ovisi o  $\psi$  ti se članovi izjednačavaju s nulom) iz relacije (3.3) slijede dvije relacije za koeficijente prvih harmonika kuta mahanja

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\mu(\frac{1}{3}8\theta_0 - 2\lambda)}{1 - \frac{1}{2}\mu^2} \\ b_1 &= \frac{\frac{4}{3}\mu a_0}{1 + \frac{1}{2}\mu^2} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Ove relacije su klasična definicija koeficijenata kuta mahanja za ravninu NFP pri čemu su  $\theta$  i  $\lambda$  definirani relativno prema NFP. Pri tome krak nije uvijen:  $\theta = \theta_0 = \text{const}$ , što je ekvivalentno i za slučaj linearno uvijenog kraka uz  $\theta = \theta_0 = \theta_{0.75}$ . Koeficijenti kuta mahanja za ravninu TPP su nešto složeniji i ovdje će se dati samo rezultat (prema [17]):

$$\begin{aligned} a_0 &= \gamma \left[ \frac{\theta_0}{8} \left( 1 + \mu^2 \right) + \frac{\theta_{tw}}{10} \left( 1 + \frac{5}{6}\mu^2 \right) + \frac{\mu}{6} B_1 - \frac{\lambda}{6} \right], \\ a_1 + B_1 &= \frac{\frac{8}{3}\mu \left[ \theta_0 - \frac{3}{4}\lambda + \frac{3}{4}\mu B_1 + \frac{3}{4}\theta_{tw} \right]}{1 - \frac{1}{2}\mu^2}, \\ b_1 - A_1 &= \frac{\frac{4}{3}\mu a_0}{1 + \frac{1}{2}\mu^2}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

## Poglavlje 5.

# Ravnotežni let

### 5.1. Opis problema

Kao za sve letjelice tako se i za helikoptere ravnotežni let definira kao let kada su momenti koji djeluju oko središta mase u ravnoteži. Tada letjelica ima konstantne vrijednosti kutnih brzina. Od interesa je razmotriti i slučaj kada su i sile koje djeluju na letjelicu u ravnoteži. Opisivanje ravnotežnog leta podrazumjeva izračun upravljačkih veličina rotora, stav rotora (postavni kutovi, kutovi mahanja) te stav cijelog helikoptera (kutovi valjanja, propinjanja i skretanja) za dane uvjete leta.

Tri su neovisne upravljačke veličine rotora:

**kolektivni postavni kut**  $\theta_0$  (*engl.* collective pitch): ovim se kutom upravlja iznosom pogonske sile glavnog rotora,  $T$  (pogledaj relaciju (3.8)); pilot mijenja kolektivni postavni kut posebnom palicom, tzv. kolektiv;

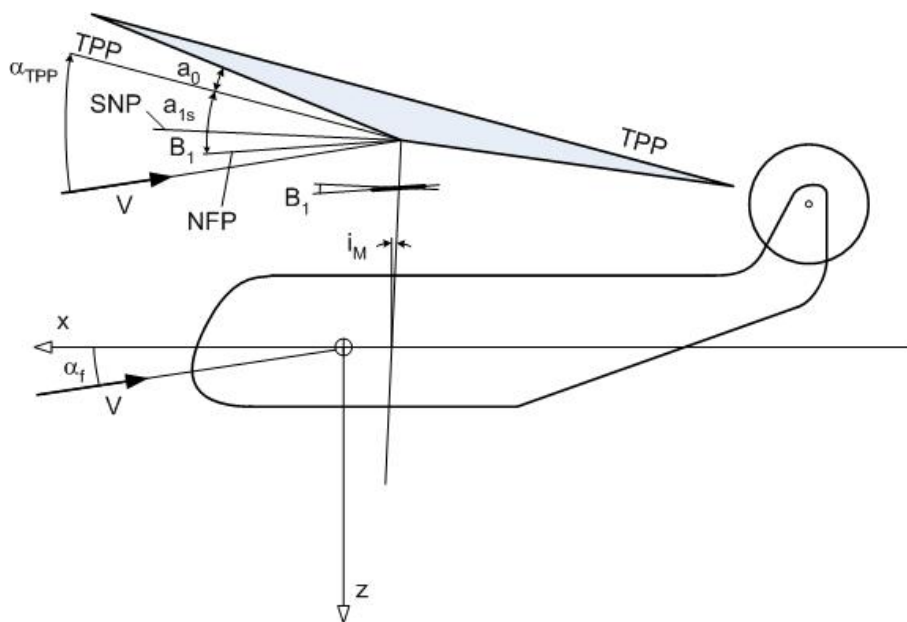
**ciklični postavni kut** (*engl.* cyclic pitch): ciklična promjena postavnog kuta, a pilot je definira tzv. cikličnom palicom (*engl.* cyclic stick)

**bočni ciklični postavni kut**  $A_1$  (*engl.* lateral cyclic pitch): uslijed ovog kuta ravnina diska rotora se nagnje bočno, a time i pogonska sila  $T$  mijenja smjer; posljedica je pojava bočne sile i momenta valjanja;

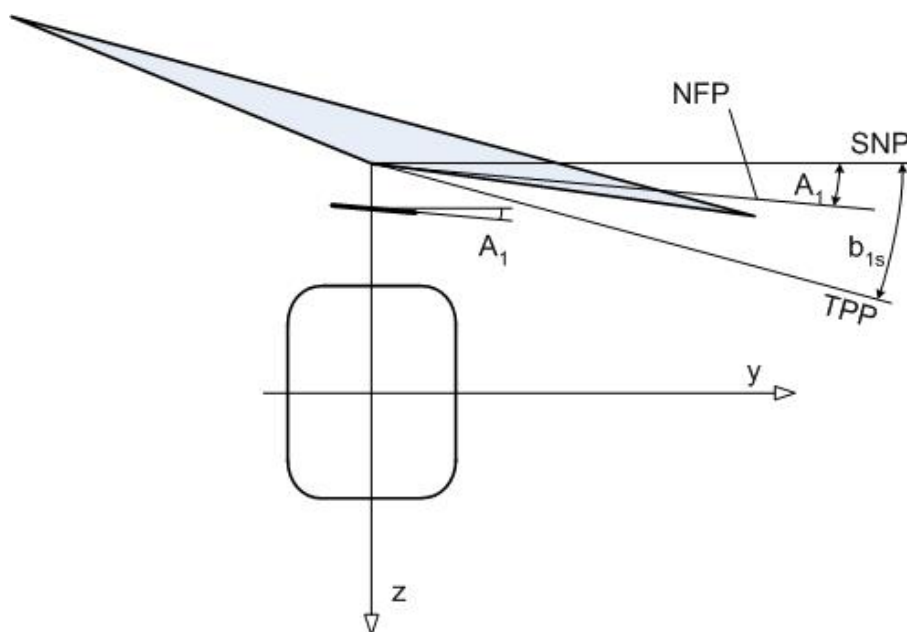
**uzdužni ciklični postavni kut**  $B_1$  (*engl.* longitudinal cyclic pitch): uslijed ovog kuta ravnina diska se nagnje uzdužno (naprijed–natrag), a time i pogonska sila rotora; posljedica ovakve upravljačke veličine je propulzivna komponenta pogonske sile za horizontalni let i moment propinjanja;

**kolektivni postavni kut repnog rotora**  $\theta_{0T}$ : promjenom kolektivnog postavnog kuta repnog rotora ostvaruje se promjena pogonske sile na repnom rotoru, a time i skretanje helikoptera (*engl.* yaw); pilot ovu upravljačku veličinu realizira pedalama (nalik na upravljačke pedale kod aviona kojim se upravlja kormilom pravca).

Stav rotora definiran je postavnim kutom (3.8) i kutom mahanja (3.5). Na slici (5.1.) prikazani su navedeni uzdužni kutovi, zajedno s opisanim upravljačkim postavnim kutovima  $B_1$  pri tome je kut  $a_{1s}$  uzdužni kut mahanja za ravninu okomitu na vratilo rotora, SNP. Slika (5.2.) prikazuje bočne kutove: bočni ciklični kut  $A_1$  i  $b_{1s}$  bočni kut mahanja za ravninu SNP.



