

Sveučilište u Zagrebu
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE
ZAVOD ZA ZRAKOPLOVNO INŽENJERSTVO

dr. sc. Slobodan Janković, prof. u mirovini
dr. sc. Milan Vrdoljak, prof.

PERFORMANSE

ZRAKOPLOVA

Zagreb, 2022



Copyright © 2007., 2016., 2022. Zavod za zrakoplovno inženjerstvo, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Sveučilište u Zagrebu, e-mail: milan.vrdoljak@fsb.hr

Ovo je djelo dano na korištenje pod licencom Imenovanje-Nekomercijalno-Bez prerada 4.0 međunarodna (CC BY-NC-ND 4.0). Licenca je dostupna na <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

SADRŽAJ

1. Kinematika leta
 2. Projektna aerodinamika
 3. Otpor aviona
 4. Normalna sila i moment propinjanja
 Primjer
 5. Pogonska sila i moment
 6. Ravnotežni let
 7. Horizontalni let
 8. Penjanje i spuštanje
 9. Horizontalni zaokret
 10. Vertikalni zaokret
 11. Ukupna energija
 12. Polijetanje i slijetanje
 - A. Prilog: Linearna algebra
 - B. Prilog: Atmosfera
 - C. Prilog: Performanse klipnog motora
 - D. Prilog: Maksimalni uzgon krila
- Literatura
- Kazalo
- Popis oznaka

1 KINEMATIKA LETA

1.1 Uvod

Pod pojmom performanse letjelice podrazumijevamo koliki je najveći dolet zrakoplova, najduže vrijeme letenja, najveći kut penjanja, najmanji kut spuštanja (bez pogonske sile), najmanji polumjer horizontalnog zaokreta i vertikalni zaokret itd.

Sve ove veličine izračunavamo za točno određene uvjete leta. Ti uvjeti u stvarnosti nisu ispunjeni, ali nam omogućuju da kompariramo i ocjenjujemo zrakoplove relativno jedne u odnosu na druge. S obzirom da ti uvjeti nisu daleko od realnih, oni predstavljaju i prvu aproksimaciju onog što zrakoplov može napraviti u stvarnosti.

Prva pretpostavka je da nema vjetra. Posljedica je ove činjenice, da se aerodinamička sila nalazi u ravni simetrije zrakoplova, zato što komponenta aerodinamičke sile okomite na ravan simetrije zrakoplova postoji samo kad postoji kut klizanja ili/i otklon vertikalnog kormila (vidi sliku), a ove veličine su vezane za pojavu vjetra..

Druga važna pretpostavka je ravnotežni let. To znači da je za vrijeme leta aerodinamički moment jednak nuli, tj sve tri komponente aerodinamičkog momenta su jednake nuli.

Treća pretpostavka je da računamo performanse zrakoplova ne uzimajući u oblik krivinu i rotaciju Zemlje. Podsjetimo se da je utjecaj rotacije zemlje ušao u ubrzanje g .

1.2 Koordinatni sustavi (k.s.)

Analizu i proračun performansi zrakoplova vršimo u tzv. *lokalnom k.s.* (L), a one ovise od mehaničkih svojstva zrakoplova (masa, središte mase i momenti tromosti), od pogonske sile i od aerodinamičke sile. Mehanička svojstva zrakoplova i pogonska sila poznate su u *k.s. letjelice* (F), dok je aerodinamička sila poznata u *aerodinamičkom k.s.*(A). Konačno potreban nam je još jedan k.s. u kome su izvedene jednadžbe gibanja. To je s matematičke točke gledanja sferni k.s. koji u mehanici leta nazivamo *brzinski k.s.* (V). Zato prije analize performansi moramo definirati ova četiri koordinatna sustava i veze između njih. Kad kažemo veze između tih koordinatnih sustava, to znači da trebamo znati, kako izračunati komponente nekog vektora u bilo kom k.s., ako ih znamo u jednom k.s. od ova četiri,

Napomenimo da su svi k.s. desni, što znači da je dovoljno definirati dvije osi, a treća čini desni trijedrar. Uvijek si možemo pomoći desnom šakom, ako palac, kažiprst i srednjak namjestimo okomito jedan na drugi. Ako palac označuje x os, kažiprst y os, onda će z os biti u pravcu smjeru srednjaka. Za svaki k.s. osim položaja ishodišta, trebamo znati kutove u odnosu na neki poznati k.s., i njegovu kutnu brzinu. Kutna brzina nužna je da bismo odredili inercijsku silu, a kutovi da bismo odredili matricu transformacije u taj k.s. iz nekog drugog k.s..

Vektor kutne brzina k.s. imat će indeks dolje od kog k.s. je to kutna brzina, a indeks gore označavat će k.s. duž čijih osa su komponente. Primjerice, ako su $[p \ q \ r]$ komponente kutne brzine brzinskog k.s. duž osi aerodinamičkog k.s. ona ih označavamo sa

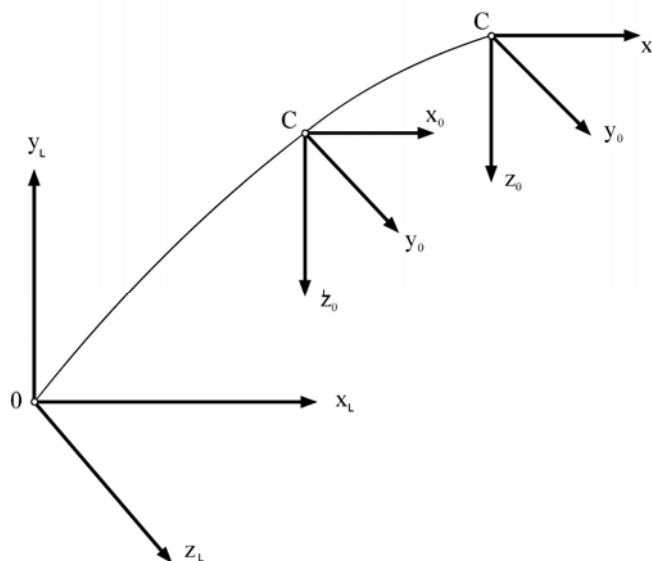
$$\begin{bmatrix} p_V^A & q_V^A & r_V^A \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Omega}_V^A.$$

1.2.1 Lokalni k.s. (L)

Ovaj k.s. nije propisan ISO standardima. On se može izabrati onako kako je potrebno za zadani problem. Npr. ako proučavamo polijetanje zrakoplova onda ishodište stavimo u središte mase zrakoplova prije pokretanja, x os usmjerimo u pravcu piste, a y ili z os usmjerimo prema gore. Treća os čini desni trijedrar.

1.2.2 Nošeni k.s. (O)

Nošeni k.s. sustav ima ishodište u središtu mase letjelice. Os x_o je u horizontalnoj ravnini, a z_o je vertikalna u smjeru prema dolje (slika 1). Zato što zanemarujemo zakrivljenost



Slika 1. Translacija nošenog koordinatnog sustava

Zemljine površine, ovaj k.s. nema kutnu brzinu, tj. nošeni k.s. sustav ne rotira tijekom leta, već ostaje paralelan samom sebi, drugim riječima tijekom leta zrakoplova nošeni k.s. ima samo translatorno gibanje. Radi pojednostavljenja, postavljamo nošeni k.s. paralelno s lokalnim, pa on ostaje stalno u tijeku leta paralelan s lokalnim k.s., ali putuje sa središtem mase letjelice (zato smo mu dali ime "nošeni", slika 1).

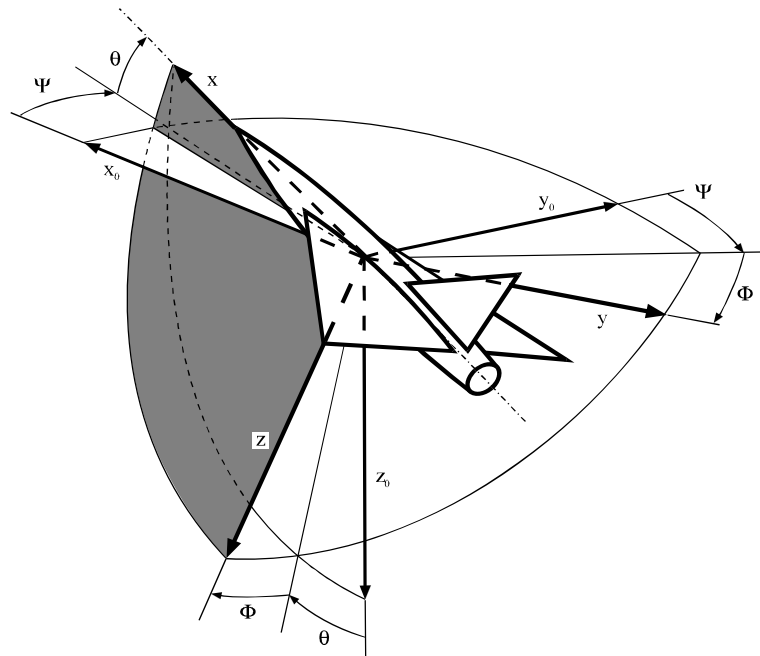
1.2.3 K.s. letjelice (F)

Ovaj k.s. čine glavne centralne osi tromosti letjelice što znači da je njegovo ishodište u središtu mase. Os x i os z nalaze se u ravnini simetrije letjelice i to os x duž tijela u smjeru leta, a os z je nadolje, dok je os y okomita na ravninu simetrije. Zato što je taj k.s. kruto vezan za letjelicu, njegova je kutna brzina ujedno i kutna brzina letjelice. Slovo F sa kojim označavamo taj k.s. dolazi od engleske riječi "frame", ali kako je to najviše upotrebljavan k.s., sve veličine definirane u tom koordinatnom sustavu nemaju nikakvih oznaka. Usmjerenost osi tog k.s. određena je u odnosu na nošeni pomoću tri kuta (slika 2)

ψ u horizontalnoj ravnini oko osi z_0 , nazivamo ga *kut zanosa*,

θ u vertikalnoj ravnini oko horizontalne osi \tilde{y} , nazivamo ga *kut propinjanja*,

ϕ oko osi x , nazivamo ga *kut valjanja letjelice*.



Slika 2. K.s. letjelice

Matrica transformacije u k.s. letjelice iz nošenog k.s. pomoću ovih kutova jest:

$$\mathbf{L}_{FO} = \mathbf{L}_X(\phi) \mathbf{L}_Y(\theta) \mathbf{L}_Z(\psi).$$

što pišemo kraće $\mathbf{L}_{FO}(\phi, \vartheta, \psi)$. Kutna brzina letjelice (jednaka kutnoj brzini njenog k.s. F) bit će zbroj triju rotacija:

$$\vec{\Omega} = \vec{\dot{\psi}} + \vec{\dot{\theta}} + \vec{\dot{\phi}}.$$

Ona ima projekcije na osi tog k.s.

$$\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{L}_{FO} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + \mathbf{L}_X(\phi) \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Poslije množenja matrica i zamjene dobivamo

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\psi} \sin \theta + \dot{\phi} \\ \dot{\psi} \sin \phi \cos \theta + \dot{\theta} \cos \phi \\ \dot{\psi} \cos \phi \cos \theta - \dot{\theta} \sin \phi \end{bmatrix}.$$

Kao što je već spomenuto, nije potrebno posebno označavati da su to projekcije na osi letjelice, jer kada nije tako onda to posebno označimo. Matricu na desnoj strani gornje jednadžbe možemo rastaviti u produkt dviju matrica

$$\begin{bmatrix} -\dot{\psi} \sin \theta + \dot{\phi} \\ \dot{\psi} \sin \phi \cos \theta + \dot{\theta} \cos \phi \\ \dot{\psi} \cos \phi \cos \theta - \dot{\theta} \sin \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \cos \theta \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

Matricu 3×3 na desnoj strani označavamo sa \mathbf{R} . Ona je funkcija dvaju kutova ϕ i ϑ , nije matrica transformacije i na nju se ne odnose pravila o matrici transformacija. Sa \mathbf{s} označavamo novi pojam *stav*. To je matrica koju čine tri kuta

$$\mathbf{s} = [\phi \quad \theta \quad \psi]^T.$$

S ovim oznakama je

$$\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{R}(\phi, \vartheta) \cdot \dot{\mathbf{s}}$$

$$\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{R}(\phi, \vartheta)^{-1} \cdot \boldsymbol{\Omega},$$

ili

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin \phi \tan \theta & \cos \phi \tan \theta \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi / \cos \theta & \cos \phi / \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}.$$

1.3 Brzine letjelice

Razlikujemo dvije brzine letjelice. Prva je brzina letjelice u odnosu na Zemlju. Nazivamo je *brzina leta* i označavamo je sa \vec{V}_K . Druga je brzina letjelice u odnosu na zrak \vec{V} i nju nazivamo *aerodinamička brzina* (bez indeksa). Između te dvije brzine imamo vezu

$$\vec{V}_K = \vec{V}_W + \vec{V},$$

gdje je \vec{V}_W brzina zraka (u odnosu na Zemlju) ili, kratko, *vjetar*.

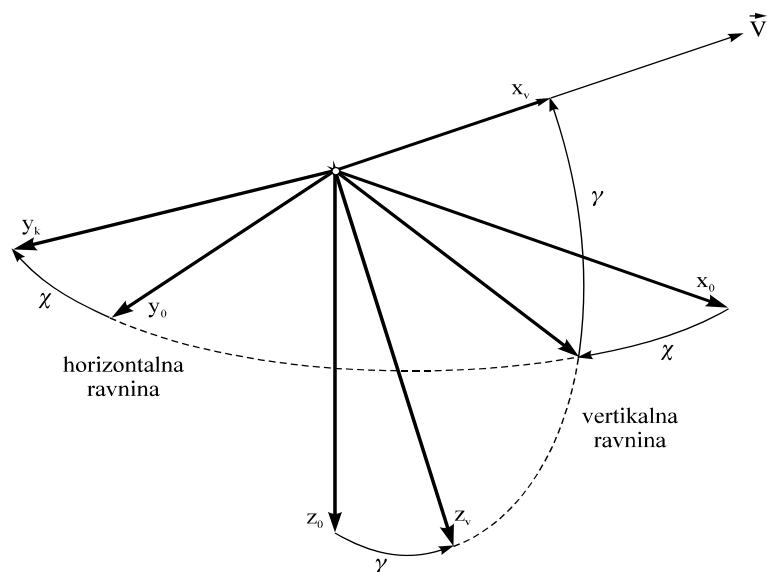
Aerodinamička brzina V je jednaka po veličini i pravcu a suprotna po smjeru *brzini opstrujavanja*, koju označavamo sa \vec{V}_∞ . Drugim riječima

$$\vec{V}_\infty = -\vec{V}.$$

1.3.1 Brzinski k.s. (V)

Kao što je rečeno brzina leta V_K je brzina letjelice u odnosu na Zemlju. Ona je određena svojim intenzitetom V_K i pomoću dva kuta (slika 3) u odnosu na osi nošenog koordinatnog sustava:

- χ je kut u horizontalnoj ravnini oko osi z_0 od osi x_0 do horizontalne projekcije brzine (pozitivan oko osi z prema dolje), nazivamo ga *kut skretanja*,
- γ je u vertikalnoj ravnini od horizontalne projekcije do brzine leta (pozitivan prema gore), nazivamo ga *kut penjanja*.



Slika 3. Brzinski k.s.

Projekcije brzine leta na osi letjelice obilježavamo uvijek sa $u_K \quad v_K \quad w_K$.

Za rješenje nekih problema kao što su to izračunavanja performansa zrakoplova, dovoljno je promatrati samo gibanje središta mase. Tada je pogodno primjenjivati brzinski k.s.. Brzinski k.s. ima os x_V u pravcu i smjeru brzine leta, os z_V mu je u vertikalnoj ravnini kroz brzinu leta prema dolje, a os y_V koja čini desni k.s. je horizontalna. Prema slici 4 iz nošenog koordinatnog sustava "O" u brzinski prelazi se s dvije rotacije: prvo oko osi z_0 za kut χ , a zatim oko osi y_V za kut γ :

$$\mathbf{L}_{VO} = \mathbf{L}_Y(\gamma)\mathbf{L}_Z(\chi).$$

Npr.

$$\mathbf{V}_K^O = \mathbf{L}_{OV} \mathbf{V}_K^V = \mathbf{L}_Z(-\chi) \cdot \mathbf{L}_Y(-\gamma) \cdot \begin{bmatrix} V_K \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_K \cos \chi \cos \gamma \\ V_K \cos \gamma \sin \chi \\ -V_K \sin \gamma \end{bmatrix}$$

Taj k.s. ima dvije kutne brzine:

- $\dot{\chi}$ kutnu brzinu oko vertikalne osi z_0 i
- $\dot{\gamma}$ oko horizontalne osi y_V

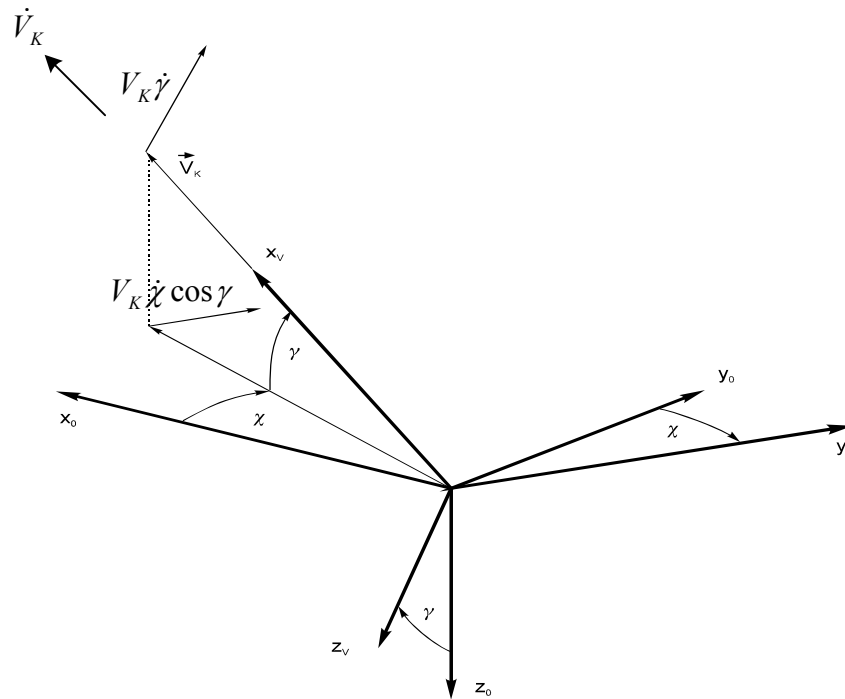
$$\vec{\Omega}_V = \vec{\dot{\chi}} + \vec{\dot{\gamma}},$$

Taj vektor ima komponente duž osa brzinskog k.s.

$$\Omega_V^V = \mathbf{L}_{VO} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\chi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\gamma} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\chi} \sin \gamma \\ \dot{\gamma} \\ \dot{\chi} \cos \gamma \end{bmatrix}.$$

Komponente brzine leta u brzinskom koordinatnom sustavu su $\mathbf{V}_K^V = [V_K \quad 0 \quad 0]^T$, pa su komponente ubrzanja u brzinskom koordinatnom sustavu

$$\mathbf{a}^V = \dot{\mathbf{V}}_K^V + \tilde{\Omega}_V^V \mathbf{V}_K^V = \begin{bmatrix} \dot{V}_K \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\chi} \cos \gamma & \dot{\gamma} \\ \dot{\chi} \cos \gamma & 0 & \dot{\chi} \sin \gamma \\ -\dot{\gamma} & -\dot{\chi} \sin \gamma & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_K \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{V}_K \\ V_K \dot{\chi} \cos \gamma \\ -V_K \dot{\gamma} \end{bmatrix}. \quad 1.1$$



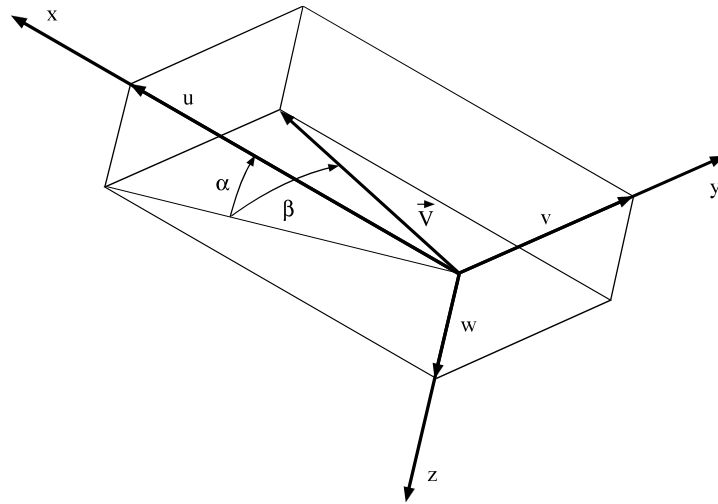
Slika 4. Ubrzanja uzduž osi brzinskoga koordinatnog sustava

Do tih komponenata ubrzanja u brzinskom koordinatnom sustavu mogli smo doći ako tražimo komponente brzine hodografa. Iz mehanike znamo da je hodograf putanja točke čiji je vektor položaja brzina. Znamo da je brzina derivacija vektora položaja. Ako je vektor položaja jednak brzini leta, onda je derivacija tog vektora položaja tj. brzina hodografa jednaka ubrzanju.

1.3.2 Aerodinamički k.s. (A)

Položaj aerodinamičke brzine određujemo u odnosu na letjelicu, jer o njenom intenzitetu i položaju u odnosu na letjelicu ovise aerodinamičke sile i momenti.

Napadni kut α nalazi su u ravnini simetrije (vanjske površine letjelice), od projekcije aerodinamičke brzine na tu ravninu do osi x letjelice u toj ravnini (slika 5), a kut klizanja β je od projekcije aerodinamičke brzine do aerodinamičke brzine. Drugim riječima, kut klizanja je otklon aerodinamičke brzine od ravnine simetrije letjelice (simetrije vanjske površine letjelice). Sa tim kutovima komponente aerodinamičke brzine u koordinatnom sustavu letjelice su



Slika 5. Napadni kut i kut klizanja

$$\begin{aligned}
 u &= V \cos \beta \cos \alpha \\
 v &= V \sin \beta \\
 w &= V \cos \beta \sin \alpha .
 \end{aligned}$$

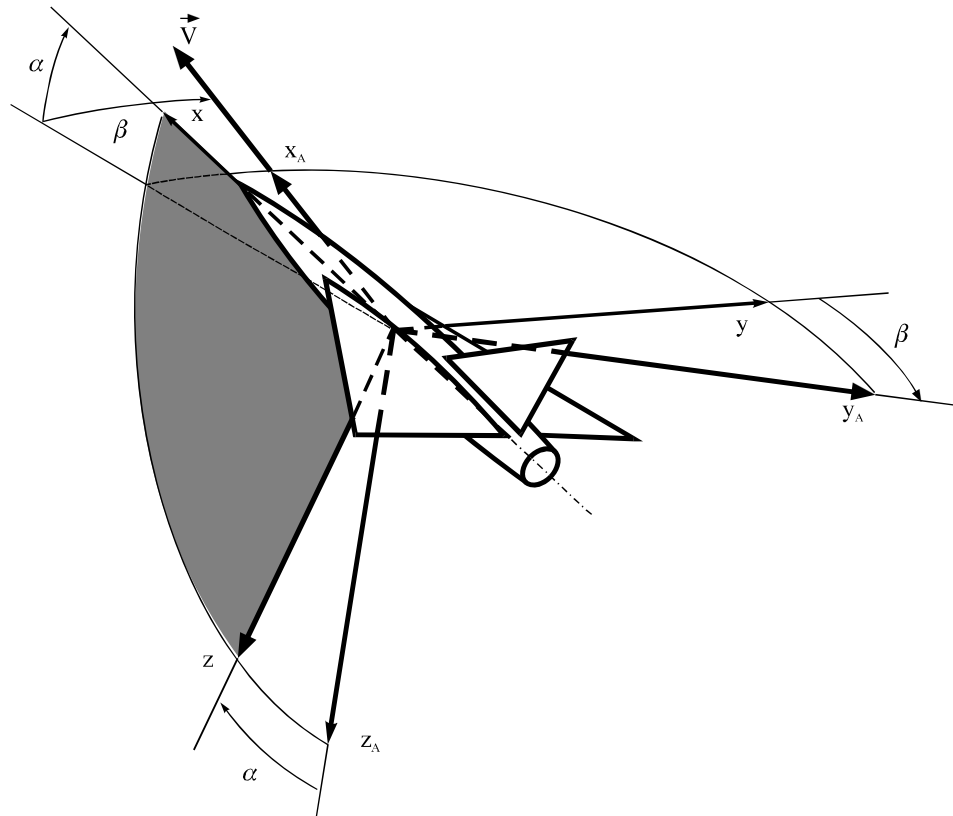
Na osnovu tih jednažbi dobivamo zavisnost napadnog kuta i kuta klizanja od komponenti aerodinamičke brzine:

$$\sin \beta = \frac{v}{V} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{w}{u} .$$

Uočavamo da je napadni kut α pozitivan kad je pozitivna komponenta w , te isto tako da je kut klizanja pozitivan ako je pozitivna komponenta v aerodinamičke brzine. To je najsigurniji način kontrole predznaka napadnog kuta i kuta klizanja. Vrlo često su os letjelice i aerodinamička brzina vrlo blizu, te su napadni kut i kut klizanja mali kutovi. To nam omogućava primjenu pojednostavljenih jednažba

$$v = \beta V \quad w = \alpha V .$$

U aerodinamici zrakoplova upotrebljava se osim k.s. letjelice i aerodinamički k.s. (slika 6). Njegovo ishodište je u središtu mase ili nekoj određenoj točki letjelice, a os x_A je u pravcu i smjeru aerodinamičke brzine. Os z_A je u ravnini simetrije letjelice. Kako je ta os okomita na aerodinamičku brzinu (jer je brzina na osi x_A), ona se nalazi u presjeku dviju ravnina, ravnine okomite na aerodinamičku brzinu i ravnine simetrije letjelice.



Slika 6. Aerodinamičke osi i glavne osi tromosti

Najviše trebamo matricu transformacije u k.s. letjelice iz aerodinamičkog koordinatnog sustava. Ta transformacija predstavlja dvije sukcesivne rotacije: (slika 6):

- prvo, oko osi z_A za kut β i to u negativnom smjeru rotacije (dok os x_A ne uđe u ravninu simetrije letjelice)
- drugo, oko novodobivene osi y , za kut α (dok os x_A ne dođe u položaj osi x).

Prema tome je matrica transformacije

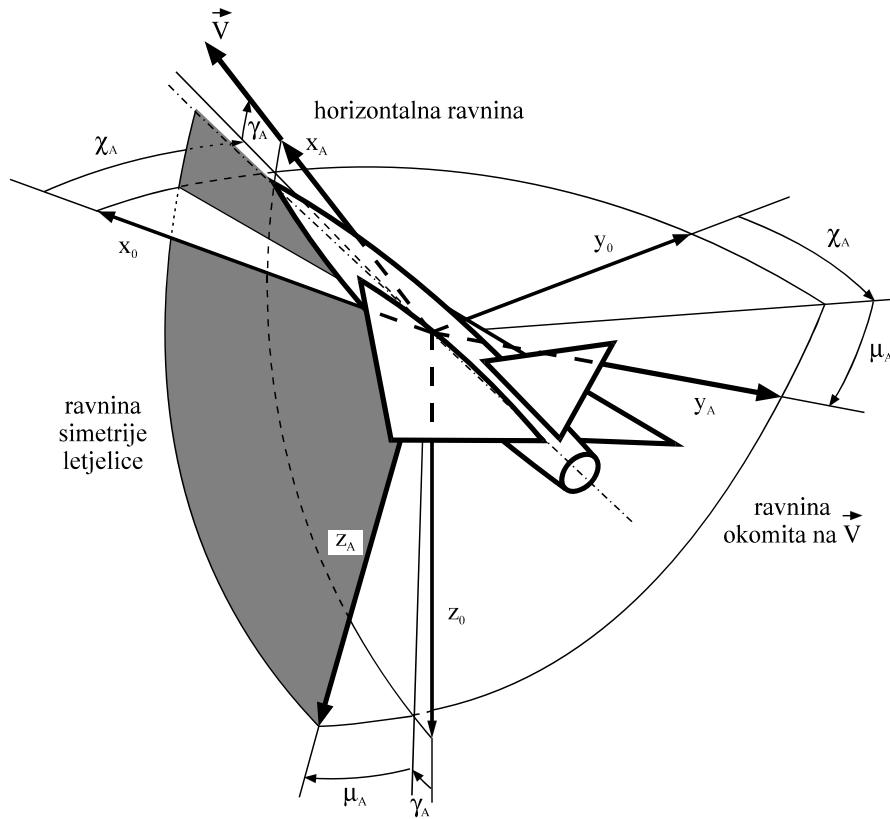
$$\mathbf{L}_{FA} = \mathbf{L}_Y(\alpha) \mathbf{L}_Z(-\beta),$$

što množenjem daje

$$\mathbf{L}_{FA} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta & -\cos \alpha \sin \beta & -\sin \alpha \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ \sin \alpha \cos \beta & -\sin \alpha \sin \beta & \cos \alpha \end{bmatrix}.$$

Ako su kutovi mali, onda je

$$\mathbf{L}_{FA} = \begin{bmatrix} 1 & -\beta & -\alpha \\ \beta & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$



Slika 7. Transformacija iz nošenog koordinatnog sustava
u aerodinamički k.s.

Kada nema vjetra, možemo lako usporediti aerodinamički i brzinski k.s., jer su tada brzina leta i aerodinamička brzina jedan isti vektor, pa oba k.s. imaju istu os x . Osi z_A i z_V se razlikuju. Obje su u ravnini okomitoj na brzinu, ali dok je os z_A u ravnini simetrije letjelice, os z_V je u vertikalnoj ravnini kroz brzinu (slika 6). Između njih je kut μ_A koji se nalazi u ravnini okomitoj na brzinu od osi z_V do osi z_A , mjereno oko brzine. Zato je matrica transformacije iz aerodinamičkog u brzinski k.s.

$$\mathbf{L}_{VA} = \mathbf{L}_X(-\mu_A). \quad 1.2$$

Kada nema vjetra, može se lako prijeći iz koordinatnog sustava letjelice u brzinski kroz aerodinamički k.s.. Matrica transformacije u brzinski iz koordinatnog sustav letjelice jest produkt dviju matrica

$$\mathbf{L}_{VF} = \mathbf{L}_{VA} \mathbf{L}_{AF}, \quad 1.3$$

pa se množenjem matrica $\mathbf{L}_{VA} = \mathbf{L}_X(-\mu_A)$ i $\mathbf{L}_{AF} = \mathbf{L}_Z(\beta)\mathbf{L}_Y(-\alpha)$, dobiva tražena matrica transformacije

$$\mathbf{L}_{VF} = \mathbf{L}_X(-\mu_A)\mathbf{L}_Z(\beta)\mathbf{L}_Y(-\alpha) \quad 1.4$$

koja vrijedi samo u slučaju ako nema vjetra. No tada vrijedi i $\beta = 0$ te je matrica transformacije iz koordinatnog sustava letjelice u brzinski koordinatni sustav

$$\mathbf{L}_{VF} = \mathbf{L}_X(-\mu_A)\mathbf{L}_Y(-\alpha). \quad 1.5$$

1.3.3 Stvarna brzina i mjerenje brzine

Stvarna brzina, brzina letjelice u odnosu na zrak, s kojom će se provoditi sve analize performansi u ovom tekstu nije poznata pilotu tijekom leta. Mjerenje brzine zasniva se na mjerenju tlaka, točnije razlike zaustavnog i statičkog tlaka pomoću Pitot cijevi. Primjenom Bernulijeve jednadžbe za izmjerenu vrijednost $p_0 - p$ razlike zaustavnog i statičkog tlaka može se odrediti stvarna brzina letjelice u odnosu na zrak

$$V = \sqrt{\frac{2(p_0 - p)}{\rho}}.$$

No mjerenje gustoće zraka nije jednostavno. Za zrakoplove malih brzina indikatori su kalibrirani sa standardnom vrijednošću gustoće zraka ρ_s na razini mora. Tada se brzina

$$V_e = \sqrt{\frac{2(p_0 - p)}{\rho_s}}$$

naziva ekvivalentna brzina. Između stvarne i ekvivalentne brzine postoji veza

$$V_e = V \cdot \sqrt{\frac{\rho}{\rho_s}}.$$

Ekvivalentna brzina ne uzima u obzir stlačivost te je primjenjiva samo za male brzine leta. Ekvivalentna brzina V_e jednaka je stvarnoj brzini V kada zrakoplov leti na razini mora u uvjetima standardne atmosfere. Za pilote je ekvivalentna brzina vrlo korisna jer predstavlja parametar potreban za upravljanje letjelicom bez obzira na atmosferske uvjete.

Kada je utjecaj slačivosti potrebno uzeti u obzir ($Ma > 0.3$) nije primjenjiva Bernulijeva jednadžba. Za stlačivo, izentropsko strujanje vrijedi

$$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}.$$

Za mjerenje Machovog broja (tzv. Mach metar) dozvučne struje temeljem gornje relacije uz zasebna mjerenja p_0 i p primjenjuje se formula

$$M = \left\{ \frac{2}{\gamma - 1} \left[\left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}} - 1 \right] \right\}^{\frac{1}{2}},$$

te je stvarna brzina $V = M \cdot a$. Za mjerenje stvarne brzine potrebna je informacija o a brzini zvuka, odnosno temperature koju je na letjelici teško odrediti. Za zrakoplove većih dozvučnih brzina brzinomjeri se kalibriraju sa vrijednostima a_s brzine zvuka i p_s tlaka za standardnu atmosferu. Tada se brzina određuje pomoću $p_0 - p$ razlike zaustavnog i statičkog tlaka

$$V_c = \left\{ \frac{2a_s^2}{\gamma - 1} \left[\left(\frac{p_0 - p}{p_s} + 1 \right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}} - 1 \right] \right\}^{\frac{1}{2}}$$

i naziva se kalibrirana brzina. Kalibrirana brzina V_c predstavlja ekvivalentnu brzinu korigiranu za utjecaj stlačivosti. Može se također pokazati direktna veza između V stvarne brzine i V_c kalibrirane brzine

$$V_c = a \left[5 \left\{ \frac{p}{p_s} \left[\left(1 + \frac{M^2}{5 \cdot T/T_s} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} - 1 \right] + 1 \right\}^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}} - 1 \right]^{1/2},$$

pri čemu su p_s i T_s tlak, odnosno temperatura u standardnim uvjetima za visinu na razini mora, a $M = V/a$ stvarni Machov broj.

Za nadzvučne brzine koristi se Mach metar kao osnovni instrument za brzinu no tada je potrebno primijeniti tzv. formulu Rayleighove Pitot cijevi.

Kao i svaki instrument tako i brzinomjer ima svoju mehaničku grešku - instrumentalnu grešku. Pored toga položaj Pitot cijevi i otvora za mjerenje statičkog tlaka ima značajan utjecaj na izmjerenu vrijednost brzine. Ta greška naziva se instalacijska ili položajna greška.

Kalibrirana brzina koja uključuje instrumentalnu i položajnu grešku naziva se instrumentalna brzina V_i i specifična je karakteristika svakog zrakoplova. Instrumentalna brzina je brzina koju pilot može očitati sa brzinomjera.

2 TEMELJI PROJEKTNE AERODINAMIKE

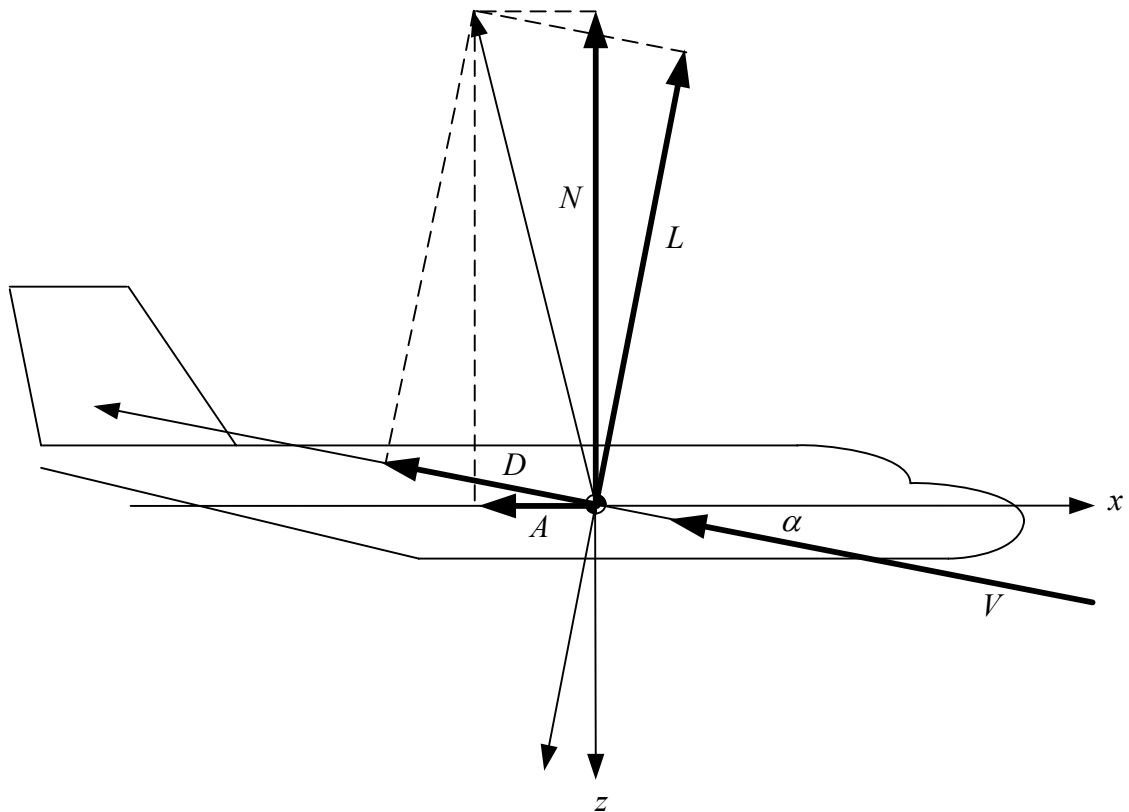
2.1 Aerodinamički koeficijenti zrakoplova

Kada su u pitanju aerodinamička sila ili aerodinamički moment zrakoplova upotrebljavamo dva koordinatna sustava:

- koordinatni sustav letjelice (F) i
- aerodinamički koordinatni sustav (A).

Promatrajmo ravan simetrije zrakoplova i u njoj koordinatni sustav (F) glavnih osa tromosti zrakoplova i koordinatni sustav (A) koji ima x_A os duž brzine leta, a z_A os okomito na brzinu na dolje na slici 2-6. Napomenimo da je ishodište u središtu mase zrakoplova. Sustav (F) zaokrenut je za pozitivan kut α u odnosu na sustav (A).

A i N su komponente aerodinamičke sile duž osi tromosti zrakoplova, a D i L duž i okomito na brzinu leta. Aerodinamički moment u ovom slučaju je okomit na ravan simetrije zrakoplova. Za zrakoplov u svim uvjetima definira se referentna sila koja predstavlja produkt referentnog tlaka i referentne površine. Referentni tlak je uvijek isti. To je dinamički tlak izračunan s brzinom leta (kad nema vjetra), odnosno s brzinom optjecanja koja je po intenzitetu jednaka brzini leta ali je suprotnog smjera $q_\infty = \frac{\rho V^2}{2}$.



Slika 1

Za zrakoplove referentna površina je površina krila s nepostojećim dijelom kroz tijelo zrakoplova. To znači da je referentna sila $\frac{\rho V^2}{2} S_{ref}$.

Tablica 1

Koeficijent aksijalne sile	$C_A = \frac{A}{q_\infty S_{ref}}$	Koeficijent otpora	$C_D = \frac{D}{q_\infty S_{ref}}$
Normalne sile	$C_N = \frac{N}{q_\infty S_{ref}}$	Koeficijent uzgona	$C_L = \frac{L}{q_\infty S_{ref}}$
Moment propinjanja	$C_m = \frac{M}{q_\infty S_{ref} c_A}$		

Kao što vidimo u tablici 1 za propinjanje referentna duljina je aerodinamička tetiva krila. Svi aerodinamički koeficijenti u općem slučaju su funkcije:

- aerodinamičkih parametara:

$$\text{Machova broja } Ma = \frac{V}{a} \quad \text{i} \quad \text{Reynoldsova broja } Re = \frac{V\ell}{\nu}$$

gdje je ℓ duljina opstrujavanja, a ν je kinematički koeficijent viskoznosti zraka,

- kutova položaja aerodinamičke brzine u odnosu na letjelicu

$$\alpha \text{ i } \beta;$$

- bezdimenzijskih kutnih brzina aerodinamičke brzine u odnosu na letjelicu

$$\dot{\alpha}^* = \frac{\dot{\alpha}}{V_\infty/c_A} \quad \dot{\beta}^* = \frac{\dot{\beta}}{V_\infty/b};$$

- bezdimenzijskih kutnih brzina letjelice

$$p^* = \frac{p}{V_\infty/b} \quad q^* = \frac{q}{V_\infty/c_A} \quad r^* = \frac{r}{V_\infty/b};$$

2

- tklona upravljačkih površina

δ_ℓ otklon krilaca (aileron)

δ_m otklon kormila visine oko osi y letjelice (elevator)

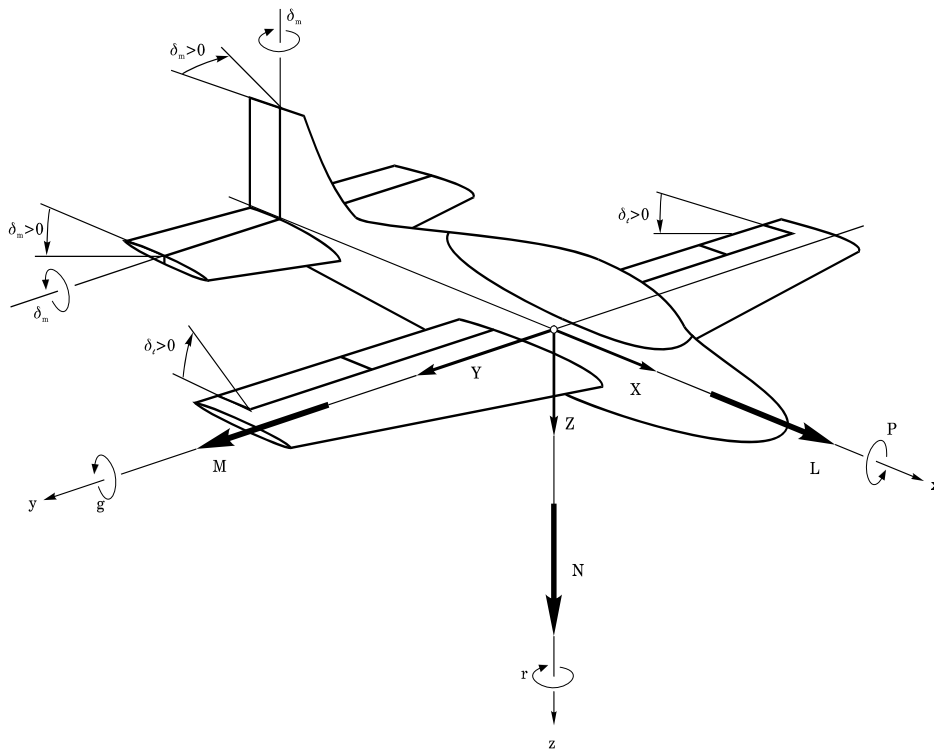
δ_n otklon kormila pravca oko osi z letjelice (ruđer)

- otklona

δ_f otklon zakrilca (flaps)

otklon pretkrilca

zračnih kočnica (spoiler) itd.