Slika 5.1.: Uzdužni postavni kut i kut mahanja



Slika 5.2.: Bočni postavni kut i kut mahanja

Kako će se kasnije pokazati postoji izražena sprega sila i momenata helikoptera u letu. Npr. promjena pogonske sile rotora kao posljedica upravljačke veličine  $\theta_0$  zahtjeva i povećanje snage, a time i okretnog momenta; kako bi helikopter zadržao pravac leta potrebno je korigirati skretanje repnim rotorom<sup>1</sup>. Slijedom izrazite sprege sila i mome-

<sup>1</sup>Uvođenjem sustava upravljanja leta navedena sprega upravljačke veličine kolektivnog postavnog

nata jednadžbe koje opisuju gibanje helikoptera izrazito su složene i nemaju egzaktno matematičko rješenje za ravnotežni let.

Dakle, kako bi se u cijelosti opisao ravnotežni let helikoptera zadane mase, položaja središta mase i za danu brzinu leta rješenje za ravnotežni let mora dati sljedeće vrijednosti:

- $\theta_0, A_1, B_1$ : upravljačke veličine glavnog rotora,
- $a_0, a_1, b_1$ : kutovi mahanja glavnog rotora,
- $\Theta, \Phi$ : stav helikoptera,
- $\alpha, \beta$ : aerodinamički kutovi<sup>2</sup>,
- $\theta_{0T}$ : upravljačka veličina repnog rotora.

### 5.1.1. Oblici rješenja ravnotežnog leta

Kako je prethodno navedeno za ravnotežni let rotora ne postoji egzaktno matematičko rješenje tako da je potrebno uvesti određene pretpostavke kako bi se odredile gore navedene nepoznanice. Ovisno o usvojenim aproksimacijama postoje različita rješenja ravnotežnog leta. Osnovne aproksimacije koje se uvode su:

- pretpostavka malih kutova,
- zanemarenje bočne ravnoteže (odnosno razdvajanje uzdužne i bočne ravnoteže); što je opravdano budući da manji bočni nagibi rotora ne mijenjaju značajnije aerodinamiku rotora ili aerodinamiku helikoptera.

Dva su osnovna pristupa problemu određivanja ravnotežnog leta:

1. primjenom teorije količine gibanja kada se uvode određene pretpostavke za polje inducirane brzinu na rotoru za izračun postavnih kutova i kutova mahanja,
2. primjenom potpunijih aerodinamičkih modela rotora koji uključuju neuniformnu raspodjelu protoka kroz rotor, nelinearne aerodinamičke karakteristike i sl.

Za oba pristupa nužna je primjena iterativnog računa.

## 5.2. Jednadžbe ravnotežnog leta

Za potrebe definiranja jednadžbi ravnotežnog leta potrebno je postaviti aerodinamički model kojim se definiraju tri aerodinamičke sile ( $X, Y$  i  $Z$ ) i tri momenta ( $L, M$  i  $N$ ). Pri tome je primjenjen build-up pristup po komponentama konfiguracije helikoptera (s pripadajućim oznakama):

- glavni rotor  $M$ ,

kuta i upravljačke veličine skretanja, ali i drugi efekti sprege mogu se realizirati automatski bez pilota.

<sup>2</sup>Za napadni kut pri analizi ravnotežog leta korištena je notacija iz "Mehanike leta" [13] kao prema slici (5.3.).

- tijelo helikoptera  $f$ ,
- horizontalni rep  $h$ ,
- vertikalni rep  $v$ ,
- repni rotor  $T$ .<sup>3</sup>

U takvom modelu aerodinamički moment propinjanja bio bi

$$M = M_M + M_f + M_h + M_v + M_T .$$

Ukoliko se razmatra ravnotežni let u koordinatnom sustavu letjelice sve komponente sila i momenata prikazane su na slici (5.3).

Pripadajuće jednadžbe ravnoteže za sile su

$$\begin{aligned} X_M + X_T + X_h + X_v + X_f &= W \sin \Theta \\ Y_M + Y_T + Y_v + Y_f &= -W \cos \Theta \sin \Phi \\ Z_M + Z_T + Z_h + Z_v + Z_f &= -W \cos \Theta \cos \Phi \end{aligned} \quad (5.1)$$

te za momente

$$\begin{aligned} L_M + Y_M z_m + Z_M y_M + Y_T z_T + Y_v z_v + Y_f z_f + L_f &= 0 \\ M_M - X_M z_M + Z_M (l_M - l_m) + M_T - X_T z_T + Z_T (l_T - l_m) - \\ - X_h z_h + Z_h (l_h - l_m) - X_v z_v + M_f + Z_f (l_f - l_m) - X_f z_f &= 0 \\ N_M - Y_M (l_M - l_m) - Y_T (l_T - l_m) - Y_v (l_v - l_m) + \\ + N_f - Y_f (l_f - l_m) &= 0 \end{aligned} \quad (5.2)$$

Sile i momenti iz jednadžbi ravnotežnog leta (5.1) i (5.2) glavnog rotora funkcije su ranije navedenih parametara:  $\theta_0$ ,  $A_1$ ,  $B_1$  (upravljačke veličine glavnog rotora);  $a_1$ ,  $b_1$  (kutova mahanja). Sile i momenti repnog rotora funkcije su  $\theta_{0T}$  (upravljačke veličine repnog rotora). Sile i momente glavnog i repnog rotora mogu se definirati primjenom teorije elementarnog kraka (npr. pogonska sila rotora definirana je relacijom (4.6)). Aerodinamičke karakteristike ostalih komponenti helikoptera funkcije su  $\Theta$ ,  $\Phi$  (stav helikoptera) i  $\alpha$ ,  $\beta$  (aerodinamičkih kutova).

Pored toga potrebno je definirati jednadžbe za protok (koeficijente vertikalne brzine) na glavnom i repnom rotoru:  $\lambda_M$  i  $\lambda_T$  (npr. primjenom linearnog modela protoka (4.4)).

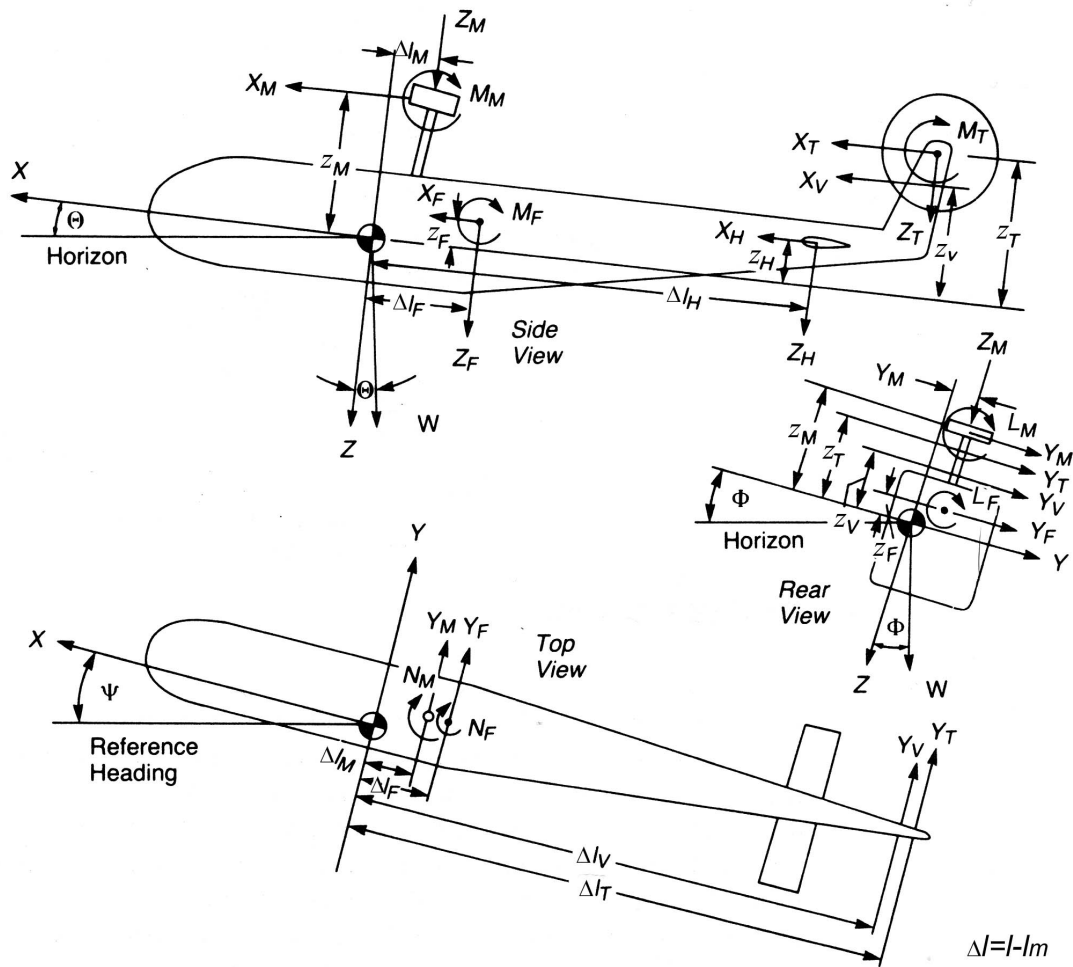
Tako postavljene jednadžbe ravnotežnog leta zajedno s jednadžbama za polje induciranih brzina predstavljaju nelinearne algebarske jednadžbe i mogu se odgovarajućim algoritmom riješiti numerički.

### 5.2.1. Jednadžbe uzdužnog ravnotežnog leta

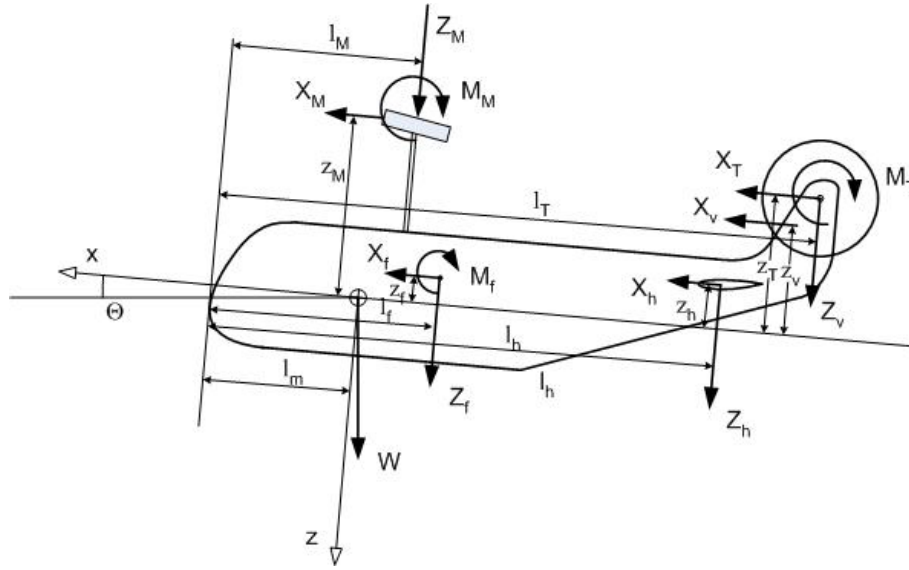
Uz pretpostavku malih kutova te činjenicu da mali bočni kutovi na rotoru ne uzrokuju značajnije promjene uzdužnih aerodinamičkih sila i momenata na rotoru ili na ostalim komponentama konfiguracije helikoptera mogu se razmatrati odvojeno jednadžbe

<sup>3</sup>Za konfiguracije koje imaju i krila ( $w$ ) potrebno je i njih uvrstiti. Takve konfiguracije nisu razmatrane u ovom tekstu.





Slika 5.3.: Ravnotežni let: sile i momenti u koordinatnom sustavu letjelice



Slika 5.4.: Uzdužni ravnotežni let: sile i momenti u koordinatnom sustavu letjelice

uzdužne i bočne ravnoteže<sup>4</sup>. Pri tome su ovdje od interesa samo jednadžbe uzdužnog ravnotežnog leta (slika 5.4.).

Iz sustava (5.1) izdvajamo jednadžbe za uzdužne komponente sila ( $X$  i  $Z$ ) te iz (5.2) jednadžbi za moment propinjanja ( $M$ )

$$\begin{aligned} X_M + X_T + X_h + X_v + X_f &= W \sin \Theta \\ Z_M + Z_T + Z_h + Z_f &= -W \cos \Theta \cos \Phi \\ M_M - X_M z_M + Z_M(l_M - l_m) + M_T - X_T z_T + Z_T(l_T - l_m) - \\ - X_h z_h + Z_h(l_h - l_m) - X_v z_v + M_f + Z_f(l_f - l_m) - X_f z_f &= 0. \end{aligned} \quad (5.3)$$

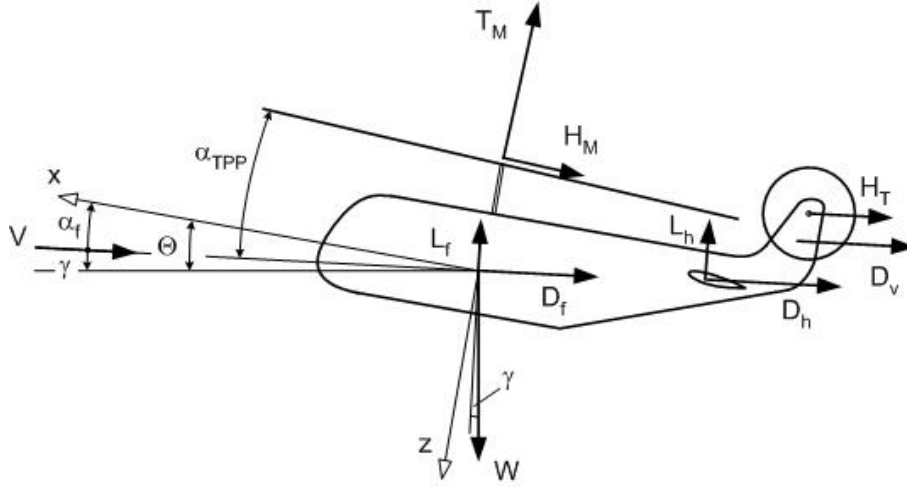
U sustavu jednadžbi (5.3) nepoznate su vrijednosti parametara: ravnotežni kutove mahanja  $a_1$ ,  $b_1$  (glavnog i repnog rotora); ravnotežne napadne kutove:  $\alpha_f$  na tijelu,  $\alpha_h$  na horizontalnom repu i na vertikalnom repu  $\alpha_v$ , te ravnotežni kut propinjanja  $\Theta$  i ravnotežni kut valjanja helikoptera  $\Phi$ . Određivanje ovih parametara moguće je isključivo iterativnim postupkom.

Analizom dominantnih veličina prema [21] može se za ravnotežne vrijednosti sila i momenata postaviti sljedeća relacija za uzdužni kut mahanja

$$\begin{aligned} a_{1s} = \frac{1}{\left(\frac{dM}{da_{1s}}\right)_M + T_M z_M} \cdot \left[ T_M(l_M - l_m) - H_M z_M + Q_T - H_T z_T + L_h(l_h - l_m) - \right. \\ \left. - D_h z_h - D_v z_v + L_f(l_f - l_m) - D_f z_f - M_f - T_T(b_{1s})_T(l_T - l_m) \right]. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Za određivanje sila i momenata iz gornje relacije mogu se primjeniti rezultati teorije elementarnog kraka:

<sup>4</sup>Tako su i u "Mehanici leta" za avione odvojeno razmatrane jednadžbe uzdužnog i bočnog gibanja u ravnotežnom letu



Slika 5.5.: Uzdužni ravnotežni let: brzinski koordinatni sustav

- $C_T$  prema (4.6),
- $C_Q$  prema (4.9),
- $C_H$  prema (4.7),
- $a_0, (B_1 + a_{1s})_M, (A_1 - b_{1s})_M$  prema (4.13),
- $(B_1 + a_{1s})_T, (A_1 - b_{1s})_T$  prema (4.13).