Slika 2. Pozitivni smjerovi rotacija, momenata i otklona upravljačkih površina

Određivanje aerodinamičkih koeficijenata ovisno o parametrima i konfiguraciji letjelice zadaća je aerodinamike. Ona se rješava na različite načine.

Teoretski pristup na temelju mehanike fluida vodi nas na numeričko rješavanje sustava parcijalnih diferencijalnih jednadžbi sa zadanim rubnim uvjetima na letjelici i u beskonačnosti, koji rješavamo numeričkim metodama na računalima (CFD).

Teoretska aerodinamika rješava analitički iz određena, fizički opravdana pojednostavljenja te iste jednadžbe i tako dobivamo približne, ali vrlo korisne ovisnost aerodinamičkih koeficijenata o parametrima letjelice.

Eksperimentalno aerodinamički koeficijenti se određuju u zračnom tunelu.

Najtočnije vrijednosti aerodinamičkih koeficijenata dobivamo mjerenjem u letu zrakoplova. Treba reći da se koeficijenti ne mogu mjeriti već se mjere druge fizičke veličine, a iz tih mjerenih podataka se određuju aerodinamički koeficijenti.

Metode “projektne aerodinamike” predstavljaju kombinaciju drugog i trećeg načina određivanja aerodinamičkih koeficijenata.

2.2 Veze između aerodinamičkih koeficijenata

Sa slike vidimo da je

$$\begin{aligned} A &= D \cos \alpha - L \sin \alpha \\ N &= L \cos \alpha + D \sin \alpha \end{aligned}$$

Poslije dijeljenja gornje jednadžbe transformacija s tom silom dobivamo:

$$\begin{aligned} C_A &= C_D \cos \alpha - C_L \sin \alpha \\ C_N &= C_L \cos \alpha + C_D \sin \alpha \end{aligned}$$

Ove iste jednadžbe možemo napisati i u obrnutom obliku

$$\begin{aligned} C_D &= C_A \cos \alpha + C_N \sin \alpha \\ C_L &= C_N \cos \alpha - C_A \sin \alpha \end{aligned}$$

Derivacijom druge jednadžbe po napadnom kutu dobivamo:

$$\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} = \frac{\partial C_N}{\partial \alpha} \cos \alpha - C_N \sin \alpha - \frac{\partial C_A}{\partial \alpha} \sin \alpha - C_A \cos \alpha.$$

Za $\alpha = 0$ dobivamo vezu

$$\left(\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \right)_0 = \left(\frac{\partial C_N}{\partial \alpha} \right)_0 - C_{A0}.$$

Kako je $C_A \approx C_{A0} = C_{D0}$, ovu jednadžbu možemo napisati u obliku

$$(C_{L\alpha})_0 = (C_{N\alpha})_0 - C_{D0}.$$

Iz toga vidimo da je uvijek $(C_{L\alpha})_0$ manje od $(C_{N\alpha})_0$ za vrijednost C_{D0} . U slučaju zrakoplova treba razlikovati $(C_{L\alpha})_0$ od $(C_{N\alpha})_0$, jer C_{D0} nije zanemarivo u odnosu na $(C_{L\alpha})_0$ ili $(C_{N\alpha})_0$. No, ta razlika nije velika.

2.3 Noseća površina

2.3.1 Geometrijske karakteristike

Koordinatni sustav noseće površine ima ishodište u vrhu korijenske tetive, os x duž korijenske tetive, os y je okomito na ravninu simetrije noseće površine, a os z čini desni trijedrar (u ravnini simetrije krila).

Aerodinamička apscisa je srednja udaljenost napadnog ruba krila od os y

$$x_A = \frac{2}{S} \int_0^{b/2} x_0(y) \cdot c(y) \cdot dy,$$

gdje je $x_0(y)$ jednadžba napadnog ruba krila. Za trapeznu noseću površinu po toj jednadžbi nalazi se aerodinamička apscisa na udaljenosti od vrha korijenske tetive :

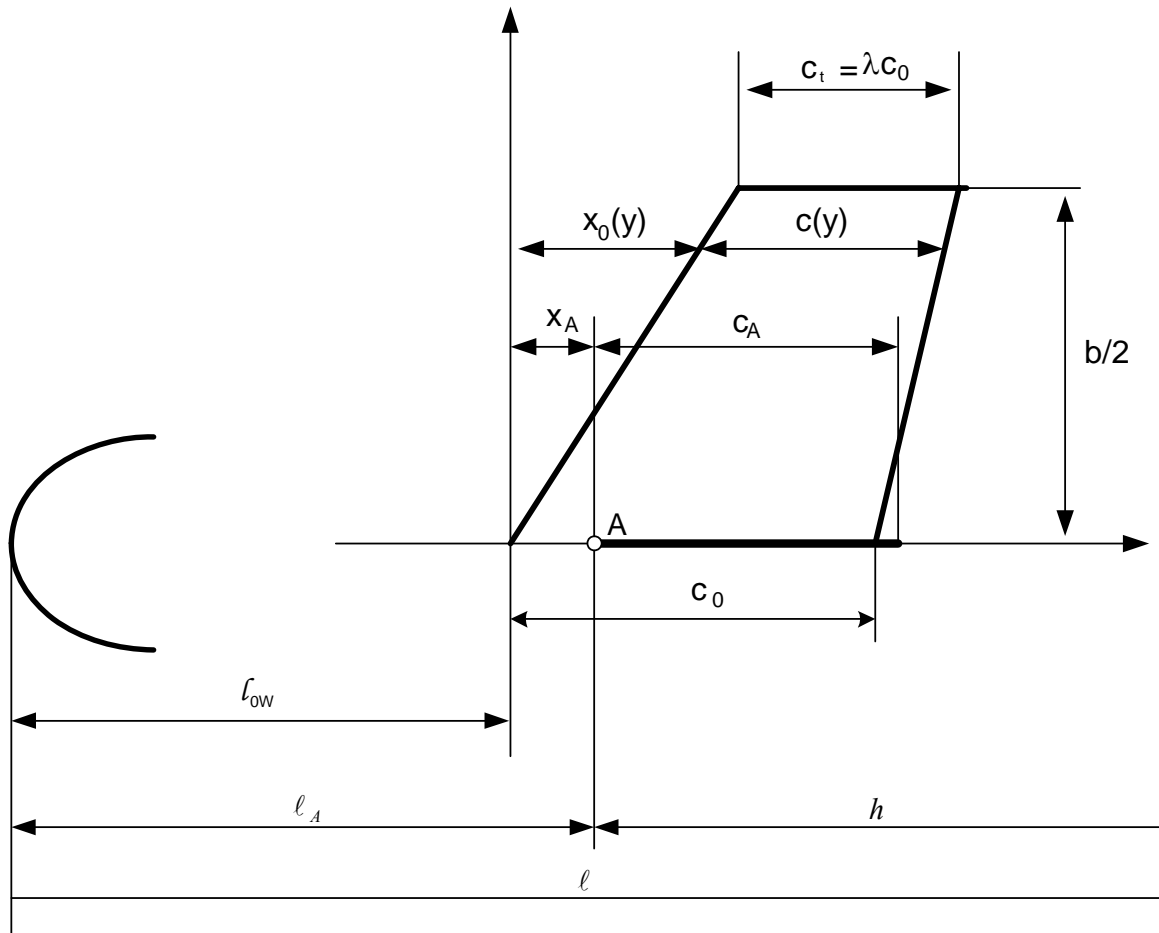
$$x_A = \frac{1 + 2\lambda}{1 + \lambda} \cdot \frac{b \tan \Lambda_{LE}}{6}.$$

Aerodinamička tetiva noseće površine dana je jednadžbom

$$c_A = \frac{2}{S} \int_0^{b/2} [c(y)]^2 dy.$$

Za trapeznu noseću površinu po toj jednadžbi aerodinamička tetiva se izračunava prema obrascu :

$$c_A = \frac{2}{3} c_r \left(1 + \frac{\lambda^2}{1 + \lambda} \right).$$



Slika 3. Aerodinamička tetiva i aerodinamičko ishodište

Udaljenosti svih točaka u pravcu osi x letjelice označavat ćemo sa ℓ ako ih mjerimo od vrha zrakoplova. Međutim, u zrakoplovstvu se često udaljenosti mjere od aerodinamičke apscise krila, gdje se nalazi početak aerodinamičke tetive. Tu točku nazivamo *aerodinamičko ishodište*. Ako je početak krila udaljen ℓ_{0W} od vrha zrakoplova, onda je ℓ_A udaljenost aerodinamičkog ishodišta od vrha $\ell_A = \ell_{0W} + x_A$. Kada udaljenosti točaka mjerimo od aerodinamičkog ishodišta, označavamo ih sa h . Tako na primjer središte mase je udaljeno od vrha letjelice ℓ_m , a od aerodinamičkog ishodišta h_m . Treba li prelaziti s jedne na drugu udaljenost, onda koristimo vezu

$$\ell = \ell_A + h.$$

Bez obzira na to odakle mjerimo udaljenosti uvijek ih izražavamo u multiplima aerodinamičke tetive krila c_A , koja je referentna duljina u svim problemima propinjanja.

Uvest ćemo oznake

$$\bar{\ell} = \frac{\ell}{c_A} \quad \text{i} \quad \bar{h} = \frac{h}{c_A}.$$

2.3.2 Veza između uzgona i normalne sile

Podsjetimo se da je uzgon letjelice komponenta aerodinamičke sile koja je u ravnini simetrije okomita na projekciju aerodinamičke brzine na ravninu simetrije letjelice, a da je normalna sila okomita na os x tromosti u istoj ravnini simetrije letjelice. Vezu između gradijenata uzgona i normalne sile vidjeli smo na kraju prethodnog odjeljka.

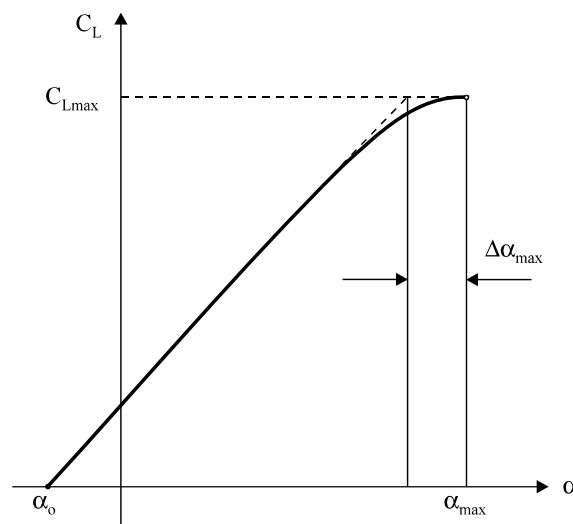
$$(C_{L\alpha})_0 = (C_{N\alpha})_0 - C_{D0}.$$

Ova jednadžba vrijedi za zrakoplov u cjelini, ali i za krilo i horizontalni rep. Krilo, horizontalni rep, vertikalni rep i canari zajednički nazivamo *noseće površine*. Napadni kut noseće površine α mjerimo od aerodinamičke brzine do korijenske tetive. Kada je u pitanju noseća površina, treba uzeti u obzir još tri činjenice:

- **Prvo**, za noseću površinu C_{D0} je vrlo malo u odnosu na $(C_{L\alpha})_0$ ili $(C_{N\alpha})_0$ (manje od 1%), pa u granicama točnosti, s kojom radimo, možemo C_{D0} u gornjoj jednadžbi zanemariti te je

$$(C_{L\alpha})_0 = (C_{N\alpha})_0.$$

- **Drugo**, tipična ovisnost koeficijenta uzgona krila o napadnom kutu prikazana je na slici 3.



Slika 4. Ovisnost sile uzgona krila o napadnom kutu

Na većem dijelu, gdje napadni kut nije mali (npr. do $\approx 20^\circ$), ona se može predstaviti linearnom zavisnošću

$$C_L(\alpha) = C_{L\alpha}(\alpha - \alpha_{OL}),$$

u kojoj je $C_{L\alpha}$ konstantno u odnosu na napadni kut (ali je ovisno o Machovu broju). To znači da je na linearnom dijelu $C_{L\alpha} = (C_{L\alpha})_0$.

Zato je opravdano ne praviti razliku između $C_{L\alpha}$ i $C_{N\alpha}$ noseće površine.

- Treće, iz jednadžbe

$$C_L = C_N \cos \alpha - C_A \sin \alpha$$

za $\alpha = 0$ slijedi da je

$$C_{L0} = C_{N0}.$$

Na temelju ovih činjenica slijedi zaključak da na linearnom području, imaju sile uzgona i normalna sila isti gradijent i istu vrijednost pri nultom napadnom kutu. Drugim riječima, na linearnom području sila uzgona je brojno jednaka normalnoj sili i obje imaju istu ovisnost o napadnom kutu (slika 4).

$$C_N(\alpha) = C_{N\alpha}(\alpha - \alpha_0) \equiv C_L(\alpha) = C_{L\alpha}(\alpha - \alpha_0),$$

ali ne i isti pravac. U ovim jednadžbama je $\alpha_0 < 0$, što znači da je uzgon (ili normalna sila) jednak nuli kada je napadni kut $\alpha = \alpha_0 < 0$, tj. kada je os x krila ispod brzine (točnije ispod aerodinamičke projekcije brzine na ravninu simetrije krila). Taj negativni napadni kut α_0 pri kome je uzgon (normalna sila) jednak nuli nazivamo “kut nultog uzgona”. Ako je u letu napadni kut krila jednak nuli, tj. aerodinamička brzina je u pravcu osi x krila, uzgon, pa i normalna sila, nisu jednaki nuli, već je to neka određena pozitivna vrijednost koeficijenta uzgona (ili normalne sile) $C_{L\alpha} \cdot (0 - \alpha_0) = C_{L\alpha} |\alpha_0|$. Ako noseća površina nije uvijena (tj. ako su tetive profila u svim presjecima paralelne) onda je kut nultog uzgona samog krila zapravo jednak kutu nultog uzgona profila koji je značajka profila.

Osim koeficijenta uzgona noseće površine C_L , koristimo i koeficijent uzgona profila koji označavamo sa c_ℓ , što ne treba dovoditi u vezu s koeficijentom momenta valjanja koga označavamo s velikim slovom C_ℓ , ali s istim indeksom.

2.3.3 Gradijent normalne sile

Dobru procjenu gradijenta koeficijenta uzgona u subsonici sve do kritičnog Machovog broja, možemo dobiti pomoću jednadžbe koja daje količnik gradijenta uzgona krila (ili gradijent normalne sile) prema vitkosti krila:

$$\left(\frac{C_{L\alpha}}{A}\right)_w = \frac{2\pi}{2 + \sqrt{4 + \left(\frac{2\pi A}{c_{l\alpha}}\right)^2 \left(1 + \frac{tg^2 \Lambda_t}{1 - Ma^2}\right)}} = \left(\frac{C_{N\alpha}}{A}\right)_w$$

A je vitkost noseće površine, Λ_t je strijela geometrijskog mjesta najveće debljine, a $c_{l\alpha}$ gradijent uzgona profila. Ta jednadžba je dobivena na temelju teorije vrtloga, uzimajući u obzir utjecaj stlačivosti i korekcije prema eksperimentalnim mjerenjima.

Prema lit. 8 u transsonici i supersonici, količnik gradijenta uzgona (ili gradijenta normalne sile) i vitkosti, funkcija je triju parametara :

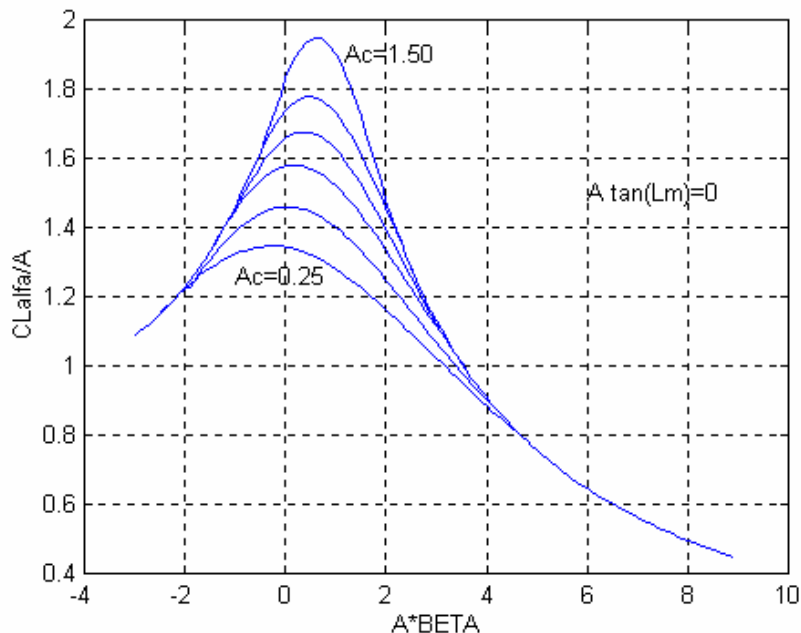
$$\frac{C_{N\alpha}}{A} = f(A_m, A_C, A\beta),$$

Gdje su

$$A_m = A \tan \Lambda_m \qquad \beta = \begin{cases} -\sqrt{1 - Ma^2} & Ma < 1 \\ \sqrt{Ma^2 - 1} & Ma > 1 \end{cases}$$

$$A_C = A^3 \sqrt{\bar{t}}$$

U tim parametrima je $\bar{t} = t/c$ srednja relativna debljina noseće površine, Λ_m je kut strijele geometrijskog mjesta srednjih točaka tetiva. Na slikama od 5 do 8, prikazana su četiri dijagrama za vrijednosti parametra $A_m = 0, 1, 2$ i 3 prema [15]. Na tim dijagramima je Λ_m označeno sa Lm , a β sa $BETA$.



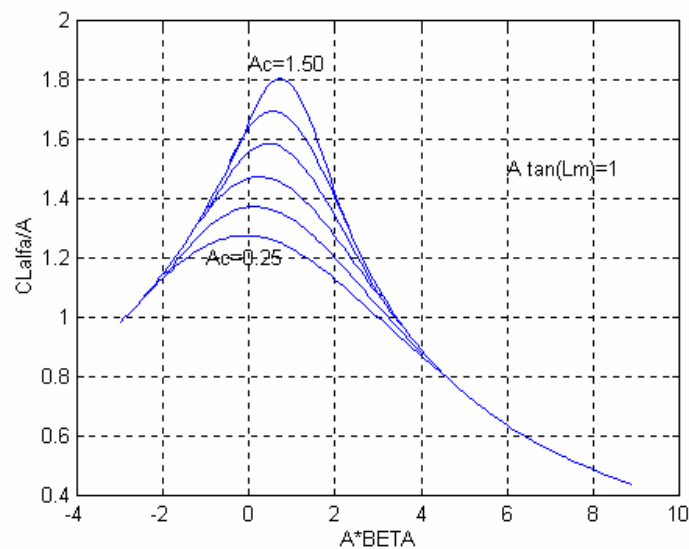
Slika 5. Krivulje $\frac{C_{N\alpha}}{A} = f(A_C, A\beta)$ za slučaj $A_m = 0$

U literaturi [20] preporučuje se povećati vitkost krila kako bi se uzeli u obzir dodaci na kraju krila koji mijenjaju raspored vrtloga na krilu. Za kraj krila u obliku “endplate” preporučuje se

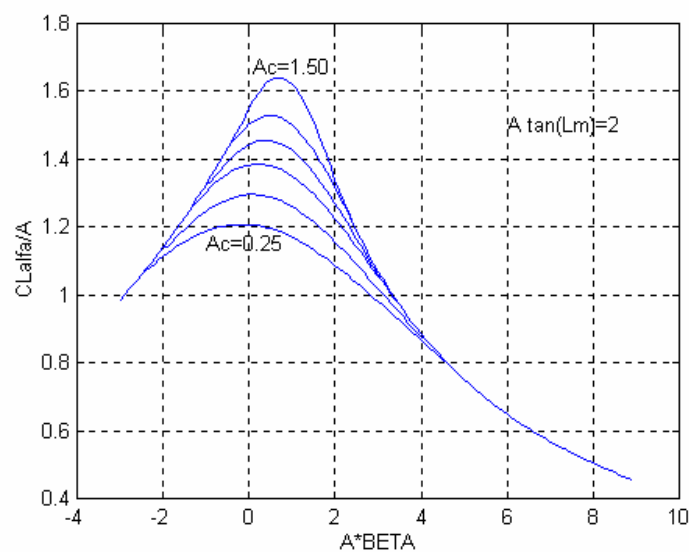
$$A_{\text{effective}} = A \left(1 + 1.9 \frac{h}{b} \right);$$

h je visina “endplate”, a za kraj krila u obliku “winglet”

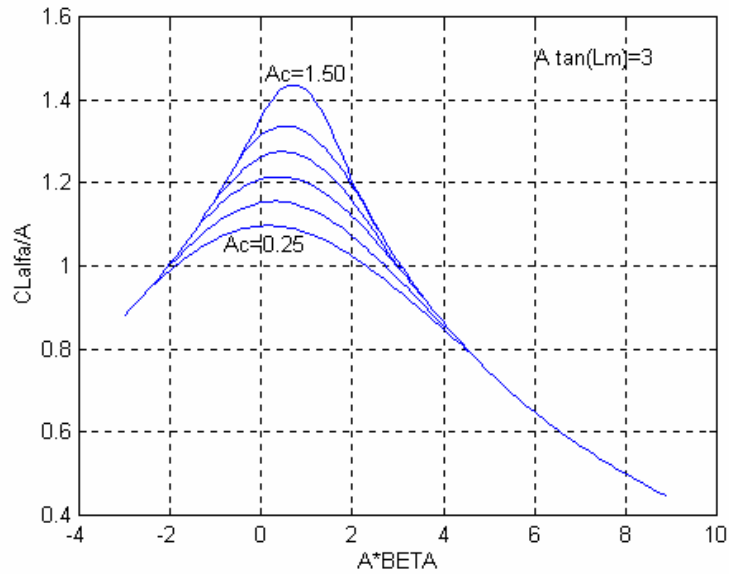
$$A_{\text{effective}} = 1.2 A .$$



Slika 6. Krivulje $\frac{C_{N\alpha}}{A} = f(A_c, A\beta)$ za slučaj $A_m = 1$



Slika 7. Krivulje $\frac{C_{N\alpha}}{A} = f(A_c, A\beta)$ za slučaj $A_m = 2$



Slika 8. Krivulje $\frac{C_{N\alpha}}{A} = f(A_c, A\beta)$ za slučaj $A_m = 3$

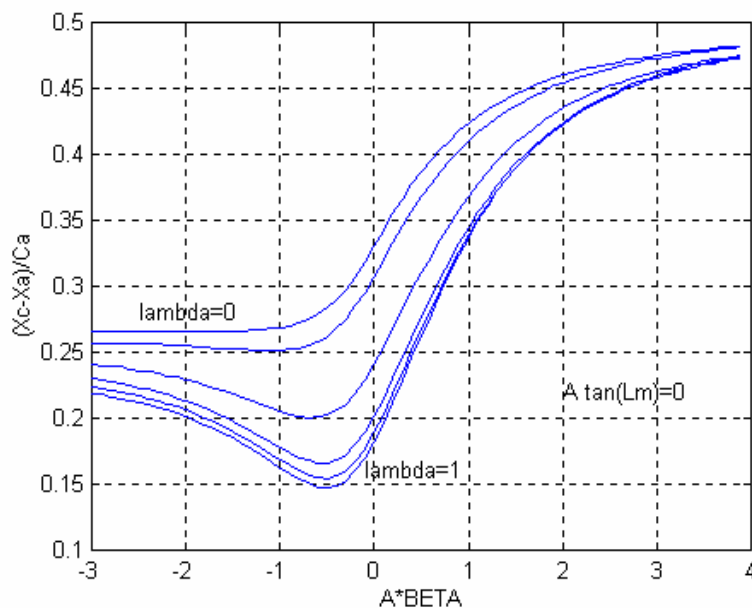
Postoji i drugi postupak tzv DATCOM (lit. 16) koji je primijenjen u lit.12.

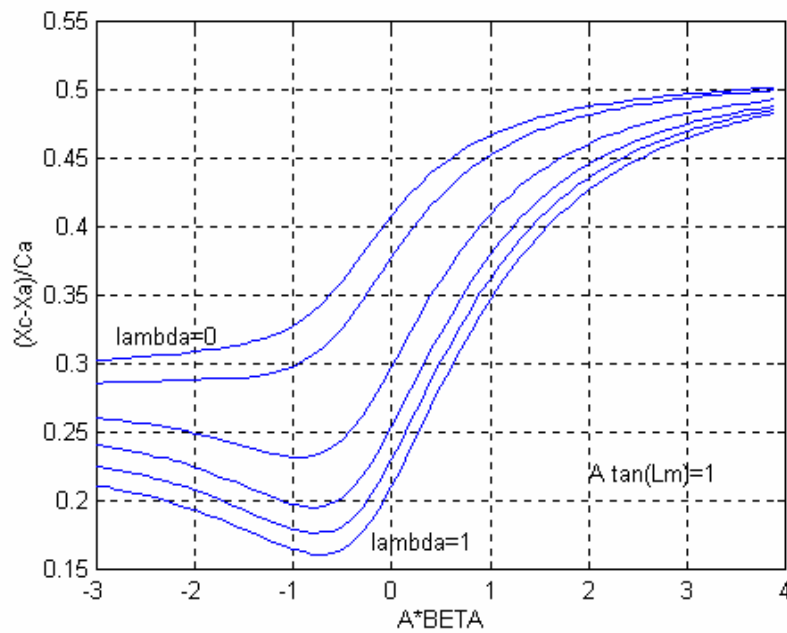
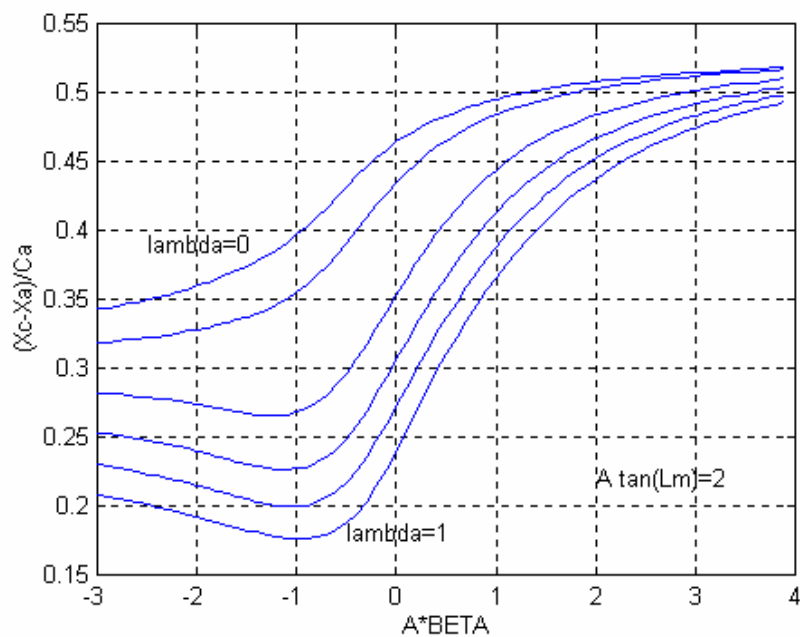
2.3.4 Položaj hvatišta normalne sile

Položaj napadne točke normalne sile krila određen je također trima parametrima:

$$\bar{h}_c = f(A_m, \lambda, A\beta).$$

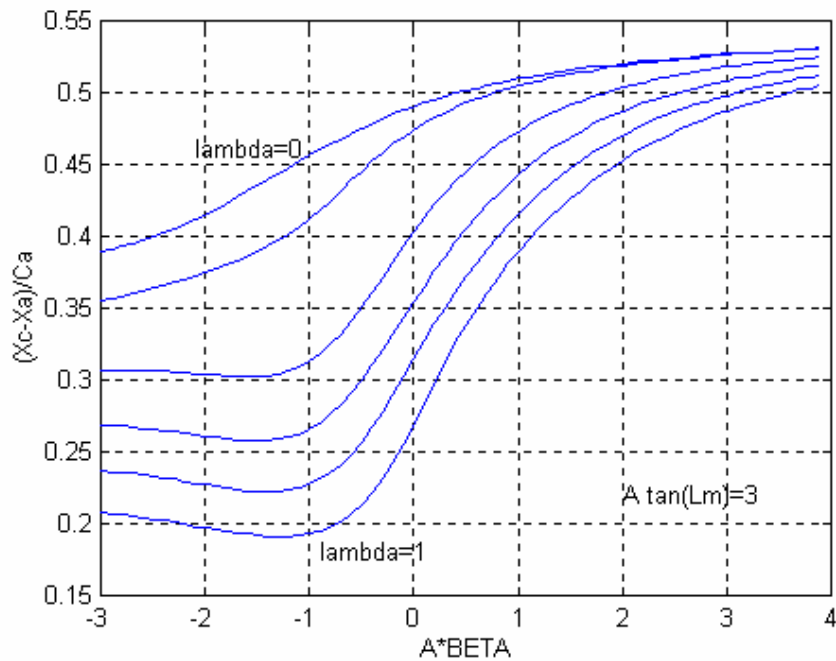
Za vrijednosti parametra $A_m = 0, 1, 2$ i 3 napravljena su četiri dijagrama na 9 do 12 prema [15].



Slika 9. Krivulje $\bar{h}_c = f(\lambda, A\beta)$ za slučaj $A_m = 0$ Slika 10. Krivulje $\bar{h}_c = f(\lambda, A\beta)$ za slučaj $A_m = 1$ Slika 11. Krivulje $\bar{h}_c = f(\lambda, A\beta)$ za slučaj $A_m = 2$

Svaki dijagram je izrađen za jednu vrijednost parametra A_m , a na jednom dijagramu predočene su krivulje za šest raznih vrijednosti parametra suženja krila λ . Na horizontalnoj

osi je parametar $A\beta$, a na vertikalnoj osi je \bar{h}_c udaljenost hvatišta normalne sile od aerodinamičkog ishodišta krila podijeljena s aerodinamičkom tetivom.

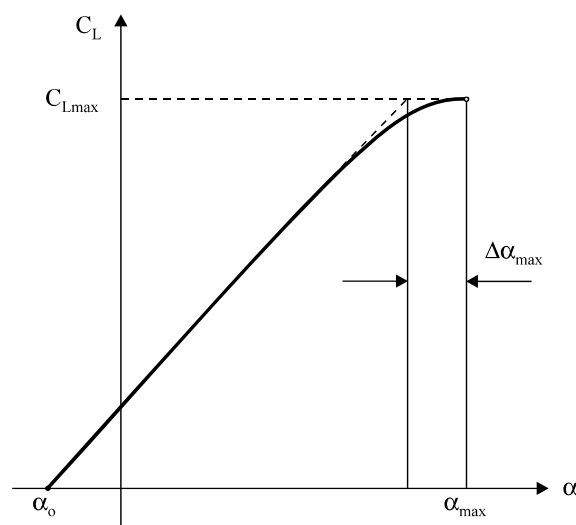


Slika 12. Krivulje $\bar{h}_c = f(\lambda, A\beta)$ za slučaj $A_m = 3$

Podatke o hvatištu normalne sile daje i postupak tzv DATCOM (lit. 16).

2.3.5 Maksimalni uzgon

Pri polijetanju (“take off”), i slijetanju (“landing”) zrakoplova veliku ulogu ima maksimalna vrijednost sile uzgona krila. Da ne bi smo povećavali nepotrebno površinu krila i kvadrat brzine, treba iskoristiti maksimalni koeficijent uzgona krila.



Slika 13. Maksimalni uzgon krila $C_{L\max}$ i napadni kut pri maksimalnom uzgonu α_{\max}

Zato treba znati taj maksimalni koeficijent uzgona $C_{L\max}$ i vrijednost α_{\max} pri kojoj je maksimalni uzgon. Poslije te vrijednosti α_{\max} nastaje naglo opadanje koeficijenta uzgona ("stall"). Treba napomenuti da se ta vrijednost maksimalnog koeficijenta uzgona teško određuje ne samo teoretski već i eksperimentalno u aerodinamičkom tunelu.

Pri velikim vrijednostima napadnog kuta, na prednjem rubu krila pojavljuju se vrtlozi koji su posebno izraženi kod strelastih krila male vitkosti. Pod utjecajem tih vrtloga odvaja se zračna struja na početku gornjake profila. To odvajanje struje od krila smanjuje uzgon, te on nije više linearno proporcionalan napadnom kutu. Odvajanje se zbiva na početnom dijelu gornjake, pa stoga ova pojava ovisi o nagibu tangente na početnom dijelu gornjake profila. Nagib tangente na tom mjestu u direktno je vezi s parametrom Δ_y , koji predstavlja prirast ordinate gornjake profila od apscise $0.0015 \cdot c$ do apscise $0.06 \cdot c$, a koji se također mjeri u postocima tetive:

$$\Delta_y = 100 \frac{\Delta y}{c}$$

Taj parametar uobičajeno ima vrijednosti 26 za profile s četiri i pet znamenki, za seriju profila 64 ima vrijednost 21.3, a za seriju 65 ima vrijednost 19.3.

Koeficijent maksimalnog uzgona krila $C_{L\max}$ i napadnog kuta α_{\max} ovise osim o vrijednosti Δ_y i o obliku krila (vitkost krila A , suženje krila λ , strijele napadnog ruba krila Λ_{LE}) i o relativnoj debljini krila te konačno i o Machovu broju. U prilogu je empirijski postupak za procjenu maksimalnog koeficijenta uzgona krila $C_{L\max}$ i napadnog kuta α_{\max} . Prema tom postupku možemo reći da ove vrijednosti su funkcije parametara:

$$C_{L\max} = f_L(\Delta_y, A, \lambda, \Lambda_{LE}, t^*, Ma)$$

$$\alpha_{\max} = f_\alpha(\Delta_y, A, \lambda, \Lambda_{LE}, t^*, Ma)$$

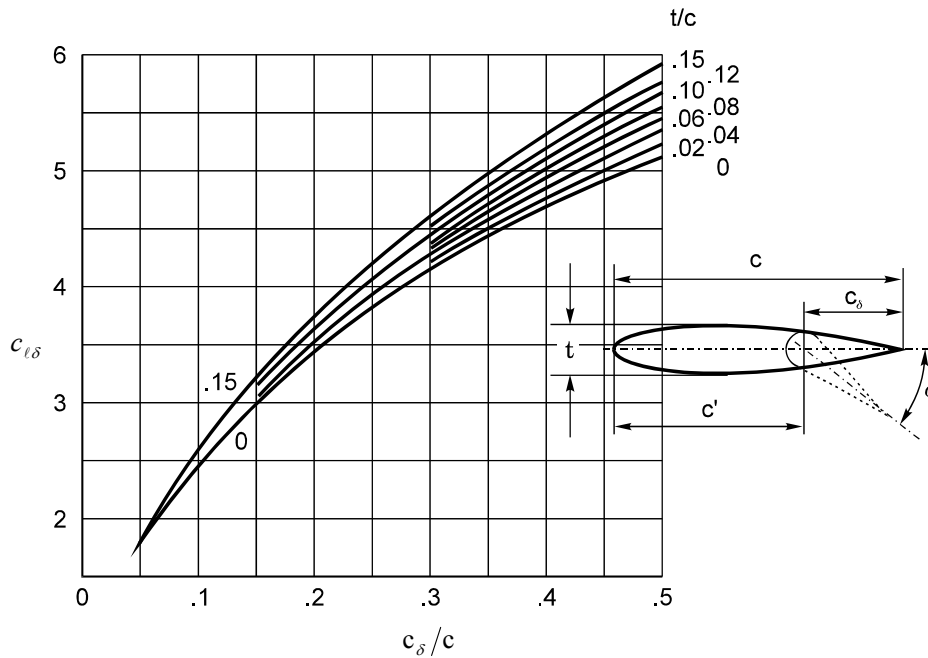
2.3.6 Gradjent normalne sile po otklonu upravljačke površine

Upravljačke površine mogu biti dio noseće površine ili cijela noseća površina koja mijenja kut otklona u odnosu na letjelicu. U subsonici je obično upravljačka površina dio noseće površine ili stabilizatora, jer se poremećaj njenog otklona prenosi uz struju na cijelu površinu, a moment oko osi otklona je proporcionalan samo otklonjenoj površini. To znači da nije potrebno mnogo snage za pokretanje tih upravljačkih površine, a učinkovitost je velika. U supersonici da bi se postigla dovoljna učinkovitost mora se otkloniti cijela noseća površina ili stabilizator, jer se poremećaji otklona ne prenose uz struju. U prvom slučaju, kada je

upravljačka površina dio noseće površine, onda se u subsonici gradijent $C_{N\delta}$ po otklonu upravljačke površine (kormilo visine, kormilo pravca ili kormila valjanja subsoničnih letjelica) može procijeniti na temelju gradijenta profila $c_{l\delta}$ prema jednadžbi

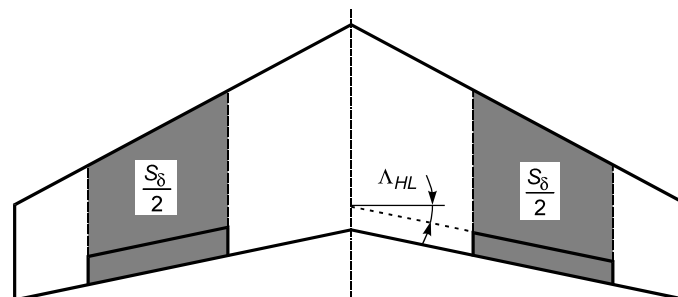
$$C_{N\delta} = 0.9 \cdot \frac{S_\delta}{S_{ref}} \left(\frac{C_{L\alpha}}{c_{l\alpha}} \right) \cdot c_{l\delta} \cdot \cos \Lambda_{HL} \cdot K_f,$$

gdje je $c_{l\alpha}$ gradijent uzgona profila, a $C_{L\alpha}$ gradijent uzgona krila.



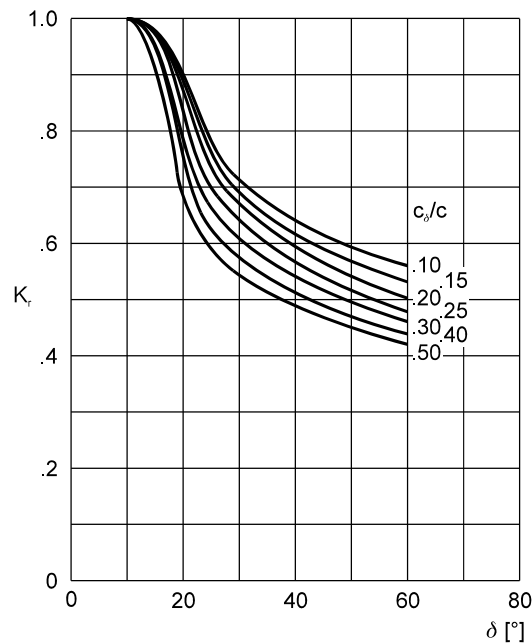
Slika 14. Krivulje $c_{l\delta} = f\left(\frac{c_{\delta}}{c}, \frac{t}{c}\right)$

Gradijent profila $c_{l\delta}$ ovisi o odnosu tetive otklonjene površine c_{δ} i ukupne tetive c noseće površine, kao i o relativnoj debljini profila t/c noseće površine. Ta ovisnost prikazana je na slici 14 prema [27]. Sa S_δ označili smo dio noseće površine na kojoj se nalazi upravljačka površina kao na slici 15.



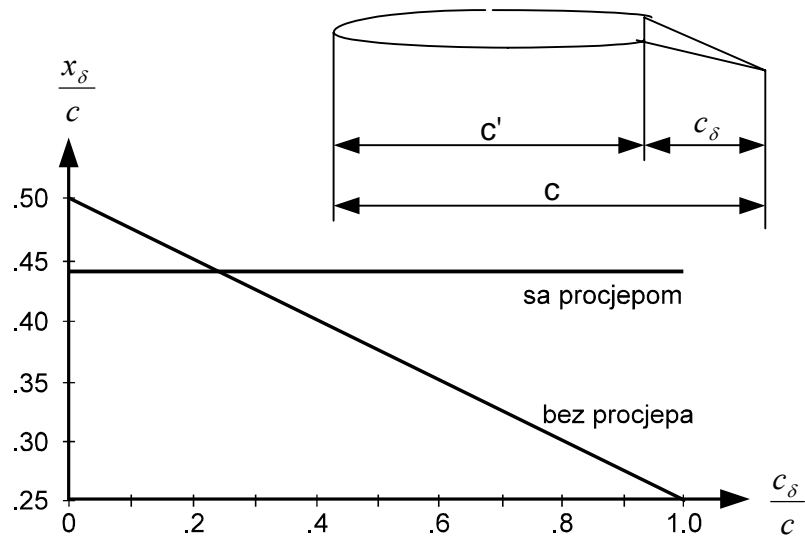
Slika 15. Površina S_δ

Koeficijent K_f je korekcija zbog nelinearnost te ovisi o otklonu δ , ali i o odnosu tetiva c_δ/c . Ta ovisnost prikazana je na slici 16 prema [27].