Ravnotežni kut propinjanja letjelice definira se relacijom

$$\Theta = \alpha_{TPP} + \gamma - a_{1s} - i_M,$$

gdje je  $i_M$  postavni kut osi vratila glavnog rotora prema  $z$  osi koordinatnog sustava letjelice.

Sile i momenti za ravnotežni let helikoptera u brzinskom koordinatnom sustavu<sup>5</sup> prikazani su na slici (5.5.). Pri tome je radi jednostavnosti pretpostavljeno da je sila otpora repnog rotora  $H_T$  usmjerena duž  $x$  osi brzinskog koordinatnog sustava. Jednadžbe ravnoteže duž osi  $x$  i  $z$  brzinskog koordinatnog sustava glase

$$\begin{aligned} T_M \sin \alpha_{TPP} + H_M \cos \alpha_{TPP} + H_T + D_h + D_v + D_f &= -W \sin \gamma \\ T_M \cos \alpha_{TPP} - H_M \sin \alpha_{TPP} + L_f + L_h &= -W \cos \gamma. \end{aligned}$$

Za ravnotežni napadni kut ravnine TPP može se postaviti sljedeća relacija

$$\operatorname{tg} \alpha_{TPP} = -\frac{D_f + D_h + D_v + H_T + H_M + W \sin \gamma}{T_M}. \quad (5.5)$$

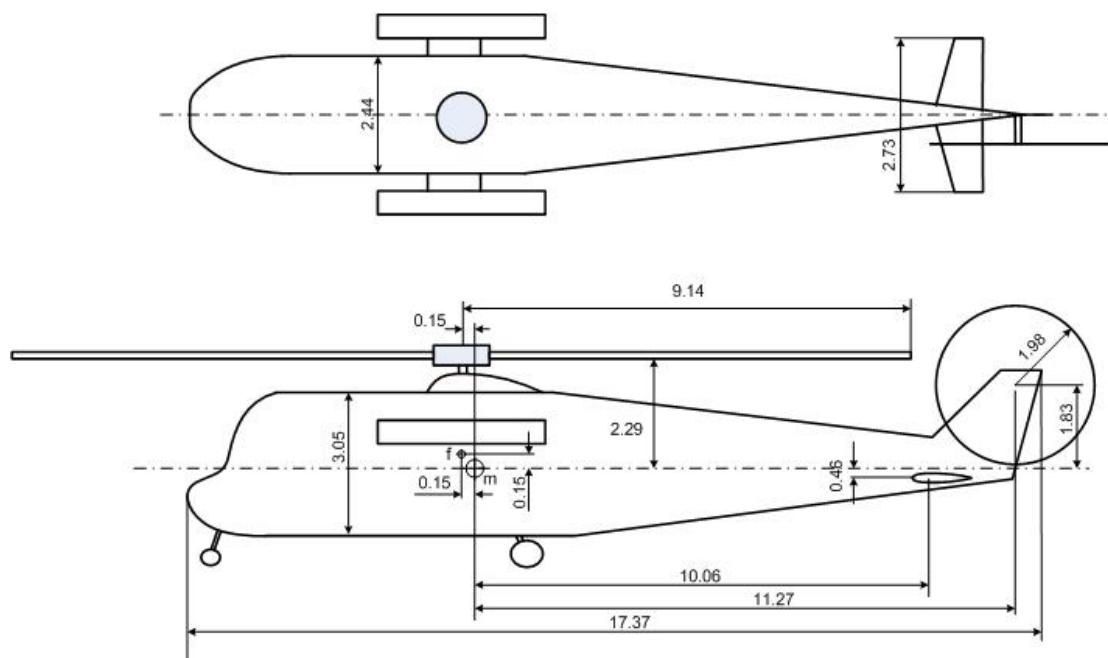
Za napadni kut tijela letjelice vrijedi

$$\alpha_f = \Theta - \gamma,$$

odnosno

$$\alpha_f = \alpha_{TPP} - a_{1s} - i_M.$$

<sup>5</sup>definiciju koordinatnog sustava pogledaj u [13]



Slika 5.6.: Primjer transportnog helikoptera: osnovna geometrija

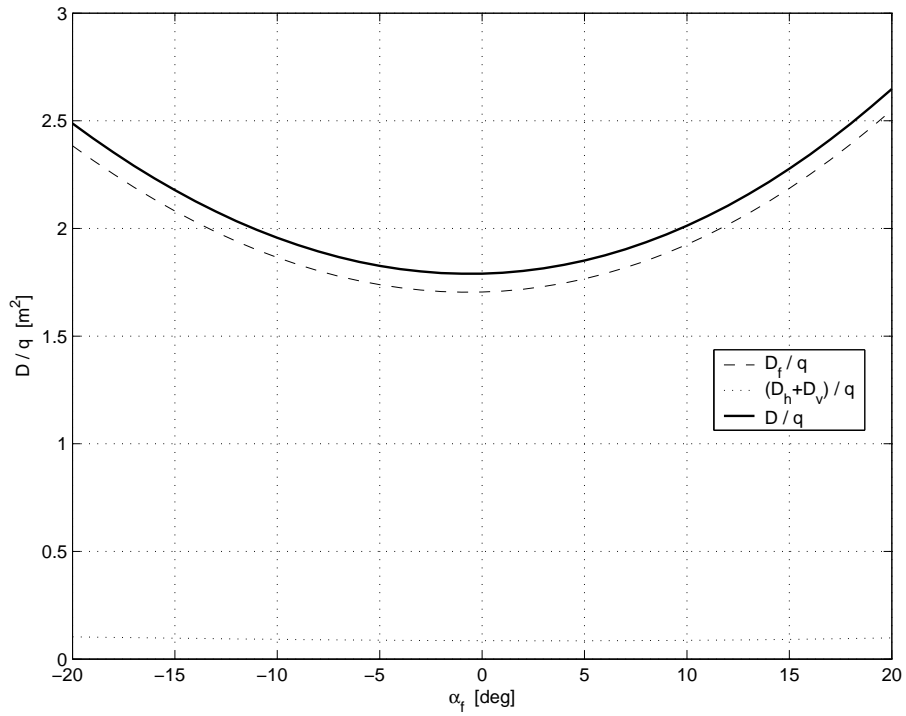
## PRIMJER 2. – RAVNOTEŽNI LET TRANSPORTNOG HELIKOPTERA

Za primjer uslužnog transportnog helikoptera prikazanog na slici 5.6. i s niže navedenim podacima potrebno je provesti analiza ravnotežnog leta u ovisnosti o brzini leta.

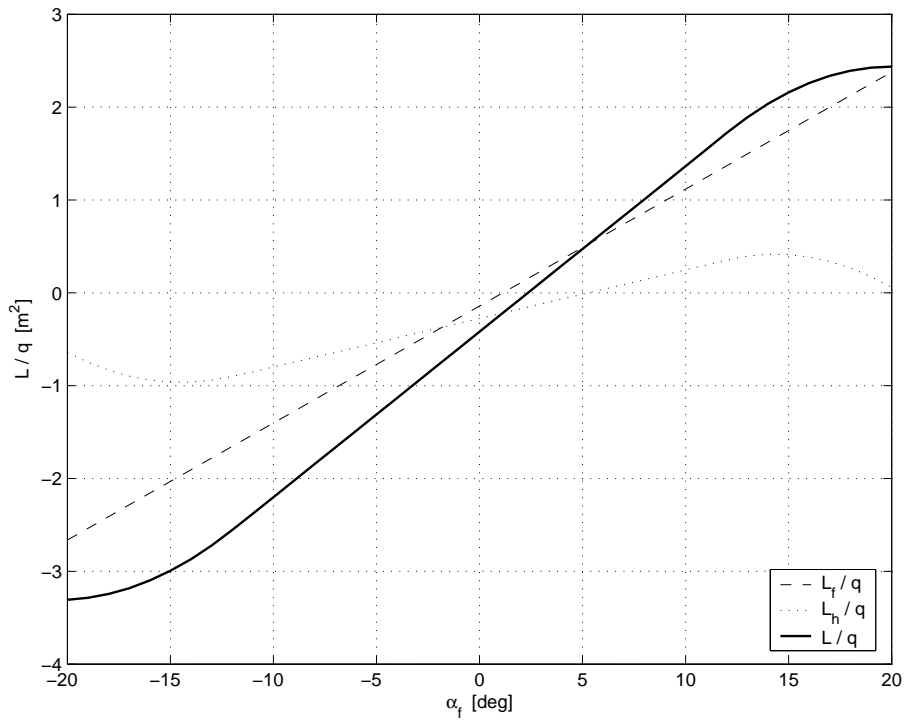
Zadano:

- glavni rotor: 4 lopatice, NACA0012,  $R = 9.14m$ ,  $c = 0.61m$ ,  $\sigma = 0.085$ ,  $\theta_1 = -10^\circ$ ,  $i_M = 0$
- repni rotor: 3 lopatice, NACA0012,  $R = 1.98m$ ,  $c = 0.3m$ ,  $\sigma = 0.146$ ,  $\theta_1 = -5^\circ$
- horizontalni rep: NACA0012,  $A = 1.6m^2$ ,  $b = 2.7m$ ,  $\mathcal{R} = 4.5$ ,  $\lambda = 0.71$ ,  $i_h = -3^\circ$ ,  $l_h - l_m = 10.1m$ ,  $z_h = -0.46m$ .
- vertikalni rep: NACA0012,  $A = 1.6m^2$ ,  $b = 2.7m$ ,  $\mathcal{R} = 1.8$ ,  $\lambda = 0.21$ ,  $l_v - l_m = 10.7m$ ,  $z_v = 0.9m$
- motor:  $2 \times$  mlazni motor 1490 kW
- masa: 9 t
- aerodinamičke karakteristike (sila otpora slika (5.7.) – dana po komponentama rep i tijelo; i sila uzgona slika(5.8. – dana po komponentama horizontalni rep i tijelo).

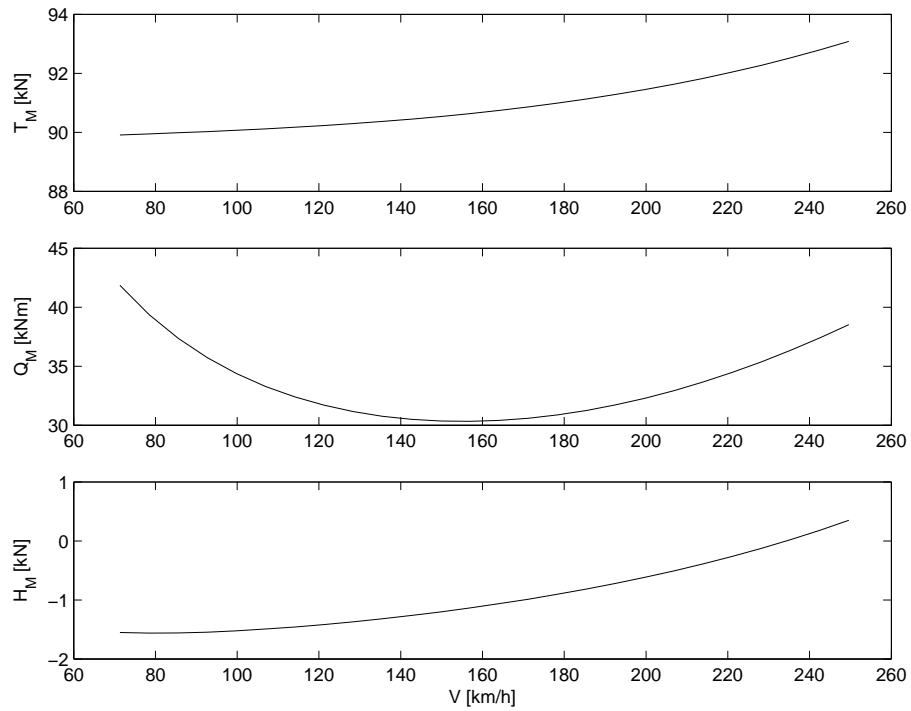
Primjenom iterativnog postupka određeni su koeficijenti pogonske sile i snage te otpora glavnog rotora kako je ranije opisano, temeljem rezultata teorije elementarnog kraka. Za izračun napadnog kuta ravnine TPP primjenjena je relacija (5.5).



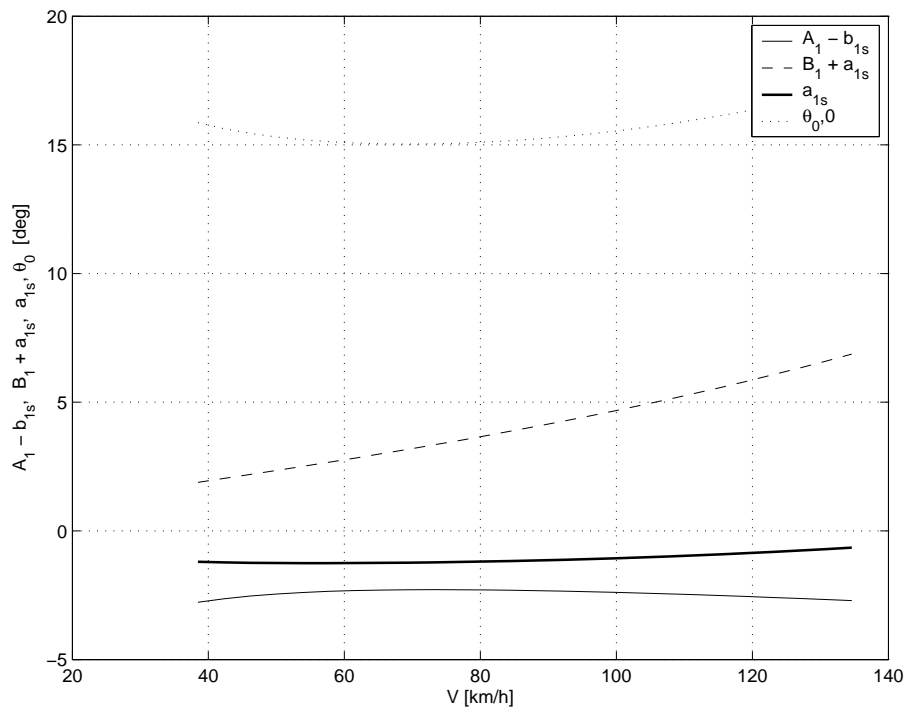
Slika 5.7.: Primjer transportnog helikoptera: promjena sile otpora u ovisnosti o  $\alpha_f$



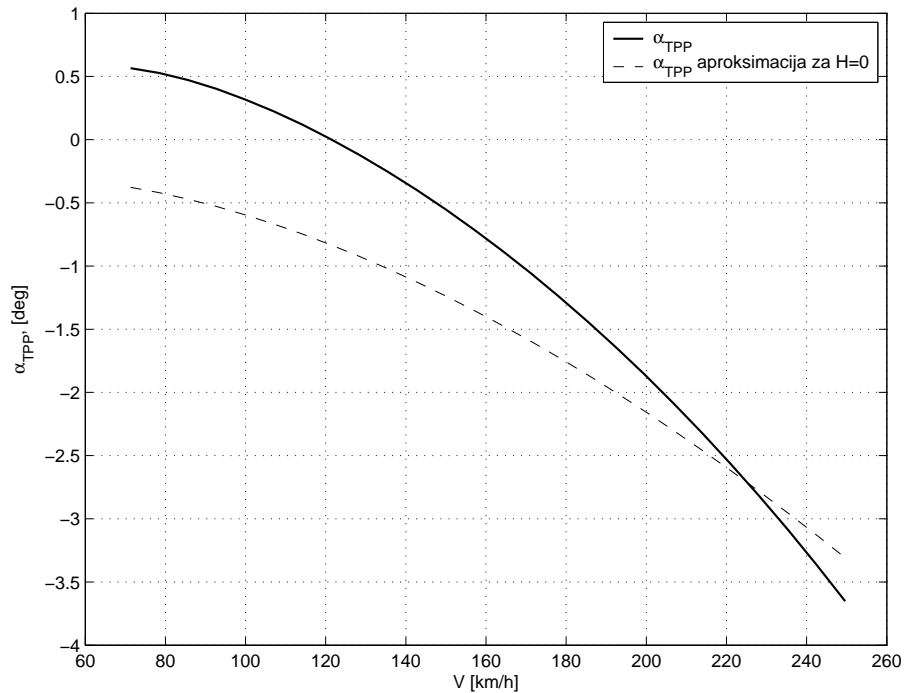
Slika 5.8.: Primjer transportnog helikoptera: promjena sile uzgona u ovisnosti o  $\alpha_f$