Slika 16. Krivulje $K_f = f\left(\delta, \frac{c_\delta}{c}\right)$

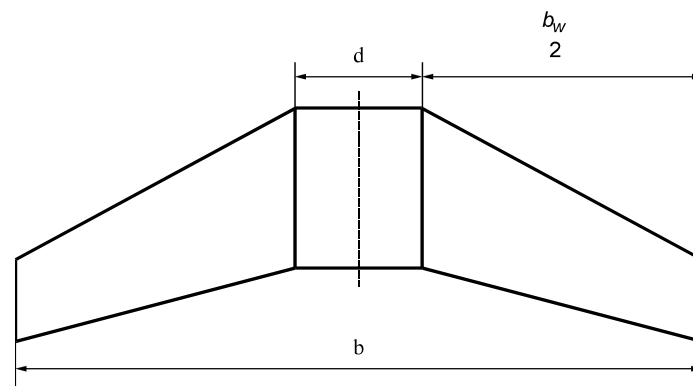
Položaj hvatišta upravljačke sile zbog otklona upravljačke površine x_δ , može se u subsonici dobiti linearnom interpolacijom između dva ekstremna slučaja. Prvo, ako je cijela noseća površina upravljačka površina onda je napadna točka na četvrtini tetive. Drugo, ako je upravljački dio iznimno mali onda je napadna točka na polovici neotklonjenoga dijela tetive c' . Ovaj odnos može bitno promijeniti veličina procjepa između pokretnog dijela i nepokretnog dijela, kao što se to vidi sa slike 17.



Slika 17. Položaj hvatišta normalne sile upravljačke površine

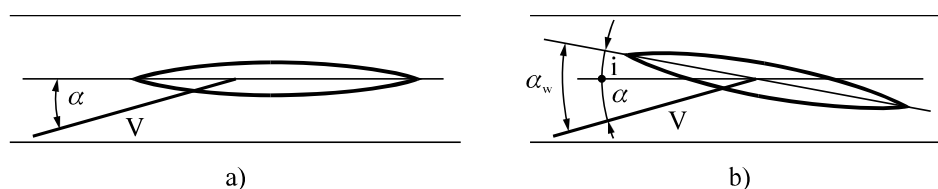
2.4 Normalna sila kombinacije tijelo – noseća površina

Pod kombinacijom tijelo – noseća površina razumijemo dvije konzole polukrila i onaj dio tijela za koji su vezane te konzole (slika 18). Kada govorimo o normalnoj sili na samom krilu N_w , mislimo na normalnu silu koja djeluje na krilo koje je dobiveno spajanjem dvaju polukrila skinuta sa zrakoplova.



Slika 18. Kombinacija tijelo – noseća površina

Ta dva polukrila spojena čine *samo krilo*. Samo krilo ima raspon b_w koji je manji od raspona kombinacije b za širinu trupa na mjestu kombinacije d . Za takvo krilo sastavljeno od dva polukrila određujemo gradijent normalne sile $(C_{N\alpha})_w$ i za to krilo određujemo površinu krila S_w .



Slika 19. Kombinacija tijelo – noseća površina
 a) planarna kombinacija b) otklonjena kombinacija

Razlikujemo dvije vrste kombinacije. U prvoj je os tijela u ravnini noseće površine, pa tijelo i noseća površina imaju isti napadni kut $\alpha_w = \alpha$. Takva kombinacija naziva se *planarna*. U drugom slučaju, noseća površina ima *postavni kut* i u odnosu na tijelo. Tu kombinaciju nazivamo *otklonjena*, a taj kut i nazivamo postavni kut noseće površine.

Prema teoriji konformnog preslikavanja [18], planarna kombinacija ima K_{BW} puta veću normalnu silu od normalne sile samog krila pod istim napadnim kutom α . Pri preslikavanju pretpostavlja se da je tijelo rotacijskog oblika promjera d , te da je os tijela u ravnini krila. U tom slučaju dobivamo da je koeficijent interferencije

$$K_{BW} = 1 + 3\bar{d} - \lambda\bar{d}(1 - \bar{d}),$$

gdje je $\bar{d} = d/b$, b je raspon kombinacije, a d promjer kruga presjeka trupa.

U slučaju otklonjene kombinacije, tj. kada tetiva krila ima postavni kut i u odnosu na os tijela, onda je normalna sila kombinacije (kada je napadni kut jednak nuli, tj. brzina u pravcu osi tijela) k_{BW} puta veća od normalne sile samog krila pod napadnim kutom i :

$$k_{BW} = \frac{(1 + 0.41\bar{d})^2}{(1 + \bar{d})^2} [1 + 3\bar{d} - \lambda\bar{d}(1 - \bar{d})]$$

U realnosti neki uvjeti koji su pretpostavljeni u teoriji konformnog preslikavanja nisu zadovoljeni. Dva odstupanja su najvažnija: **prvo**, trup zrakoplova nije rotacijskog oblika pa koristimo ekvivalentni promjer d , koji određujemo kao promjer površine kruga čija je površina jednaka površini poprečnog presjeka tijela na mjestu kombinacije krilo- tijelo. **Drugo**, os tromosti x od koje mjerimo napadni kut nije pravac nultog uzgona tijela. Ova pogreška nije velika jer tijelo ima malu normalnu silu.

Zbog tih nedostataka, neki autori kao npr. [20], uzimaju vrijednost K_{BW} za pravokutno krilo ($\lambda = 1$) uvećanu za 7%. To daje koeficijent interferencije tijelo-krilo

$$K_{BW} = 1.07 \left(1 + \frac{d}{b}\right)^2$$

i usvajaju $k_{BW} = K_{BW}$. Drugi [6, 7, 16] zanemaruju oba koeficijenta, kao da su jednaki jedinici $k_{BW} = K_{BW} = 1$, ali zamjenjuju kombinaciju s krilom koje čine dva polu-krila i dio krila pod tijelom.

U stvarnosti imamo otklonjenu kombinaciju pod napadnim kutom. U tom slučaju normalna sila kombinacije je zbroj normalne sile planarne kombinacije pod napadnim kutom i otklonjene kombinacije bez napadnog kuta. Osim toga, treba imati na umu da nesimetrični profili imaju još i dodatni napadni kut α_{0L} (koji je negativan) zbog zakrivljenosti srednje linije profila. Taj kut ima istu ulogu kao postavni kut:

$$N_{BW} = K_{BW} N_{\alpha W} \alpha + k_{BW} N_{\alpha W} (i - \alpha_{0L})$$

ili

$$N_{BW} = N_{\alpha W} [K_{BW} \alpha + k_{BW} (i - \alpha_{0L})]$$

Iz toga zaključujemo da kombinacija ima normalnu silu (ili uzgon) koja je jednaka normalnoj sili samog krila ali pod *ekvivalentnim napadnim kutom*:

$$\alpha_{eq} = K_{BW} \alpha + k_{BW} (i - \alpha_{0L}).$$

2.5 Usporenje i savijanje struje

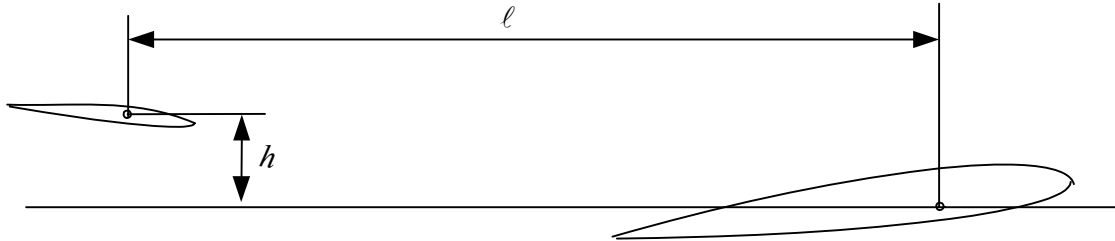
Iza prednje noseće površine zračna struja je poremećena. Rep se nalazi u zračnoj struji koja je poremećena opstrujavanjem krila, ili bolje reći kombinacijom krilo – trup. Taj poremećaj se osjeća u gubitku dinamičkog tlaka i pravcu brzine opstrujavanja. Zato dinamički tlak iza kombinacije krilo – trup umanjujemo množenjem s jednim koeficijentom η_V koji uzima u obzir te gubitke. Procjenjuje se da u subsonici treba uzeti koeficijent gubitaka oko $\eta_V = 0.98$, a u supersonici gubici rastu i dosežu za $Ma = 2.5$ vrijednost $\eta_V = 0.90$, no za veće brzine ostaju približno isti.

Iz teorijske aerodinamike znamo da s izlaznog ruba krila silaze vrtložne niti koje se vrlo brzo udružuju u dva slobodna vrtloga, jedan s jednoga i drugi s drugoga polukrila. Ti vrtlozi induciraju brzine koje s brzinom opstrujavanja mijenjaju pravac zračne struje. Te promjene su različite u svakoj točki prostora, a nas zanima prosječna promjena pravca zračne struje na horizontalnom repu. Iz razloga simetrije, kada nema kuta skretanja, prosječna promjena pravca bit će smanjenje napadnog kuta α za kut ε . Zato je napadni kut iza kombinacije krilo -trup, gdje se nalazi horizontalni rep, manji od napadnog kuta zrakoplova za veličinu ε . Tu veličinu nazivamo *savijanje struje* od kombinacije krilo - trup. Matematički modeli za određivanje savijanja struje pokazuju da je to savijanje struje prije svega proporcionalno napadnom kutu krila:

$$\varepsilon = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} \alpha_w$$

Gradijent savijanja struje $\frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}$ ovisi o:

- obliku krila: razmaha b , vitkosti A i suženju λ te o
- položaju repa u odnosu na krilo: ℓ i h kao na slici 20.



Slika 20. Položaj repa u odnosu na krilo

Zato ovisnost gradijenta savijanja struje o parametrima može se predstaviti jednačbom prema [7, 19, 28]:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} = 4.44 \cdot \left(K_A K_\lambda K_H \sqrt{\cos A_{c/4}} \right)^{1.19},$$

gdje su:

$$K_A = \frac{1}{A} - \frac{1}{1 + A^{1.7}}$$

$$K_\lambda = \frac{10 - 3\lambda}{7}$$

$$K_H = \frac{1 - \frac{|h|}{b}}{\sqrt[3]{\frac{2\ell}{b}}}$$

U ovim su jednačbama b , λ i A su karakteristike krila s podtrupnim dijelom, a h i ℓ su veličine kao na slici 20.

3 Otpor

Otpor zrakoplova ima dva dijela. Prvi dio je otpor zrakoplova kada ne postoji uzgon zrakoplova. Označavamo ga sa C_{DO} i naziva se *nulti otpor*. Drugi dio je *inducirani otpor* koji je posljedica postojanja uzgona. Označavamo ga sa C_{Di} .

Nulti otpor letjelice zbroj je otpora dijelova letjelice: krila, tijela, horizontalnog repa, vertikalnog repa. Osim ovih komponenti, za vrijeme polijetanja i slijetanja postoje još i dodani otpori od podvoza i otklona zakrilaca (flapsova).

Nulti otpor svakog dijela letjelice može se podijeliti na tri dijela prema uzroku zbog kojega nastaje, pa je koeficijent otpora svakog dijela zbroj triju koeficijenata:

$$C_D = C_{Df} + C_{Dw} + C_{Db};$$

C_{Df} (*friction drag*) je aerodinamički koeficijent onog dijela otpora koji je nastao zbog trenja zraka po površini svih dijelova letjelice,

C_{Dw} (*wave drag*) je aerodinamički koeficijent rezultante u pravcu aerodinamičke brzine od elementarnih sila tlaka okomitih na sve dijelove površine,

C_{Db} (*base drag*) je aerodinamički koeficijent otpora dna zbog podtlaka koji nastaje iza dijelova letjelice.

3.1 Otpor trenja

Kao što je poznato iz aerodinamike, koeficijent otpora trenja ravne površine C_f definira se kao količnik između sile trenja i produkta referentnog tlaka i “kvašene površine” S_{wet} , tj. površine na kojoj se ostvaruje trenje

$$C_f = \frac{D_f}{q_\infty S_{wet}}.$$

Procjenu koeficijenta trenja na prostornoj površini C_{Df} (trodimenzionalno strujanje), izvodimo posredstvom koeficijenta trenja c_f u ravninskom (dvodimenzionalnom) strujanju.

Kako nam treba koeficijent trenja za referentnu površinu imat ćemo vezu

$$D_f = q_\infty S_{wet} c_f = q_\infty S_{ref} C_{Df},$$

odakle je

$$C_{Df} = \frac{S_{wet}}{S_{ref}} c_f,$$

Ako usvojimo zakon trećeg stupnja za profil brzine u graničnom sloju za laminarno dvodimenzionalno opstrujavanje ravne površine, dobivamo koeficijent trenja [1], bez obzira je li opstrujavanje subsonično ili supersonično

$$c_{f\ell} = \frac{1.3}{\sqrt{Re}}$$

Re je Reynoldsov broj određen za duljinu opstrujavanja. Ako je opstrujavanje turbulentno (subsonično ili supersonično), onda je prema Schlichtingovoj formuli

$$c_{f\ell} = \frac{3.91}{(\ln Re)^{2.58}}.$$

Eksperimentalna ispitivanja pokazala su da je za $Re < 10^5$ na ravnoj i glatkoj površini strujanje laminarno. Međutim, ako je $Re > 10^6$, čak i na ravnoj i glatkoj površini strujanje je turbulentno. Na ravnoj i glatkoj površini u intervalu

$$3.5 \cdot 10^5 < Re < 10^6$$

strujanje će biti na početku laminarno, zatim će na jednom kratkom dijelu biti prijelazno, da bi na drugom dijelu bilo turbulentno. Prijelaz iz laminarnog u turbulentni granični sloj nije ni trenutni, ni stabilan, pa se zato u literaturi daju različite granice intervala u kome se odvija prelazak iz laminarnog u turbulentni granični sloj. Da bismo odredili koeficijent trenja takvog laminarno - turbulentnog opstrujavanja, uvodimo dvije pretpostavke:

- prelazak iz laminarnog u turbulentni granični sloj ostvaruje se trenutno na mjestu ℓ_t
- od ℓ_t turbulentni granični sloj je isti kao da je imao početak u ishodištu $\ell = 0$

Prema ovim hipotezama bit će

$$c_f = \int_0^{\ell_t} \bar{\tau}_{0\ell} d\bar{x} + \int_{\ell_t}^{\ell} \bar{\tau}_{0\ell} d\bar{x}.$$

U ovim integralima su bezdimenzijska tangencijalna naprezanja na površini:

$$\bar{\tau}_{0\ell} = \frac{\tau_0}{q_\infty} = \frac{0.646}{\sqrt{Re \cdot \bar{x}}} \quad \text{za laminarno opstrujavanje na temelju zakona trećeg stupnja profila brzine,}$$

$$\bar{\tau}_{0\ell} = \frac{\tau_0}{q_\infty} = \frac{0.058}{\sqrt[5]{Re \cdot \bar{x}}} \quad \text{za turbulentno opstrujavanje prema zakonu 1/7 profila brzine.}$$

Integracijom dobivamo:

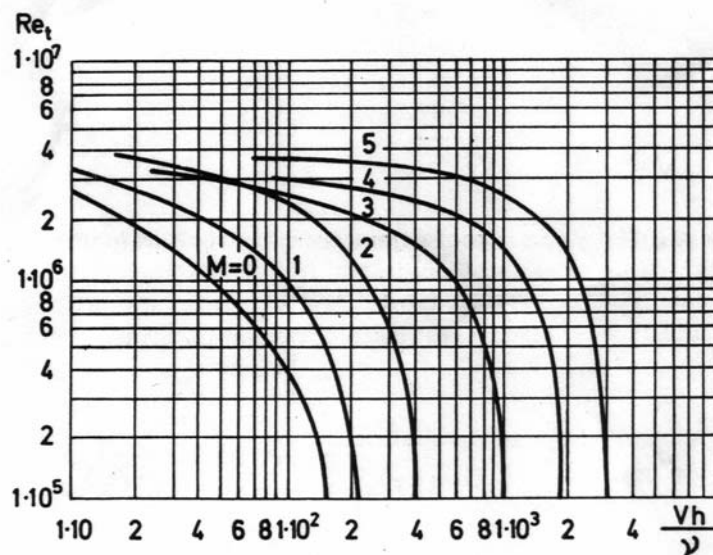
$$c_f = \frac{1.3}{\sqrt{Re}} \sqrt{\ell_t} + \frac{0.072}{\sqrt[5]{Re}} (1 - \bar{\ell}_t^{0.8}).$$

U ovoj jednadžbi $0.072/\sqrt[5]{Re}$ predstavlja koeficijent turbulentnog trenja za usvojeni profil brzine prema zakonu jedne sedmine. Ako se taj koeficijent zamijeni s točnijom Schlichtingovom formulom, dobiva se bolja procjena za koeficijent trenja u laminarno - turbulentnom graničnom sloju :

$$c_f = \frac{1.3}{\sqrt{Re}} \sqrt{\ell_t} + \frac{3.91}{(\ln Re)^{2.58}} (1 - \bar{\ell}_t^{0.8}).$$

Točki prijelaza laminarnog u turbulentno opstrujavanje odgovara tzv. prijelazni Reynoldsov broj

$$Re_t = \frac{\ell_t V_\infty}{\nu_\infty}.$$



Slika 1. $Re_t = f\left(Ma, \frac{hV_\infty}{\nu_\infty}\right)$

Kako odrediti ℓ_t ? Neki nepravilni oblik opstrujavane površine može izazvati turbulenciju, to više što se s duljinom opstrujavanja Reynoldsov broj približava vrijednosti granice prelaska laminarnog u turbulentno opstrujavanje. Općenito uzevši, turbulentnost će nastati prije na hrapavijoj površini. Hrapavost se mjeri prosječnom visinom h . Ispitivanja su pokazala da Re_t ovisi o Machovu broju i o parametru $\frac{hV_\infty}{\nu_\infty}$. Ta ovisnost prema [15] prikazana je na slici 3-1.

Na temelju ovih jednadžbi možemo odrediti koeficijent trenja na ravnim dijelovima zrakoplova pri malim brzinama leta kada je utjecaj stlačivosti zanemariv. Nije li Ma^2 zanemariv u odnosu na 1, znači da treba uzeti u obzir utjecaj stlačivosti, što činimo množeći izračunat c_f s koeficijentom

$$F_{Ma} = \frac{1}{(1 + 0.144 \cdot Ma^2)^{0.65}}.$$

Međutim, dijelovi zrakoplova nisu ravne površine, što mijenja raspored tlaka, a raspored tlaka utječe bitno na koeficijent trenja. Zbog toga treba koeficijent trenja u dvodimenzionalnoj struji pomnožiti s koeficijentom oblika F_F ovisno o obliku opstrujavane površine. Isto tako pri prelasku u trodimenzionalno strujanje trebamo koeficijent trenja iz dvodimenzionalnog strujanja pomnožiti s koeficijentom F_S :

$$C_f = F_S F_F c_f$$

- za noseće površine u subsonici prema [20]

$$F_F = \left(1 + \frac{0.6 \bar{t}}{\bar{x}_t} + 100 \bar{t}^4 \right)$$

Produkt $F_F \cdot 2c_f$ predstavlja koeficijent trenja profila. Ako ne postoji valni otpor onda je ta vrijednost nulti otpor profila za zadanu hrapavost. U tablicama standardnih profila nalazi se minimalni otpor profila $c_{d \min}$ za slučaj standardne hrapavosti. Te vrijednosti se mogu uspoređivati, što nam omogućuje kontrolu procjene.

$$F_S = (\cos A_t)^{0.28},$$

gdje je $\bar{t} = \frac{t}{c}$, $\bar{x}_t = \frac{x_t}{c}$, x_t je apscisa maksimalne debljine profila., a A_t je strijela geometrijskog mjesta maksimalnih debljina profila. Za slučaj repa treba $F_F F_S$ povećati još za 10 % zbog dodatnog otpora kroz zazore između noseće površine i upravljačke površine.

- za trup s dobro oblikovanom kabinom prema [20]

$$F_S \cdot F_F = 1 + \frac{60}{f^3} + \frac{f}{400},$$

gdje je f vitkost tijela, koju određujemo za stvarnu duljinu tijela i fiktivni promjer d . Ovaj koeficijent daje dobre vrijednosti ako se kabina uklapa u oblik tijela (kao npr. za zrakoplov F16), ali ako kabina iskače iz oblika tijela, onda treba koeficijent povećati (npr. za F15 treba povećati 40 %). Isto tako ako tijelo ima kvadratni presjek, oštri bridovi mogu povećati koeficijent oblika oko 40 %.

- za kućište motora i spremnik goriva prema [20]

$$F_S \cdot F_F = 1 + \frac{0.35}{f}$$

U supersonici nema prenošenja poremećaja uz zračnu struju, pa je $F_F F_S$ za sve oblike blisko jedinici.

Konačno, postoji i međuutjecaj dijelova. Prisutnost drugoga tijela u blizini opstrujavanoga tijela mijenja raspored tlaka po površini opstrujavanog tijela, što utječe na koeficijent trenja. Taj se utjecaj uzima u obzir koeficijentom Q . Evo nekoliko rezultata ispitivanja u aerotunelu prema [20]:

- tijelo motora postavljeno neposredno na krilo ima povećan otpor za 50 % ($Q = 1.5$), a taj se utjecaj izgubi kad je tijelo udaljeno za jedan svoj promjer od krila;
- obješeni projektili ispod krila imaju koeficijent interferencije $Q \approx 1.25$;
- za klasične kombinacije tijelo - noseća površina uzima se $Q = 1$;
- za repne površine V-oblika uzima se $Q \approx 1.03$, a za repne površine H-oblika $Q \approx 1.08$.

U supersonici međuutjecaj dijelova na otpor gotovo i ne postoji, te je u supersonici koeficijent $Q = 1$.

Tako je konačno otpor trenja letjelice zbroj otpora trenja svih njenih dijelova:

$$D_f = q_\infty S_{ref} C_{Df} = \sum_c q_\infty (c_f F_{Ma} F_F F_S Q_f S_{wet})_c$$

Odnos D_f / q_∞ naziva se *površina otpora*

$$\frac{D_f}{q_\infty} = F_{Ma} \cdot \sum_c (c_f F_F F_S Q_f S_{wet})_c$$

Prema tome, ukupna površina otpora zrakoplova je zbroj površina otpora komponenata. Dijeljenjem površine otpora s referentnom površinom dobivamo traženu vezu između koeficijenta otpora trenja letjelice i površinskih koeficijenata trenja dijelova letjelice:

$$C_{Df} = F_{Ma} \sum_c \left(c_f F_F F_S Q \frac{S_{wet}}{S_{ref}} \right)_c$$

3.2 Otpor dna

Iza svakog dijela letjelice pojavljuje se trag u kome je tlak manji od neporemećenog tlaka. Posljedica tog podtlaka je sila kočenja, jednaka produktu podtlaka i površine na kojoj on djeluje. Na kraju nosećih površina je izlazni rub, pa nema površine na kojoj bi djelovao taj podtlak (ako nije došlo do odvajanja struje od noseće površine). Tom podtlaku odgovara koeficijent

$$C_p = \frac{p_b - p_\infty}{q_\infty}.$$

Međutim, otpor dna postoji iza kućišta motora, spremnika goriva, nosača naoružanja, i iza kućišta kabine ako nije dobro uklopljena s oblikom tijela, itd.

$$D_b = (p_\infty - p_b) \cdot S_b = q_\infty (-C_p) S_b$$

Da bi se izbjegao otpor dna ili bar smanjio na prihvatljivu mjeru, tijelu lagano smanjujemo poprečni presjek prema kraju na što manju površinu dna S_b . Procjena koeficijenta tlaka na dnu može se izvesti prema [18] pomoću jednadžbi:

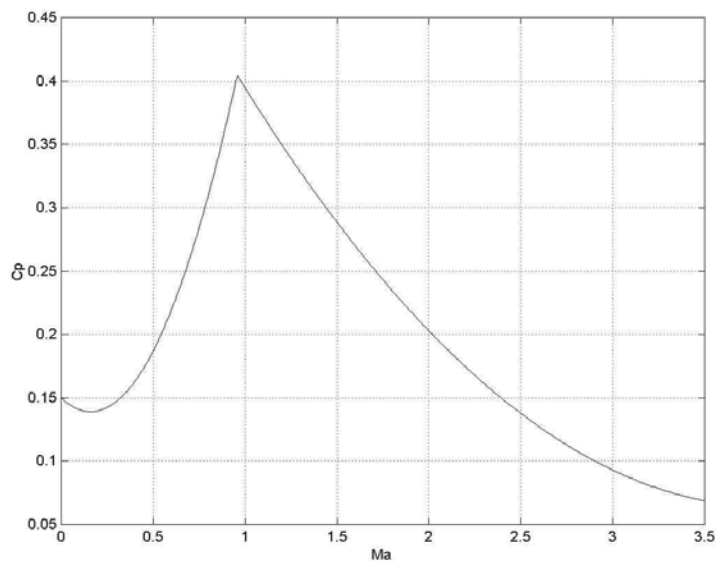
- za subsoniku

$$-C_p = 0.139 + 0.419(Ma - 0.161)^2$$

- za supersoniku

$$-C_p = 0.064 + 0.042(Ma - 3.84)^2.$$

Na slici 3-2 prikazana je ovisnost koeficijenta tlaka na dnu o Machovom broju prema navedenim jednadžbama



Slika 2. Koeficijent tlaka na dnu $C_p(Ma)$

3.3 Valni otpor

Valni otpor je posljedica rasporeda tlaka na površini. U subsonici prema d'Alembertovom principu, zasnovanom na neviskoznom opstrujavanju, valni otpor je jednak nuli. Međutim,

poznato je da realni uvjeti opstrujavanja ne prate d'Alembertov princip. Raspored tlaka u stvarnosti je zbog viskoznih učinaka izmijenjen, te se pojavljuje valni otpor. Mjerenja otpora standardnih profila, pri malim brzinama pri kojima možemo zanemariti utjecaj stlačivosti, pokazuju da je izmjereni otpor jednak otporu trenja što je očigledan dokaz da ne postoji valni otpor. Ta mjerenja otpora profila zajedno s drugim karakteristikama profila (uzgon i moment propinjanja) objavljena su u mnogim knjigama kao npr. [1].

U supersonici postojanje udarnih valova stvara uvijek valni opor. Zato je ta komponenta otpora i dobila to ime, premda udarni valovi nisu jedini razlog nastajanja valnog otpora. Već smo rekli da valni otpor postoji i u subsonici kada nisu ispunjeni uvjeti za d'Alambertov princip, a udarni valovi javljaju se samo u transsonici i supersonici.

Mnogo je manje objavljenih podataka o mjerenju valnog otpora profila i zrakoplova nego što je to slučaj s otporom trenja ili otporom dna, pa za procjenu nema pouzdanih metoda.

Prema zakonu površine [13] u transsoničnom području ($Ma \approx 1$) valni otpor zrakoplova za zadani Machov broj ovisi samo o promjeni veličine površine poprečnog presjeka zrakoplova $S(x)$ (uključujući sve njegove dijelove) okomito na brzinu opstrujavanja.. To znači da je otpor zrakoplova u transsonici isti kao otpor rotacijskog tijela koje ima istu površinu poprečnog presjeka na svim mjestima. U teorijskoj aerodinamici postoji tzv. teorija tankih tijela [12] kojom se dokazuje da za zadani volumen W i duljinu tijela ℓ postoji tzv. optimalno tijelo (Sears-Haackovo tijelo) čije su parametarske jednadžbe:

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3S_m}{\pi} \left(\sin \theta - \frac{\sin 3\theta}{3} \right)}$$

$$x = \frac{\ell}{2} (1 + \cos \theta).$$

To tijelo ima teoretski valni otpor

$$D_W = q_\infty S_{\max} \cdot \frac{9\pi S_{\max}}{2\ell^2}.$$

To znači da će zrakoplov imati minimalni valni otpor ako njegov poprečni presjek prati promjenu poprečnog presjeka Sears_Haackova tijela, ili što bliže tom obliku. Realni oblici zrakoplova odstupaju od tog uvjeta. Pretpostavimo da za $Ma = 1.2$, realni oblik zrakoplova ima E_{WD} puta veći valni otpor od Sears-Haackova tijela (koeficijent E_{WD} se kreće od 1.20 do 3, pa i više). S promjenom Machova broja iznad $Ma = 1.2$, valni otpor zrakoplova opada po zakonu

$$\frac{D_W(Ma)}{D_W(1.2)} = f(Ma, A_{LE}) = 1 - 0.386(Ma - 1.2)^{0.57} (1 - 0.709 A_{LE}^{0.77}),$$

gdje je A_{LE} strijela napadnog ruba krila u radijanima, a valni otpor

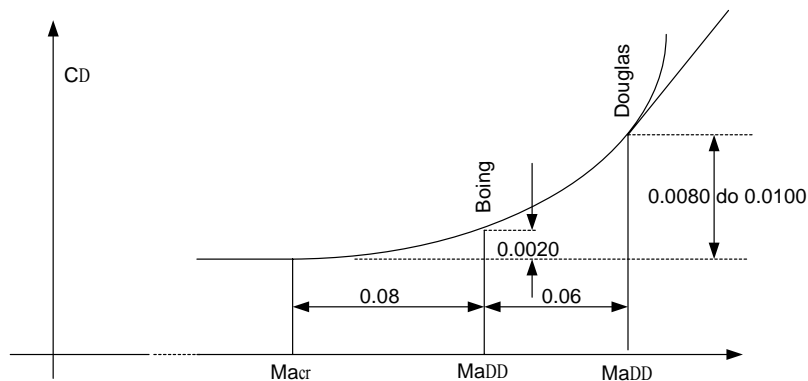
$$D_W(1.2) = E_{WD} \cdot q_\infty S_{\max} \frac{9\pi S_{\max}^2}{2\ell^2}.$$

Tako možemo, ako je $Ma > 1.2$, procijeniti valni otpor zrakoplova jednadžbom

$$C_{Dw} = E_{WD} \frac{9\pi S_{\max}^2}{2\ell^2 S_{ref}} f(Ma, A_{LE}).$$

3.4 Otpor u transonici

Pojava valnog otpora je posljedica činjenice što lokalni Machov broj dostigne supersoničnu vrijednost prije Machova broja letjelice. Na tom mjestu počinje supersonično strujanje koje treba opet prijeći u subsonično. Taj proces prelaska iz subsoničnog u supersonično strujanje nije reverzibilan. Povratak na subsonično strujanje zbiva se diskontinuirano, što ima za posljedicu stvaranje lokalnih udarnih valova. S udaljavanjem od letjelice ta pojava slabi. Kada se pojavi prvi lokalni Machov broj koji je dostigao supersoničnu vrijednost, Machov broj letjelice nazivamo *kritični Machov broj* i označavamo ga sa Ma_{cr} .

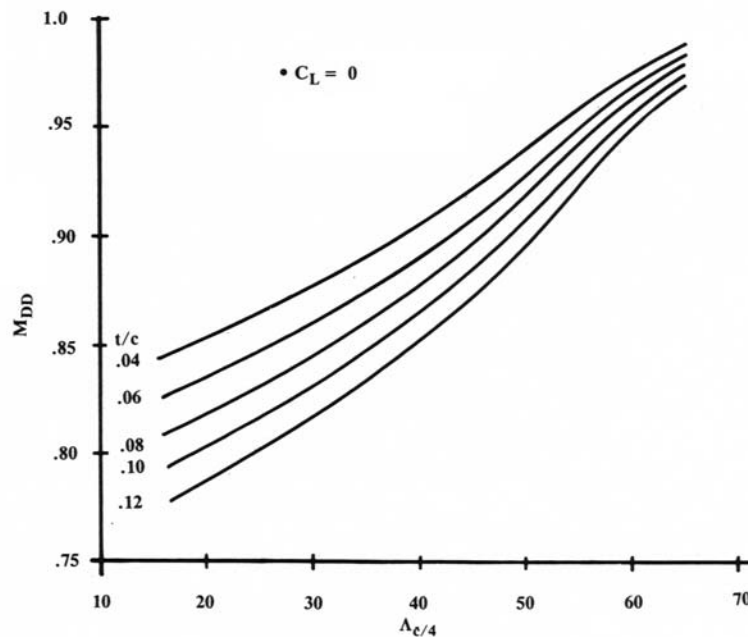


Slika 3. Kritičan Machov broj Ma_{cr} i Ma_{DD} (*Drag Divergent Ma*)

Teško je utvrditi kada je dostignuta kritična vrijednost. Zato velike tvrtke definiraju točku Ma_{DD} na kojoj je $C_{D0}(Ma)$ porastao za 0.0020 (Boing) ili točku na krivulji $C_{D0}(Ma)$ u kojoj je tangens kuta tangente 0.10 (Douglas) itd. Međusobni položaj tih dviju točaka pokazan je na slici 3-3.

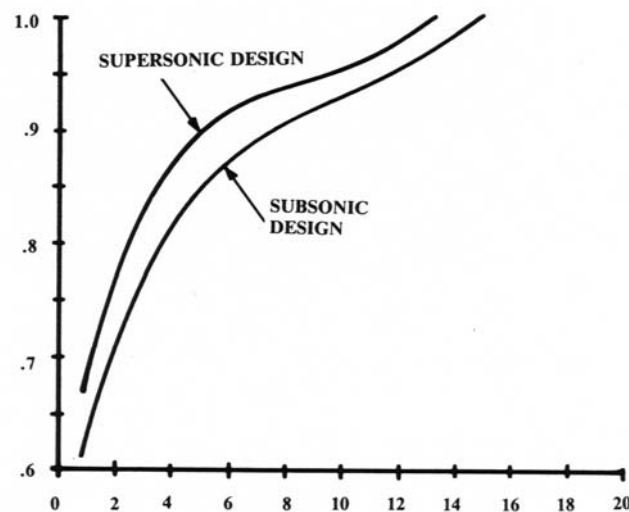
S povećanjem Machova broja letjelice, prvi lokalni Machov broj jednak jedinici može se dogoditi na krilu ili na tijelu. Nije nam unaprijed poznato koja će se od tih dviju

možnosti prva dogoditi, pa zato moramo procijeniti obje, i usvojiti onu koja je manja za kritičnu vrijednost Machova broja letjelice.



Slika 4. $(Ma_{DD})_{L=0} = f\left(A_{1/4}, \frac{t}{c}\right)$

Kada je riječ o krilu, lokalni Machov broj dostiže jedinicu najprije na gornjoj površini krila zbog povećanja brzine opstrujavanja profila pri povećanoj sili uzgona. To će se dogoditi utoliko prije ukoliko je veći napadni kut letjelice tj. ukoliko je veća sila uzgona, a to znači da će utoliko biti manji kritični Machov broj Ma_{cr} . Budući da procjenjujemo nulti otpor, trebamo procijeniti kada nastaje lokalni Machov broj jednak jedinici u slučaju nultog uzgona.



Slika 5. $Ma_{DD}(f_n)$ za subsonični i supersonični oblik trupa

Prema metodi tvrtke Boeing procjena $(Ma_{DD})_{L=0}$ na krilu provodi se prema dijagramu na slici 3-4 za $C_L = 0$, ovisno o strijeli $A_{1/4}$ i relativnoj debljini profila $\bar{t} = t/c$.

Tijelo koje nije dobro oblikovano imat će lokalni Machov broj jednak jedinici prije krila. Na slici 3-5 prikazane su dvije krivulje koje daju vrijednost Ma_{DD} tijela ovisno o vitkosti prednjeg dijela trupa. Konačno Ma_{DD} letjelice bit će manja vrijednost od Ma_{DD} krila i Ma_{DD} tijela.

Znamo da je $C_{Dw} = 0$ do kritične vrijednosti Machova broja, zatim smo odredili Ma_{DD} i znamo da je $C_{Dw}(Ma_{DD}) = 0.0020$. Isto tako poznat nam je valni otpor iznad $Ma = 1.2$. trebamo još odrediti $C_D(Ma)$ u intervalu od Ma_{DD} do 1.2. To je interval transsonike. To je vrlo složena teorijska zadaća i zato ćemo se zadovoljiti približnom metodom. Praksa je pokazala da možemo usvojiti pet točaka:

$$C_{DW}(Ma_{DD} - 0.080) = 0$$

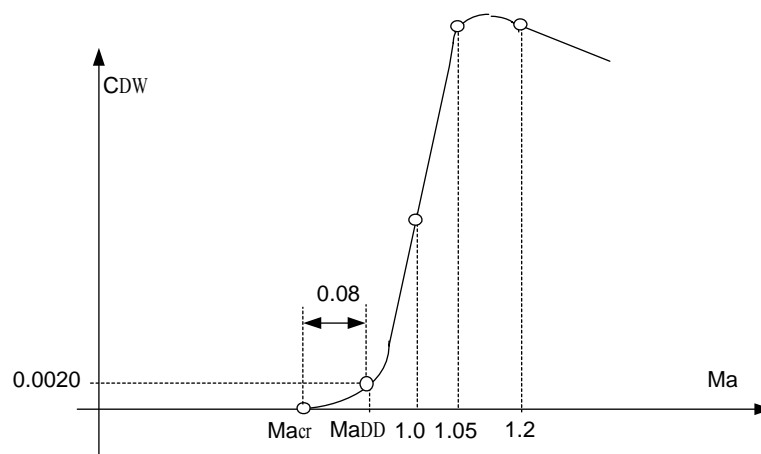
$$C_{DW}(Ma_{DD}) = 0.0020$$

$$C_{DW}(1.00) = \frac{C_{DW}(1.2)}{2}$$

$$C_{DW}(1.05) = C_{DW}(1.2)$$

$$C_{DW}(1.2) = E_{WD} \frac{9\pi S_{\max}^2}{2\ell^2 S_{ref}}$$

Kroz tih pet točaka provlačimo kontinuiranu krivulju koja ima zajedničku tangentu sa $C_D(Ma)$ u subsonici ($Ma < Ma_{cr}$) i s krivuljom $C_D(Ma)$ u supersonici ($Ma > 1.2$), kao na slici 3-6.



Slika 6. Konstrukcija krivulje $C_{Dw}(Ma)$ u transsoničnoj oblasti

3.5 Dodatni otpor

Postoji više uzroka zbog kojih se pojavljuje dodatni otpor.

Prvo, neke dijelove zrakoplova nismo obuhvatili gornjom metodom, kao npr. kućište motora, spremnike goriva, nosače naoružanja, kabinu, ili poseban oblik zadnjeg dijela transportnog zrakoplova. Svi oni povećavaju otpor zrakoplova.

Drugo, u određenim uvjetima zrakoplov mijenja svoj oblik. Primjerice pri polijetanju zrakoplov ima izbačene kotače i djelomično izbačena zakrilca, u letu ima uvučene kotače i zakrilca, a pri slijetanju ima opet izbačene kotače i potpuno izbačena zakrilca, a na kraju i zračne kočnice. Zbog toga se otpor zrakoplova znatno povećava. I ta povećanja nazivamo dodatni otpor.

Treće, zaustavljeni motor ne samo što nema pogonsku silu već je uzrok dviju vrsta dodatnog otpora. Ako je rotor ukočen, onda motor ima jednu vrijednost otpora, a ako se rotor okreće pod utjecajem zračne struje, onda motor ima drugu vrijednost otpora. Procjena dodatnog otpora zaustavljenog motora iznimno je važna zato što ta komponenta kod zrakoplova sa dva ili više motora ima jak bočni moment za središte mase, te dovodi u pitanje bočnu stabilnost zrakoplova, što ćemo razmatrati kasnije.

U većini slučajeva, koeficijent dodatnog otpora procjenjujemo prema jednadžbi

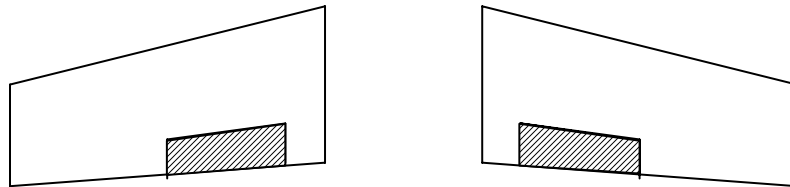
$$\Delta C_D = k \frac{S_{front}}{S_{ref}},$$

u kojoj je S_{front} silueta (dijela koji stvara dodatni otpor) gledano u pravcu aerodinamičke brzine. Koeficijent k je obično poznat za tipizirane oblike. U donjoj tablici prikazani su koeficijenti za neke dijelove zrakoplova prema [20].

	k
Zračne kočnice (<i>spoiler</i>) na 60% tetive	1.6
Vjetrobran (laki zrakoplovi)	
dobro uklopljen u oblik trupa	0.07
loše uklopljen u oblik trupa	0.15
Kotač s gumama	0.25
Drugi kotač iza prvoga	0.15

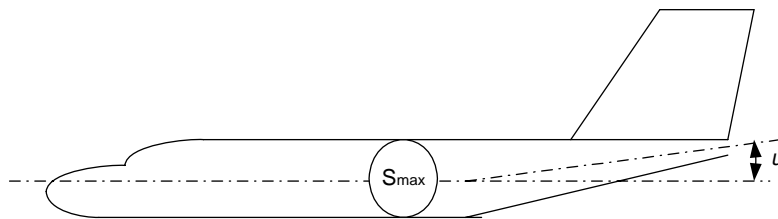
Povećanje koeficijenta otpora krila zbog otklona zakrilca δ_{flap} može se procijeniti jednadžbom

$$\Delta C_D = 0.13 \frac{S_{flap} \sin \delta_f}{S_W}$$



Slika 7. Površina S_{flap}

Površina S_{flaps} prikazana je na slici 3-7, a $S_{flaps} \sin \delta_{flaps}$ predstavlja frontalnu površinu flapsova (okomito na brzinu zračne struje).



Slika 8. Otpor dna transportnog zrakoplova

Transportni zrakoplovi radi što većega korisnoga prostora imaju suženje zadnjega dijela trupa veće od kritičnog, zbog čega dolazi do odvajanja struje od tijela. To odvajanje stvara dodatni otpor na tom dijelu trupa, što je teško i složeno teoretski izučavati. Za procjenu otpora, zbog odvajanja struje od trupa transportnog zrakoplova, možemo koristiti empirijsku formulu

$$\Delta C_D = 3.83 u^{2.5} \frac{S_{max}}{S_{ref}}$$

u kojoj je u kut u radijanima srednje crte tijela na tom zadnjem dijelu kao na slici 3-8, a S_{max} površina najvećeg poprečnoga presjeka tijela.

Koeficijent otpora zaustavljenog motora ili onoga kojega pokreće zračna struja treba odrediti konstruktor motora. Ako taj koeficijent nije poznat može se procijeniti.

Za zaustavljenu elisu u subsonici

$$\Delta C_D = k \frac{S_{elise}}{S_{ref}}$$

Ako se elisa okreće pod djelovanjem zračne struje, onda je $k = 0.1$, a ako se elisa ne okreće, onda je $k = 0.8$ (prema [18]). Površina elise $S_{elise} = \sigma S_{disk}$, gdje je $\sigma = N/(A\pi)$, N je broj poluelisa, A je vitkost poluelise.

Za mlazni motor koji se okreće pod utjecajem zračne struje

$$\Delta C_D = 0.3 \frac{S_{front}}{S_{ref}},$$

gdje je S_{front} poprečni presjek kućišta mlaznoga motora.

Za kućišta motora, spremnike goriva i za nosače naoružanja postoje, umjesto procjena, mjerenja zbroja površina otpora trenja i otpora dna [20]:

$$\left(\frac{D}{q_\infty} \right)_c = \frac{D_f + D_b}{q_\infty},$$

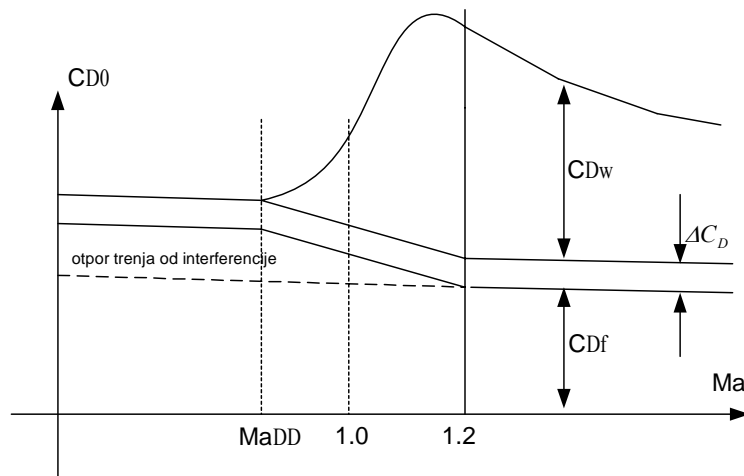
ovisno o Machovu broju, za tipizirane oblike i veličine.

Najveći problem su strujanja kroz otvore na trupu iz područja povišenog tlaka u područja smanjenog tlaka, bilo da je to iz atmosfere u unutrašnjost ili iz unutrašnjosti prema van. U oba slučaja mijenja se bitno slika opstrujavanja, mijenja se tlak pa i trenje na površini. Isto tako, razni uređaji na površini zrakoplova, kao što su svjetla, Pito-cijev, antena i drugo, mogu izmijeniti vrijednost koeficijenta trenja. Svi ti nepredviđeni i nametnuti uzroci mogu povećati koeficijent trenja i do 15%.

3.6 Nulti otpor

Do sada smo promatrali otpor letjelice kada nema sile uzgona. Drugim riječima, tako dobiveni otpor je aerodinamička sila jer nema drugih komponenata. U tom slučaju napadni kut je jednak kutu nultog uzgona letjelice α_{0L} . Otpor u ovom slučaju ($\alpha = \alpha_{0L}$) nazvamo *nulti otpor* i označavamo ga sa D_0 , a njegov koeficijent sa C_{D0} . Konačno smo u mogućnosti nacrtati cijelu krivulju $C_{D0}(Ma)$, koja je zbroj triju krivulja komponenata otpora $C_{Df}(Ma)$,

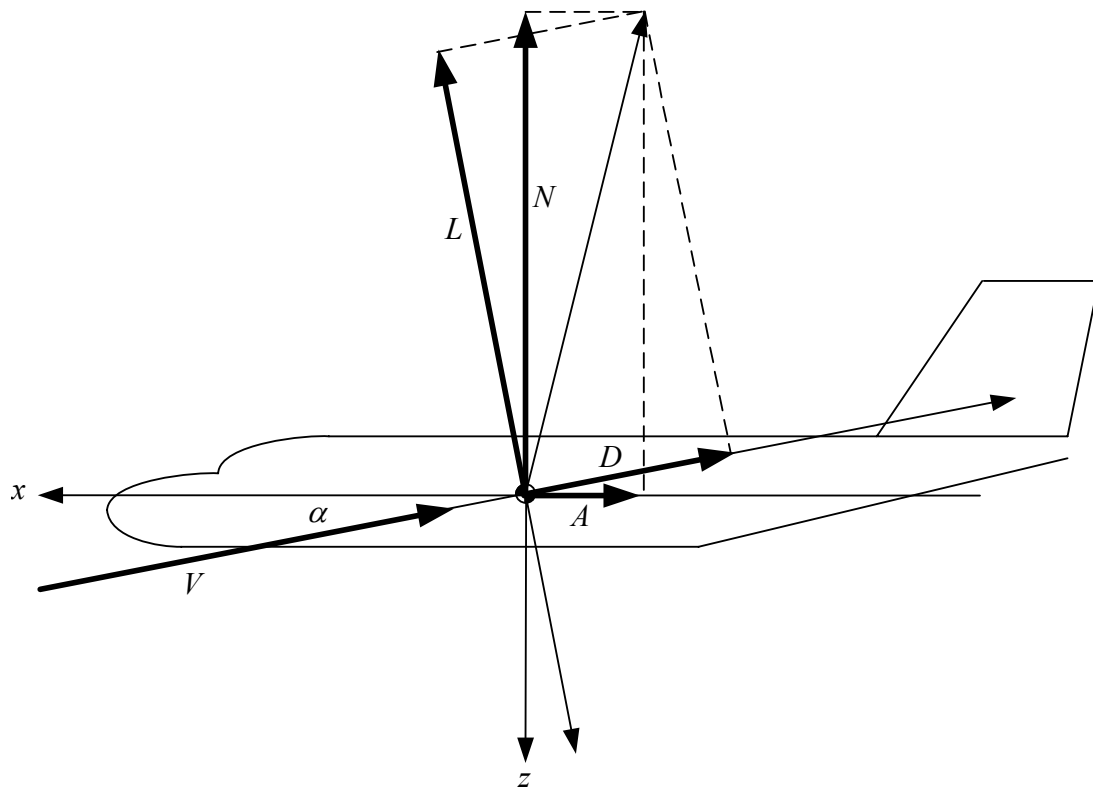
$C_{D_b}(Ma)$, $C_{D_w}(Ma)$ i krivulje uslijed dodatnog otpora $\Delta C_D(Ma)$. Taj zbroj je shematski prikazan na slici 3-9.



Slika 9. Zbroj komponenta nultog otpora

3.7 Inducirani otpor

Promatrajmo ravan simetrije zrakoplova i u njoj dva sustava koordinatnih osa kao na slici 3-10:



Slika 10

Sa slike vidimo da je

$$A = D \cos \alpha - L \sin \alpha$$

$$N = L \cos \alpha + D \sin \alpha$$

gdje su A i N komponente aerodinamičke sile duž osi tromosti zrakoplova, a D i L duž i okomito na brzinu leta. Poslije dijeljenja sa referentnom silom $\frac{\rho V^2}{2} S_{ref}$ dobivamo:

$$C_A = C_D \cos \alpha - C_L \sin \alpha$$

$$C_N = C_L \cos \alpha + C_D \sin \alpha$$

Ako je napadni kut α mali broj onda nam prva jednadžba daje vezu

$$C_A = C_D - C_L \alpha$$

Primijenimo je slučaj $\alpha = \alpha_{0L}$ kad je $C_D = C_{D0}$ i nema uzgona $C_L = 0$. U tom slučaju ova jednadžba se svodi na

$$C_{A0} = C_{D0},$$

tj. nulti otpor je istodobno i *nulta aksijalna sila*.

Ako upotrijebimo istu tu jednadžbu primjenimo na slučaj kad je napadni kut $\alpha \neq \alpha_{0L}$, dobivamo

$$C_D = C_A + \alpha C_L.$$

Pretpostavit ćemo da aksijalna sila C_A za male napadne kutove ne zavisi od napadnog kuta, što znači da je

$$C_A \approx C_{A0} = C_{D0}.$$

Ta pretpostavka nije nerealna jer mjerenja pokazuju da aksijalna sila mnogo manje ovisi o napadnom kutu od sile otpora. To je aproksimacija koja nam omogućuje da bolje razumijemo ovisnost otpora o uzgonu. S tom pretpostavkom dobivamo:

$$C_D = C_{D0} + \alpha C_L.$$

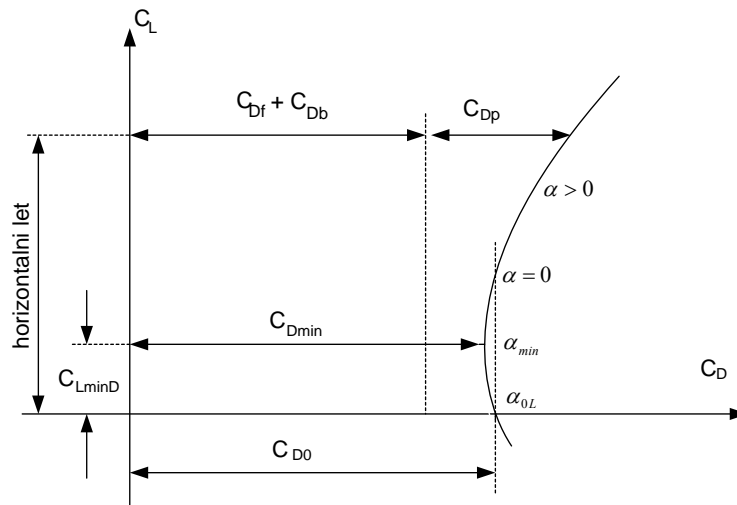
Ova jednadžba pokazuje utjecaj napadnog kuta na otpor letjelice. Vidimo da je totalni otpor zbroj otpora pri nultom uzgonu i otporu zbog uzgona, koji nazivamo inducirani otpor. Taj dodatni otpor ostvaruje se uglavnom kroz D_w , jer je utjecaj napadnog kuta na otpor trenja i otpor dna neznatan. Kako je sila uzgona također ovisna o napadnom kutu, te dvije ovisnosti

$$C_D = C_{D0} + \alpha C_L$$

$$C_L = C_{L\alpha} (\alpha - \alpha_{0L})$$

predstavljaju parametarske jednadžbe *polare* zrakoplova (slika 11) ili eliminacijom napadnog kuta

$$C_D = C_{D0} + \alpha_{0L} C_L + \frac{1}{C_{L\alpha}} C_L^2.$$



Slika 11. Polara zrakoplova

Iz ove jednadžbe dobivamo da je najmanji otpor zrakoplova C_{Dmin} za napadni kut $\alpha_{min} = \alpha_{0L}/2$ i on ima vrijednost

$$C_{Dmin} = C_{D0} - C_{L\alpha} \left(\frac{\alpha_{0L}}{2} \right)^2,$$

a pri minimalnom otporu bit će uzgon

$$C_{LminD} = C_{L\alpha} (\alpha_{min} - \alpha_{0L}) = -C_{L\alpha} \frac{\alpha_{0L}}{2}.$$

Pri napadnom kutu α_{0L} , kada je uzgon jednak nuli, otpor C_{D0} nije najmanji. Najmanja vrijednost otpora je pri napadnom kutu $\alpha_{min} = \alpha_{0L}/2$, kad postoji neki mali uzgon L_{minD} .

Pomoću vrijednosti za C_{Dmin} i C_{LminD} , jednadžba polare može se napisati u obliku

$$C_D = C_{Dmin} + \frac{1}{C_{L\alpha}} (C_L - C_{LminD})^2.$$

Tu jednadžbu izveli smo uz pretpostavku da aksijalna sila ne ovisi o napadnom kutu. Naznačili smo da je to samo jedna aproksimacija koja je za supersoniku dovoljno točna, a manje točna za subsoniku. Zato se koristimo jednadžbom

$$C_D = C_{Dmin} + K (C_L - C_{Lmin})^2.$$

Međutim, u poglavlju o performansama zrakoplova, s namjerom a se olakšaju i omoguće jednostavne veze između performansi i karakteristika zrakoplova, koristi se oblik polare

$$C_D = C_{D0} + K C_L^2,$$

što pretpostavlja da je $C_{Dmin} \approx C_{D0}$ i da je $C_{Lmin} \approx 0$. Za zrakoplove koji imaju profil krila bez velike zakrivljenosti srednje linije ove su aproksimacije prihvatljive.

Koeficijent K ima veliko značenje i bitnu ulogu na performanse zrakoplova. Jasno je da želimo zrakoplov koji ima što manji taj koeficijent, jer će takav zrakoplov za isti uzgon imati manji otpor.

U subsonici, kad postoji sila uzgona, pod dejstvom vezanog vrtloga zrak prelazi oko prednjega ruba krila s donje strane krila na gornju zbog razlike tlaka. To opstrujavanje prednjega ruba stvara područje podtlaka oko prednjega ruba, a podtlak oko prednjega ruba uzrokuje silu u pravcu gibanja. Ta sila sisanja smanjuje prirast aksijalne sile zbog promjene tlaka po površini krila usled napadnog kuta. Rezultanta tih dviju sila je inducirani otpor. Prema *Glauertovoj* teoriji za slučaj eliptičnog krila koeficijent inducirano otpora je

$$\frac{1}{\pi A} C_L^2 = K C_L^2$$

Za trapezna krila inducirani otpor ima drugu vrijednost, pa radi primjene iste jednadžbe uvodimo Oswaldov koeficijent e :

$$\frac{1}{e\pi A} C_L^2 = K C_L^2$$

ili

$$K = \frac{1}{e\pi A},$$

gdje je $0.65 < e < 0.85$. Procjena Oswaldova koeficijent izvodi se prema jednadžbama:

- za zrakoplov s trapeznim krilom bez strijele

$$e = 1.78(1 - 0.045A^{0.68}) - 0.64,$$

- za zrakoplov s trapeznim strelastim krilom

$$e = 4.61(1 - 0.045A^{0.68})(\cos \Lambda_{LE})^{0.15} - 3.1$$

Takva procjena za e u subsonici daje K konstantno, što se pokazalo prihvatljivim do Ma_{cr} .

Međutim za veće vrijednosti Machovog broja K se povećava. To daljnje povećanje objašnjava se daljnjim smanjenjem sile u pravcu gibanja zbog nemogućnosti zraka da dovoljno brzo opstrujava prednji rub krila, što ima za posljedicu nedovoljni podtlak da bi se dobila potrebna sila u pravcu gibanja.

U supersonici iz linearne teorije krila znamo da je za vrijednosti Machova broja

$$Ma > Ma_{LE} = \frac{1}{\cos \Lambda_{LE}}$$

napadni rub krila supersoničan te zrak ne prelazi oko prednjega ruba krila s jedne na drugu stranu krila. Zato nema nikakve sile u pravcu gibanja. Inducirani otpor nastaje samo kao posljedica prirasta aksijalne sile zbog promjene tlaka po površini krila usled napadnog kuta. U slučaju profila ploče taj koeficijent induciranog otpora iznosi

$$KC_L^2 = C_N \sin \alpha .$$

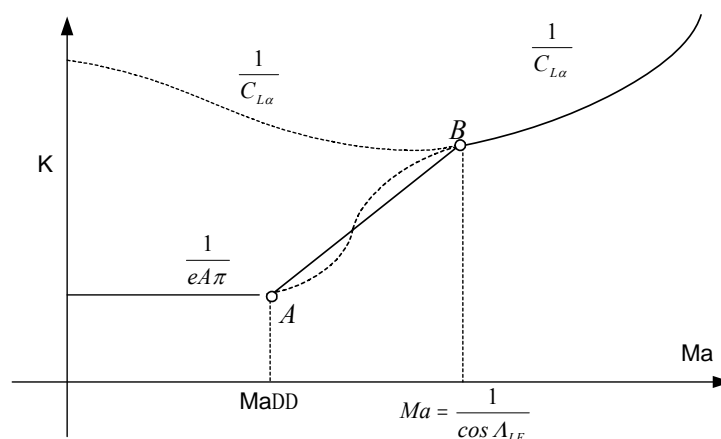
Iz ove jednadžbe dobivamo

$$K = \frac{1}{C_{L\alpha}} .$$

Na granicama transonike dva su ekstremna slučaja:

- do Ma_{cr} kad postoji sila u pravcu gibanja $S = 1$ odgovara joj $K = \frac{1}{\pi A}$ i
- od Ma_{LE} kad nema sile u pravcu gibanja $S = 0$ tada je $K = \frac{1}{C_{L\alpha}}$.

Za Machove brojeve u transonici $Ma_{cr} < Ma < Ma_{LE}$ pretpostavlja se da postoji djelomično opstrujavanje prednjeg ruba $1 > S > 0$. Primijenit ćemo stoga linearnu interpolaciju u tom intervalu, ali tako da za vrijednost Ma_{DD} odgovara $K_1 = 1/eA\pi$, a za Ma_{LE} je $K_0 = 1/C_{L\alpha}$.



Slika 12. Koeficijent K u ovisnosti o Machovu broju

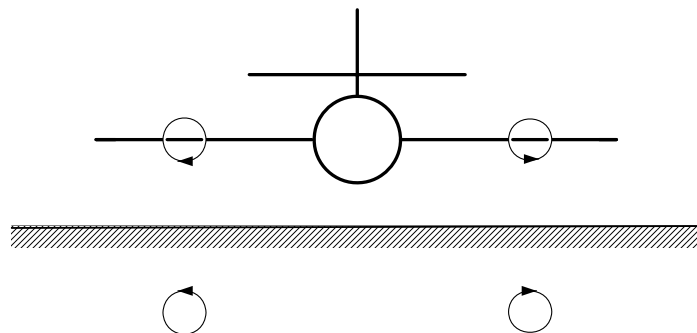
To znači da je u tom intervalu za zadani Machov broj koeficijent linearne interpolacije

$$\xi = \frac{Ma - Ma_{DD}}{Ma_{LE} - Ma_{DD}}$$

te je K za zadanu vrijednost Ma dano jednadžbom

$$K = \frac{1}{eA\pi} + \xi \left(\frac{1}{C_{L\alpha}} - \frac{1}{eA\pi} \right).$$

Na slici 3-11 predstavljena je promjena $K(Ma)$. U subsonici $Ma < Ma_{DD}$ je $K = 1/eA\pi$. U supersonici za vrijednosti $Ma > Ma_{LE}$, kada je napadni rub krila supersoničan, $K = 1/C_{L\alpha}$. Konačno, od točke A do točke B ostala je nepoznata prijelazna krivulja. Poslužit ćemo se vrijednostima koje dobivamo linearnom interpolacijom koeficijenta K od točke A do točke B .



Slika 13. Simetrični fiktivni vrtlozi

Na veličinu induciranog otpora utječe i prisutnost tla. U trenutku polijetanja i slijetanja tlo utječe na sliku opstrujavanja krila. Iz graničnih uvjeta da brzina zraka pri opstrujavanju krila mora biti tangencijalna s tlom, zaključuje se da u tlu mora postojati za svaki elementarni vrtlog koji silazi s krila, odgovarajući i fiktivni vrtlog jednakog intenziteta, suprotnog smjera i simetrične pozicije u odnosu na stvarni vrtlog. Ti fiktivni vrtlozi uzrokuju promjene slike opstrujavanja krila, a to znači da mijenjaju i uzgon krila i inducirani otpor krila. Izmjene će ovisiti o udaljenosti krila od tla. Glauertova teorija u ovom slučaju daje odnos

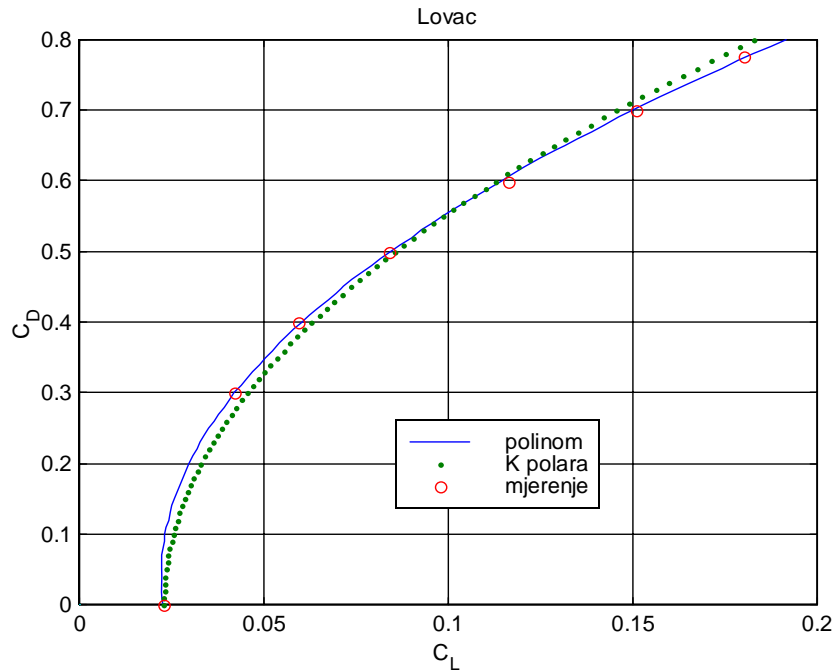
$$\frac{C_{Di \text{ ground}}}{C_{Di}} = \frac{\left(16 \frac{h}{b}\right)^2}{1 + \left(16 \frac{h}{b}\right)^2}.$$

U toj jednadžbi je h visina krila od tla, a b raspon krila na zrakoplovu.

3.7.1 Primjer

Mjerenja u aerotunelu otpora i uzgona zrakoplova *lovca* pri $Ma = 0.8$ i pri različitim napadnim kutovima dala su ove rezultate

C_L	0.000	0.300	0.400	0.500	0.600	0.700	0.776
C_D	0.0228	0.042	0.0593	0.084	0.116	0.1506	0.180



Slika 14. Slika mjerene polare i usklađene

Na temelju tih mjerenja treba odrediti stvarnu polaru i polaru oblika

$$C_D = C_{D0} + KC_L^2.$$

U MATLAB-u napravljen je program *Polara.m* koji se nalazi na disketi u direktoriju *Aerodinamika*, s kojim je nacrtan dijagram na slici 3-13. Najbolji polinom drugoga reda jest

$$C_D = 0.0226 - 0.0226 \cdot C_L + 0.2924 \cdot C_L^2 = 0.0222 + 0.293 \cdot (C_L - 0.0386)^2$$

Taj polinom prolazi kroz mjerene točke. Ako želimo oblik bez linearnog člana po napdnom kutu pogodan za analizu performansi, onda je rezultat

$$C_D = 0.0228 + 0.250 \cdot C_L^2$$

Ovu polaru dobit ćemo ako svakoj točki C_D, C_L dodamo simetričnu točku $C_D, -C_L$ pa odredimo najbolji polinom drugog reda za sve točke.

4 NORMALNA SILA I MOMENT PROPINJANJA

Aerodinamički koeficijent normalne sile i momenta propinjanja imaju oblik

$$C_N = f_N(\alpha, \dot{\alpha}^*, q^*, \delta_m)$$

$$C_m = f_m(\alpha, \dot{\alpha}^*, q^*, \delta_m).$$

Ako te funkcije razvijemo u red, dobivamo linearnu zavisnost aerodinamičkog koeficijenta normalne sile i momenta propinjanja:

$$C_N = C_{N_0} + C_{N\alpha}\alpha + C_{N\dot{\alpha}}\dot{\alpha}^* + C_{Nq}q^* + C_{N\delta_m}\delta_m$$

$$C_m = C_{m_0} + C_{m\alpha}\alpha + C_{m\dot{\alpha}}\dot{\alpha}^* + C_{mq}q^* + C_{m\delta_m}\delta_m$$

Ovim lineariziranim modelom možemo se služiti ako su parametri α , $\dot{\alpha}^*$, q^* i δ_m male veličine u odnosu na interval u kome se aerodinamički koeficijenti C_N i C_m ponašaju linearno. To uvijek vrijedi za putničke i transportne zrakoplove, ali za sportske i borbene zrakoplove koji trebaju velike manevarske sposobnosti to treba provjeriti.

Analiza performansi letjelice podrazumijeva ravnotežni, stacionarni let te se nestacionarni parametri $\dot{\alpha}^*$ i q^* ne uzimaju u obzir tako da su aerodinamički koeficijenti normalne sile i momenta propinjanja

$$C_N = C_{N_0} + C_{N\alpha}\alpha + C_{N\delta_m}\delta_m$$

$$C_m = C_{m_0} + C_{m\alpha}\alpha + C_{m\delta_m}\delta_m.$$

Normalnu silu kao i aerodinamički moment propinjanja zrakoplova stvaraju svi dijelovi zrakoplova: kombinacija krilo-tijelo, kombinacija horizontalni rep-tijelo (ili kombinacija canari-tijelo u slučaju *canard* konfiguracije) i tijelo:

$$C_N = (C_N)_{WB} + (C_N)_{hB} + (C_N)_B$$

$$C_m = (C_m)_{WB} + (C_m)_{hB} + (C_m)_B$$

To načelo superpozicije vrijedi i za nulte članove i za gradijente. Tako je za nulte članove

$$C_{N0} = (C_{N0})_{WB} + (C_{N0})_{hB} + (C_{N0})_B$$

$$C_{m0} = (C_{m0})_{WB} + (C_{m0})_{hB} + (C_{m0})_B,$$

a za gradijent na primjer po napadnom kutu

$$C_{N\alpha} = (C_{N\alpha})_{WB} + (C_{N\alpha})_{hB} + (C_{N\alpha})_B$$

$$C_{m\alpha} = (C_{m\alpha})_{WB} + (C_{m\alpha})_{hB} + (C_{m\alpha})_B.$$

Isto tako možemo pisati i za druge gradijente, samo što gradijente po otklonu kormila visine stvara samo kombinacija horizontalni rep-tijelo:

$$C_{N\delta_m} = (C_{N\delta_m})_{hB}$$

$$C_{m\delta_m} = (C_{m\delta_m})_{hB}$$

Zato ćemo za potrebe normalne sile i momenta propinjanja analizirati posebno kombinaciju krilo - tijelo, zatim horizontalni rep - tijelo i konačno samo tijelo.

4.1 Normalna sila i moment propinjanja kombinacije BW

Trebamo razlikovati napadni kut krila α_w od napadnog kuta zrakoplova α . Napadani kut krila mjerimo od aerodinamičke brzine do korenske tetive, a napadni kut zrakoplova od aerodinamičke brzine do glavne osi tromosti x . Kako je korenska tetiva postavljena pod kutom i_w (postavni kut krila) u odnosu na os x tromosti zrakoplova, dobivamo vezu

$$\alpha_w = \alpha + i_w.$$

Kao što je poznato iz aerodinamike krilo sa nesimetričnim profilom ima normalnu silu koja je linearna po napadnom kutu krila α_w

$$C_N = C_{N\alpha} (\alpha_w - \alpha_{0w}).$$

Ta normalna sila krila ima svoju napadnu točku na udaljenosti ℓ_{cw} od vrha letjelice. Moment propinjanja letjelice čine moment te sile, koji ovisi o napadnom kutu, i spreg propinjanja $(C_{m0})_w$ koji ne ovisi o napadnom kutu. Koeficijent $(C_{m0})_w$ i kut $(\alpha_0)_w$ karakteristike su krila koje ovise prije svega o profilu, a zatim i o obliku krila. Za tablične profile postoje podaci o $(C_{m0})_{prof}$ i $(\alpha_0)_{prof}$ (npr. lit. [1]). Ako krilo nije uvijeno i ima isti profil po rasponu, onda je

$$\alpha_{0w} = (\alpha_0)_{prof}$$

Ako je krilo uvijeno a to znači da je napadni kut promjenljiv po rasponu, onda treba odrediti prosječni ekvivalentni napadni kut α_{eq} koji daje istu normalnu silu kao promjenljiv $\alpha(y)$:

$$N_w(\alpha_{eq}) = 2 \int_0^{b/2} dN(\alpha)$$

Taj prosječni napadni kut α_{eq} predstavlja dio postavnog kuta krila. Oblik krila (vitkost i strijela napadnog ruba), mijenja spreg $(C_{m0})_w$ te on nije jednak $(C_{m0})_{prof}$. Utjecaj oblika krila može se procijeniti prema empirijskoj formuli

$$(C_{m0})_w = (C_{m0})_{prof} \frac{A \cos^2 \Lambda_{LE}}{A + 2 \cos \Lambda_{LE}}.$$

Za kombinaciju krilo-tijelo usvojiti ćemo da je $(C_{m0})_{WB} = (C_{m0})_W$, ali se $(C_{m0})_W$ treba izračunati prema gornjoj jednadžbi za krilo s podtrupnim dijelom.

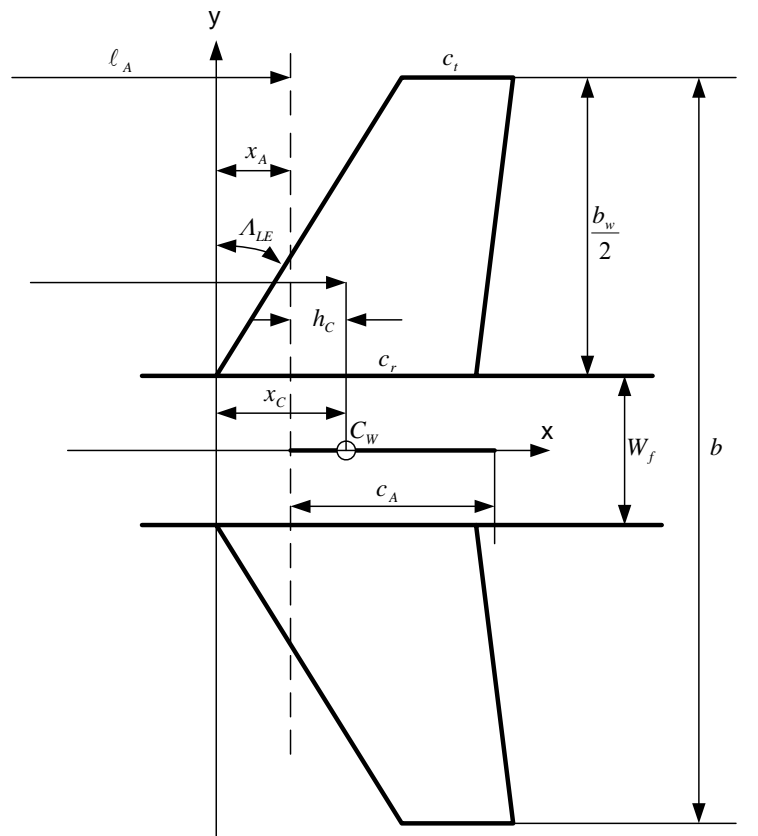
U odjeljku 2.3 vidjeli smo da je ekvivalentni napadni kut krila

$$\alpha_{BW} = K_{BW}\alpha + k_{BWw}(i_w - \alpha_{0W}),$$

što daje normalnu silu kombinacije

$$N_{BW} = \frac{\rho V^2}{2} S_w (C_{N\alpha})_w [K_{BW}\alpha + k_{BW}(i_w - \alpha_{0W})]$$

gdje je S_w površina *samog krila*. Treba napomenuti da krilo stvara još jednu normalnu komponentu u sprezi s tijelom. Naime, krilo ima i aksijalnu silu $A_w = \frac{\rho V^2}{2} S_w (C_A)_w$ u pravcu tetive krila kao na slici 3-14.



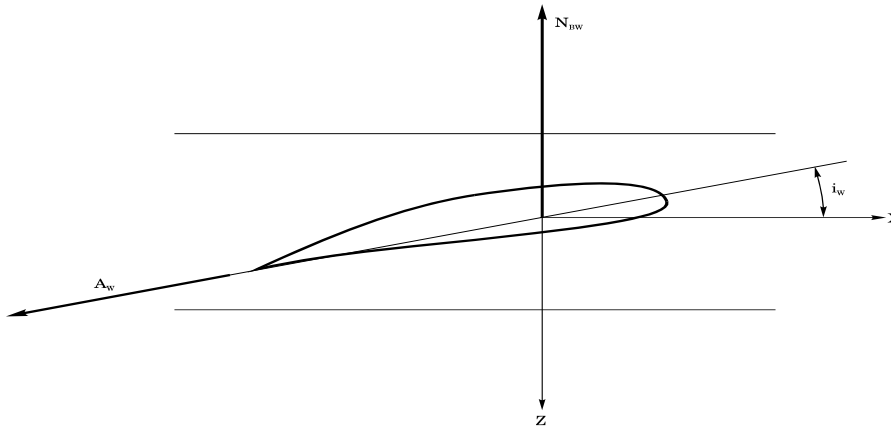
Slika 1. Kombinacija krilo tijelo

Ta sila ima komponentu $A_w \sin i_w \approx A_w i_w$ u pravcu osi tromosti z pa je

$$N_{BW} = \frac{\rho V^2}{2} S_w (C_{N\alpha})_w [K_{BW}\alpha + k_{BW}(i_w - \alpha_{0W})] - \frac{\rho V^2}{2} S_w (C_A)_w i_w$$

Dijeljenjem s referentnom silom $\frac{\rho V^2}{2} S_{ref}$ dobivamo koeficijent normalne sile kombinacije tijelo-krilo:

$$(C_N)_{BW} = \frac{S_w}{S_{ref}} \{ (C_{N\alpha})_w [K_{BW} \alpha + k_{BW} (i_w - \alpha_{0L})] - (C_A)_w i_w \}.$$



Slika 2. Normalna sila kombinacije i aksijalna sila krila

U većini slučajeva opravdano je zanemariti $(C_A)_w$ u odnosu na $(C_{N\alpha})_w$. Zato ćemo se u daljnjem radu koristiti koeficijentom normalne sile kombinacije tijelo-krilo u obliku:

$$(C_N)_{BW} = \frac{S_w}{S_{ref}} (C_{N\alpha})_w [K_{BW} \alpha + k_{BW} (i_w - \alpha_{0W})].$$

Iz ove jednadžbe nalazimo da je nulti član kombinacije krilo-tijelo

$$(C_{N0})_{BW} = \frac{S_w}{S_{ref}} (C_{N\alpha})_w k_{BW} (i_w - \alpha_{0W}),$$

da je gradijent po napadnom kutu

$$(C_{N\alpha})_{BW} = \frac{S_w}{S_{ref}} (C_{N\alpha})_w K_{BW},$$

te konačno da je gradijent normalne sile kombinacije po otklonu kormila visine

$$(C_{N\delta_m})_{BW} = 0$$

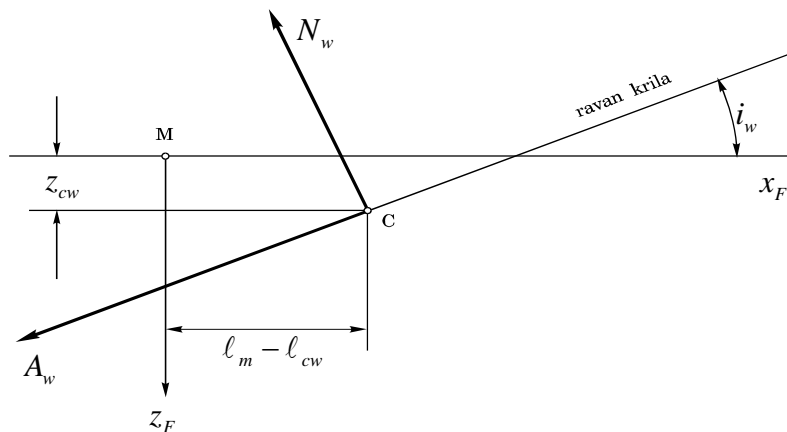
jer normalna sila kombinacije krilo-tijelo ne ovisi o otklonu kormila visine.

Koordinate napadne točke normalne sile krila N_w i aksijalne sile A_w u koordinatnom sustavu zrakoplova su $(\ell_m - \ell_{cw}, 0, z_w)$, te je moment propinjanja tih sila za os y tromosti zrakoplova

$$(N_w \cos i_w - A_w \sin i_w)(l_m - l_{cw}) - (N_w \sin i_w + A_w \cos i_w)z_w$$

Uočimo da je svejedno mjerimo li udaljenosti od vrha letjelice ili od aerodinamičkog središta jer je razlika udaljenosti ista: $l_m - l_{cw} = h_m - h_{cw}$. Postavni kut krila i_w uvijek je mali pa je moment ovih sila:

$$\begin{aligned} (N_w - A_w i_w)(l_m - l_{cw}) - (N_w i_w + A_w)z_w &= \\ &= N_w (l_m - l_{cw}) \left[1 - \frac{A_w i_w}{N_w} - \frac{i_w z_w}{l_m - l_{cw}} - \frac{A_w z_w}{N_w (l_m - l_{cw})} \right] \end{aligned}$$



Slika 3. Položaj normalne i aksijalne sile krila

U većini slučajeva mogu se zanemariti članovi

$$\frac{A_w i_w}{N_w}, \quad \frac{i_w z_w}{l_m - l_{cw}}, \quad \frac{A_w z_w}{N_w (l_m - l_{cw})}$$

u odnosu na jedinicu. To se može provjeriti u svakom konkretnom slučaju, te ako uvjet nije ispunjen, mogu se uzeti u obzir svi članovi. Radi jednostavnosti pretpostavit ćemo u daljnjem tekstu da je taj uvjet ispunjen pa je moment propinjanja zrakoplova od aerodinamičkih sila krila za središte mase zrakoplova zbroj sprega propinjanja krila i momenta normalne sile kombinacije tijelo-krilo:

$$M_{BW} = M_{oW} + N_{WB} (l_m - l_{cw})$$

$$\frac{\rho V^2}{2} S_{ref} c_A (C_m)_{WB} = \frac{\rho V^2}{2} S_{ref} c_A (C_{m0})_{WB} + \frac{\rho V^2}{2} S_w (C_{N\alpha})_w [K_{BW} \alpha + k_{BW} (i_w - \alpha_{0L})] (l_m - l_{cw}).$$

Dijeljenjem ove jednadžbe s referentnim momentom $\frac{\rho V^2}{2} S_{ref} c_A$ dobivamo koeficijent momenta propinjanja za središte mase od kombinacije tijelo-krilo :

$$(C_m)_{BW} = (C_{m0})_{WB} + \frac{S_w}{S_{ref}} (C_{N\alpha})_w [K_{BW}\alpha + k_{BW}(i_w - \alpha_{0L})](\bar{\ell}_m - \bar{\ell}_{cw})$$

Kada je napadni kut zrakoplova jednak nuli, koeficijent momenta propinjanja je

$$(C_{m0})_{BW} = (C_{m0})_w + \frac{S_w}{S_{ref}} [(C_{N\alpha})_w k_{BW}(i_w - \alpha_{0L})](\bar{\ell}_m - \bar{\ell}_{cw}).$$

Derivacijom po napadnom kutu, dobivamo gradijent koeficijenta momenta propinjanja kombinacije krilo-tijelo:

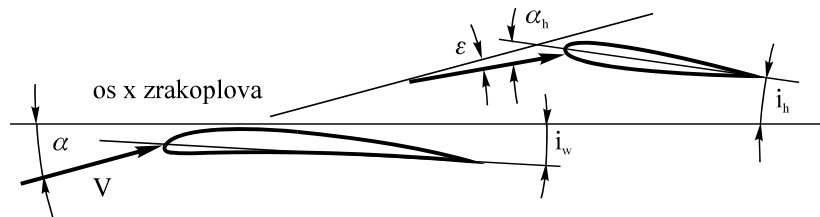
$$(C_{m\alpha})_{BW} = \frac{S_w}{S_{ref}} K_{BW} (C_{N\alpha})_w (\bar{\ell}_m - \bar{\ell}_{cw}).$$

Jasno je da je derivacija $(C_{m\delta_m})_{BW} = 0$, jer normalna sila pa i njen moment kombinacije tijelo-krilo ne ovisi o odklonu kormila visine.

4.2 Normalna sila i moment propinjanja kombinacije hB

Normalna sila horizontalnog repa ima dva dijela. Prvi je uslijed napadnog kuta na kombinaciji horizontalni rep-tijelo α_h , a drugi uslijed odklona upravljačkih površina δ_m . Napadni kut kombinacije horizontalni rep-trup bit će jednak napadnom kutu zrakoplova umanjenom za savijanje struje ε :

$$\alpha - \varepsilon,$$



Slika 4. Napadni kut horizontalnog repa

gdje je $\varepsilon = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} (\alpha + i_w - \alpha_{0W})$. U toj kombinaciji horizontalni rep postavljen je pod kutom i_h

u odnosu na tijelo. Prema tome, ekvivalentni napadni kut na horizontalnom repu je

$$\alpha_{BH} = K_{BH} \left[\alpha - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} (\alpha + i_w - \alpha_{0W}) \right] + k_{BH} i_h.$$

U ovoj jednadžbi nema nultog kuta profila horizontalnog repa zato što horizontalni rep ima obično simetričan profil za koji je $\alpha_{0h} = 0$.