Slika 5.9.: Primjer transportnog helikoptera: karakteristike glavnog rotora u ovisnosti o brzini leta



Slika 5.10.: Primjer transportnog helikoptera: promjena ravnotežnih kutova s brzinom leta



Slika 5.11.: Primjer transportnog helikoptera: promjena  $\alpha_{TPP}$  u ovisnosti o brzini leta

Analizom rezultata za ravnotežni kut  $a_{1_s}$  (slika 5.10.) može se uočiti da ima vrlo malu vrijednost (od  $-0.6^\circ$  do  $-1.2^\circ$ ) i približno konstantnu s promjenom brzine leta tako da se u određenim analizama može zanemariti. Uz pretpostavku  $a_{1_s} = 0$  i za zadano  $i_M = 0$  slijedi da je napadni kut tijela helikoptera jednak napadnom kutu ravnine TPP  $\alpha_f = \alpha_{TPP}$ . Razmatran je i utjecaj sile otpora rotora (glavnog  $H_M$  i repnog  $H_T$ , koje su znatno manje po iznosu od pogonske sile rotora) na  $\alpha_{TPP}$ . Na slici (5.11.) prikazana je promjena napadnog kuta  $\alpha_{TPP}$  prema (5.5) te uz zanemarenje sile otpora rotora. Kako je razlika krivulja sa slike (5.11.) najviše  $1^\circ$ , za određene potrebe može se pretpostaviti  $H_M = H_T = 0$ .

Ukoliko bočno gibanje nije od interesa te ako su zadovoljene jednadžbe ravnoteže bočne sile i momenata može se pretpostaviti da je  $b_{1_s} = 0$ .

### 5.3. Model gibanja središta mase helikoptera u ravnotežnom letu

Jednadžbe gibanja središta mase letjelice dane su prema [13]. Njihovom prilagodbom za helikopter, a u skladu sa slikom (5.5.), mogu se postaviti diferencijalne jednadžbe za intenzitet brzine i kutove brzine leta

$$\begin{aligned}
 \frac{dV}{dt} &= -\frac{T_M \sin \alpha_{TPP} - H_M \cos \alpha_{TPP} + D + H_T}{m} - g \sin \gamma \\
 \frac{d\gamma}{dt} &= \frac{T_M \cos \alpha_{TPP} + L}{mV} \cos \Phi - \frac{g \cos \gamma}{V} \\
 \frac{d\chi}{dt} &= \frac{T_M \cos \alpha_{TPP} + L}{mV \cos \gamma} \sin \Phi
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

Pri tome su sile otpora  $D$  i sila uzgona  $L$

$$\begin{aligned}
 D &= D_h + D_v + D_f \\
 L &= L_h + L_f
 \end{aligned}$$

Uz aproksimacije i pojednostavljenja modela opisana u prethodnom poglavlju, uz diferencijalne jednadžbe gibanja središta mase helikoptera, uz diferencijalne jednadžbe položaja (koordinate  $x$  i  $y$  i visinu  $h$ ) i mase, imaju oblik

$$\begin{aligned}
 \frac{dV}{dt} &= -\frac{T_M \sin \alpha_{TPP} + D}{m} - g \sin \gamma \\
 \frac{d\gamma}{dt} &= \frac{T_M \cos \alpha_{TPP} + L}{mV} \cos \Phi - \frac{g \cos \gamma}{V} \\
 \frac{d\chi}{dt} &= \frac{T_M \cos \alpha_{TPP} + L}{mV \cos \gamma} \sin \Phi \\
 \frac{dx}{dt} &= V \cos \gamma \cos \chi \\
 \frac{dy}{dt} &= -V \cos \gamma \sin \chi \\
 \frac{dh}{dt} &= V \sin \gamma \\
 \frac{dm}{dt} &= -C_P \cdot P
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

Za napadni kut ravnine TPP primjenjuje se relacija (5.5).



## Poglavlje 6.

# Performanse helikoptera

Kao i kod aviona, performanse helikoptera definiraju opće karakteristike leta u zadanim uvjetima temeljem kojih se može odrediti da li je promatrani helikopter prikladan za određenu zadaću, misiju. Temeljne veličine koje se pri tome određuju su

- potrebna snaga u lebdenju
- potrebna snaga u horizontalnom letu
- ovojnica i ograničenja pogonske sile uslijed sloma uzgona na kraku u povratku i porasta otpora pri velikim brzinama na napredujućem kraku.

U ovom poglavlju naglasak je na prve dvije stavke.

### 6.1. Lebdenje i vertikalni let

Teorijom elementarnog kraka definiran je koeficijent potrebne snage za vertikalni let (2.33), a uvođenjem  $\kappa$  empirijskog koeficijenta inducirane snage, u skladu s (2.43), slijedi

$$C_P = \kappa \lambda C_T + \frac{1}{8} \sigma c_{d0} .$$

U dimenzionalnom obliku gornja relacija je

$$P = \kappa (V_c + v_i) \cdot T + \rho A_b (\Omega R)^3 \cdot \frac{c_{d0}}{8} . \quad (6.1)$$

Snagu potrebnu za vertikalni let čine komponenta inducirane snage, vezana uz uzgon na kraku i komponenta otpora profila kraka. Snaga potrebna za savladavanje otpora profila ne ovisi o brzini penjanja  $V_c$  dakle konstantna je bez obzira da li se radi o lebdenju ili penjanju. Brzina na disku, primjenom rezultata teorije diska (2.19), ima oblik

$$V_c + v_i = \frac{1}{2} V_c + \sqrt{\left(\frac{1}{2} V_c\right)^2 + \frac{T}{2\rho A}} .$$

Za analizu ukupne potrebne snage nužno je primjeniti relaciju (6.1) za glavni i za repni rotor. Kod analize repnog rotora brzina penjanja  $V_c = 0$  dok je pogonska sila potrebna da uravnoteži okretni moment glavnog rotora

$$T_T \cdot (l_T - l_M) = Q_M . \quad (6.2)$$

Snaga repnog rotora može iznostiti 10-15% snage glavnog rotora, a tome je potrebno dodati i gubitke snage na prijenosu snage (transmisiju) i pomoćne uređaje 3%. Uzevši u obzir i navedene gubitke može se definirati ukupna potrebna snaga na vratilu motora koja treba biti ostvariva s raspoloživom snagom motora. Izjednačavanjem potrebne i raspoložive snage može se odrediti težina korisnog tereta u lebdenju. Pri tome je potrebno razmatrati lebdenje daleko od tla (*engl.* out of ground effect, OGE) i lebdenje uz tlo (*engl.* in ground effect, IGE).

## 6.2. Horizontalni let

Za horizontalni let potrebni koeficijent snage izveden je u poglavlju 4. relacijom (4.8), odnosno uvođenjem empirijskih koeficijenata  $\kappa$  i  $k$  relacijom (4.9). Kako je pokazano snaga potrebna za horizontalni let ima komponente: inducirane snage (ovisne o uzgonu rotora), snage potrebne za savladavanje otpora profila kraka i snage potrebne za savladavanje otpora ostatka letjelice. Prema navedenoj relaciji (4.9) za koeficijent  $C_P$ , iznos potrebne snage za horizontalni let je

$$P = \kappa v_i T + \frac{1}{8} \rho A_b c_{d0} (\Omega R)^3 \left[ 1 + k \left( \frac{V}{\Omega R} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} \rho V^2 f \cdot V.$$

Sila otpora letjelice (bez glavnog i repnog rotora) može se zapisati preko ekvivalentne površine ravne ploče tako da je

$$D = \frac{1}{2} \rho V^2 f.$$

Pored gore definirane potrebne snage za horizontalni let potrebno je dodati i snagu potrebnu za savladavanje gubitke na repnom rotoru, prijenosu snage i pomoćnoj opremi: oko 8% za veće brzine leta.