Objekti komponente normalne sile na horizontalnom repu imaju gubitke zbog smanjenog dinamičkog tlaka iza krila. Taj gubitak uzimamo u obzir množenjem dinamičkog tlaka s koeficijentom η_h . Komponenta zbog otklona upravljačke površine δ_m ima još dodatne gubitke kroz zazor između nepokretnog (dio horizontalnog repa) i pokretnog dijela noseće površine (kormilo visine). Te gubitke uzimamo u obzir time što dinamički tlak te komponente smanjujemo množeći ga s još jednim koeficijentom η_{slot} , koji procjenjujemo u subsonici $\eta_{slot} = 0.85$, a u supersonici je znatno manji te se može u prvoj iteraciji zanemariti ($\eta_{slot} = 1$). Tako zaključujemo da je ukupna normalna sila kombinacije horizontalni rep-tijelo:

$$N_{hB} = \eta_h \frac{\rho V^2}{2} S_h (C_{N\alpha})_h \left\{ K_{BH} \left[\alpha - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} (\alpha + i_w - \alpha_{0L}) \right] + k_{BH} i_h \right\} + \eta_h \eta_{slot} \frac{\rho V^2}{2} S_h (C_{N\delta})_h \delta_m$$

Dijeljenjem ove jednadžbe s referentnom silom $\frac{\rho V^2}{2} S_{ref}$ dobivamo koeficijent normalne sile zrakoplova koji stvara kombinacija horizontalni rep-tijelo

$$(C_N)_{hB} = \eta_h \frac{S_h}{S_{ref}} \left\{ (C_{N\alpha})_h \left\{ K_{BH} \left[\alpha - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} (\alpha + i_w - \alpha_0) \right] + k_{BH} i_h \right\} + \eta_{slot} (C_{N\delta})_h \delta_m \right\}$$

U ovoj jednadžbi je $(C_{N\alpha})_h$ određeno u odjeljku 2.2.3, a K_{BH} je određeno za odnos promjera trupa na mjestu horizontalnog repa prema rasponu kombinacije horizontalni rep – trup i k_{BH} u odjeljku 2.3. Kada je trup malog promjera na mjestu horizontalnog repa, onda se obično zanemaruje koeficijent interferencije ($K_{BW} = k_{BW} = 1$) te je tada

$$(C_N)_{hB} = \eta_h \frac{S_h}{S_{ref}} \left\{ (C_{N\alpha})_h \left[\alpha - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} (\alpha + i_w - \alpha_0) + i_h \right] + \eta_{slot} (C_{N\delta})_h \delta_m \right\}.$$

Iz ove jednadžbe dobivamo da je

$$(C_{N0})_{hB} = \eta_h \frac{S_h}{S_{ref}} (C_{N\alpha})_h \left[-\frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} (i_w - \alpha_0) + i_h \right]$$

$$(C_{N\alpha})_{hB} = \eta_h \frac{S_h}{S_{ref}} (C_{N\alpha})_h \left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} \right)$$

$$(C_{N\delta_m})_{hB} = \eta_h \eta_{slot} \frac{S_h}{S_{ref}} (C_{N\delta})_h,$$

pa je konačno koeficijent normalne sile horizontalnog repa (za referentni tlak i referentnu površinu zrakoplova)

$$(C_N)_{hB} = (C_{N0})_{hB} + (C_{N\alpha})_{hB} \alpha + (C_{N\delta_m})_{hB} \delta_m.$$

Budući da ne postoji spreg od horizontalnog repa jer je profil horizontalnog repa obično simetričan, moment propinjanja za središte mase od horizontalnog repa ima također tri dijela, a to su momenti za središte mase ova triju dijelova normalne sile. Prvi i drugi dio normalne sile na repu, $(C_{N0})_{hB}$ i $(C_{N\alpha})_{hB} \alpha$, imaju hvatište u napadnoj točki normalne sile horizontalnog repa na udaljenosti ℓ_{ch} od vrha letjelice ($\bar{\ell}_{ch}$ poslije dijeljenja s referentnom duljinom propinjanja c_A). Zato je prvi dio koeficijent momenta propinjanja za središte mase od prvoga dijela normalne sile na repu

$$(C_{m0})_{hB} = -(C_{N0})_{hB} (\bar{\ell}_{ch} - \bar{\ell}_m)$$

kao i drugi

$$(C_{m\alpha})_{hB} \alpha = -(C_{N\alpha})_{hB} \alpha \cdot (\bar{\ell}_{ch} - \bar{\ell}_m).$$

Komponenta normalne sile na horizontalnom repu uslijed otklona upravljачke površine δ_m ima hvatište na udaljenosti $\ell_{\delta h}$ od vrha letjelice, te je koeficijent njenog momenta propinjanja

$$(C_{m\delta_m})_{hB} \delta_m = -(C_{N\delta_m})_{hB} \delta_m \cdot (\bar{\ell}_{\delta h} - \bar{\ell}_m).$$

Tako zaključujemo da je koeficijent momenta propinjanja za središte mase od horizontalnog repa

$$(C_m)_{hB} = -[(C_{N0})_{hB} + (C_{N\alpha})_{hB} \alpha] \cdot (\bar{\ell}_{ch} - \bar{\ell}_m) - (C_{N\delta})_{hB} \delta_m \cdot (\bar{\ell}_{\delta h} - \bar{\ell}_m)$$

ili

$$(C_m)_{hB} = -\eta_h \frac{S_h}{S_{ref}} \left\{ (C_{N\alpha})_h \left[\alpha - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} (\alpha + i_w - \alpha_{0w}) + i_h \right] (\bar{\ell}_{ch} - \bar{\ell}_m) + \eta_{slot} (C_{N\delta})_h \delta_m (\bar{\ell}_{\delta h} - \bar{\ell}_m) \right\}$$

Taj koeficijent ima tri dijela. Prvi je konstantan

$$(C_{m0})_{hB} = -\eta_h \frac{S_h}{S_{ref}} (C_{N\alpha})_h \left[-\frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} (i_w - \alpha_{0w}) + i_h \right] (\bar{\ell}_{ch} - \bar{\ell}_m)$$

Drugi je proporcionalan napadnom kutu α , a njegov gradijent je

$$(C_{m\alpha})_{hB} = -\eta_h \frac{S_h}{S_{ref}} (C_{N\alpha})_h \left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} \right) (\bar{\ell}_{ch} - \bar{\ell}_m)$$

i treći koji je proporcionalan otklonu kormila visine δ_m , s gradijentom

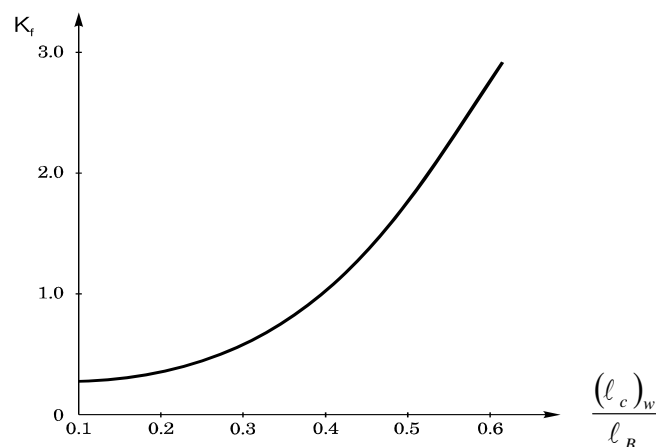
$$(C_{m\delta_m})_{hB} = -\eta_h \eta_{slot} \frac{S_h}{S_{ref}} (C_{N\delta})_h (\bar{\ell}_{\delta h} - \bar{\ell}_m).$$

Gradijent $(C_{N\delta})_h$ horizontalnog repa po otklonu kormila visine odredili smo u odjeljku 2.2.7. U supersonici cijeli horizontalni rep je kormilo visine te je $(C_{N\delta})_h = (C_{N\alpha})_h$ a hvatište $\ell_{\delta h} = \ell_{ch}$.

4.3 Moment propinjanja tijela

Na prednjem divergentnom dijelu tijela javlja se pozitivna normalna sila (sila uzgona), a na zadnjem konvergentnom dijelu javlja se negativna normalna sila (negativan uzgon). Te dvije sile približno su slične, pa je njihova rezultanta zanemariva, ali one čine spreg koji treba uzeti u obzir i koji je proporcionalan napadnom kutu tijela. Taj spreg možemo procijeniti pomoću empirijske formule prema [18]:

$$(C_m)_B = K_f \frac{W_B^2 \ell_B}{c_A S_{ref}} \alpha$$



Slika 5. Koeficijent sprega propinjanja trupa

W_B i ℓ_B su širina i duljina tijela, a K_f je koeficijent koji ovisi o odnosu udaljenosti napadne točke krila od vrha $(\ell_c)_w$, prema ukupnoj duljini tijela ℓ_B .

Ako tijelo nema zadnji konvergentni dio, ili ako je suženje na zadnjem dijelu malo, ova jednadžba ne daje realnu procjenu. U tom slučaju treba upotrijebiti procjene iz lit [27].

4.4 Nulti članovi i gradijenti normalne sile i momenta propinjanja

Sada imamo sve dijelove nultih članova i gradijenata po napadnom kutu i po otklonu kormila visine od koeficijenata normalne sile i momenta propinjanja.

Nulti član normalne sile je zbroj članova normalne sile kombinacije krilo - trup i horizontalni rep - trup:

$$C_{N0} = (C_{N0})_{WB} + (C_{N0})_{hB}$$

$$C_{N0} = \frac{S_w}{S_{ref}} (C_{N\alpha})_w k_{BW} (i_w - \alpha_{0L}) + \eta_h \frac{S_h}{S_{ref}} (C_{N\alpha})_h \left[-K_{hB} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} (i_w - \alpha_0) + k_{hB} i_h \right]$$

Nulti član koeficijenta momenta propinjanja također je zbroj

$$C_{m0} = (C_{m0})_{WB} + (C_{m0})_{hB}$$

$$C_{m0} = \frac{S_w}{S_{ref}} \left[(C_{m0})_w + (C_{N\alpha})_w k_{BW} (i_w - \alpha_{0L}) (\bar{\ell}_m - \bar{\ell}_{cw}) \right] -$$

$$- \eta_h \frac{S_h}{S_{ref}} (C_{N\alpha})_h \left[-K_{hB} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} (i_w - \alpha_{0w}) + k_{hB} i_h \right] (\bar{\ell}_{ch} - \bar{\ell}_m)$$

U gradijentu normalne sile ne sudjeluje tijelo već samo kombinacija krilo-tijelo i kombinacija horizontalan rep-tijelo

$$C_{N\alpha} = (C_{N\alpha})_{WB} + (C_{N\alpha})_{hB}$$

$$C_{N\alpha} = \frac{S_w}{S_{ref}} (C_{N\alpha})_w K_{BW} + \eta_h \frac{S_h}{S_{ref}} (C_{N\alpha})_h K_{hB} \left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} \right)$$

U gradijentu po napadnom kutu momenta propinjanja sudjeluju sva tri dijela:

$$C_{m\alpha} = (C_{m\alpha})_{WB} + (C_{m\alpha})_{hB} + (C_{m\alpha})_B.$$

Taj je zbroj:

$$C_{m\alpha} = \frac{S_w}{S_{ref}} K_{BW} (C_{N\alpha})_w (\bar{\ell}_m - \bar{\ell}_{cw}) - \eta_h \frac{S_h}{S_{ref}} (C_{N\alpha})_h \left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} \right) (\bar{\ell}_{ch} - \bar{\ell}_m) + K_f \frac{W_B^2 \ell_B}{C_A S_{ref}}$$

U gradijentu normalne sile po otklonu kormila visine kao i od momenta propinjanja sudjeluje samo horizontalni rep

$$C_{N\delta_m} = (C_{N\delta_m})_{hB} = \eta_h \eta_{slot} \frac{S_h}{S_{ref}} (C_{N\delta})_h$$

$$C_{m\delta_m} = (C_{m\delta_m})_{hB} = -\eta_h \eta_{slot} \frac{S_h}{S_{ref}} (C_{N\delta})_h (\bar{\ell}_{\delta h} - \bar{\ell}_m)$$

Ove jednadžbe za procjenu derivativa pokazuju nam utjecaj veličine i položaja krila i horizontalnog repa na njihovu veličinu. Točnija procjena derivativa $C_{N\alpha}$, $C_{m\alpha}$, $C_{N\delta_m}$ i $C_{m\delta_m}$ može se naći u lit.[28] i [29].

4.5 Primjer

Kao primjer aerodinamičkog proračuna izvršit ćemo procjenu aerodinamičkih koeficijenata u slučaju jednog malog putničkog zrakoplova. Dimenzije tog “malog zrakoplova” prikazane su na slici 4.7. Taj mali zrakoplov ima pojednostavljeni oblik zrakoplova CHEROKEE 180 PIPER (slika 4.6), da bi aerodinamički proračun bio olakšan. Neki podaci o zrakoplovu PIPER uzeti su iz lit.[14], a neki su dobiveni ljubaznošću tvrtke.

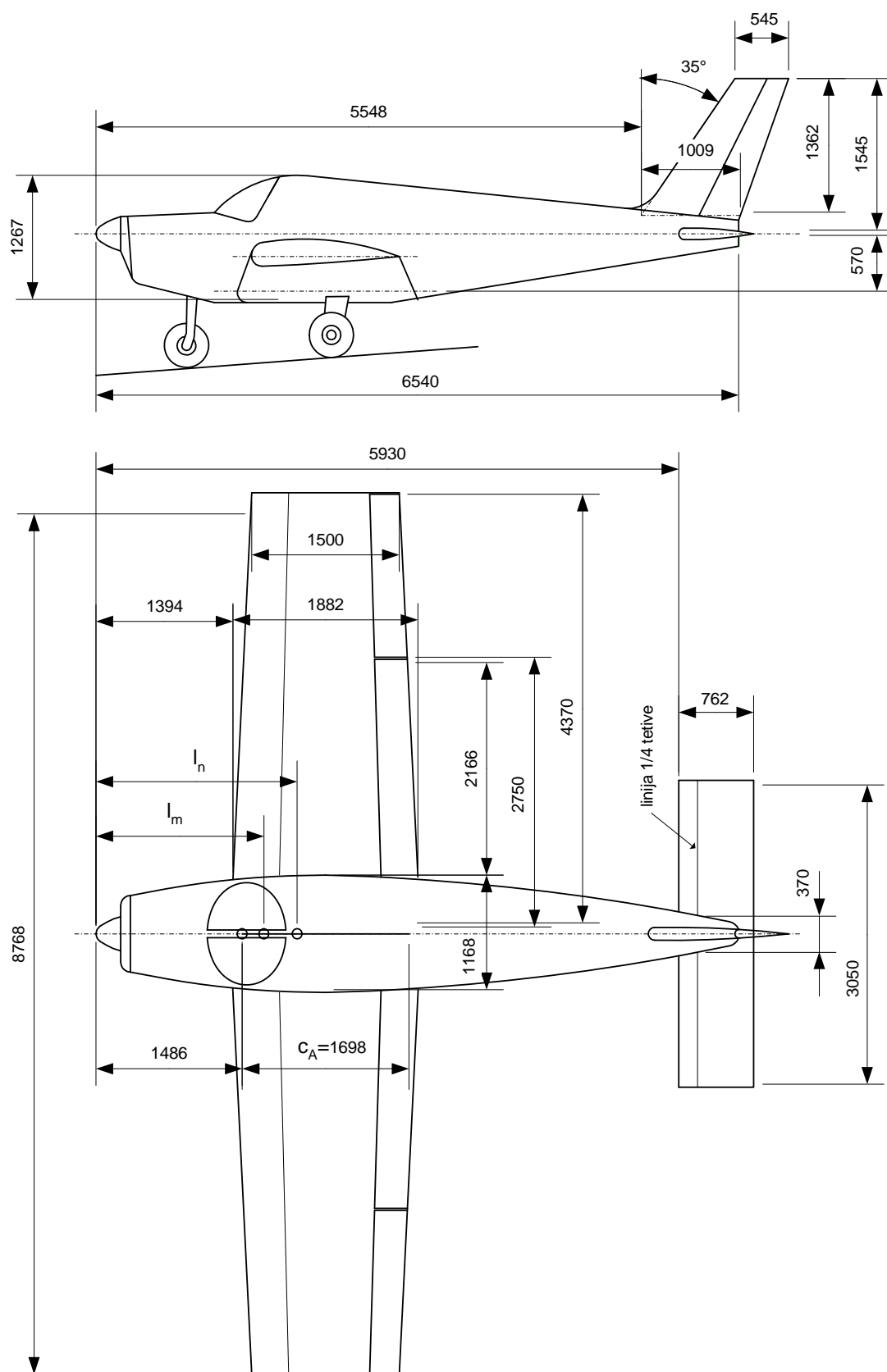


Slika 4-6 CHEROKEE 180 PIPER

4.5.1 Podaci i geometrija

Krilo (dva polukrila)

Korijenska tetiva	$c_r = 1.882 \text{ m}$
Vršna tetiva	$c_t = 1.500 \text{ m}$
Raspon dva polukrila	$b_w = 7.600 \text{ m}$
Strijela prednjeg ruba krila	$\Lambda_m = 0$
Udaljenost krila od ravni elise	$\ell_{0W} = 1.394 \text{ m}$
Maksimalni uzgon krila	$C_{L\max} = 1.45$
profil krila	$NACA 65_2 - 415$
Tetiva krilaca	20% od tetive krila



Slika 4-7. Dimenzije malog zrakoplova

Kut strijele napadnog ruba:

$$\tan \Lambda_{LE} = \frac{c_r - c_t}{b_v} = \frac{1.882 - 1.500}{7.600} = 0.050 \Rightarrow \Lambda_{LE} = 2.88^\circ$$

Kut strijele geometrijskog mjesta točaka 25% tetive krila:

$$\tan \Lambda_{1/4} = \tan \Lambda_{LE} - 0.25 \frac{c_r - c_t}{b_v/2} = 0.0503 - 0.25 \frac{1.882 - 1.500}{3.800} = 0.0252 \Rightarrow \Lambda_{1/4} = 1.44^\circ$$

Kut strijele maksimalne debljine krila:

$$\tan \Lambda_t = \tan \Lambda_{LE} - \bar{x}_t \frac{c_r - c_t}{b_v/2} = 0.0503 - 0.4 \frac{1.882 - 1.500}{3.800} = 0.0101 \Rightarrow \Lambda_t = 0.58^\circ$$

Kut strijele osi otklona krilaca

$$\tan \Lambda_{HL} = \tan \Lambda_{LE} - \bar{x}_t \frac{c_r - c_t}{b_v/2} = 0.0503 - 0.8 \frac{1.882 - 1.500}{3.800} = -0.0301 \Rightarrow \Lambda_{HL} = -1.73^\circ$$

Površina dvaju polu krila

$$S_W = 2 \cdot \frac{c_r + c_t}{2} \frac{b_W}{2} = \frac{1.882 + 1.500}{2} \cdot 7.6000 = 12.85 \text{ m}^2$$

$$AR = \frac{b_W^2}{S_W} = \frac{7.600^2}{12.85} = 4.5$$

Za ishodište u vrhu krila

$$x_A = b_W \frac{1 + 2\lambda}{6(1 + \lambda)} \tan \Lambda_{LE} = 7.600 \cdot \frac{1 + 2 \cdot 0.797}{6(1 + 0.797)} 0.0503 = 0.092 \text{ m}$$

$$c_A = \frac{4}{3} \cdot \frac{S_W}{b_W} \left[1 - \frac{\lambda}{(\lambda + 1)^2} \right] = \frac{4}{3} \frac{12.85}{7.600} \left[1 - \frac{0.797}{(0.797 + 1)^2} \right] = 1.698 \text{ m}$$

$$\ell_A = \ell_{0W} + x_A = 1.394 + 0.092 = 1.486 \text{ m}$$

Za profil *NACA 65₂ - 415* lit [1] (str. 628 i 629), daje geometrijske karakteristike

$$\bar{t} = 0.15$$

$$\bar{x}_t = 0.4$$

i rezultate mjerenja za $Re = 6 \cdot 10^6$

$$c_{d \min} = 0.0042$$

$$c_{t\alpha} = 6.10$$

$$\alpha_{0L} = -2.6^\circ$$

$$c_{m0} = -0.060$$

To znači da ovaj profil ima najmanji koeficijent otpora $c_d = 0.0042$ ako je napadni kut profila u intervalu od -2° do $+4^\circ$. Zato zrakoplov treba u horizontalnom letu imati napadni kut koji odgovara intervalu u kome je ta minimalna vrijednost koeficijenta otpora profila.

Geometrija krilca

$$c_{\delta_t} / c = 0.2$$

$$y_{in} = 2.75$$

$$y_{out} = 4.37$$

Geometrija zakrilca

$$b_f / 2 = 2.17$$

$$c_f / c = 0.2$$

Tijelo

Zadani podaci

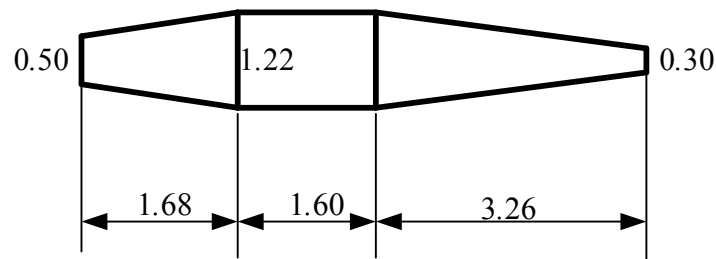
$$L_B = 6.54 \text{ m}$$

$$W_B = 1.17 \text{ m}$$

$$S_{max} = 1.17 \text{ m}^2$$

$$d_e = 2\sqrt{\frac{S_{max}}{\pi}} = 2\sqrt{\frac{1.17}{\pi}} = 1.22 \text{ m}$$

Da bi izračunali opstrujavanu površinu tijela zrakoplova, prednji i zadnji dio tijela zamijenit ćemo sa krnjim stošcem, a srednji s cilindrom, kao na slici 4-8.



Slika 4-8

Tako dobivamo procjenu opstrujavane površine

$$S_B = 4.64 + 6.13 + 7.86 = 18.63 \text{ m}^2$$

Horizontalni rep

Horizontalni rep je 0.304 iznad površine krila:

$$b_h = 3.05 \text{ m}$$

$$\ell_{0h} = 5.930 \text{ m}$$

$$c_r = c_t = 0.762 \text{ m}$$

$$h_{0h} = \ell_{0h} - \ell_A = 5.930 - 1.648 = 4.283 \text{ m}$$

Profil horizontalnog repa je NACA 0009. Za taj simetričan profil su prema lit [1], str 454 i 455, geometrijske karakteristike:

$$\bar{t} = 0.09$$

$$\bar{x}_t = 0.30$$

i rezultati mjerenja za $Re = 3 \cdot 10^6$

$$c_{d\min} = 0.052$$

$$c_{\ell\alpha} = 6.09$$

Na horizontalnom repu nalazi se kormilo visine po cijeloj duljini horizontalnog repa:

$$\frac{c_\delta}{c} = 0.2$$

Korisna površina repa

$$S_h = (b_h - d_h) \cdot c = (3.050 - 0.316) \cdot 0.762 = 2.08 \text{ m}^2$$

Vertikalni rep

$$\begin{array}{ll} c_r = 1.009 & \frac{b_v}{2} = 1.362 \\ c_t = 0.545 & \\ \ell_{0v} = 5.548 & \Lambda_{LE} = 35^\circ \end{array}$$

Suženje vertikalnog repa:

$$\lambda = \frac{c_t}{c_r} = \frac{0.545}{1.009} = 0.54$$

Izložena površina vertikalnog repa je

$$S_v = \frac{c_r + c_t}{2} \frac{b_v}{2} = \frac{1.009 + 0.545}{2} \cdot 1.362 = 1.058 \text{ m}^2$$

Vitkost vertikalnog repa

$$A_v = \frac{\ell^2}{S} = \frac{(2 \cdot 1.362)^2}{2 \cdot 1.058} = 3.50$$

Aerodinamička tetiva vertikalnog repa je

$$c_A = \frac{1}{S_v} \int_0^{b/2} c(y)^2 dy = \frac{1}{1.058} \int_0^{1.362} (1.009 - 0.341y)^2 dy = 0.834 \text{ m}$$

Aerodinamička apscisa vertikalnog repa

$$x_{AV} = b_v \frac{1 + 2\lambda}{6(1 + \lambda)} \tan \Lambda_{LE} = 2.724 \cdot \frac{1 + 2 \cdot 0.540}{6(1 + 0.540)} \cdot 0.700 = 0.429 \text{ m}$$

Profil vertikalnog repa je isti kao horizontalnog repa. Strijela najveće debljine vertikalnog repa je

$$A_t = \arctg\left(\tan A_{LE} - \bar{x}_t \frac{c_r - c_t}{b_v/2}\right) = \arctg\left(\operatorname{tg}35^\circ - 0.3 \frac{1.009 - 0.545}{1.362}\right) = 30.9^\circ$$

Strijela srednje crte vertikalnog repa je

$$\Lambda_m = \arctg\left(\tan \Lambda_{LE} - 0.5 \frac{c_r - c_t}{b_v/2}\right) = \arctg\left(\operatorname{tg}35^\circ - 0.5 \frac{1.009 - 0.545}{1.362}\right) = 27.9^\circ$$

Zrakoplov

$$b = 8.768 \quad \ell_m = 1.72 \text{ m}$$

$$c_0 = 1.941 \text{ m}$$

$$\ell_0 = 1.365 \text{ m}$$

Površina krila sa pod trupnim dijelom

$$S_{ref} = 2 \cdot \frac{c_0 + c_t}{2} \frac{b}{2} = \frac{1.941 + 1.500}{2} \cdot 8.768 = 15.09 \text{ m}^2$$

Za ishodište u vrhu krila

$$x_A = b \frac{1 + 2\lambda}{6(1 + \lambda)} \tan A_{LE} = 8.768 \cdot \frac{1 + 2 \cdot 0.773}{6(1 + 0.773)} \cdot 0.0503 = 0.106 \text{ m}$$

$$c_A = \frac{4}{3} \cdot \frac{S_{ref}}{b} \left[1 - \frac{\lambda}{(\lambda + 1)^2}\right] = \frac{4}{3} \frac{15.09}{8.768} \left[1 - \frac{0.773}{(0.773 + 1)^2}\right] = 1.730 \text{ m}$$

Postavit ćemo ishodište u početak aerodinamičke tetive krila sa pod trupnim dijelom. Prema podacima, to ishodište je udaljeno od vrha letjelice:

$$\ell_A = \ell_0 + x_A = 1.365 + 0.106 = 1.471 \text{ m}$$

$$h_m = \ell_m - \ell_A = 1.708 - 1.471 = 0.237 \text{ m}$$

$$\bar{h}_m = \frac{h_m}{c_A} = \frac{0.237}{1.730} = 0.137$$

Brzina leta $V = 45 \text{ m/s}$.

Vitkost krila s podtrupnim dijelom:

$$AR = \frac{b^2}{S_{ref}} = \frac{8.768^2}{15.09} = 5.09$$

Oswaldov koeficijent inducirano otpora je $e = 0.60$. Njemu odgovara

$$K = \frac{1}{e\pi AR} = \frac{1}{0.60 \cdot \pi \cdot 5.09} = 0.104.$$

4.5.2 Otpor

Krilo

Koeficijent trenja na ploči ovisi o mjestu tranzicije $\bar{\ell}_t$ i o Reynoldsovu broju

$$(c_t)_{ploce} = \frac{1.3}{\sqrt{Re}} \sqrt{\bar{\ell}_t} + \frac{3.91}{(\ln Re)^{2.58}} (1 - \bar{\ell}_t^{0.8})$$

Reynoldsov broj jest

$$Re = \frac{Vc_A}{\nu} = \frac{45 \cdot 1.73}{1.46 \cdot 10^{-5}} = 5.2 \cdot 10^6$$

Sobzirom da je Reynoldsov broj veći od 10^6 smatraćemo da je granični sloj na krilu turbulentan.

$$(c_f)_{ploce} = \frac{3.91}{(\ln 5.2 \cdot 10^6)^{2.58}} = 0.0033$$

Korekcija zbog relativne debljine:

$$F_F = \left(1 + \frac{0.6 \cdot \bar{t}}{\bar{x}_m} + 100 \cdot \bar{t}^4 \right) = \left(1 + \frac{0.6 \cdot 0.15}{0.4} + 100 \cdot 0.15^4 \right) = 1.27$$

Za male vrijednosti Machova broja nije potrebna korekcija za stlačivost ($F_{Ma} = 1$). U tom slučaju je koeficijent otpora profila:

$$c_d(\bar{\ell}_t) = F_F F_{Ma} 2(c_f)_{ploce} = 1.27 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 0.0033 = 0.0084$$

Odnos koeficijent otpora krila prema koeficijentu otpora profila određen je koeficijentom

$$F_S = (\cos \Lambda_{0.4})^{0.28} = (\cos 0.58^\circ)^{0.28} \approx 1$$

Konačno dobivamo koeficijent otpora krila za referentnu površinu $S_{ref} = 15.1 \text{ m}^2$:

$$(C_{Df})_W = \frac{S_W}{S_{ref}} \cdot c_d \cdot F_S = \frac{12.85}{15.1} \cdot 0.0084 \cdot 1.0 = 0.0071$$

Tijelo

Reynoldsov broj određujemo za duljinu tijela:

$$Re = \frac{V\ell_B}{\nu} = \frac{45 \cdot 6.54}{1.46 \cdot 10^{-5}} = 20.2 \cdot 10^6$$

Zbog elise pretpostavljamo da je cijeli granični sloj na tijelu turbulentan, te je koeficijent trenja

$$(c_f)_{ploce} = \frac{3.91}{[\ln(Re)]^{2.58}} = \frac{3.91}{[\ln(20.2 \cdot 10^6)]^{2.58}} = 0.00269$$

Ekvivalentni promjer kruga površine maksimalnog presjeka tijela je $d = 1.22 \text{ m}$ pa je vitkost tijela $f = 6.54/1.22 = 5.36$. Toj vitkosti odgovara koeficijent korekcije zbog oblika tijela

$$F_F = 1 + \frac{60}{f^3} + \frac{f}{400} = 1 + \frac{60}{5.36^3} + \frac{5.36}{400} = 1.40$$

Ovaj koeficijent oblika odgovara pravilnom rotacijskom tijelu. Kabina se uglavnom uklapa u oblik, pa treba malo povećati taj koeficijent zbog kabine za 10%, ali zbog oblika poprečnog presjeka koji nije kružan treba povećati taj koeficijent oblika za 30%.

$$F_F = 1.40 \cdot 1.10 \cdot 1.30 = 2.00$$

Kao i za krilo, i ovdje je koeficijent korekcije zbog stlačivosti $F_{Ma} = 1$. Procjena je opstrujavane površine tijela zrakoplova (vidi podatke u prilogu)

$$S_B = 18,63 \text{ m}^2$$

Kao i za krilo, i za tijelo je $Q_B = 1$, pa je otpor trenja tijela:

$$(C_{Df})_B = \frac{S_B}{S_{ref}} (c_f)_{ploca} F_F F_{Ma} = \frac{18.6}{15.1} \cdot 0.0027 \cdot 2.00 \cdot 1 = 0.0066$$

Čelna površina vjetrobrana je $S_{front} = 0.3$. Vjetrobran je dobro uklopljen u tijelo pa je $k = 0.07$. Dodatni valni otpor zbog vjetrobrana procjenjujemo na

$$(C_V)_B = k \frac{S_{front}}{S_{ref}} = 0.07 \frac{0.3}{15.1} = 0.0014$$

Koeficijent tlaka neposredno iza zrakoplova je

$$C_p = 0.139 + 0.419(Ma - 0.161)^2 = 0.139 + 0.419(0.132 - 0.161)^2 = 0.139$$

Površina baze je $S_{base} = \frac{0.3^2 \pi}{4} = 0.071$ pa je koeficijent otpora baze

$$(C_D)_{base} = C_p \frac{S_{base}}{S_{ref}} = 0.139 \frac{0.071}{15.1} = 0.0007$$

Tako procjenjujemo otpor tijela

$$(C_D)_B = (C_f)_B + (C_V)_B + (C_b)_B = 0.0066 + 0.0014 + 0.0007 = 0.0087$$

Horizontalni rep

Profil horizontalnog repa je NACA 0009. Podaci su u prilogu. Reynoldsov je broj na horizontalnom repu:

$$Re = \frac{\sqrt{\eta_h} V c_A}{\nu} = \frac{\sqrt{0.95} \cdot 45 \cdot 0.762}{1.46 \cdot 10^{-5}} = 2,29 \cdot 10^6$$

Pretpostavljamo da je horizontalni rep u cijelosti u turbulentnoj struji jer je njegov Reynoldsov broj veći od 10^6 .

$$(c_f)_{ploce} = \frac{3.91}{(\ln Re)^{2.58}} = \frac{3.91}{[\ln(2.29 \cdot 10^6)]^{2.58}} = 0.0038$$

Korekcija F_F zbog relativne debljine $\bar{t} = 0.09$ na mjestu $\bar{x}_t = 0.30$ je

$$F_F = 1.10 \cdot \left(1 + \frac{0.6 \cdot \bar{t}}{\bar{x}_t} + 100 \cdot \bar{t}^4 \right) = 1.10 \cdot \left(1 + \frac{0.6 \cdot 0.09}{0.30} + 100 \cdot 0.09^4 \right) = 1.30$$

a korekcija zbog stlačivosti također je $F_{Ma} = 1$, te je koeficijent otpora profila horizontalnog repa

$$c_d = 2(c_f)_{ploce} F_{Ma} F_W = 2 \cdot 0.0038 \cdot 1.30 \cdot 1 = 0.0099$$

Odnos koeficijenta otpora horizontalnog repa prema koeficijentu otpora profila je

$$F_S = (\cos A_t)^{0.28} = (\cos 0)^{0.28} = 1.$$

Izložena površina horizontalnog repa je $S_h = 2.08 \text{ m}^2$ te je komponenta otpora horizontalnog repa za referentnu površinu $S_{ref} = 15.1$

$$(C_{Df})_h = \frac{S_h}{S_{ref}} c_d F_S = \frac{2.08}{15.1} 0.0099 \cdot 1 = 0.0014$$

Vertikalni rep

Reynoldsov broj za vertikalni rep je

$$Re = \frac{V c_A}{\nu} = \frac{45 \cdot 0.834}{1.46 \cdot 10^{-5}} = 2.6 \cdot 10^6$$

Vertikalni rep nalazi se u vrtložnoj struji elise, pa je njegov granični sloj turbulentan, a karakteristike profila vertikalnog repa iste su kao za horizontalni rep, pa je koeficijent otpora profila vertikalnog repa isti kao i koeficijent otpora profila horizontalnog repa:

$$c_d = 0.0099$$

Za vertikalni rep je $A_t = 30.9$, pa je odnos koeficijenta otpora vertikalnog repa prema koeficijentu otpora profila vertikalnog repa:

$$F_V = (\cos A_t)^{0.28} = (\cos 30.9)^{0.28} = 0.96$$

$$(C_{Df})_V = \frac{S_V}{S_{ref}} \cdot c_d \cdot F_V = \frac{1.06}{15.1} \cdot 0.0099 \cdot 0.96 = 0.0007$$

Otpor podvoza

Čelna površina jednog kotača je $S_{front} = 0.60 \cdot 0.10 = 0.060 \text{ m}^2$, ali se vidi samo pola čelne površine, a druga polovica je zaklonjena blatobranom čija je čelna površina približno dva puta veća. Zato je $S_{front} = 0.030 + 2 \cdot 0.030 = 0.090 \text{ m}^2$. Čelna površina jedne noge kotača $S_{front=} = 0.30 \cdot 0.05 = 0.015 \text{ m}^2$. U letu su tri noge s kotačima. Zato je otpor podvoza:

$$(C_D)_{kotačo} = 3 \left(k_{kotačo} \frac{S_{front}}{S_{ref}} + k_{noge} \frac{S_{noge}}{S_{ref}} \right) = 3 \cdot \left(0.25 \frac{0.090}{15.1} + 1.2 \frac{0.015}{15.1} \right) = 0.0080$$

Od podvoza uzimamo u obzir samo ovaj valni otpor

Otpor zrakoplova

Konačno zbroj parcijalnih otpora daje multi otpor (bez uzgona) zrakoplova:

$$\begin{aligned} C_{DO} &= (C_D)_W + (C_D)_B + (C_D)_h + (C_D)_V + (C_D)_{podvpx} \\ &= 0.0071 + 0.0087 + 0.0014 + 0.0007 + 0.0080 \\ &= 0.0259 \end{aligned}$$

4.5.3 Normalna sila i momenta propinjanja

Postavit ćemo ishodište na početak aerodinamičke tetive krila.

Krilo

Za izračun gradijenta krila potrebni su nam koeficijent stlačivosti β i koeficijent iskorištenja profila. Pri brzini leta $V = 45 \text{ m/s}$, Machov broj je

$$Ma = \frac{V}{a} = \frac{45}{340} = 0.132$$

te je koeficijent stlačivosti

$$\beta = \sqrt{1 - Ma^2} = \sqrt{1 - 0.132^2} = 0.991$$

Gradijent profila NACA 65₂ - 415 je $c_{t\alpha} = 6.10$, te je za vitkost krila $A = 4.5$. i strijelu

$A_{c/2} = 0$ gradijent uzgona normalne sile krila

$$(C_{L\alpha})_W = \frac{2\pi A}{2 + \sqrt{4 + \left(\frac{2\pi A}{c_{l\alpha}}\right)^2 \left(1 + \frac{\text{tg}^2 \Lambda_{c/2}}{\beta^2}\right)}} = \frac{2\pi \cdot 4.5}{2 + \sqrt{4 + \left(\frac{2\pi \cdot 4.50}{6.10}\right)^2 \left(1 + \frac{0}{0.991^2}\right)}} = 4.01$$

Za određivanje položaja hvatišta sile $(C_{L\alpha})_W \alpha$ trebaju nam parametri

$$\lambda = 0.80$$

$$A\beta = -4.5 \cdot 0.991 = -4.5$$

$$A \cdot \text{tg} \Lambda_m = 4.5 \cdot 0 = 0$$

Prema dijagramu na slici 2-8

$$\bar{h}_c = 0.24$$

Normalna sila kombinacije krilo-tijelo

$$(C_N)_{WB} = (C_{N\alpha})_W \frac{S_W}{S_{ref}} [K_{BW} \alpha + k_{WB} (i_W - \alpha_{0L})]$$

Za odnos

$$\bar{d} = \frac{d_e}{b} = \frac{1.22}{8.77} = 0.139$$

vrijednost koeficijenta interferencije određujemo jednadžbama:

$$K_{BW} = 1 + 3\bar{d} - \lambda\bar{d} \cdot (1 - \bar{d}) = 1 + 3 \cdot 0.139 - 0.80 \cdot 0.139 \cdot (1 - 0.139) = 1.32$$

$$k_{WB} = \left(\frac{1 + 0.41\bar{d}}{1 + \bar{d}}\right)^2 K_{BW} = \left(\frac{1 + 0.41 \cdot 0.139}{1 + 0.139}\right)^2 1.32 = 1.14$$

Kut nultog uzgona profila NACA 65₂ - 415 je $\alpha_{0L} = -3^\circ$. S ovim vrijednostima je ekvivalentni napadni kut krila:

$$\alpha_{ef} = K_{BW} \alpha + k_{WB} (i_W - \alpha_{0L}) = 1.32 \cdot \alpha + 1.14 \cdot \left(i_W - \frac{-3}{57.3}\right)$$

$$\alpha_{ef} = 1.32\alpha + 1.14i_W + 0.060$$

te je konačno koeficijent normalne sile kombinacije krilo-tijelo

$$(C_N)_{WB} = (C_{N\alpha})_W \frac{S_W}{S_{ref}} \alpha_{ef} = 4.01 \cdot \frac{12.85}{15.1} \cdot (1.32 \cdot \alpha + 1.14i_W + 0.060)$$

$$(C_N)_{WB} = 4.50 \cdot \alpha + 3.89i_W + 0.205$$

Spreg profila NACA 65₂ - 415 je $c_{m0} = -0.070$, te je spreg krila sveden na referentnu površinu

$$(C_{m0})_W = (c_{m0})_{pr} \frac{A_W \cos \Lambda_m}{A_W + 2 \cos \Lambda_m} \cdot \frac{S_W}{S_{ref}} = -0.070 \frac{4.5 \cdot 1}{4.5 + 2 \cdot 1} \cdot \frac{12.85}{15.2} = -0.041$$

Koeficijent momenta propinjanja kombinacije krilo-tijelo za središte mase koje je udaljeno \bar{h}_m od aerodinamičkog ishodišta bit će:

$$(C_m)_{BW} = (C_{m0})_W - (C_N)_{BW} (\bar{h}_{CW} - \bar{h}_m) = -0.041 - (4.50\alpha + 3.89 i_w + 0.205) \cdot (0.24 - \bar{h}_m)$$

$$(C_m)_{BW} = -(1.08 - 4.50\bar{h}_m)\alpha - (0.934 - 3.89\bar{h}_m) i_w - 0.090 + 0.205\bar{h}_m$$

Tijelo

Oblik tijela je takav da možemo zanemariti rezultirajuću normalnu silu, ali moramo uzeti u obzir spreg od normalne sile prednjeg i zadnjeg dijela, koji procjenjujemo prema jednadžbi

$$(C_m)_B = \frac{K_f W_f^2 L_f}{c_A S_{ref}} \alpha$$

Za relativni položaj krila na tijelu

$$\frac{\ell_{cW}}{L_f} = \frac{\ell_{0W} + c_A \bar{h}_c}{6.54} = \frac{1.394 + 1.698 \cdot 0.24}{6.54} = 0.28$$

s dijagrama na slici 4-18 dobivamo $K_f = 0.56$, pa je

$$(C_m)_B = \frac{0.56 \cdot 1.17^2 \cdot 6.54}{1.698 \cdot 15.1} \alpha = 0.196 \alpha$$

Savijanje struje

Iza kombinacije rila povijanje struje izračunavamo pomoću jednadžbe

$$\frac{d\varepsilon}{d\alpha} = 4.44 (K_A K_\lambda K_H \sqrt{\cos \Lambda_{1/4}})^{1.19}$$

gdje je

$$K_A = \frac{1}{A} - \frac{1}{1 + A^{1.7}} = \frac{1}{5.09} - \frac{1}{1 + 5.09^{1.7}} = 0.137$$

$$K_\lambda = \frac{10 - 3\lambda}{7} = \frac{10 - 3 \cdot 0.80}{7} = 1.086$$

$$\ell_{ch} - \ell_{cw} = \ell_{0h} + \frac{c_h}{4} - \left(\ell_A + \frac{c_A}{4} \right) = 5.930 + \frac{0.762}{4} - \left(1.486 + \frac{1.698}{4} \right) = 4.210$$

$$K_H = \frac{1 - \frac{h}{b}}{\sqrt[3]{\frac{\ell_{ch} - \ell_{cw}}{b/2}}} = \frac{1 - \frac{0.57}{8.77}}{\sqrt[3]{\frac{4.21}{4.38}}} = 0.947$$

$$\tan \Lambda_{1/4} = \tan \Lambda_{LE} - 0.25 \cdot \frac{c_r - c_t}{b_v/2} = 0.0503 - 0.25 \cdot \frac{1.882 - 1.500}{3.800} = 0.0252$$

$$\Lambda_{1/4} = 1.44^\circ$$

te je

$$\frac{d\varepsilon}{d\alpha} = 4.44 \cdot \left(0.137 \cdot 1.086 \cdot 0.947 \cdot \sqrt{\cos 1.44^\circ} \right)^{1.19} = 0.431$$

Horizontalni rep

Napadni kut na horizontalnom repu je

$$\alpha_h = \alpha - \frac{d\varepsilon}{d\alpha} \alpha_{ef}$$

$$\alpha_h = \alpha - 0.431 (1.32\alpha + 1.14i_w + 0.060)$$

$$\alpha_h = 0.431 \alpha - 0.491 i_w - 0.026$$

Za proračun gradijenta normalne sile po napadnom kutu trebat će nam veličine β :

$$\beta = \sqrt{1 - \eta_h Ma^2} = \sqrt{1 - 0.98 \cdot 0.132^2} = 0.991$$

Za profil NACA 0009 za koji je $c_{l\alpha} = 6.09$, $b_h = 2.68 \text{ m}$, $S_h = 2.04 \text{ m}^2$, $A_h = 3.5$ i $A_{c/2} = 0$

bit će gradijent koeficijenta normalne

$$(C_{N\alpha})_h = \frac{2\pi A_h}{2 + \sqrt{4 + \left(\frac{2\pi A_h}{c_{l\alpha}}\right)^2 \left(1 + \frac{tg^2 \Lambda_{c/2}}{\beta^2}\right)}} = \frac{2\pi \cdot 3.49}{2 + \sqrt{4 + \left(\frac{2\pi \cdot 3.50}{06.09}\right)^2 (1+0)}} = 3.60$$

Hvatište komponente $(C_{N\alpha})_h \alpha$ normalne sile nalazi se na udaljenosti od aerodinamičkog središta

$$h_{c\alpha} = h_{0h} + 0.23 \cdot c_{Ah} = 5.930 - 1.486 + 0.23 \cdot 0.762 = 4.619 \text{ m}$$

$$\bar{h}_{c\alpha} = \frac{h_{ch}}{c_A} = \frac{4.619}{1.698} = 2.720$$

Normalna sila na horizontalnom repu

$$(C_N)_{hB} = \eta_h \eta_{slot} \frac{S_h}{S_{ref}} \left[(C_{N\alpha})_h (K_{BH} \alpha_h + k_{BH} i_h) + (C_{N\delta})_h \delta_m \right]$$

Koeficijenti interferencije za kombinaciju horizontalni rep-tijelo ovisno o odnosu promjera tijela prema rasponu horizontalnog repa dobivamo iz jednadžbi

$$\bar{d} = \frac{d_e}{b} = \frac{0.37}{3.05} = 0.121$$

$$K_{Bh} = 1 + 3\bar{d} - \lambda\bar{d} \cdot (1 - \bar{d}) = 1 + 3 \cdot 0.121 - 1.00 \cdot 0.121 \cdot (1 - 0.121) = 1.26$$

$$k_{WB} = \left(\frac{1 + 0.41\bar{d}}{1 + \bar{d}} \right)^2 K_{BW} = \left(\frac{1 + 0.41 \cdot 0.121}{1 + 0.121} \right)^2 1.26 = 1.10$$

Gradijent normalne sile na horizontalnom repu zbog otklona kormila visine određujemo pomoću jednadžbe

$$(C_{N\delta})_h = 0.9 \cdot \frac{S_\delta}{S_h} \left(\frac{C_{N\alpha}}{c_{\ell\alpha}} \right)_h (C_{\ell\delta})_{prof} \cos \Lambda_{HL} \cdot K_f$$

U subsonici kad je upravljačka površina po cijelom rasponu noseće površine, onda je $\frac{S_\delta}{S_h} = 1$.

Za $\frac{c_\delta}{c} = 0.2$ i $\frac{t}{c} = 0.09$ sa slike 2-14 očitavamo $(C_{\ell\delta})_{prof} = 3.60$, te je

$$(C_{N\delta})_h = 0.9 \cdot 1.0 \cdot \frac{3.60}{6.09} \cdot 3.60 \cdot \cos 0 \cdot K_f = 1.92 \cdot K_f$$

S ovim vrijednostima bit će koeficijent normalne sile kombinacije horizontalni rep - tijelo

$$(C_N)_{hB} = 0.98 \cdot 0.85 \cdot \frac{2.04}{15.1} \{ 3.60 [1.26 (0.431\alpha - 0.491 i_w - 0.026) + 1.10 i_h] + 1.92 K_f \delta_m \}$$

Sređivanjem dobivamo

$$(C_N)_{hB} = 0.220\alpha - 0.250 i_w + 0.446 i_h - 0.013 + 0.216 K_f \delta_m$$

Ova sila ima dva dijela. Prvi $0.220\alpha - 0.250 i_w + 0.446 i_h - 0.013$ od horizontalnog repa bez otklona kormila visine i drugi $0.216 K_f \delta_m$ od otklona kormila visine. Prvi dio ima hvatište u napadnoj točki normalne sile horizontalnog repa $\bar{h}_{c\alpha} = 2.720$. Drugi dio zbog otklona kormila visine, koji nazivamo upravljačka sila, ima napadnu točku na udaljenosti x_δ udaljenost napadne točke od aerodinamičke apscise horizontalnog repa. Budući da je srednja aerodinamička apscisa horizontalnog repa jednaka nuli, udaljenost x_δ je istodobno udaljenost od napadnog ruba horizontalnog repa. Udaljenost $h_{c\delta}$ napadne točke upravljačke sile od aerodinamičkog ishodišta zrakoplova bit će zbroj h_{0h} udaljenosti napadnog ruba horizontalnog repa od aerodinamičkog ishodišta zrakoplova i x_δ udaljenost napadne točke od napadnog ruba horizontalnog repa. Sa slike 3-17 za $\frac{c_\delta}{c} = 0.2$ očitavamo $\frac{x_\delta}{c} = 0.45$. Tako dobivamo hvatište upravljačke sile na udaljenosti od aerodinamičkog ishodišta zrakoplova:

$$\bar{h}_{c\delta} = \frac{h_{0h} + c_h \frac{x_\delta}{c}}{c_A} = \frac{5.930 - 1.486 + 0.762 \cdot 0.450}{1.698} = 2.819$$

Koeficijent moment propinjanja horizontalnog repa za središte mase na udaljenosti h_m od aerodinamičkog središta letjelice ima

$$(C_m)_{hB} = -(0.220 \alpha - 0.250 i_w + 0.446 i_h - 0.013)(2.720 - \bar{h}_m) - 0.216 K_f \delta_m (2.819 - \bar{h}_m).$$

Sređivanjem dobivamo

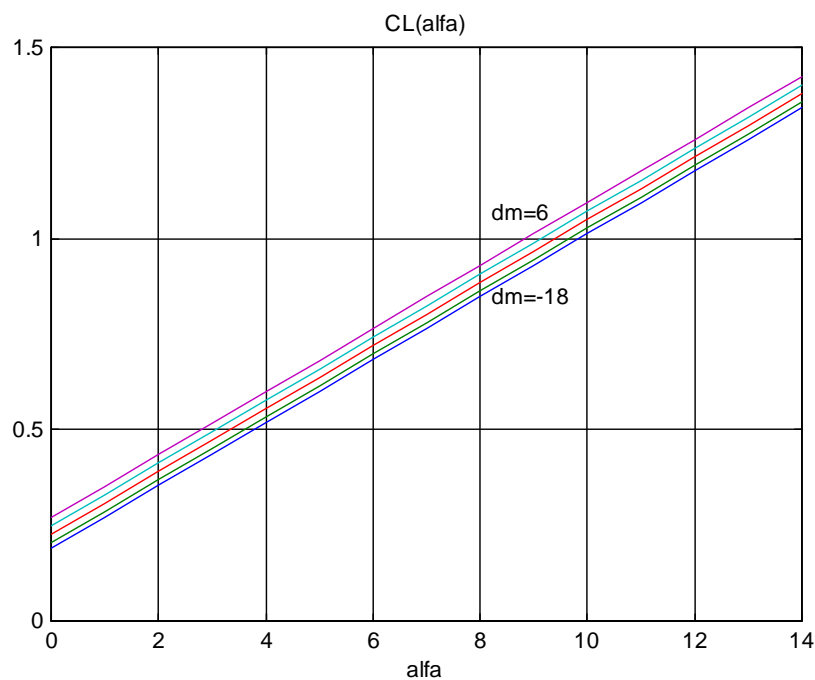
$$(C_m)_{hB} = -(0.598 - 0.220 \bar{h}_m) \alpha - (0.609 - 0.216 \bar{h}_m) K_f \delta_m - \\ + (0.680 - 0.250 \bar{h}_m) i_w - (1.212 - 0.446 \bar{h}_m) i_h + (0.035 - 0.013 \bar{h}_m)$$

Stacionarni koeficijent normalne sile zrakoplova

$$C_N = (C_N)_{WB} + (C_N)_{hB}$$

$$C_N = (4.50 \alpha + 3.89 i_w + 0.205) + (0.220 \alpha - 0.250 i_w + 0.446 i_h - 0.013 + 0.216 K_f \delta_m)$$

$$C_N = 4.72 \alpha + 0.216 K_f \delta_m + 3.64 i_w + 0.446 i_h + 0.192$$



Slika 4-9. $C_L(\alpha, \delta_m)$ za slučaj $i_w = 1^0$ i $i_h = -1^0$

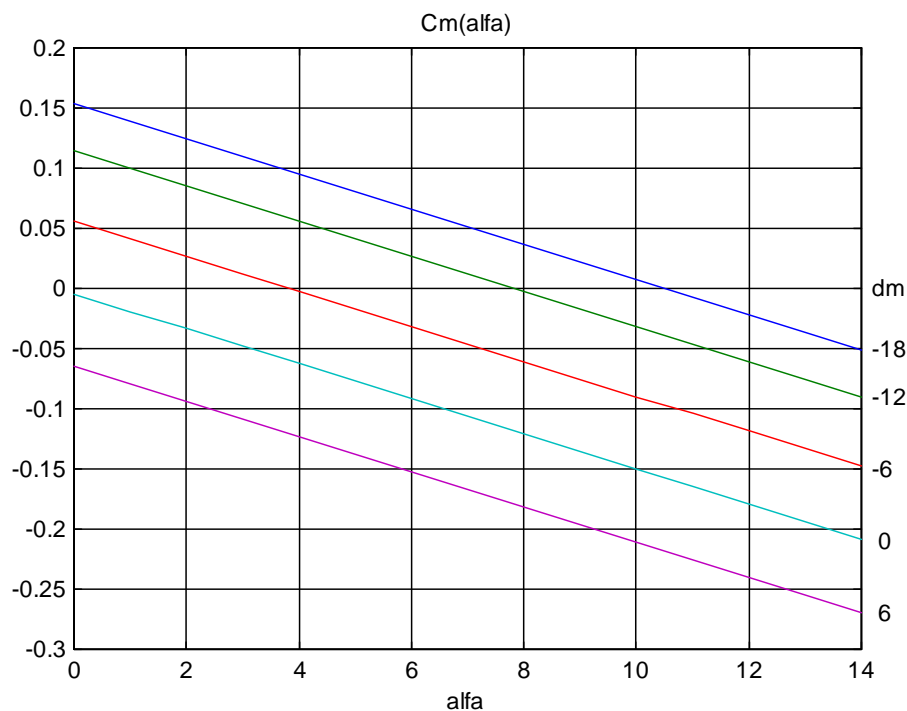
Na disketu u direktoriju *Aerodinamika* nalazi se program pod imenom *CLalfa.m* u MATLAB-u koji crta funkciju $C_L(\alpha, \delta_m)$ za slučaj $i_w = 1^0$ i $i_h = -1^0$ kao na slici 4-9.

Stacionarni koeficijent momenta propinjanja zrakoplova

$$C_m = (C_m)_{WB} + (C_m)_B + (C_m)_{hB}$$

$$C_m = -(1.080 - 4.50 \bar{h}_m) \alpha - (0.934 - 3.89 \bar{h}_m) i_w - 0.090 + 0.205 \bar{h}_m + 0.196 \alpha - \\ - (0.598 - 0.220 \bar{h}_m) \alpha - (0.607 - 0.216 \bar{h}_m) K_f \delta_m - \\ + (0.680 - 0.250 \bar{h}_m) i_w - (1.212 - 0.446 \bar{h}_m) i_h + (0.035 - 0.013 \bar{h}_m)$$

$$C_m = -(1.482 - 4.72 \bar{h}_m) \cdot \alpha - (0.607 - 0.216 \bar{h}_m) \cdot K_f \delta_m - \\ - (0.254 - 3.640 \bar{h}_m) \cdot i_w - (1.212 - 0.446 \bar{h}_m) \cdot i_h - 0.055 + 0.192 \bar{h}_m$$



Slika 4-10 Ovisnost momenta propinjanja o napadnom kutu i otklonu kormila visine za slučaj

$$\bar{h}_m = 0.137, \text{ te } i_w = 1^0 \text{ i } i_h = -1^0$$

Na disketu u direktoriju *Aerodinamika* nalazi se program koji se zove *Cmalfadelta.m* u MATLAB-u koji crta funkciju $C_m(\alpha, \delta_m)$ za slučaj $\bar{h}_m = 0.137$, $i_w = 1^0$ i $i_h = -1^0$ kao na slici 4-10.

5 POGONSKA SILA I POGONSKI MOMENT

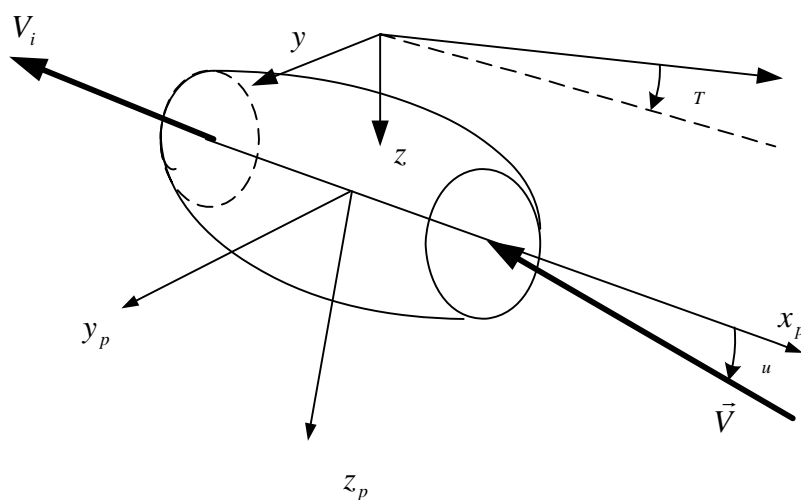
5.1 Pogonska sila i moment mlaznog motora

Za određivanje pogonske sile i pogonskog momenta mlaznog motora koristit ćemo teoriju gibanja tijela promjenjive mase prema Gantmaheru (lit 3 i 7).

Vanjska površina kućišta motora, na kojoj se nalazi ulazna površina usisnika S_u i izlazna površina mlaznice motora S_i , čini *kontrolnu površinu*. Neka je $x_p y_p z_p$ k.s. motora i neka je njegova y_p os paralelna sa y os zrakoplova. Drugim riječima k.s. motora $x_p y_p z_p$ okrenut je za kut α_r oko osi y u odnosu na k.s. zrakoplova (vidi sliku 1). Ulazna površina S_u okomita je na brzinu ulaza \vec{V}_u , a izlazna površina S_i okomita na os x motora, duž koje je izlazna brzina \vec{V}_i .

5.1.1 Napadni kut i kut klizanja motora

Za analizu pogonske sile i pogonskog momenta potreban je kut α_u dolazeće struje u odnosu na koordinatni sustav motora $x_p y_p z_p$. Bočno savijanje struje je malo. Osim toga, bočno savijanje struje na lijevoj strani suprotno je od savijanja na desnoj strani u odnosu na ravninu simetrije letjelice, te se efekti poništavaju. Zato obično zanemarujemo bočno savijanje struje i uzimamo da je $\beta_u = \beta$.



Slika 1

Napadni kut aerodinamičke brzine na ulazu u mlazni motor α_u umanjen je za savijanje struje zraka ε_u i još za kut zakretanja motora α_T :

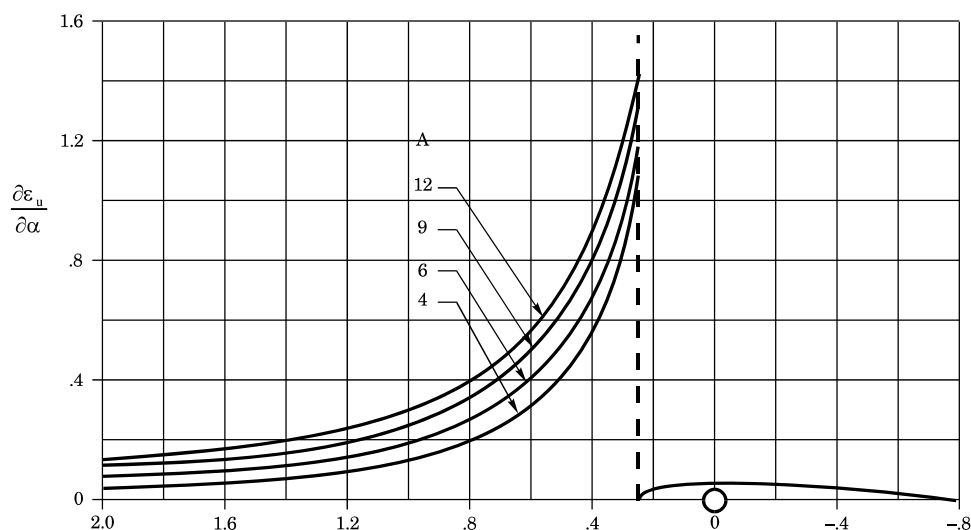
$$\alpha_u = \alpha - \varepsilon_u - \alpha_T$$

Koliko je to savijanje ε_u u ravnini simetrije, mnogo ovisi o konfiguraciji zrakoplova. Ako je to zrakoplov koji ima pogon na prednjem dijelu trupa, onda nema savijanja zračne struje ($\varepsilon_u = 0$). Obrnuto ako su motori postavljeni na krilu, savijanje ispred krila ε_u ne treba zanemariti. Uzimamo da je savijanje proporcionalno napadnom kutu struje:

$$\varepsilon_u = \frac{\partial \varepsilon_u}{\partial \alpha} \alpha$$

Uz tu pretpostavku dobivamo kut dolazeće struje:

$$\alpha_u = \alpha - \varepsilon_u - \alpha_T = \left(1 - \frac{\partial \varepsilon_u}{\partial \alpha}\right) \alpha - \alpha_T$$



Slika 2.

Na slici 2 prikazan je dijagram koji omogućuje procjenu gradijenta savijanja struje u slučaju motora postavljenog na krilima, za razne vitkosti krila A u ovisnosti o udaljenosti u tetivama ulazne površine od točke na prvoj četvrtini tetive.

5.1.2 Komponente pogonske sile

Prema teoriji mehanike tijela promjenljive mase (lit.3 ili 7) pogonska sila motora je

$$\vec{F}_p = -\vec{k}_r - \frac{d_r \vec{Q}_r}{dt} - 2\vec{\Omega}_F \times (\vec{V}_C)_r m,$$

gdje je

$$\vec{k}_r = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{Q}_{ri} - \Delta \vec{Q}_{ru}}{\Delta t}.$$

Primijenit ćemo ih na mlazni motor zrakoplova. Ako je rad motora stacionaran, onda je derivacija količine relativnog gibanja u motoru jednaka nuli:

$$\frac{d_r \vec{Q}_r}{dt} = 0$$

Relativna brzina promjene položaja središta mase letjelice $(\vec{V}_C)_r$ mala je pa je zanemarujemo:

$$(\vec{V}_C)_r \approx 0$$

U tom slučaju gornja opća formula u slučaju koji nas zanima daje jednadžbu pogonske sile:

$$\vec{F}_p = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{Q}_{ru} - \Delta \vec{Q}_{ri}}{\Delta t} \quad 5.1$$

Kroz dio kontrolne površine S_u , tijekom vremena Δt ulazi masa $(\vec{V}_u \Delta t \vec{S}_u \rho_u)$. Ta masa je uvijek pozitivna pa treba uzeti apsolutnu vrijednost ovog skalarnog produkta.

Relativna količina gibanja zraka bit će $\Delta \vec{Q}_{ru} = \vec{V}_u |\vec{V}_u \Delta t \vec{S}_u \rho_u|$.

U istom vremenu Δt kroz izlaznu površinu S_i motora izlazi masa $\vec{V}_i \Delta t \vec{S}_i \rho_i$ koja je također uvijek pozitivna, pa treba i tu uzeti apsolutnu vrijednost. Količina gibanja produkta izgaranja bit će $\Delta \vec{Q}_{ri} = \vec{V}_i |\vec{V}_i \Delta t \vec{S}_i \rho_i|$, gdje je ρ_i specifična masa produkta izgaranja na izlazu iz motora. U tim uvjetima lako se nalaze limesi u jednadžbi:

$$\vec{F}_p = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{Q}_{ru} - \Delta \vec{Q}_{ri}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{V}_u |\vec{V}_u \cdot \vec{S}_u| \rho_u \Delta t}{\Delta t} - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{V}_i |\vec{V}_i \cdot \vec{S}_i| \rho_i \Delta t}{\Delta t},$$

pa je pogonska sila mlaznog motora:

$$\vec{F}_p = \vec{V}_u |\vec{V}_u \cdot \vec{S}_u| \rho_u - \vec{V}_i |\vec{V}_i \cdot \vec{S}_i| \rho_i.$$

Brzina zraka na usisniku \vec{V}_u ima komponente u koordinatnom sustavu pogona $x_p y_p z_p$:

$$\mathbf{V}_u^p = [-V \cos \alpha_u \quad 0 \quad -V \sin \alpha_u]^T,$$

Kako je kut α_u uvijek mali,

$$\mathbf{V}_u^p = [-V \quad 0 \quad -V \alpha_u]^T.$$

Vektor \vec{S}_u je okomit na osi x_p i usmjeren prema van. Zato je

$$\mathbf{S}_u^p = [S_u \quad 0 \quad 0]^T.$$

S tim vrijednostima u koordinatnom sustavu x_p, y_p, z_p nalazimo da je skalarni produkt:

$$|\vec{V}_u \cdot \vec{S}_u| = |\mathbf{V}_u^p \cdot \mathbf{S}_u^p| = VS_u$$

Brzina istjecanja produkta izgaranja \vec{V}_i ima intenzitet U u pravcu osi mlaznice motora (okomito na izlaznu površinu), te je

$$\mathbf{V}_i^p = [-U \quad 0 \quad 0]^T,$$

jer je smjer istjecanja suprotan smjeru osi x_p . Isto tako vektor izlazne površine \vec{S}_i je u pravcu osi x_p , ali suprotnog smjera $\mathbf{S}_i^p = [-S_i \quad 0 \quad 0]^T$. Tako je skalarni produkt:

$$|\vec{V}_i \cdot \vec{S}_i| = |\mathbf{V}_i^p \mathbf{S}_i^p| = US_i$$

S tim skalarnim produktima bit će vektorska jednadžba pogonske sile:

$$\vec{F}_p = \vec{V}_u (VS_u) \rho_u - \vec{V}_i (US_i) \rho_i,$$

ili njen matricni oblik

$$\mathbf{F}^p = \mathbf{V}_u^p (VS_u \rho_u) - \mathbf{V}_i^p (US_i \rho_i).$$

Komponente pogonske sile u koordinatnom sustavu mlaznog motora x_p, y_p, z_p lako nalazimo jer su nam sve veličine poznate:

$$\begin{bmatrix} F_X^p \\ F_Y^p \\ F_Z^p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -V \\ 0 \\ -V\alpha_u \end{bmatrix} (VS_u \rho_u) - \begin{bmatrix} -U \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (US_i \rho_i) = \begin{bmatrix} -V^2 S_u \rho_u + U^2 S_i \rho_i \\ 0 \\ -V^2 S_u \rho_u \alpha_u \end{bmatrix}.$$

Uvedimo oznake:

$$F_{pi} = U^2 S_i \rho_i$$

$$F_{pu} = V^2 S_u \rho_u$$

Uz te oznake bit će komponente pogonske sile duž osi pogonske grupe:

$$F_X = F_{pi} - F_{pu}$$

$$F_Y = 0$$

$$F_Z = -F_{pu} \alpha_u$$

Komponenta duž ose motora F_X predstavlja pogonsku silu motora. Ona se obično označava sa T .

$$T = U^2 S_i \rho_i - V^2 S_u \rho_u.$$

Pored te aksijalne sile pojavljuje se i normalna komponenta u ravnini simetrije okomitoj na ulaz u motor koja je proporcionalna ulaznom kutu

$$F_Z \approx -F_{pu} \alpha_u$$

U koordinatnom sustavu letjelice vektor pogonske sile bio bi

$$R^F = \mathbf{L}_y(\alpha_T) \begin{bmatrix} T \\ 0 \\ -F_{pu} \alpha_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T \cos \alpha_T + F_{pu} \alpha_u \sin \alpha_T \\ 0 \\ T \sin \alpha_T - F_{pu} \alpha_u \cos \alpha_T \end{bmatrix}.$$

5.1.3 Komponente pogonskog momenta

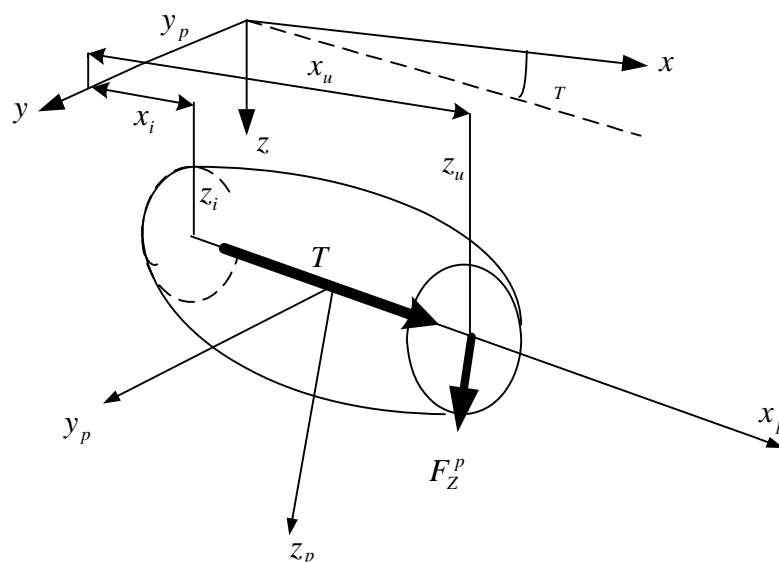
Hvatište komponente sile $F_{pu} \alpha_u$ uzimamo u središtu ulaza

$$\mathbf{r}_u = [x_u \quad y_u \quad z_u]^T,$$

a hvatište aksijalne sile određujemo kao hvatište rezultate od dviju komponenata aksijalne sile:

$$U^2 S_i \rho_i \text{ s hvatištem u središtu izlaza } \mathbf{r}_i = [x_i \quad y_i \quad z_i]^T \text{ i}$$

$$V^2 S_i \rho_i \text{ s hvatištem u središtu ulaza } \mathbf{r}_u = [x_u \quad y_u \quad z_u]^T.$$



Slika 5-3

pa su koordinate hvatišta pogonske komponente T

$$x_T = \frac{x_i \cdot U^2 S_i \rho_i - x_u \cdot V^2 S_u \rho_u}{U^2 S_i \rho_i - V^2 S_u \rho_u}$$

$$y_T = \frac{y_i \cdot U^2 S_i \rho_i - y_u \cdot V^2 S_u \rho_u}{U^2 S_i \rho_i - V^2 S_u \rho_u}$$

$$z_T = \frac{z_i \cdot U^2 S_i \rho_i - z_u \cdot V^2 S_u \rho_u}{U^2 S_i \rho_i - V^2 S_u \rho_u}.$$

U k.s. letjelice vektor položaja hvatišta aksijalne sile označavamo sa:

$$\mathbf{r}_T = [x_T \quad y_T \quad z_T]^T.$$

Uz te oznake bit će komponente momenta pogonske sile u k.s. letjelice

$$\mathbf{M}_C^F = \tilde{\mathbf{r}}_T \mathbf{L}_{FP} \begin{bmatrix} T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \tilde{\mathbf{r}}_u \mathbf{L}_{FP} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -F_{pu} \alpha_u \end{bmatrix}.$$

Velika je razlika u intenzitetu aksijalne komponente T i bočne komponente $\alpha_u F_{pu}$, te ovu drugu možemo smatrati malom veličinom u odnosu na aksijalnu komponentu. Postavni kut motora α_T obično je isto mali kut, pa je opravdano izjednačiti bočnu komponentu u k.s. motora i letjelice.

$$\mathbf{L}_{FP} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -F_{pu} \alpha_u \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -F_{pu} \alpha_u \end{bmatrix}$$

pa gornja jednadžba 6.78 ima oblik:

$$\mathbf{M}_C^F = \tilde{\mathbf{r}}_T \mathbf{L}_{FP} \begin{bmatrix} T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \tilde{\mathbf{r}}_u \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -F_{pu} \alpha_u \end{bmatrix}$$

Kako je $\mathbf{L}_{FP} = \mathbf{L}_y(\alpha_T)$ bit će komponente pogonskog momenta jednog motora u k.s. letjelice:

$$\begin{bmatrix} L^F \\ M^F \\ N^F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -z_T & y_T \\ z_T & 0 & -x_T \\ -y_T & x_T & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \alpha_T & 0 & -\sin \alpha_T \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha_T & 0 & \cos \alpha_T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -z_u & y_u \\ z_u & 0 & -x_u \\ -y_u & x_u & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -F_{pu} \alpha_u \end{bmatrix}$$

Množenjem dobivamo:

$$\mathbf{M}_C^F = \begin{bmatrix} L^F \\ M^F \\ N^F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_T T \sin \alpha_T \\ z_T T \cos \alpha_T - x_T T \sin \alpha_T \\ -y_T T \cos \alpha_T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -y_u F_{pu} \alpha_u \\ (\ell_m - \ell_u) F_{pu} \alpha_u \\ 0 \end{bmatrix}.$$

U ovim jednadžbama treba uočiti nekoliko činjenica.

- Prvo, normalna komponenta pogonske sile $\alpha_u F_{pu}$ znatno je manja od aksijalne komponente pogonske sile T , pa su i momenti koje ona stvara isto tako znatno manji od momenata aksijalne sile.
- Drugo, ako postoji jedan središnji motor, onda je za njega $y_T = y_u = 0$. Tada postoji samo komponenta M^F pogonskog momenta :

$$\begin{bmatrix} L^F \\ M^F \\ N^F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ z_T T \cos \alpha_T - x_T T \sin \alpha_T \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ x_u F_{pu} \alpha_u \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- Treće, u slučaju više motora, uvijek za par motora članovi koji sadrže y_T i y_u se krate, jer je za jedan motor pozitivno, a za drugi negativno. To znači da kao u slučaju za jedan centralni motor postojat će samo komponenta M^F . S obzirom da je pogonska sila T svakog motora ista a i koordinate x_T, z_T su također iste bit će za N motora ($N=2$ ili 4)

$$\begin{aligned} M^F &= N \cdot (z_T T \cos \alpha_T - x_T T \sin \alpha_T + x_u F_{pu} \alpha_u) \\ &= z_T (N \cdot T) \cos \alpha_T - x_T (N \cdot T) \sin \alpha_T + x_u (N \cdot F_{pu}) \alpha_u \end{aligned}$$

NT je ukupna pogonska sila. Drugim riječima pogonski moment propinjanja je isti kao za jedan centralni motor koji ima pogonsku silu zbroj svih motora.

- Četvrto, ako je u paru otkazao jedan motor, onda postoji komponenta oko osi z

$$N^F = -y_T T \cos \alpha_T$$

- Peto, pogonski moment propinjanja M^F

$$M^F = z_T T \cos \alpha_T - x_T T \sin \alpha_T + x_u F_{pu} \alpha_u$$

linearna je funkcija po napadnom kutu, jer je ulazni kut

$$\alpha_u = \alpha - \varepsilon_u - \alpha_T = \left(1 - \frac{\partial \varepsilon_u}{\partial \alpha}\right) \alpha - \alpha_T,$$

pa je

$$M^F = z_T T \cos \alpha_T - x_T T \sin \alpha_T + x_u F_{pu} \left[\left(1 - \frac{\partial \varepsilon_u}{\partial \alpha}\right) \alpha - \alpha_T \right],$$

što znači da je

$$M^F = M_0^F + M_\alpha^F \alpha$$

gdje su:

$$M_0^F = z_T T \cos \alpha_T - x_T T \sin \alpha_T - x_u F_{pu} \alpha_T$$

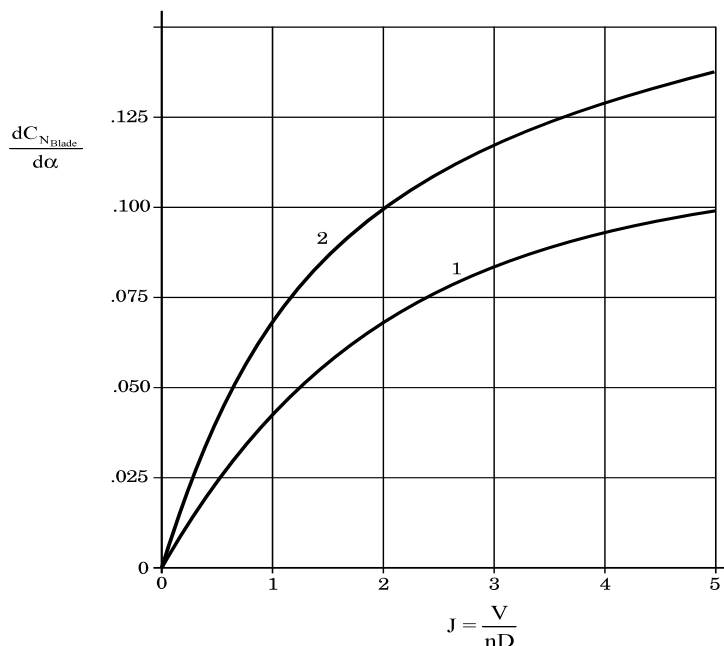
$$M_\alpha^F = x_u F_{pu} \left(1 - \frac{\partial \varepsilon_u}{\partial \alpha} \right).$$

5.2 Pogonska sila i moment elisnog motora

5.2.1 Komponenta pogonske sile u ravnini diska elise

Kad pogonsku silu u pravcu T realiziramo u pravcu ose rotacije elise, postoji i komponenta sile u ravnini diska elise $F_{p\sigma} \sigma$, koja je proporcionalna kutu σ između dolazeće zračne struje i osi rotacije elise. Taj koeficijent proporcionalnosti $F_{p\sigma}$ može se teoretski odrediti pomoću teorije vrtloga a može se procijeniti na temelju eksperimentalnih mjerenja:

$$F_{p\sigma} = \frac{\rho V^2}{2} N_B S_p \frac{\partial C_{N \text{ blade}}}{\partial \alpha} f(T),$$



Slika 5-4 Krivulja 1 za obične elise, krivulja 2 za široke elise tipa *turbomlazni*

gdje su:

S_p površina diska elise,

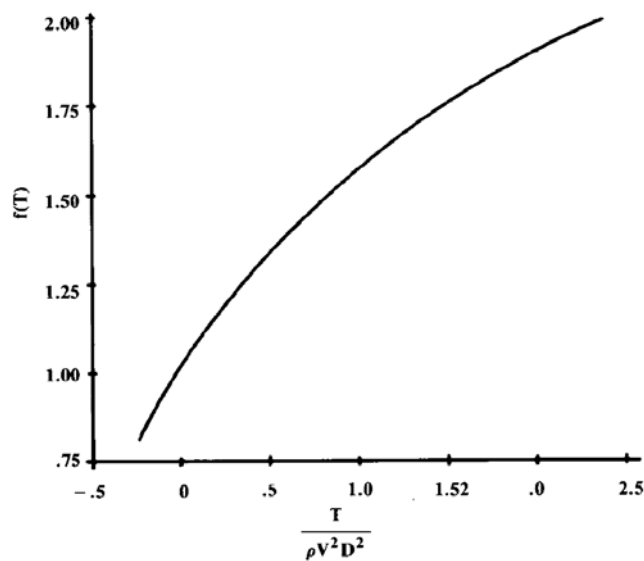
N_B broj ploštica u elisi,

$\frac{\partial C_{N blade}}{\partial \alpha}$ gradijent ploštice elise prema dijagramu na slici 5-4, na kome je bezdimenzijski korak $J = \frac{V}{nD}$; n broj okretaja elise u sekundi, a D promjer diska elise, a $f(T)$ funkcija pogonske sile elise prema dijagramu na slici 5-5.

Ako aerodinamička brzina na ulazu u disk elise ima napadni kut α_p , a osa rotacije elise je pod kutom α_T u odnosu na os letjelice, i postojati i povijanje struje ispred elise (npr. u slučaju potisne elise), u tom je slučaju kut struje u odnosu na osu rotacije elise:

$$\alpha_p = \alpha - \varepsilon_u - \alpha_T .$$

Ovaj kut stvara silu okomitu na os rotacije elise, tj. u ravnini diska koja je u presjeku ravni simetrije letjelice i diska elise: $-F_{p\sigma} \alpha_p$.



Slika 5-5

Prema tome, komponente pogonske sile u slučaju elisnog motora duž osi tromosti zrakoplova jesu :

$$R^F = \mathbf{L}_y(\alpha_T) \begin{bmatrix} T \\ 0 \\ -F_{p\sigma} \alpha_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T \cos \alpha_T + F_{p\sigma} \alpha_p \sin \alpha_T \\ 0 \\ T \sin \alpha_T - F_{p\sigma} \alpha_p \cos \alpha_T \end{bmatrix} .$$

Uočimo da je to potpuno isti oblik jednadžba kao i kod mlaznog motora. Razlika je što je kod mlaznog motora $F_{pu} = V^2 S_u \rho_u$, a ovdje je $F_{p\sigma}$ određeno gornjom jednadžbom. S obzirom na

malu veličinu te sile u odnosu na T , uz uobičajeno mali postavni kut motora α_T uzimamo da je duž osi z letjelice:

$$F_z = -F_{p\sigma}\alpha_p$$

5.2.2 Komponente pogonskog momenta elise

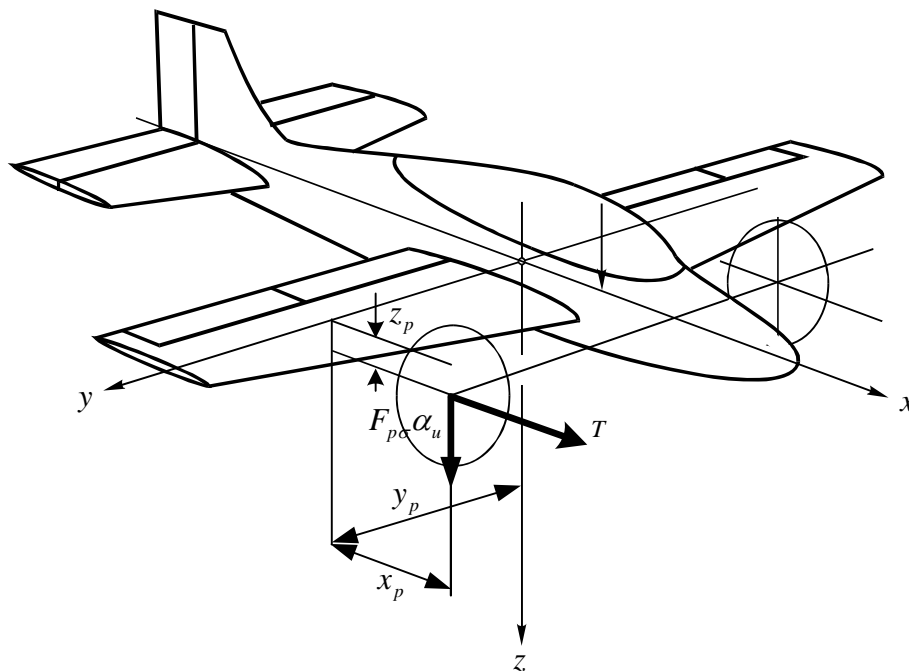
Kako uslijed nesimetričnog optjecanja elise pod napadnim kutom dolazi do pojave normalne sile $F_{p\sigma}\alpha_p$ tako dolazi i do pojave momenta skretanja. Taj moment skretanja je negativan (za desno rotirajuće elise – za propelere kojima je vektor kutna brzina rotacije usmjeren u pozitivnom smjeru osi x) i proporcionalan je napadnom kutu α_p . Izračun iznosa te komponente momenta moguć je primjenom teorije elementarnog kraka ili teorije vrloga no to predstavlja analizu koja nije predmet ovog teksta. Pretpostavit ćemo iznos momenta skretanja elise oblika $-M_{p\sigma}\alpha_p$. Adekvatno tome, s pojavom kuta klizanja β_p na propeleru pored bočne sile $-F_{p\sigma}\beta_p$ nastaje i moment propinjanja koji je negativan i proporcionalan kutu klizanja $-M_{p\sigma}\beta_p$. Za rotaciju elise potreban je okretni moment Q (pozitivan moment oko osi x) kojeg generira motor, a motor opterećuje konstrukciju letjelice sa istim momentom suprotnog smjera (negativan moment). Za simetrično optjecanje elise, odnosno za $\beta_p = \beta = 0$, ukupni moment od elise i motora na letjelicu, u koordinatnom sustavu vezanom za elisu bio:

$$-\begin{bmatrix} Q \\ M_{p\sigma}\beta_p \\ M_{p\sigma}\alpha_p \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} Q \\ 0 \\ M_{p\sigma}\alpha_p \end{bmatrix}.$$

Te komponente pogonske sile stvaraju momente oko središta mase. Neka su, kao na slici 6,

$$x_T \quad y_T \quad z_T$$

koordinate središta diska elise u k.s. letjelice koje čine vektor položaja \mathbf{r}_T .



Slika 6. Koordinate elisnog pogona

Komponente pogonske sile u k.s. letjelice dobivamo poslije transformacije zbog zaokrenutog koordinatnog sustava pogona za kut α_T

$$\mathbf{M}_C^F = \tilde{\mathbf{r}}_T \mathbf{L}_{FP} \begin{bmatrix} T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \tilde{\mathbf{r}}_T \mathbf{L}_{FP} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -F_{p\sigma} \alpha_u \end{bmatrix} - \mathbf{L}_{FP} \begin{bmatrix} Q \\ 0 \\ M_{p\sigma} \alpha_p \end{bmatrix}.$$

Kao i u slučaju mlaznih motora poprečna komponenta $\alpha_u F_{pu}$ je mala u odnosu na aksijalnu komponentu T , te je smatramo malom veličinom u odnosu na T . Postavni kut motora α_T isto je mala veličina, pa zanemarujući male veličine drugog reda bit će:

$$\mathbf{M}_C^F = \tilde{\mathbf{r}}_T \mathbf{L}_{FP} \begin{bmatrix} T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \tilde{\mathbf{r}}_T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -F_{p\sigma} \alpha_p \end{bmatrix} - \mathbf{L}_{FP} \begin{bmatrix} Q \\ 0 \\ M_{p\sigma} \alpha_p \end{bmatrix}.$$

odakle je

$$\begin{bmatrix} L^F \\ M^F \\ N^F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_T T \sin \alpha_T \\ z_T T \cos \alpha_T - x_T T \sin \alpha_T \\ -y_T T \cos \alpha_T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -y_T F_{p\sigma} \alpha_p \\ x_T F_{p\sigma} \alpha_p \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Q \cos \alpha_T - M_{p\sigma} \alpha_p \sin \alpha_T \\ 0 \\ Q \sin \alpha_T + M_{p\sigma} \alpha_p \cos \alpha_T \end{bmatrix}$$

Kao i u slučaju mlaznog motora i ovdje imamo iste važne napomene:

- Ako postoji samo jedna središnja elisa, onda je $y_T = 0$, pa nestaju članovi sa y_T , a ako je više elisa, onda treba zbrojiti komponente svih elisa. Tada će se članovi sa y_T skratiti jer elisi s desne strane odgovara ista s lijeve strane:

$$M^F = z_T T \cos \alpha_T - x_T (T \sin \alpha_T - F_{p\sigma} \alpha_p)$$

- U slučaju otkaza jednog motora pojavljuje se komponenta N^F koja je vrlo snažna:

$$N^F = -y_T T \cos \alpha_T.$$

- Moment propinjanja je linearna funkcija napadnog kuta

$$M^F = M_0^F + M_\alpha^F \alpha,$$

gdje je

$$M_0^F = z_T T \cos \alpha_T - x_T (T \sin \alpha_T + F_{p\sigma} \alpha_T)$$

$$M_\alpha^F = x_T F_{p\sigma} \left(1 - \frac{\partial \varepsilon_u}{\partial \alpha} \right).$$

jer je $\alpha_p = \alpha - \varepsilon_u - \alpha_T$.