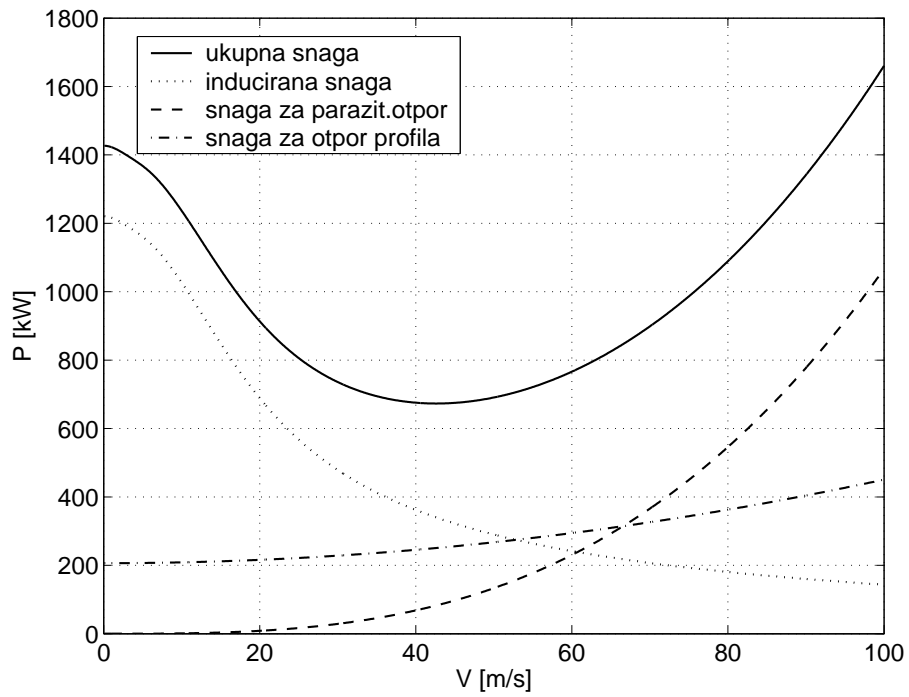
### PRIMJER 3. – POTREBNA SNAGA U HORIZONTALNOM LETU

*Za uslužni transportni helikopter iz primjera 5.2.1. potrebno je odrediti promjenu potrebne snage u horizontalnom letu s brzinom leta.*

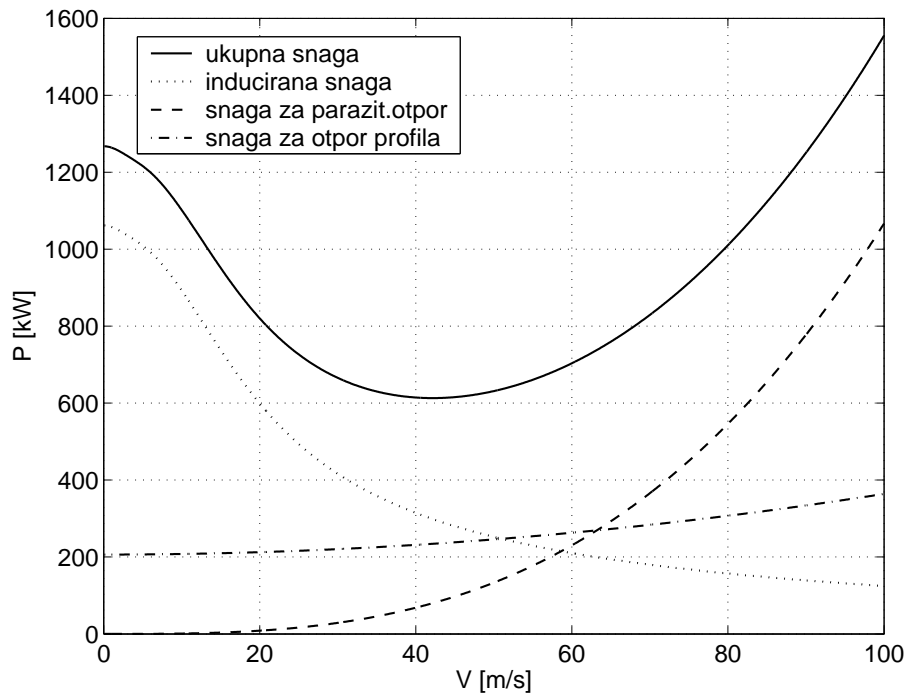
*Pri tome je inducirana brzina određena je primjenom rezultata teorije diska (4.1) iterativnim postupkom. Za napadni kut primjenjena je relacija*

$$\operatorname{tg} \alpha_r = \frac{D}{W}.$$

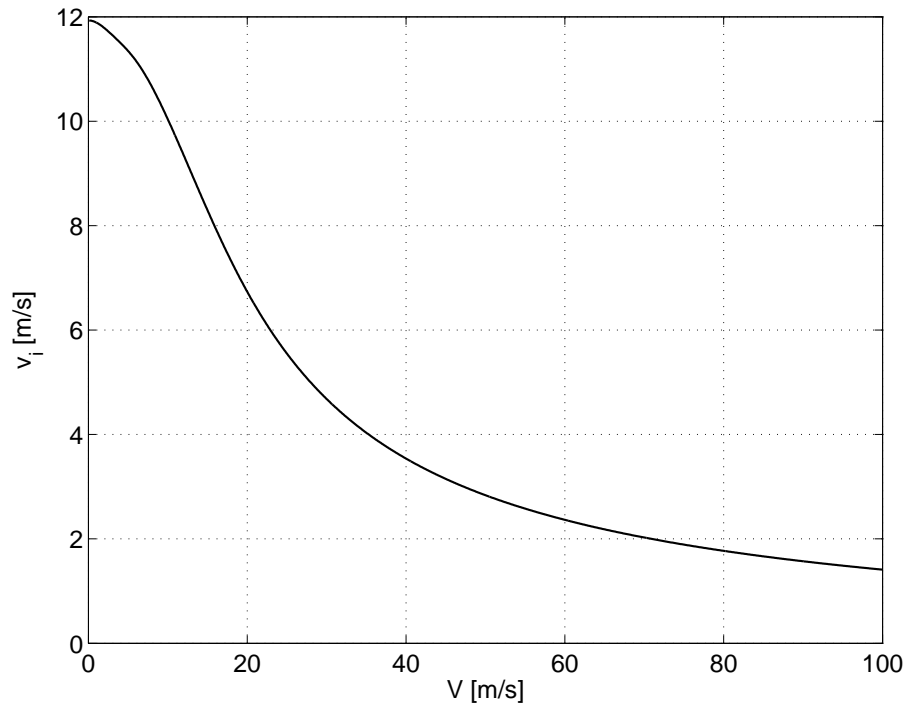
Tipičan oblik ovisnosti potrebne snage, po njenim komponentama, prikazan je na slici (6.1.) na primjeru transportnog helikoptera. Inducirana snaga prevladava u ukupno potrebnoj snazi za lebdenje, ali joj se doprinos smanjuje s povećanjem brzine leta (budući da se smanjuje i inducirana brzina slika 6.3.). Snaga potrebna za savladavanje otpora profila kraka raste s malim gradijentom, osim u slučaju kada lokalni  $Ma$  broj dosegne vrijednost  $Ma_{DD}$  koja donosi veliki porast otpora. Snaga potrebna za savladavanje otpora preostalih komponenti promatrane konfiguracije helikoptera (u analiziranom primjeru to su tijelo, horizontalni i vertikalni rep) raste proporcionalno sa  $V^3$ . Ukupna