5.2.3 Primjer

Za mali putnički zrakoplov iz odjeljka 5 odrediti normalnu komponentu i moment propinjanja pogonske sile, ako je $\alpha_T = 4.5^\circ$. Brzina leta je 45 m/s na visini 2000m.

Za korak elise

$$J = \frac{V}{nD} = \frac{45}{40 \cdot 1.88} = 0.60$$

gradijent ploščice elise je

$$\frac{\partial C_{N \text{ blade}}}{\partial \alpha} = 0.030$$

a za bezdimenzijsku pogonsku silu koja je jednaka otporu zrakoplova

$$T^* = \frac{T}{\rho V^2 D^2} = \frac{1}{2} \frac{S_{ref} (C_{D0} + K C_L^2)}{D^2} = \frac{15.1 \cdot (0.0259 + 0.104 \cdot 0.694^2)}{2 \cdot 1.88^2} = 0.162$$

Pri tome je u horizontalnom letu sila uzgona jednaka težini letjelice te je koeficijent sile uzgona

$$C_L = \frac{2mg}{\rho V^2 S} = \frac{2 \cdot 1088 \cdot 9.81}{1.0066 \cdot 45^2 \cdot 15.1} = 0.694.$$

S tim vrijednostima je gradijent normalne sile

$$\frac{F_{p\sigma}}{q_\infty S_{ref}} = N_B \frac{S_p}{S_{ref}} \frac{\partial C_{N \text{ blade}}}{\partial \alpha} f(T^*) = 2 \frac{(1.88/2)^2 \pi}{15.1} \cdot 0.030 \cdot 1.15 = 0.0127$$

Ispred elise nema savijanja struje ($\alpha_p = \alpha - \alpha_T$) te je s ovim gradijentom normalna komponenta pogonske sile:

$$-\frac{F_{p\sigma}\alpha_p}{q_\infty S_{ref}} = -\frac{F_{p\sigma}}{q_\infty S_{ref}}(\alpha - \alpha_T) = -0.0127 \cdot (\alpha - 0.0785) = 0.0010 - 0.0127 \cdot \alpha$$

Moment propinjanja od elise bit će:

$$M^F = z_p T \cos \alpha_T - (\ell_m - \ell_p)(T \sin \alpha_T - F_{p\sigma} \alpha_p).$$

Os motora prolazi kroz središte mase te je $z_p = 0$, pa će komponenta propinjanja pogonskog momenta biti:

$$M^F = -(\ell_m - \ell_p)[T \sin \alpha_T - F_{p\sigma}(\alpha - \alpha_T)].$$

ili

$$\begin{aligned} \frac{M^F}{q_\infty S_{ref} c_A} &= \frac{(\ell_m - \ell_p)}{c_A} \left[-(C_{D0} + K \cdot C_L^2) \cdot \sin \alpha_T + \frac{F_{p\sigma}}{q_\infty S_{ref}} (\alpha - \alpha_T) \right] \\ \frac{M^F}{q_\infty S_{ref} c_A} &= \frac{(\ell_A + h_m - \ell_p)}{c_A} \left[-(0.0259 + 0.104 \cdot 0.694^2) \cdot 0.0785 + 0.0127 \cdot (\alpha - 0.0785) \right] \\ \frac{M^F}{q_\infty S_{ref} c_A} &= \left(\frac{1.471}{1.73} + \bar{h}_m - 0 \right) [0.0127\alpha - 0.0068] = \\ &= (0.0108 + 0.0127\bar{h}_m) \cdot \alpha - (0.0059 + 0.0070\bar{h}_m) \end{aligned}$$

6 RAVNOTEŽNI LET

Zrakoplovi imaju tzv. polarno upravljanje. Trebaju li u nekoj ravnini učiniti zaokret, a to znači promijeniti pravac brzine u toj ravnini, oni to ostvaruju vektorskom razlikom sile uzgona i težine, tj. jedan dio sile uzgona služi za kompenzaciju težine, a drugi za promjenu pravca vektora brzine. Zato se zrakoplovi moraju zavaljati da bi postavili silu uzgona tamo gdje treba, a istodobno povećali silu uzgona koliko treba. Odatle slijedi da je problem *upravljivosti* pitanje veličine sile uzgona koju zrakoplov može ostvariti. Kao mjera upravljivosti može se upotrebljavati ili maksimalna sila uzgona ili prirast sile uzgona za jedinični prirast otklona kormila visine.

6.1 Definicija ravnotežnog leta

Ravnotežni let (ili istrimana letjelica, kako se često govori), znači da su momenti koji djeluju oko središta mase letjelice u ravnoteži, tj. da je rezultirajući moment jednak nuli. U tom slučaju letjelica se neće okretati, ili ako ima neku kutnu brzinu neće je mijenjati, jer moment za središte mase mijenja kutnu brzinu. U većini slučajeva let transportnih zrakoplova odvija se u ovim uvjetima ili vrlo blisko njima. Prema tome, možemo reći da u ravnotežnom letu, ukupni moment propinjanja koji je jednak zbroju aerodinamičkog i pogonskog momenta propinjanja, taj zbroj mora biti jednak nuli.

$$M = 0$$

6.2 Ravnotežni napadni kut

Kad nema bočnog vjetra na zrakoplov u letu djeluje ukupni moment propinjanja i ukupna sila uzgona. Oba vektora lineariziramo po napadnom kutu i otklonu kormila visine

$$L = L^A + L^F = L_0 + L_\alpha \alpha + L_\delta \delta_m$$

$$M = M^A + M^F = M_0 + M_\alpha \alpha + M_{\delta_m} \delta_m$$

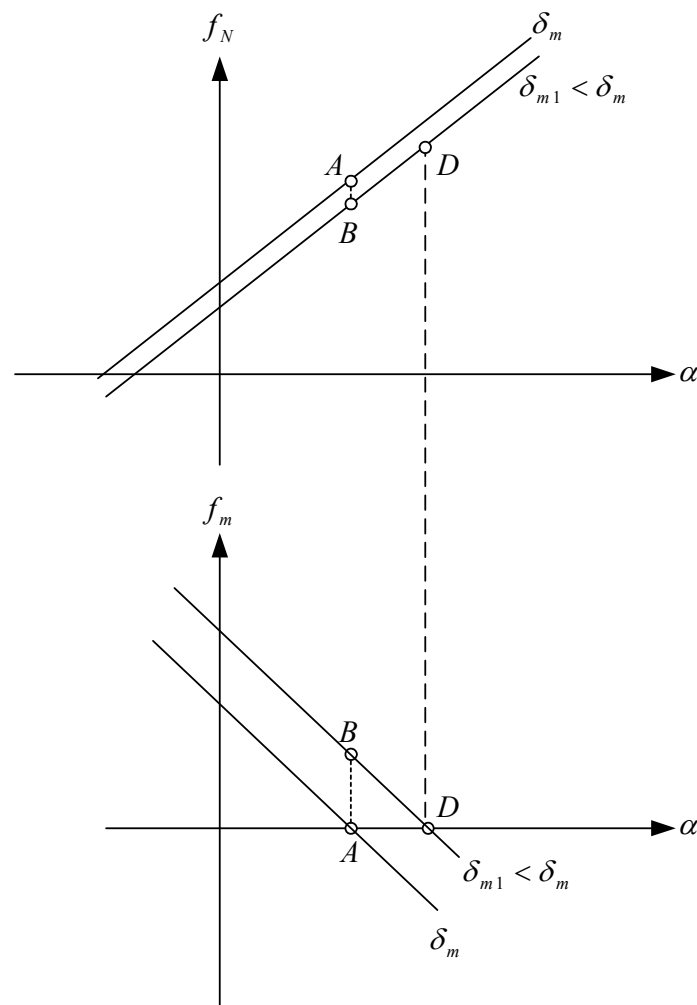
To su dvije familije krivulja, koje su prikazane na slici 1. Na toj slici položaji krivulja odgovaraju normalnoj shemi zrakoplova. Ovisnost sile uzgona $L = f_L(\alpha, \delta_m)$ o napadnom kutu obično je funkcija bliska pravcu, a njihova međusobna udaljenost za različite otklone δ_m ovisi o veličini upravljačkih površina. U slučaju subsoničnih zrakoplova, kada su kormila visine samo dio horizontalnog repa, ti pravci vrlo bliski te se često zamjenjuju jednim pravcem. Nasuprot tomu, krivulje momenta propinjanja $M = f_m(\alpha, \delta_m)$ za različite otklone

kormila visine δ_m uvijek su razmaknute. Za normalne zrakoplovne sheme te krivulje su približno linearne, a za konfiguracije tipa *canard* vrlo su nelinearne po napadnom kutu.

Pretpostavimo da letimo s otklonom δ_m u ravnatežnom letu. Na donjem dijagramu slike 7-1 točka A predstavlja stanje u letu jer po definiciji u ravnatežnom letu moment propinjanja M_A je nula, a točka A se nalazi na krivulji $M = f_m(\alpha, \delta_m)$ za zadano δ_m . Iz te jednadžbe

$$M_A = M_0 + M_\alpha \alpha_{rav} + M_\delta \delta_m = 0$$

dobivamo ravnatežni napadni kut za postavljeni otklon kormila visine. Kada je moment propinjanja jednak nuli, onda je napadni kut jednak *ravnatežnom napadnom kutu* α_{rav} . To znači da zadanom otklonu kormila visine δ_m , u ravnatežnom letu, odgovara ravnatežni napadni kut:



Slika 1. Prijelaz iz jednoga u drugi ravnatežni let

$$\alpha_{rav} = \frac{M_0 + M_\delta \delta_m}{-M_\alpha}$$

U ravnatežnom letu sila uzgona predstavljena je odgovarajućom točkom A u gornjemu dijelu dijagrama na slici 1:

$$L_{rav} = L_0 + L_\alpha \alpha_{rav} + L_\delta \delta_m,$$

Iz toga zaključujemo da u ravnatežnom letu sila uzgona ovisi isključivo o veličini otklona kormila visine δ_m .

Vidjeli smo da napadni kut u ravnatežnom letu ovisi o otklonu kormila visine. Tu ovisnost označavamo s $\alpha_{rav}(\delta_m)$. Iz gornje jednadžbe za ravnatežni napadni kut slijedi također da on ima dva dijela.

$$\alpha_{rav} = \alpha_{rav0} + K \cdot \delta_m$$

Prvi dio $\alpha_{rav0} = M_0 / -M_\alpha$ ne ovisi o otklonu kormila visine δ_m i to je vrijednost napadnog kuta u ravnatežnom stanju kad je otklon kormila visine nula. Drugi dio je proporcionalan otklonu kormila visine. Taj koeficijent proporcionalnosti

$$K = -\frac{M_\delta}{M_\alpha}$$

nazivamo aerodinamičko pojačanje (zajedno s njegovim predznakom). Predznak aerodinamičkog pojačanja može biti i pozitivan i negativan, što ovisi o aerodinamičkoj shemi. Za *canard* konfiguracije je $M_\delta > 0$, $M_\alpha < 0$, pa je aerodinamičko pojačanje tih shema uvijek pozitivno. Nasuprot tomu, normalna konfiguracija zrakoplova ima $M_\delta < 0$, a M_α može biti negativno ili pozitivno, pa i aerodinamičko pojačanje može biti pozitivno i negativno.

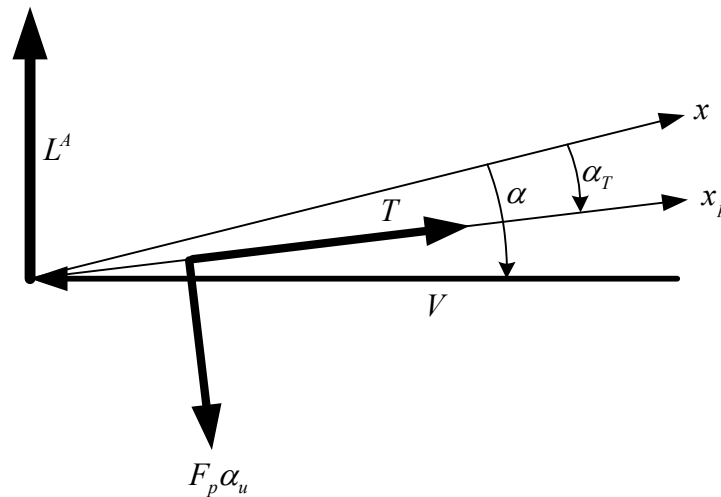
6.3 Primjer

Odredimo koliki su gradijenti ukupne sile uzgona i momenta propinjanja za slučaj malog putničkog zrakoplova sa centralom elisom. Položaj osi rotacije elise x_p , osi x letjelice i brzine leta V prikazan je na slici 2. Prema toj slici bit će ukupna sila uzgona

$$L = T \sin(\alpha - \alpha_T) - F_p \alpha_u \cos(\alpha - \alpha_T) + L^A$$

Kako je savijanje zračne struje za centralnu elisu praktično jednako nuli bit će $\alpha_u = \alpha - \alpha_T$, pa je

$$L = T \sin(\alpha - \alpha_T) - F_p (\alpha - \alpha_T) \cos(\alpha - \alpha_T) + L^A$$



Slika 2

Uz pretpostavku malog kuta $(\alpha - \alpha_T)$, dobivamo

$$L = (T - F_p) \cdot (\alpha - \alpha_T) + L^A$$

$$L = \underbrace{\frac{\rho V^2}{2} S_{ref} C_{L0}}_{L_0} - (T - F_p) \alpha_T + \underbrace{\left(\frac{\rho V^2}{2} S_{ref} C_{L\alpha} + T - F_p \right)}_{L_\alpha} \alpha + \underbrace{\frac{\rho V^2}{2} S_{ref} C_{L\delta_m}}_{L_{\delta_m}} \delta_m$$

Ukupni moment propinjanja je zbroj aerodinamičkog momenta propinjanja i momenta propinjanja od poprečne pogonske sile.

$$M = M^F + \frac{\rho V^2}{2} S_{ref} c_A C_m$$

Kako je prema poglavlju 5.2.2

$$M^F = z_T T \cos \alpha_T - x_T (T \sin \alpha_T + F_{p\sigma} \alpha_T) + x_T F_{p\sigma} \left(1 - \frac{\partial \varepsilon_u}{\partial \alpha} \right) \cdot \alpha.$$

bit će

$$M = \underbrace{z_T T \cos \alpha_T - x_T (T \sin \alpha_T + F_{p\sigma} \alpha_T) + \frac{\rho V^2}{2} S_{ref} c_A C_{m0}}_{M_0} + \underbrace{\left[x_T F_{p\sigma} \left(1 - \frac{\partial \varepsilon_u}{\partial \alpha} \right) + \frac{\rho V^2}{2} S_{ref} c_A C_{m\alpha} \right]}_{M_\alpha} \cdot \alpha + \underbrace{\frac{\rho V^2}{2} S_{ref} c_A C_{m\delta}}_{M_\delta} \cdot \delta_m$$

6.4 Normalno opterećenje

Budući da proučavamo zrakoplove koji su aerodinamički upravljivi, bitna je veličina sile uzgona i sposobnost zrakoplova da je mijenja jer se pomoću te sile upravlja zrakoplovom. Zato se odnos intenziteta sile uzgona prema težini zrakoplova naziva *normalno opterećenje* (*load factor*) i označava se sa skalarom n bez indeksa:

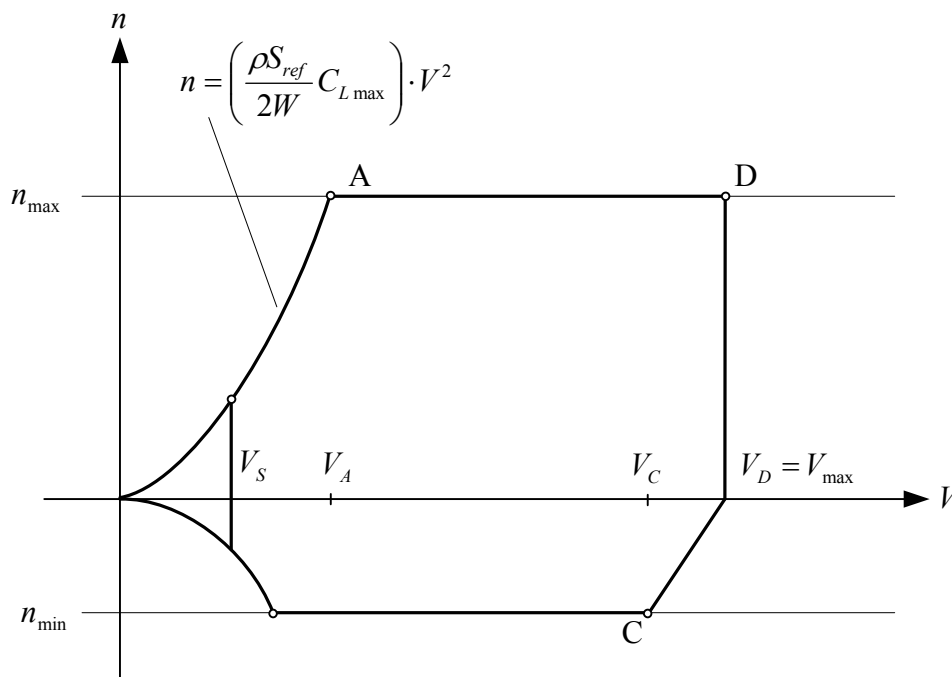
$$n = \frac{L}{W}$$

Drugim riječima to znači da je faktor opterećenja veličina uzgona izražena u težinama letjelice. Ako normalno opterećenje napišemo u obliku

$$n = \frac{\rho S_{ref}}{2W} V^2 C_L,$$

uočavamo vrlo važnu činjenicu da faktor opterećenja ovisi o kvadratu brzine (preko dinamičkog tlaka u sili uzgona) i od aerodinamičkog koeficijenta uzgona.

Jasno je da zbog čvrstoće konstrukcije normalno opterećenje n ne može biti neograničeno. Za svaki tip zrakoplova propisano je maksimalno opterećenje (pozitivno i negativno). Međutim ne treba zaboraviti da koeficijent uzgona ne može biti veći od $C_{L\max}$ pa je za male brzine normalno opterećenje ograničeno parabolom. Preko te vrijednosti nastaje slom uzgona.



Slika 3 Oblik dijagrama n - V za transportni zrakoplov

Sila uzgona $L = nW$ stvara jedno normalno ubrzanje zrakoplova $L/(W/g)$, to isto ubrzanje osjeća bilo koja mala masu m u zrakoplovu na koju onda djeluje inercijalna sila (suprotna pravcu uzgona zrakoplova) jednaku produktu te male mase i tog ubrzanja, tj ta inercijalna sila koja djeluje na tu malu masu je veličine:

$$L/(W/g) \cdot m = mg \cdot n$$

Ona je proporcionalna n -u. Zato se za n upotrebljava riječ opterećenje.

6.5 Primjer

Odrediti opterećenje malog zrakoplova za najveći otklon kormila visine, ako je za taj otklon koeficijent sile uzgona 75% od maksimalne vrijednosti $C_{L \max} = 1.45$, pri zemlji i brzini leta $V = 50 [m/s]$

$$n = \frac{L}{W} = \frac{\frac{\rho V^2}{2} S_{ref} C_L}{mg}$$

Za maksimalni otklon kormila visine je $C_L = 0.75 \cdot 1.45 = 1.09$ pri zemlji i brzinom leta $V = 50 [m/s]$

$$n_{\max} = \frac{\frac{1.225 \cdot 50^2}{2} 15.1 \cdot 1.09}{1088 \cdot 9.81} = 2.36$$

6.6 Stabilnost ravnotežnog leta

Ravnotežni let bit će stabilan ako se opet uspostaviti ravnotežni let kakav je bio, kad neki vanjski poremećaj leta naruši tu ravnotežu (npr. udar uzdužnog vjetra, ulazak u oblak gdje je povećana gustoća i dr.). Postoje dvije stabilnosti ravnotežnog leta: uzdužna stabilnost i bočna stabilnost.

Zrakoplov je uzdužno *stabilan* ako poremećaj napadnog kuta $\Delta\alpha$ (zbog vanjskih uzroka) stvara promjena momenta propinjanja koja nastoji poništiti taj poremećaj napadnog kuta.

Vidjeli smo da točka A na slici 1 predstavlja stanje letjelice, tj. njen napadni kut za zadani kut otklona kormila visine. Prvo, u ravnotežnom letu potreban je pozitivan napadni kut α_{rav} , a zatim taj ravnotežni kut treba biti stabilan.

Zrakoplov treba za svaku vrijednost otklona kormila visine δ_m imati određeni napadni kut α_{rav} za koji je moment propinjanja jednak nuli:

$$0 = M_0 + M_\delta \delta_m + M_\alpha \alpha_{rav}$$

To znači da postoji ravnoteža između dva momenta $M_0 + M_\delta \delta_m$ i $M_\alpha \alpha_{rav}$. Kad letjelica leti s tim kutom α_{rav} , onda je ukupni moment propinjanja jednak nuli, tj. nema momenta propinjanja, letjelica se ne okreće oko osi y , napadni kut α_{rav} se ne mijenja. Kaže se da je letjelica u ravnotežnom letu (*istrimana letjelica*).

Postavlja se pitanje je li letjelica u letu s napadnim kutom α_{rav} stabilna. Drugim riječima ako iz bilo kojih razloga nastane poremećaj napadnog kuta $\Delta\alpha$, pa napadni kut ima novu vrijednost $\alpha = \alpha_{rav} + \Delta\alpha$, što će se zbiti? Zbog tog poremećaja $\Delta\alpha$ narušena je ravnoteža između dva momenta $M_0 + M_\delta \delta_m$ i $M_\alpha \alpha$. Rezultirajući moment propinjanja nije jednak nuli. Za poremećeni napadni kut $\alpha_{rav} + \Delta\alpha$ bit će taj rezultirajući moment propinjanja

$$M = M_0 + M_\delta \delta_m + M_\alpha (\alpha_{rav} + \Delta\alpha).$$

Međutim, kako je $M_0 + M_\delta \delta_m + M_\alpha \alpha_{rav} = 0$, bit će novi moment propinjanja

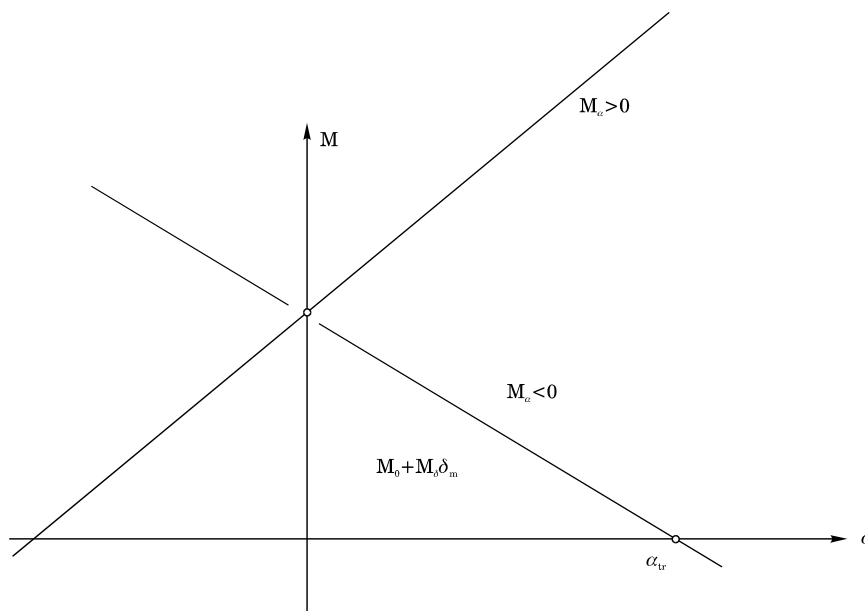
$$M = M_\alpha \Delta\alpha$$

Sve ovisi o predznaku derivativa M_α . Ako je $M_\alpha < 0$, onda novi moment propinjanja M ima suprotan predznak od $\Delta\alpha$. Tako će novi moment propinjanja $M = M_\alpha \Delta\alpha$, koji je nastao zbog poremećaja napadnog kuta, biti negativan u slučaju povećanja napadnog kuta, a to znači da će smanjivati napadni kut, tj. težiti da se letjelica vrati u prvobitni položaj α_{rav} . Ili, ako je poremećaj napadnog kuta bio negativan, moment propinjanja $M = M_\alpha \Delta\alpha$ bit će pozitivan pa će povećavati napadni kut, tj. opet će težiti da vrati letjelicu u prvobitni položaj α_{rav} . To znači da letjelica sa $M_\alpha < 0$ ima stabilan let s napadnim kutom α_{rav} . U tom slučaju kada je $M_\alpha < 0$, da bi ravnotežni napadni kut

$$\alpha_{rav} = \frac{M_0 + M_\delta \delta_m}{-M_\alpha}$$

bio pozitivan, mora biti $M_0 + M_\delta \delta_m$ pozitivno. Tako dobivamo dva uvjeta za stabilan ravnotežni napadni kut:

$$\begin{aligned} M_\alpha &< 0 \\ M_0 + M_\delta \delta_m &> 0. \end{aligned}$$



Slika 4. Statička stabilnost i nestabilnost

Ovakvu stabilnost u ravnotežnom letu zovemo *statička stabilnost leta*, tj. to su dva uvjeta statičke stabilnosti leta. Međutim to nisu jedini mogući uvjeti stabilnosti u ravnotežnom letu.

Do sada smo smatrali da je otklon upravljačke površine δ_m proporcionalan otklonu samo otklonu pilotske palice, tj. da je izravno pod kontrolom pilota. Ako letjelica nema statičku stabilnost, ona može biti stabilizirana pomoću povratne veze. Povratna veza je dodani otklon $\Delta\delta_m$ koji se zbraja s otklonom δ_m , tako da je otklon upravljačke površine $\delta_m + \Delta\delta_m$, zbroj otklona δ_m izravno od pilota, i dodanog otklona $\Delta\delta_m$ iz povratne veze. U tom je slučaju moment propinjanja

$$M = M_0 + M_\delta (\delta_m + \Delta\delta_m) + M_\alpha (\alpha_{rav} + \Delta\alpha) = M_\delta \Delta\delta_m + M_\alpha \Delta\alpha,$$

jer i dalje vrijedi jednadžba ravnotežne letjelice $0 = M_0 + M_\delta \delta_m + M_\alpha \alpha_{rav}$. Taj dodani otklon iz povratne veze $\Delta\delta_m$ može osigurati da ovaj rezultirajući moment M bude suprotnog predznaka od poremećaja $\Delta\alpha$, a to znači da statički nestabilna letjelica s povratnom vezom može biti stabilna. Takvu stabilnost nazivamo *sintetična stabilnost*.

Da bismo povećali napadni kut zrakoplova, trebamo negativan otklon kormila visine. Kada smo promijenili otklon kormila visine $\delta_{m1} < \delta_m$, normalna sila predstavljena je točkom B na gornjemu dijagramu slike 7-1, a pojavio se moment propinjanja $M_B = f_m(\alpha_A, \delta_{m1})$ određen ordinatom točke B u donjemu dijagramu iste slike. Taj moment okreće letjelicu i

povećava napadni kut od vrijednosti α_A do vrijednosti α_D . Kako je letjelica stabilna ($M_\alpha < 0$), povećanje napadnog kuta $\Delta\alpha = \alpha_D - \alpha_A$ stvara dodatni negativni aerodinamički moment $\Delta M = M_\alpha \Delta\alpha < 0$ propinjanja, tako da letjelica postigne novi ravnotežni položaj predstavljen točkom D u kojoj je $M_D = f_m(\alpha_D, \delta_{m1}) = 0$. U točki D moment propinjanja je opet nula i letjelica je opet u ravnotežnom stanju, ali sada je normalna sila veća, kao što se vidi u točki D u gornjemu dijelu slike. Prelazak iz točke A u točku D predstavlja *prijelazni proces*. On nije predmet analize ove knjige.

Statički stabilna letjelice na svaki zauzeti otklon upravljačkih površina poslije prijelaznog procesa zauzima novi ravnotežni položaj u kome je moment za središte mase jednak nuli. Kada promatramo let transportnih zrakoplova, tada nema velike i nagle promjene otklona kormila visine, kao što je slučaj s borbenim lovcima ili akrobatskim zrakoplovima. Za transportne zrakoplove u prvoj iteraciji možemo usvojiti da su oni za vrijeme leta stalno u ravnotežnom stanju, a to znači da je $M = 0$, odnosno da je napadni kut uvijek ovisan samo o otklonu kormila visine.

6.7 Neutralna točka

Gradijent po napadnom kutu ukupnog momenta propinjanja zbroj je dvaju gradijenata

$$M_\alpha = M_\alpha^F + M_\alpha^A.$$

Prema uvjetu stabilnosti taj zbroj mora biti manji od nule,

$$M_\alpha^A < -M_\alpha^F$$

što znači da negativan gradijent aerodinamičkog koeficijenta momenta propinjanja za središte mase $C_{m\alpha}^A < 0$ nije dovoljan da bi osigurao prvi uvjet stabilnosti $M_\alpha < 0$. U ovom odjeljku želimo razmotriti kako utječe položaj središta mase na ovaj uvjet stabilnosti zrakoplova. Zato trebamo eksplicitno utjecaj položaju središta mase na oba gradijenta.

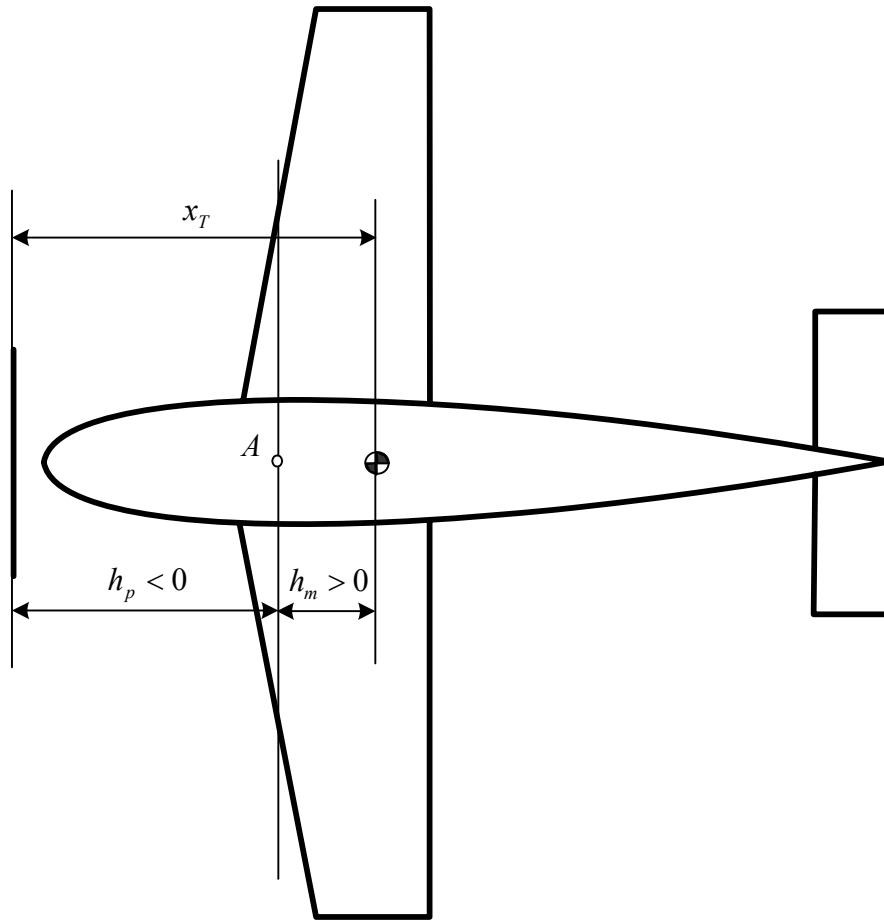
U poglavlju 5.2.2. vidjeli smo da je

$$M_\alpha^F = x_T F_{p\sigma} \left(1 - \frac{\partial \varepsilon_u}{\partial \alpha} \right).$$

Kako je $x_T = h_m - h_p$, gradijent uslijed pogonske sile određen je jednadžbom :

$$M_\alpha^F = F_p (h_m - h_p) (1 - \varepsilon_{u\alpha})$$

U većini slučajeva ovaj je pozitivan i to utoliko više što je središte mase više pomjereno u nazad kao na slici 4.



Slika 5

Kao što smo vidjeli u poglavlju 4, gradijent aerodinamičkog momenta propinjanja M_α^A ima tri dijela:

- od normalne sile kombinacije krilo tijelo $K_{WB} N_{W\alpha} \cdot (h_m - h_{cw})$,
- od normalne sile horizontalnog repa $-N_{H\alpha} (h_{ch} - h_m)(1 - \varepsilon_\alpha)$ i
- od tijela $M_{B\alpha}$.

Da bi dobili ukupni gradijent njima treba pridodati još gradijent pogonskog momenta

$$M_\alpha^F = F_p (h_m - h_p)(1 - \varepsilon_{u\alpha})$$

Tako dobivamo ukupni gradijent moment propinjanja

$$M_\alpha = F_p (1 - \varepsilon_{u\alpha}) \cdot (h_m - h_p) + K_{WB} N_{W\alpha} \cdot (h_m - h_{cw}) - N_{H\alpha} (h_{ch} - h_m) + N_{H\alpha} (h_{ch} - h_m) \cdot \varepsilon_\alpha + M_{B\alpha}$$

ili

$$M_\alpha = [F_p (1 - \varepsilon_{u\alpha}) + K_{WB} N_{W\alpha} + N_{H\alpha} - N_{H\alpha} \varepsilon_\alpha] \cdot h_m - F_p (1 - \varepsilon_{u\alpha}) h_p - K_{WB} N_{W\alpha} h_{cw} - N_{H\alpha} h_{ch} + N_{H\alpha} h_{ch} \varepsilon_\alpha + M_{B\alpha}$$

Kako je gradijent ukupne normalne sile

$$N_\alpha = F_p(1 - \varepsilon_{u\alpha}) + K_{WB}N_{W\alpha} + N_{H\alpha} - N_{H\alpha} \cdot \varepsilon_\alpha$$

možemo gornju jednadžbu napisati u obliku

$$M_\alpha = N_\alpha \cdot h_m - F_p(1 - \varepsilon_{u\alpha})h_p - K_{WB}N_{W\alpha}h_{cw} - N_{H\alpha}h_{ch} + N_{H\alpha}h_{ch}\varepsilon_\alpha + M_{B\alpha}$$

ili

$$M_\alpha = N_\alpha \cdot \left(h_m - \frac{F_p(1 - \varepsilon_{u\alpha})h_p + K_{WB}N_{W\alpha}h_{cw} + N_{H\alpha}h_{ch} - N_{H\alpha}h_{ch}\varepsilon_\alpha - M_{B\alpha}}{N_\alpha} \right)$$

Iz ove jednadžbe se vidi da udaljenost središta mase mora biti manja od vrijednosti

$$h_n = \frac{F_p(1 - \varepsilon_{u\alpha})h_p + K_{WB}N_{W\alpha}h_{cw} + N_{H\alpha}h_{ch} - N_{H\alpha}h_{ch}\varepsilon_\alpha - M_{B\alpha}}{N_\alpha}$$

Točka koja se nalazi na ovoj udaljenosti od referentne točke A naziva se *neutralna tačka*.

Pomoću udaljenosti neutralne točke h_n možemo napisati da je gradijent momenta propinjanja

$$M_\alpha = N_\alpha(h_m - h_n)$$

Sad se jasno vidi da će prvi uvjet statičke stabilnosti $M_\alpha < 0$ biti ispunjen ako je

$$\bar{h}_m < \bar{h}_n$$

tj. ako je središte mase ispred neutralne točke. Što je više središte mase ispred neutralne točke, bit će bolje zadovoljen uvjet statičke stabilnosti da je $M_\alpha < 0$.

6.8 Primjer

Odredit ćemo neutralnu točku malog putničkog zrakoplova (odjeljak 5).

Udaljenost neutralne točke od vrha letjelice s elisnim pogonom dobivamo iz uvjeta da je za neutralnu točku zbroj gradijenata pogonskog momenta i aerodinamičkog momenta propinjanja jedna k nuli.

$$M_\alpha^F + M_\alpha = 0$$

ili

$$\frac{M_\alpha^F}{qS_{ref}c_A} + C_{m\alpha} = 0$$

U primjeru iz odjeljka 6.5.3 izračunali smo koeficijent propinjanja pogonskog momenta za mali putnički zrakoplov

$$\frac{M_\alpha^F}{q_\infty S_{ref} c_A} = \frac{F_{p\sigma}}{q_\infty S_{ref}} (\alpha - \alpha_T) (\bar{h}_m - \bar{h}_p)$$

Njegov gradijent bit će ($h_p = -1.471 \rightarrow \bar{h}_p = \frac{-1.471}{1.73} = -0.850$)

$$\frac{M_\alpha^F}{q_\infty S_{ref} c_A} = \frac{F_{p\sigma}}{q_\infty S_{ref}} (\bar{h}_m - \bar{h}_p) = 0.0127 \cdot (\bar{h}_m + 0.850)$$

Aerodinamički moment propinjanja izračunan je u odjeljku 5.3.6

$$C_m^A = -(1.482 - 4.72 \bar{h}_m) \cdot \alpha - (0.607 - 0.216 \bar{h}_m) \cdot K_f \delta_m - \\ - (0.254 - 3.640 \bar{h}_m) \cdot i_w - (1.212 - 0.446 \bar{h}_m) \cdot i_h - 0.055 + 0.192 \bar{h}_m$$

Bez obzira na to koliki su postavni kutovi i_w i i_h , bit će gradijent aerodinamičkog momenta propinjanja

$$C_{m\alpha}^A = -(1.482 - 4.72 \bar{h}_m)$$

Ukupni gradijent momenta propinjanja

$$\frac{M_\alpha^F}{q_\infty S_{ref} c_A} + C_{m\alpha}^A = 0.0127 \cdot (\bar{h}_m + 0.850) - (1.482 - 4.72 \bar{h}_m)$$

Kada je središte mase u neutralnoj točki gradijent momenta propinjanja mora biti jednak nuli:

$$0.0127 (\bar{h}_n + 0.850) - (1.482 - 4.72 \bar{h}_n) = 0$$

Iz ove jednadžbe dobivamo

$$(4.72 + 0.0127) \bar{h}_n = 1.482 - 0.0108$$

$$\bar{h}_n = 0.31$$

To znači da je neutralna točka udaljena od točke A

$$h_n = \bar{h}_n c_A = 0.31 \cdot 1.730 = 0.536 \text{ m}$$

Ako se središte mase na udaljenosti od vrha letjelice $\ell_m = 1.719 \text{ m}$, odnosno od točke A

$h_m = 0.248 \text{ m}$ onda je

$$\bar{h}_n - \bar{h}_m = \frac{0.536 - 0.248}{1.730} = 0.17$$

Uočimo iz ovog primjera da postavni kutovi krila i horizontalnog repa nemaju utjecaja na položaj neutralne točke.

6.9 Upravljivost u ravnotežnom letu

Sila uzgona mijenja pravac brzine te ona predstavlja upravljačku silu:

$$L = (F_{N0} + qSC_{N0}) + (F_{N\alpha} + qSC_{N\alpha} - qSC_A) \alpha + qSC_{L\delta} \delta_m$$

Ima tri komponente:

- prva je konstantna

$$L_0 = F_{Y0}^p + \frac{\rho V^2}{2} S_{ref} C_{N0}$$

- druga je proporcionalna napadnom kutu i ona je najvažnija

$$L_\alpha \alpha = \left(F_{Y\alpha}^p + \frac{\rho V^2}{2} S_{ref} (C_{N\alpha} - C_A) \right) \alpha$$

- treća je proporcionalna odklonu upravljačkih površina

$$L_{\delta_m} \delta_m = \frac{\rho V^2}{2} S_{ref} C_{N\delta} \delta_m.$$

U ravnotežnom letu, kada je $M = 0$, kod aerodinamičke sheme canard treća je komponenta u istom smjeru kao i druga, a kod normalne sheme u suprotnom je smjeru. Zato je uzgon sheme canard veći od uzgona normalne sheme. To je jedan od razloga što zrakoplovi koji trebaju imati velike manevarske mogućnosti imaju canard konfiguracije.

Sila uzgona u ravnotežnom stanju ovisi samo o odklonu kormila visine jer ravnotežni napadni kut ovisi o odklonu kormila visine.

$$\alpha_{rav} = \frac{M_0 + M_\delta \delta_m}{-M_\alpha}$$

Uvrstimo li ovu vrijednost za ravnotežni napadni kut u jednadžbu za silu uzgona, dobivamo:

$$L_{rav} = L_0 + L_\alpha \alpha_{rav} + L_\delta \delta_m = L_0 + L_\alpha \frac{M_0 + M_\delta \delta_m}{-M_\alpha} + L_\delta \delta_m$$

$$L_{rav} = L_0 + L_\alpha \frac{M_0}{-M_\alpha} + \left(L_\alpha \frac{M_\delta}{-M_\alpha} + L_\delta \right) \delta_m$$

Apsolutna vrijednost derivacije sile uzgona po odklonu kormila visine

$$\frac{dL_{rav}}{d\delta_m} = L_\alpha \frac{M_\delta}{-M_\alpha} + L_\delta$$

mjera je upravljivosti, jer pokazuje za koliko se promijeni upravljačka sila kad se promijeni odklon kormila visine, bez obzira na koju stranu. Da bismo vidjeli utjecaj položaja središta mase na upravljivost, podsjetimo se jednadžbe za gradijent momenta propinjanja ovisno o položaju neutralne točke i središta mase:

$$\frac{M_\alpha}{q S_{ref} c_A} = -\frac{N_\alpha}{q S_{ref}} (\bar{h}_n - \bar{h}_m)$$

Iz te jednadžbe dobivamo vezu ($N_\alpha = L_\alpha$)

$$\frac{M_\alpha}{N_\alpha} = -c_A (\bar{h}_n - \bar{h}_m)$$

Zamjenom u gornju jednadžbu 40, dobivamo ovisnost upravljivosti o položaju središta mase i normalne točke:

$$\frac{dL_{rav}}{d\delta_m} = \frac{M_{\delta_m}}{c_A (\bar{h}_n - \bar{h}_m)} + L_{\delta_m}$$

gdje su, podsjetimo se, $C_{m\delta_m}$ i $C_{L\delta_m}$ određeni u odjeljku 4.4. U ovoj jednadžbi pojavljuje se totalna i parcijalna derivacija uzgona. Totalna derivacija koeficijenta uzgona (ili koeficijenta normalne sile) po otklonu kormila visine, moguća je s obzirom na zavisnost napadnog kuta α od otklona kormila visine δ_m prema jednadžbi 38 koja postoji u ravnotežnom let. Drugim riječima pojam upravljivosti vezan je za ravnotežni let.