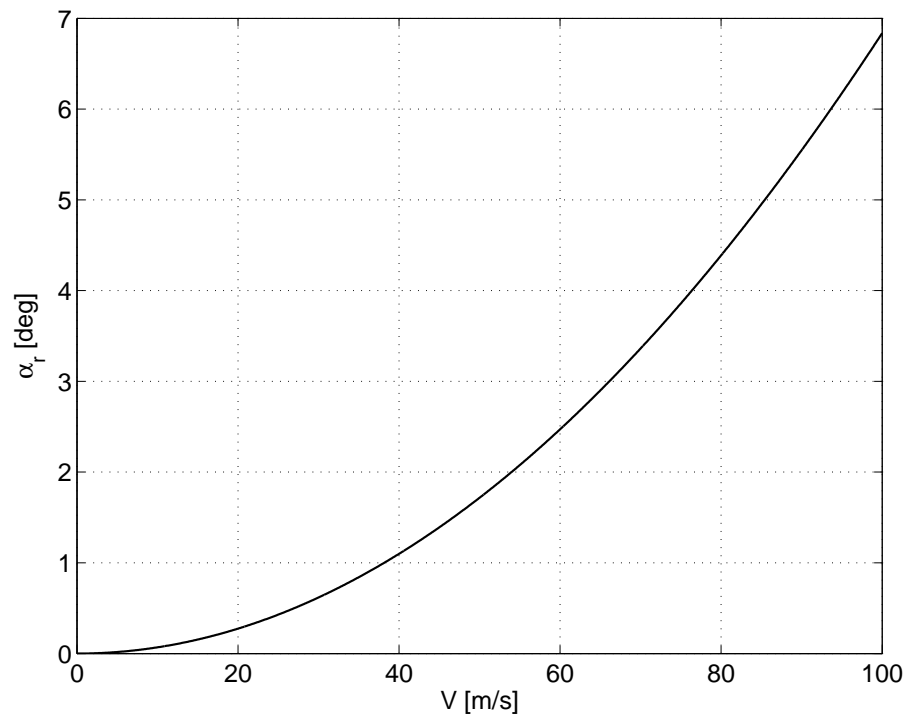
Slika 6.1.: Primjer transportnog helikoptera: potrebna snaga  $P$  ( $\kappa = 1.15$ ,  $k = 4.65$ )



Slika 6.2.: Primjer transportnog helikoptera: potrebna snaga  $P$  ( $\kappa = 1$ ,  $k = 3$ )



Slika 6.3.: Primjer transportnog helikoptera: inducirana brzina  $v_i$  ( $\kappa = 1.15$ ,  $k = 4.65$ )



Slika 6.4.: Primjer transportnog helikoptera: napadni kut  $\alpha_r$  ( $\kappa = 1.15$ ,  $k = 4.65$ )

potrebna snaga, kako se vidi s dijagrama (6.1.) manja je za srednje brzine leta od lebdjenja, no s porastom brzine leta snaga opet raste. Tako je na primjeru promatranog helikoptera brzina leta s minimalnom potrebnom snagom  $V = 42.6$  m/s.

Napadni kut  $\alpha_r$  sa slike (6.4.) raste s porastom brzine leta, dakle disk rotora se sve više naginje prema dole kako bi se ostvarila potrebna propulzivna komponenta pogonske sile.

Slika (6.2.) u usporedbi sa slikom (6.1.) pokazuje utjecaj odabira vrijednosti empirijskih koeficijenata  $\kappa$  i  $k$ .

### 6.3. Penjanje u napredujućem letu

Kod penjanja u napredujućem letu pored snage potrebne za horizontalni let potrebno je dodati i snagu potrebnu za penjanje brzinom  $V_c$ . Ako usvojimo isti oblik koeficijenta potrebne snage prema (4.9) uz navedenu dodatnu komponentu za penjanje, koeficijent potrebne snage za penjanje u napredujućem letu ima oblik

$$C_P = \kappa \lambda_i C_T + \frac{1}{8} \sigma c_{d_0} (1 + k \mu^2) + \frac{1}{2} \mu^3 \frac{f}{A} + \lambda_c C_T$$

Pri tome je otpor letjelice većeg iznosa nego za horizontalni let. Pored toga pri penjanju okretni moment glavnog rotora se povećava uslijed čega je potrebna veća pogonska sila na repnom rotoru kako bi se zadovoljila jednadžba ravnoteže (6.2). Vrhunac leta određuje se kao i za sve letjelice: kada je višak raspoložive snage jednak nuli, tj. kada je raspoloživa snaga jednaka potrebnoj uzevši u obzir sve gubitke (repni rotor, prijenos snage, pomoćni uređaji).



# Literatura

- [1] A. Betz. Schraubenpropeller mit geringstem energieverlust. *Göttinger Nachrichten*, page 193, 1919.
- [2] A. R. S. Bramwell. *Bramwell's Helicopter dynamics*. Butterworth-Heinemann, Oxford, 2nd edition, 2001.
- [3] R.P. Coleman, A.M. Feingold, and C.W. Stempin. Evaluation of the induced velocity in a lateral plane of a idealized helicopter rotor. ARR L5E10, NACA, 1945.
- [4] J. Dress. A theory of airflow through rotors and its application to some helicopter problems. *Journal of Helicopter Association of Great Britain*, 3(2), 1948.
- [5] S. Drzewiecki. Théorie générale de l'hélice. *Bulletin de L'Association Technique Maritime*, 1892.
- [6] D. Favier, M. Nsi Mba, C. Barbi, and C. Maresca. A free-wake analysis for hovering rotors and advancing propellers. In *Proceedings of the 11th European Rotorcraft Forum*, London, Sept. 1985. see also *Vertica*, 11:439-511, 1987.
- [7] R. E. Froude. On the elementary relation between pitch, slip and propulsion efficiency. *Trans. Inst. Naval Arch.*, 19:47–65, 1878.
- [8] H. Glauert. The analysis of experimental results in the windmill break and vortex rotating states of an airscrew. R&M 1026, Aeronautical Research Committee, 1926.
- [9] H. Glauert. On the horizontal flight of a helicopter. R&M 1157, Aeronautical Research Committee, 1928.
- [10] H. Glauert. Airplane propellers. In W.F. Durand, editor, *Aerodynamic theory*, volume IV, pages 169–360. Julius Springer, Berlin, 1943.
- [11] S. Goldstein. On the vortex theory of the screw propellers. *Proceedings of Royal Society of London, Series A*, 123:440–465, 1929.
- [12] Stack J., Draley E. C., Delano J. B., and Feldman L. Investigation of the NACA 4-(3)-(08)-03 and NACA 4-(3)-(08)-045 two-blade propellers at forward Mach numbers to 0.725 to determine the effects of compressibility and solidity on performance. NACA TR 999, NACA, 1950.
- [13] S. Janković. *Mehanika leta zrakoplova*. Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 2001.

- [14] Wayne Johnson. *Helicopter theory*. Dover Publications Inc., New York, 1994.
- [15] J. Kocurek and Tangler J.L. A prediscrbed wake lifting surface hover performance analysis. *Journal of American Helicopter Society*, 22(1):24–35, 1977.
- [16] A.J. Landgrebe. The wake geometry of a hovering rotor and its influence on rotor performance. *Journal of American Helicopter Society*, 17(4):3–15, 1972.
- [17] J. Gordon Leishman. *Principles of helicopter aerodynamics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [18] C.N.H. Lock. The application of goldstain’s theory to the practical design of airscrews. R&M 19377, Aeronautical Research Committee, 1930.
- [19] B. W. McCormick. *Aeordynamics, Aeronautics and Flight Mechanics*, chapter Propeller analysis, pages 291–316. John Wiley & Sons, Inc., New York, 2nd edition, 1995.
- [20] B.W. McCormick. *Aeordynamics, Aeronautics and Flight Mechanics*, chapter Effects of propulsion systems, pages 506–513. John Wiley & Sons, Inc., New York, 2nd edition, 1995.
- [21] Raymond W. Prouty. *Helicopter performance, stability and control*. Kreiger Publishing Company Inc., Malabar, Florida, 1986.
- [22] W. J. Rankine. On the mechanical principles of the action of ship propellers. *Trans. Inst. Naval Arch.*, 6:13–39, 1865.
- [23] Pešić S., Cvetković D., and Bengin A. *Elise*. Mašinski fakultet Univerziteta u Beogradu, Beograd, 2002.
- [24] J. Seddon. *Basic Helicopter Aerodynamics*. AIAA, 1990.
- [25] W. Z. Stepniewski and C. N. Keys. *Rotary-wing aerodynamics*. Dover Publications Inc., New York, 1984. Two volumens bound as one: vol.I: Basic theories of rotor aerodynamics (Stepniewski); vol.II: Performance prediction of helicopters (Keys).