Jednadžba pokazuje utjecaj $\bar{h}_n - \bar{h}_m$ na upravljivost i jasno ukazuje da upravljivost opada s povećanjem razlike $(\bar{h}_n - \bar{h}_m)$. Tako dolazimo do spoznaje da središte mase ne treba ići suviše prema naprijed, kako smo to željeli zbog statičke stabilnosti, jer se time smanjuje upravljivost letjelice. To znači da su uvjet statičke stabilnosti i uvjet upravljivosti oprečni. To je jedan od razloga što se za zrakoplove koji trebaju velike manevarske mogućnosti, pitanje stabilnosti rješava pomoću povratne veze (sintetična stabilnost) i canard konfiguracija.

Za transportne zrakoplove koji ne trebaju velike manevarske mogućnosti primjenjuje se normalna shema. Položaj krila i dimenzije horizontalnog repa određuju se tako da neutralna točka bude na udaljenosti od središta mase 2% do 5% aerodinamičke tetive, tj.

$$0.02 > \bar{h}_n - \bar{h}_m > 0.05$$

Maksimalnu silu uzgona postizemo pri maksimalnom napadnom kutu. Taj napadni kut treba se ostvariti s najvećim otklonom kormila visine, no u određenim granicama, jer u suprotnom dolazi do odvajanja struje i pada učinkovitost kormila. Isto tako maksimalni napadni kut ne smije biti veći od neke granične vrijednosti α_{max} , jer u suprotnome naglo pada uzgon zrakoplova (*stall*). Tom maksimalnom otklonu kormila visine $\delta_{m\max}$ odgovara u ravnotežnom letu najveći dopušteni napadni kut zrakoplova, a on je 25% manji od najvećeg napadnog kuta pri kome nastaje *stall*. Znači da maksimalnom otklonu kormila visine $\delta_{m\max}$ treba odgovarati ravnotežni kut $0.75 \cdot \alpha_{max}$. Iz jednadžbe za ravnotežni napadni kut

$$0.75 \cdot \alpha_{max\ rav} = \frac{M_0 + M_\delta \delta_{m\max}}{-M_\alpha}$$

možemo odrediti koliko je potrebno aerodinamičko pojačanje (odnos M_δ/M_α) letjelice.

* * *

U prethodnoj točki vidjeli smo da središte mase može ići u nazad do neutralne točke a da zrakoplov ostane statički stabilan. Promatramo sad drugi ekstremni slučaj. Pomjerimo središte mase u naprijed. Maksimalnim otklonom kormila visine ograničen je krajnji prednji položaj središta mase do kojeg sila na horizontalnom stabilizatoru može uravnotežiti letjelicu.

6.10 Primjer

Odrediti postavni kut horizontalnog repa malog putničkog zrakoplova tako da je za maksimalni otklon kormila visine $\delta_m = 18^\circ$ sila uzgona 75% od maksimalne kritične vrijednosti $C_L = 1.45$, ako je postavni kut krila $i_w = +1^\circ$, a udaljenost središta mase od aerodinamičkog ishodišta $\bar{h}_m = 0.137$.

Jednadžbe koje daju koeficijente aerodinamičke sile uzgona i momenta propinjanja izračunane su u odjeljku 5.3.5 i 5.3.6:

$$C_L^A = 4.72\alpha + 0.216 K_f \delta_m + 3.64i_w + 0.446i_h + 0.192$$

$$C_m^A = -(1.482 - 4.72\bar{h}_m) \cdot \alpha - (0.607 - 0.216\bar{h}_m) \cdot K_f \delta_m - \\ - (0.254 - 3.640\bar{h}_m) \cdot i_w - (1.212 - 0.446\bar{h}_m) \cdot i_h - 0.055 + 0.192\bar{h}_m$$

Za $\bar{h}_m = 0.137$ i postavni kut krila $i_w = 1^\circ$ ove jednadžbe daju vrijednosti:

$$C_L^A = 4.72\alpha + 0.216 \cdot K_f \delta_m + 0.446 \cdot i_h + 0.256$$

$$C_m^A = -0.835 \cdot \alpha - 0.577 \cdot K_f \delta_m - 1.151 \cdot i_h - 0.024$$

Tim koeficijentima trebamo dodati i odgovarajuće koeficijente od pogonske sile i pogonskog momenta koje smo odredili u šestom poglavlju i konkretno izračunali u primjeru 6.5.3

$$C_Z^F = \frac{F_Z}{q_\infty S_{ref}} = 0.0010 - 0.0127 \cdot \alpha$$

$$C_m^F = \frac{M^F}{q_\infty S_{ref} c_A} = 0.0125 \cdot \alpha - 0.0069$$

Tako dobivene koeficijente zbrajamo s aerodinamičkim. Pri tome vodimo računa da je

$$C_Z^F = -C_N^F :$$

$$C_L = 4.73\alpha + 0.216 \cdot K_f \delta_m + 0.446 \cdot i_h + 0.255$$

$$C_m = -0.823 \cdot \alpha - 0.577 \cdot K_f \delta_m - 1.151 \cdot i_h - 0.031$$

Iz uvjeta da pri odklonu kormila visine $\delta_m = -18^0 = -0.314$ (za taj odklon je $K_f = 0.87$) imamo 75% od maksimalne sile uzgona, dobivamo dvije jednadžbe s dvije nepoznanice:

$$0.75 \cdot 1.45 = 4.73\alpha_{rav} + 0.216 \cdot 0.87 \cdot (-0.314) + 0.446i_h + 0.255$$

$$-0.823\alpha_{rav} - 0.577 \cdot 0.87 \cdot (-0.314) - 1.151 \cdot i_h = 0.031$$

Kad se urede te jednadžbe imaju oblik

$$4.73 \cdot \alpha_{rav} + 0.446 \cdot i_h = 0.891$$

$$-0.823\alpha_{rav} - 1.151 \cdot i_h = -0.126$$

Iz tih dviju jednadžbi trebamo odrediti i_h i α_{rav} . Njihovo rješenje je

$$\alpha_{\max} = 0.1909 = 10.9^0$$

$$i_h = -0.0270 = -1.5^0$$

S dobivenim postavnim kutom horizontalnog repa, jednadžbe ukupnog koeficijenta sile uzgona i ukupnog momenta propinjanja imaju oblik:

$$C_L = 4.73\alpha + 0.216 \cdot K_f \delta_m + 0.244$$

$$C_m = -0.823 \cdot \alpha - 0.577 \cdot K_f \delta_m - 0.0012$$

U horizontalnom letu uzgon je jednak težini te ako je pri najvećoj masi malog zrakoplova $m = 1088 \text{ kg}$ brzinu leta $V = 54.4 \text{ m/s}$, za visinu leta od 2000 m, treba biti:

$$C_L = \frac{mg}{\frac{\rho V^2}{2} S_{ref}} = \frac{1088 \cdot 9.81}{\frac{1.007 \cdot 54.4^2}{2} \cdot 15.1} = 0.474$$

To znači da će u horizontalnom letu trebati otkloniti kormilo visine za veličinu koju određujemo iz jednadžbi

$$0.474 = 4.73\alpha + 0.216 \cdot K_f \delta_m + 0.244$$

$$0 = -0.823 \cdot \alpha - 0.577 \cdot K_f \delta_m - 0.0012$$

ili

$$4.73\alpha + 0.216 \cdot K_f \delta_m = 0.230$$

$$0.823 \cdot \alpha + 0.577 \cdot K_f \delta_m = -0.0012$$

Rješenje ovih jednadžbi je

$$\alpha_{rav} = 0.0521 = 3.0^\circ$$

$$K_f \delta_m = -0.0764 = -4.4^\circ$$

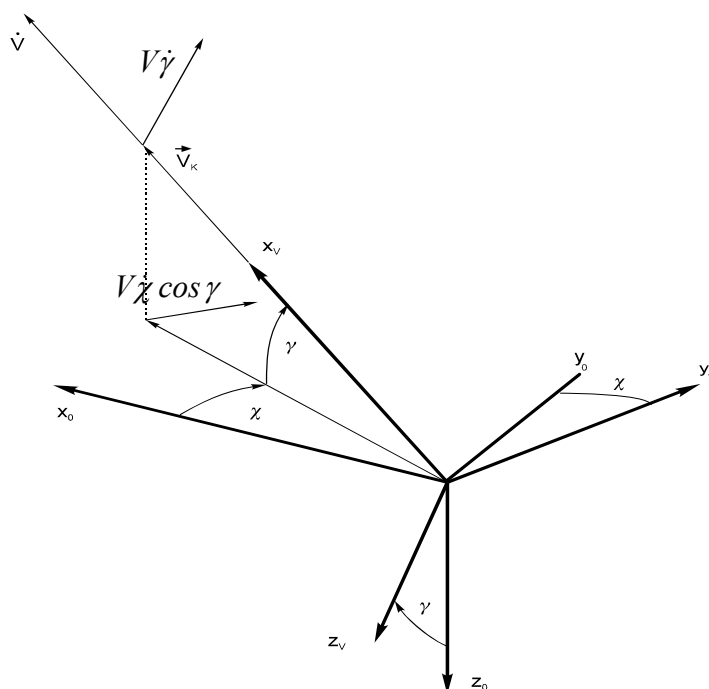
Za otklone upravljačkih površina manje od 10° je $K_f = 1$.

6.11 Jednadžbe gibanja ravnotežnog leta

Želimo promatrati gibanje središta mase. Polazimo stoga od vektorske jednadžbe gibanja središta mase

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{W} + \vec{R}^A$$

Zanemarit ćemo zakrivljenost Zemljine površine i rotaciju Zemlje. Pretpostavit ćemo da nema vjetra, pa su brzina leta i aerodinamička brzina jednake $V_K = V$.



Slika 6. Ubrzanja duž osi brzinskog koordinatnog sustava

Osim toga, i kutovi aerodinamičke brzine i brzine leta također su isti: $\chi = \chi_A$ i $\gamma = \gamma_A$. Kad pretpostavimo da nema vjetra, onda je logično da nema ni kuta klizanja, a to znači da ne postoji bočna komponenta K aerodinamičke sile. Projicirat ćemo jednadžbu gibanja središta mase na osi brzinskog koordinatnog sustava.

6.11.1 Komponente ubrzanja

Komponente brzine u brzinskom koordinatnom sustavu su $\mathbf{V} = [V \ 0 \ 0]^T$, a kutna brzina brzinskog koordinatnog sustava je $\mathbf{\Omega}_v = [-\dot{\chi} \sin \gamma \ \dot{\gamma} \ \dot{\chi} \cos \gamma]^T$ pa su komponente ubrzanja u brzinskom koordinatnom sustavu:

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{V}} + \tilde{\mathbf{\Omega}}_v \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \dot{V} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\chi} \cos \gamma & \dot{\gamma} \\ \dot{\chi} \cos \gamma & 0 & \dot{\chi} \sin \gamma \\ -\dot{\gamma} & -\dot{\chi} \sin \gamma & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{V} \\ V\dot{\chi} \cos \gamma \\ -V\dot{\gamma} \end{bmatrix}^T$$

6.11.2 Komponente sila

Pogonska sila \vec{F} ima komponente u koordinatnom sustavu letjelice:

$$\mathbf{F} = [T \cos \alpha_T \ 0 \ T \sin \alpha_T]^T$$

Težina letjelice ima komponente u nošenom koordinatnom sustavu:

$$\mathbf{W}^o = [0 \ 0 \ W]^T$$

Aerodinamička sila u aerodinamičkom koordinatnom sustavu ima komponente:

$$\mathbf{R}^A = [-D \ 0 \ -L]^T$$

Projekcije vektorske jednadžbe gibanja bit će na osi brzinskog koordinatnog sustava:

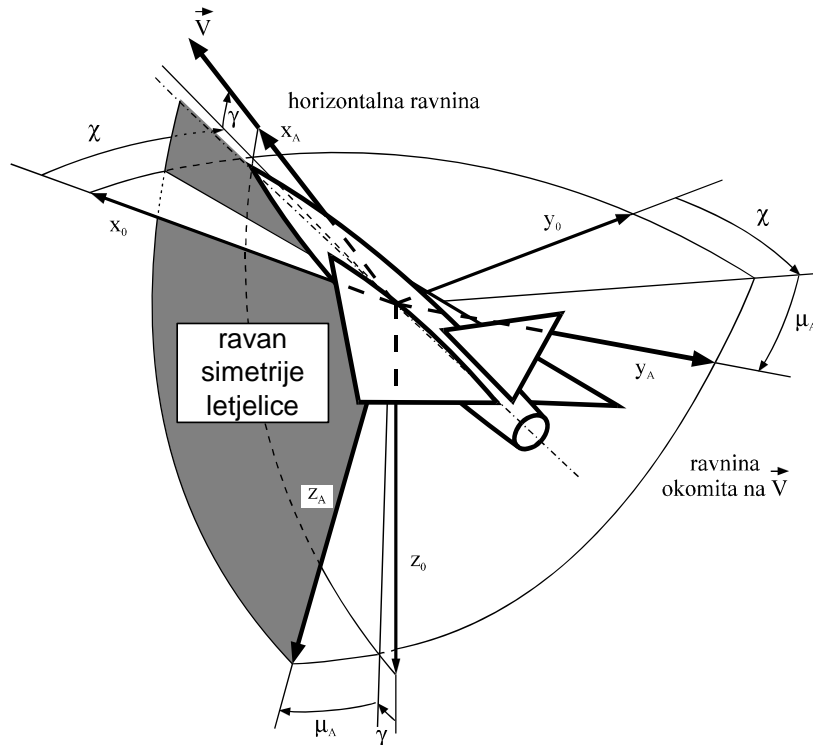
$$m \begin{bmatrix} \dot{V} \\ V \cos \gamma \dot{\chi} \\ -V\dot{\gamma} \end{bmatrix} = \mathbf{L}_{VF} \begin{bmatrix} T \cos \alpha_T \\ 0 \\ T \sin \alpha_T \end{bmatrix} + \mathbf{L}_{VO} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ W \end{bmatrix} + \mathbf{L}_{VA} \begin{bmatrix} -D \\ 0 \\ -L \end{bmatrix}$$

Podsjetimo još jednom na to da su brzina leta i aerodinamička brzina jednake zato što nema vjetra, te je os x aerodinamičkog i brzinskog koordinatnog sustava zajednička. Os z_A nalazi se u ravnini simetrije zrakoplova, a os z_v u vertikalnoj ravnini. One čine kut μ_A u ravnini okomitoj na brzinu, koji mjerimo od brzinske osi z_v do aerodinamičke osi z_A . Prema tome, u brzinski iz aerodinamičkog koordinatnog sustava dolazi se rotacijom oko x za kut $-\mu_A$.

$$\mathbf{L}_{VA} = \mathbf{L}_x(-\mu_A)$$

Matricu transformacije u brzinski iz koordinatnog sustav letjelice dobit ćemo posredno preko aerodinamičkog koordinatnog sustava:

$$\mathbf{L}_{VF} = \mathbf{L}_{VA} \mathbf{L}_{AF}$$



Slika 7. Ravan simetrije zrakoplova i vertikalna ravan kroz brzinu
U aerodinamički iz koordinatnog sustava letjelice dolazi se poslije dvije rotacije. Prva je oko osi y za kut $-\alpha$, a zatim oko osi z za kut β . S obzirom da tražimo jednadžbe gibanja u atmosferi bez vjetrova, usvajamo da je kut klizanja $\beta = 0$, te je

$$\mathbf{L}_{AF} = \mathbf{L}_Y(-\alpha).$$

Zato je konačno:

$$\mathbf{L}_{VF} = \mathbf{L}_{VA}\mathbf{L}_{AF} = \mathbf{L}_X(-\mu_A)\mathbf{L}_Y(-\alpha)$$

Matrica transformacije u brzinski iz nošenoga koordinatnog sustava:

$$\mathbf{L}_{VO} = \mathbf{L}_Y(\gamma)\mathbf{L}_Z(\chi)$$

Pomoću tih matricama dobit ćemo konačno jednadžbu gibanja središta mase letjelice:

$$m \begin{bmatrix} \dot{V} \\ V \cos \gamma \dot{\chi} \\ -V \dot{\gamma} \end{bmatrix} = \mathbf{L}_X(-\mu_A)\mathbf{L}_Y(-\alpha) \begin{bmatrix} T \cos \alpha_T \\ 0 \\ T \sin \alpha_T \end{bmatrix} + \mathbf{L}_Y(\gamma)\mathbf{L}_Z(\chi) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ W \end{bmatrix} + \mathbf{L}_X(-\mu_A) \begin{bmatrix} -D \\ 0 \\ -L \end{bmatrix}$$

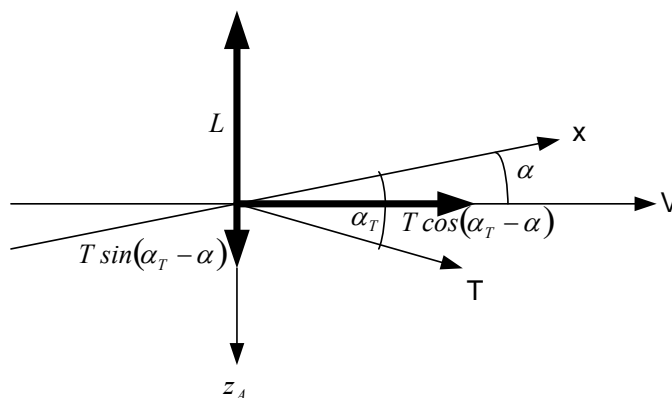
Množenjem matrica dobivamo skalarne jednadžbe:

$$\begin{aligned} m\dot{V} &= T \cos \alpha_T \cos \alpha + T \sin \alpha_T \sin \alpha - W \sin \gamma - D \\ mV \cos \gamma \dot{\chi} &= T \cos \alpha_T \sin \alpha \sin \mu_A - T \sin \alpha_T \cos \alpha \sin \mu_A + L \sin \mu_a \\ -mV \dot{\gamma} &= -T \cos \alpha_T \sin \alpha \cos \mu_A + T \sin \alpha_T \cos \alpha \cos \mu_A + W \cos \gamma - L \cos \mu_a \end{aligned}$$

Na osnovu toga dobivamo polazne jednačbe za izučavanje performansi zrakoplova u atmosferi bez vjetra:

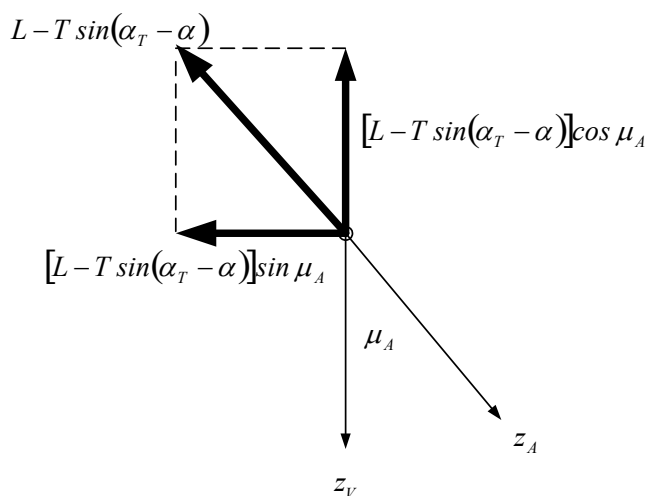
$$\begin{aligned} m\dot{V} &= T \cos(\alpha_T - \alpha) - W \sin \gamma - D \\ mV \cos \gamma \dot{\chi} &= [L - T \sin(\alpha_T - \alpha)] \sin \mu_a \\ mV \dot{\gamma} &= [L - T \sin(\alpha_T - \alpha)] \cos \mu_a - W \cos \gamma \end{aligned}$$

Te smo jednačbe mogli i izravno ispisati. Promatrajmo sliku 7-6 u ravnini simetrije letjelice.



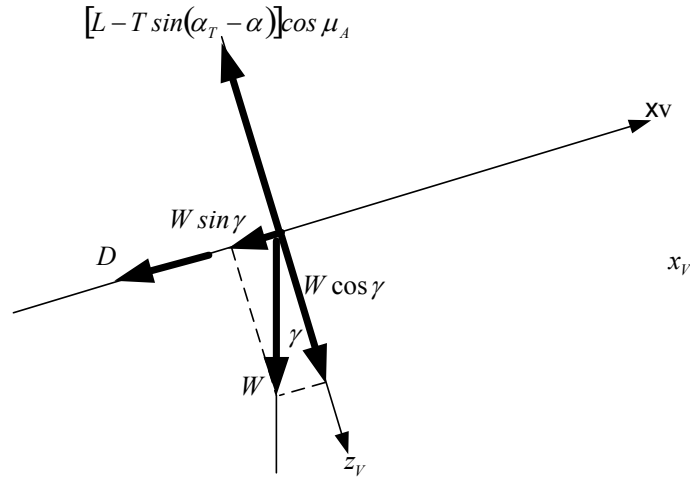
Slika 8. Uzgon i pogon u ravnini simetrije zrakoplova

S obzirom na to što nema kuta klizanja, brzina je u ravnini simetrije letjelice, pa pogonska sila koja je također u ravnini simetrije letjelice ima komponentu $T \cos(\alpha_T - \alpha)$ duž brzine i $T \sin(\alpha_T - \alpha)$ okomito na brzinu duž osi z_V , kao na slici 6. Tako se duž osi z_A , u ravnini okomitoj na brzinu (slika 7-7) nalazi sila $L - T \sin(\alpha_T - \alpha)$, a ta se sila razlaže na dvije komponente: na komponentu u vertikalnoj ravnini $[L - T \sin(\alpha_T - \alpha)] \cos \mu_A$ i na horizontalnu komponentu $[L - T \sin(\alpha_T - \alpha)] \sin \mu_A$.



Slika 9. Projektiranje u ravnini okomitoj na brzinu

U vertikalnoj ravnini komponenta $[L - T \sin(\alpha_T - \alpha)] \cos \mu_A$ okomita je na brzinu. U toj ravnini djeluje i težina W koja se razlaže, kao na slici 8, na komponente $W \sin \gamma$ na pravac brzine ali suprotnoga smjera i $W \cos \gamma$ okomito na brzinu duž osi z_V .



Slika 10. Vertikalna ravnina kroz brzinu

Sila otpora D u pravcu je, ali suprotnoga smjera od brzine. Kada zbrojimo to razlaganje sila, dobivamo iste jednadžbe koje smo dobili pomoću matrica transformacija.

6.11.3 Model gibanja središta mase

Model gibanja središta mase određen je jednadžbama:

$$\begin{aligned} m\dot{V} &= T \cos(\alpha_T - \alpha) - W \sin \gamma - D \\ mV \cos \gamma \dot{\chi} &= [L - T \sin(\alpha_T - \alpha)] \sin \mu_a \\ mV \dot{\gamma} &= [L - T \sin(\alpha_T - \alpha)] \cos \mu_a - W \cos \gamma \end{aligned}$$

Budući da je i u ekstremnim uvjetima razlika $\phi - \mu_A$ mala, obično se u jednadžbama zamjenjuje kut valjanja aerodinamičkog koordinatnog sustava μ_A s kutom valjanja letjelica ϕ . U tom slučaju su polazne jednadžbe za razmatranje performansi zrakoplova:

$$\begin{aligned} m\dot{V} &= T \cos(\alpha_T - \alpha) - W \sin \gamma - D \\ mV \cos \gamma \dot{\chi} &= [L - T \sin(\alpha_T - \alpha)] \sin \phi \\ mV \dot{\gamma} &= [L - T \sin(\alpha_T - \alpha)] \cos \phi - W \cos \gamma \end{aligned}$$

Drugo pojednostavljenje proizlazi iz činjenice što se konstrukcijom zrakoplova α_T bira tako da u horizontalnom letu bude pogonska sila u pravcu brzine leta, a to znači da je $\alpha_T = \alpha_{rav}$.

Gornje jednadžbe onda imaju jednostavniji oblik:

$$m \frac{dV}{dt} = T - D - W \sin \gamma$$

$$mV \frac{d\gamma}{dt} = L \cos \phi - W \cos \gamma$$

$$mV \cos \gamma \frac{d\chi}{dt} = L \sin \phi$$

Kada određujemo performanse zrakoplova, obično se služimo ovim modelom. U tom modelu usvajamo da je zrakoplov u ravnotežnom letu, što znači da je ukupni moment propinjanja jednak nuli, odakle je

$$\alpha_{rav} = \frac{M_0}{-M_\alpha} + \frac{M_\delta \delta_m}{-M_\alpha},$$

te je sila uzgona ovisna samo o kormilu visine:

$$L = L_0 + L_\alpha \alpha_{rav} + L_\delta \delta_m$$

6.11.4 Program gibanja zrakoplova u ravnotežnom letu

Blok-shema programa za izračunavanje putanje središta mase zrakoplova u ravnotežnom letu prikazana je na slici 10. Za konkretan zrakoplov treba prije svega napraviti model motora, tj. odrediti ovisnost raspoložive pogonske sile T_a o brzini leta i parametrima okolne atmosfere (gustoće ρ i temperature zraka T^o), a pogonska sile bit će ovisna o veličini parametra (položaja ručice pogona) δ_p i o toj raspoloživoj sili T_a .

U ovom modelu zanemarujemo bočne komponente pogonske sile, pa su komponente pogonske sile duž osi zrakoplova:

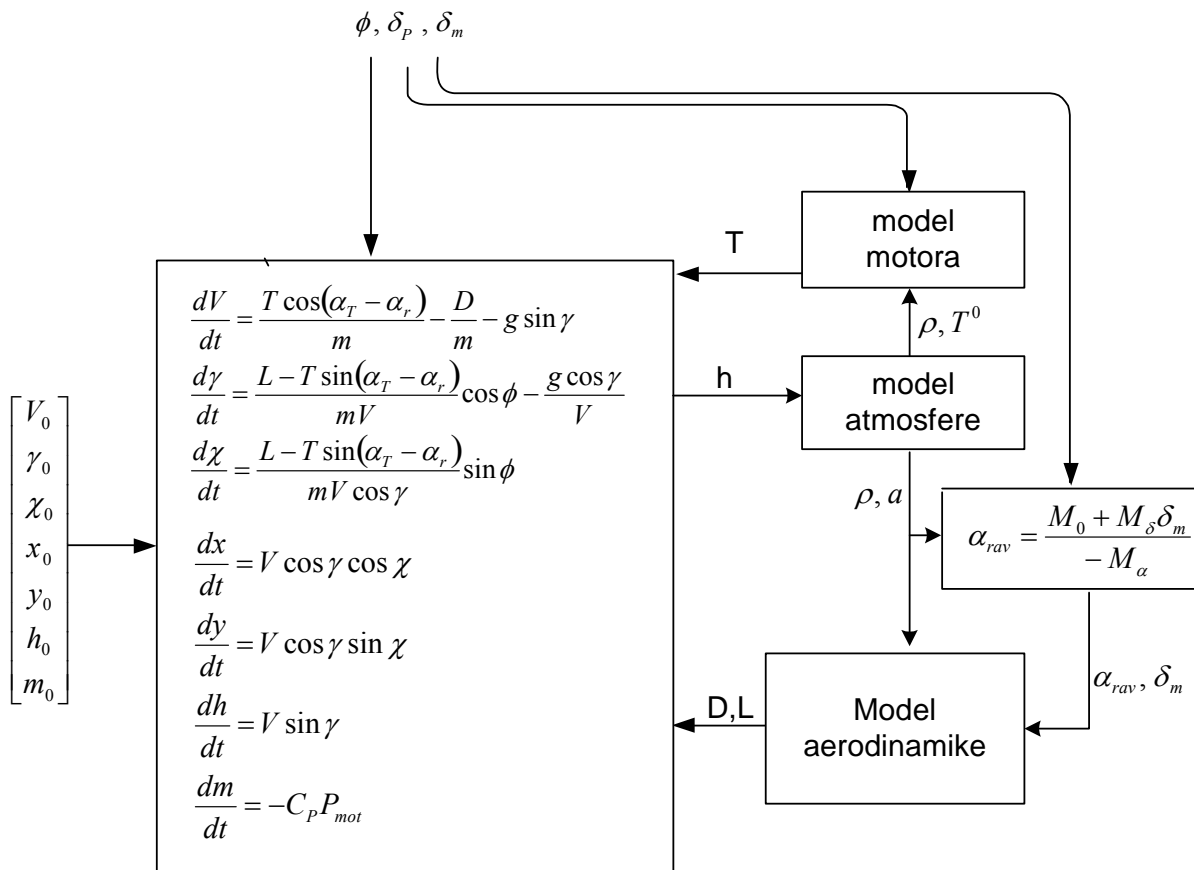
$$\mathbf{F} = [T \cos \alpha_T \quad 0 \quad T \sin \alpha_T]^T,$$

a komponente pogonskog momenta su nule jer je $z_p = 0$. Jedan takav model motora za male zrakoplove s elisom nalazi se u prilogu C, a model atmosfere nalazi se u prilogu B.

U ovoj shemi koristi se jednostavan model aerodinamike:

$$D = \frac{\rho V^2}{2} S_{ref} (C_{D0} + K C_L^2)$$

$$L = \frac{\rho V^2}{2} S_{ref} C_L$$



Slika 11. Blok-shema zrakoplova kao materijalna točka

u kome je koeficijent sile uzgona ovisi samo o odklonu kormila visine

$$C_L = C_{L0} + C_{L\alpha} \frac{C_{m0}}{-C_{m\alpha}} + \left(C_{L\delta_m} + C_{L\alpha} \frac{C_{m\delta}}{-C_{m\alpha}} \right) \delta_m$$

Koeficijenti $C_{D0}, K, C_{L0}, C_{L\alpha}, C_{L\delta_m}, C_{m0}, C_{m\alpha}$ i $C_{m\delta}$ mogu biti funkcije Machova broja: $Ma = V/a$. Kut valjanja ϕ i odklon kormila visine δ_m kao i parametar motora δ_p dolaze u program kao vanjski parametri upravljanja.

7 Horizontalni let

7.1 Režim leta

Ako zrakoplov leti u atmosferi bez vjetrova, horizontalno ($\gamma = 0$) i pravocrtno ($\dot{\chi} = 0$), onda iz jednadžbi gibanja

$$\begin{aligned} m \frac{dV}{dt} &= T - D - W \sin \gamma \\ mV \frac{d\gamma}{dt} &= L \cos \phi - W \cos \gamma \\ mV \cos \gamma \frac{d\chi}{dt} &= L \sin \phi \end{aligned}$$

slijedi da mora biti:

$$\begin{aligned} L \sin \phi &= 0 \\ L \cos \phi &= W \end{aligned}$$

Iz njih zaključujemo da za horizontalni pravocrtni let kut valjanja ϕ zrakoplova mora biti jednak nuli, a normalno opterećenje (*load factor*) mora biti jednako jedinici:

$$\begin{aligned} \phi &= 0 \\ n &= 1 \end{aligned}$$

Kako je

$$L = \frac{\rho V^2}{2} S C_L = W,$$

slijedi da u horizontalnom letu mora biti

$$V^2 C_L = \frac{2W}{\rho S}.$$

Svaka kombinacija moguće brzine i mogućeg napadnog kuta koja ispunjava ovaj uvjet horizontalnog leta naziva se *režim horizontalnog leta*, a iz tog uvjeta za horizontalni let slijedi da je brzina leta ovisna o izabranom koeficijentu uzgona:

$$V = \sqrt{\frac{2W}{\rho S C_L}},$$

ili obrnuto, da za izabranu brzinu leta slijedi odgovarajući koeficijent sile uzgona. Međutim, treba uzeti u obzir da zrakoplov ne smije letjeti brzinom manjom od

$$V_{stall} = \sqrt{\frac{2W}{\rho S_{ref} C_{Lmax}}},$$

kojoj odgovara najveći mogući koeficijent uzgona, koji zrakoplov postiže pri najvećem dopuštenom napadnom kutu. Za manje brzine bi napadni kut trebao biti još veći, no tada nastaje pad koeficijenta uzgona. Prema tome, mogući su režimi leta brzinom $V > V_{stall}$

7.2 Potrebna sila ili potrebna snaga

Ako želimo dodatno da horizontalan pravocrtan let bude i stacionaran, tj. da brzina leta bude konstantna, onda treba biti ispunjen i treći uvjet da pogonska sila bude jednaka otporu:

$$T = D$$

Tu potrebnu pogonsku silu, za izabrani režim leta, označavamo sa T_r (*Thrust required*). Potrebna sila pomnožena s brzinom leta daje potrebnu snagu. Pri određivanju performansi zrakoplova služiti ćemo se jednostavnom polarom zrakoplova te će potrebna sila biti određena jednadžbom

$$T_r = D = \frac{\rho V^2}{2} S (C_{D0} + K C_L^2)$$

U tim jednadžbama, za potrebnu silu ili potrebnu snagu, imamo i koeficijent uzgona C_L i kvadrat brzine leta V (odnosno kub ako je u pitanju potrebna snaga).. Da bismo dobili potrebnu pogonsku silu, odnosno potrebnu snagu, ovisno samo o brzini leta eliminirat ćemo koeficijent uzgona iz uvjeta da je u horizontalnom letu $C_L = \frac{2W}{\rho V^2 S}$:

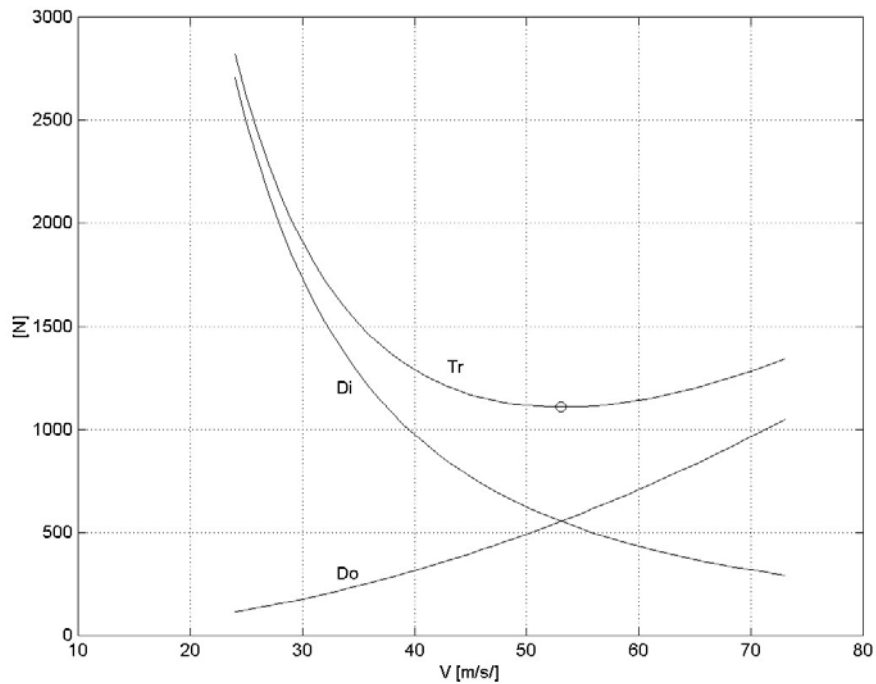
$$T_r = D = \frac{\rho S}{2} C_{D0} V^2 + 2 \frac{KW^2}{\rho S} \frac{1}{V^2}$$

Kako je otpor zraka D u horizontalnom letu ovisan samo o brzini leta V , možemo odrediti režim leta pri kome je potrebna pogonska sila T_r minimalna. Taj problem se može matematički formulirati tako da se traži minimum funkcije $T_r(V)$ u ovisnosti o brzini leta V . Izjednačavanjem s nulom derivacije jednadžbe 8.8 po brzini V , dobivamo:

$$\frac{\rho S}{2} C_{D0} 2V - 4 \frac{KW^2}{\rho S} \frac{1}{V^3} = 0$$

Uz pomoć drugog uvjeta za horizontalni let $W = L$ i poslije sređivanja dobivamo:

$$K C_L^2 = C_{D0},$$



Slika 7-1. Potrebna pogonska sila T_r , nulti otpor D_0 i inducirani otpor D_i

što znači da je u režimu za minimalnu silu inducirani otpor jednak otporu pri nultom uzgonu.

Kada iz ove jednadžbe odredimo koeficijent uzgona

$$C_L = \sqrt{\frac{C_{D0}}{K}},$$

jednadžba za horizontalni let daje nam brzinu leta u tom režimu. Važno je uočiti da je potrebna sila ili potrebna snaga karakteristika letjelice, što je neka vrsta aerodinamičke kvalitete letjelice. Aerodinamički je bolja ona letjelica koja ima manju potrebnu snagu ili manju potrebnu silu.

Potrebna snaga P_r (*Power required*) bit će određena jednadžbom

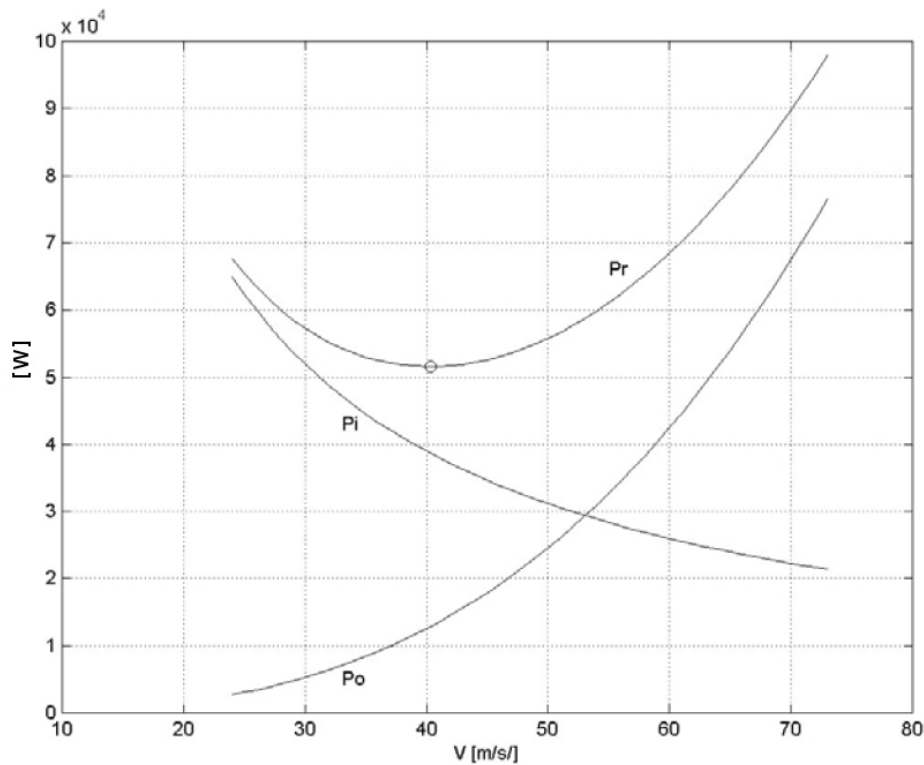
$$P_r = VD = \frac{\rho S}{2} V^3 (C_{D0} + K C_L^2)$$

koja također predstavlja zbroj snage koji je potreban da se svlada parazitski otpor i snage da se svlada inducirani otpor. Kao i za potrebnu silu, postoji režim leta kada je potrebna snaga P_r u minimumu. Eliminacijom koeficijenta uzgona iz uvjeta za horizontalni let:

$$V^2 C_L = \frac{2W}{\rho S}$$

dobivamo ovisnost potrebne snage samo o brzini:

$$P_r = DV = \frac{\rho S}{2} C_{D0} V^3 + 2 \frac{KW^2}{\rho S} \frac{1}{V}$$



Slika 7-2. Potrebna snaga $P_r = DV$, snaga VD_0 i VD_i za "mali" zrakoplov

Derivacijom po brzini leta potrebne snage dobivamo:

$$\frac{d(DV)}{dV} = \frac{\rho S}{2} C_{D0} 3V^2 - 2 \frac{KW^2}{\rho S} \frac{1}{V^2}$$

Uočimo da je prvi član na desnoj strani $3D_0$, a drugi točno D_i . Izjednačavanjem ove derivacije s nulom i korištenjem drugoga uvjeta za horizontalni let $L = W$ dobivamo:

$$3 \frac{\rho V^2}{2} S C_{D0} = \frac{KL^2}{\frac{\rho V^2}{2} S},$$

ili

$$KC_L^2 = 3C_{D0}.$$

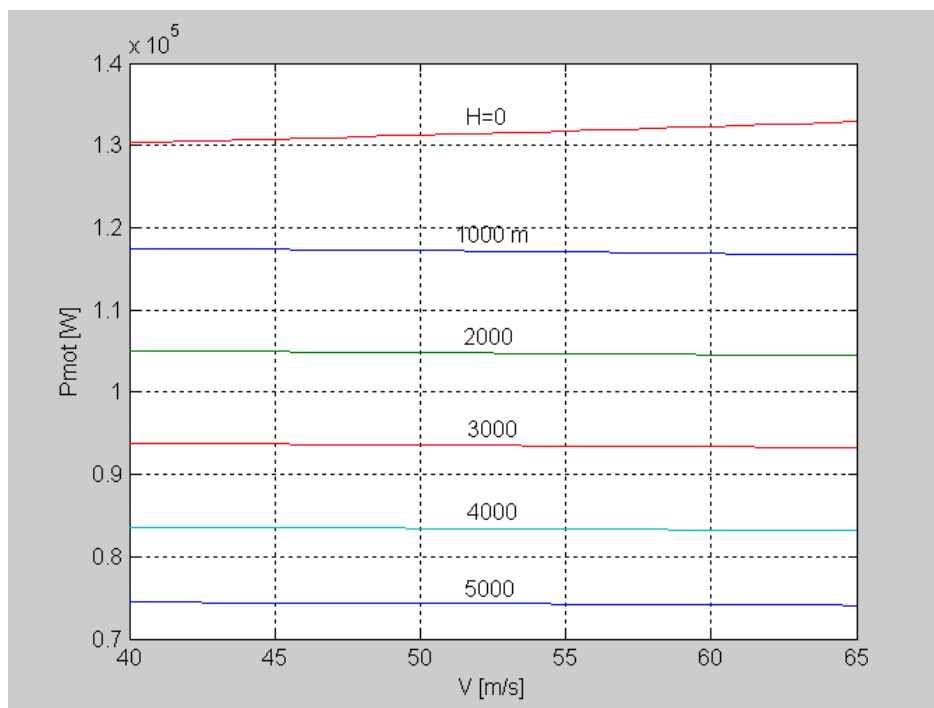
To znači da je u režimu leta za minimalnu potrebnu snagu inducirani otpor jednak trostrukoj vrijednosti otpora pri nultom uzgonu. Kada smo odredili koeficijent uzgona C_{LP} koji odgovara ovom režimu leta,

$$C_L = \sqrt{\frac{3C_{D0}}{K}}.$$

Brzinu leta nalazimo iz uvjeta $L = W$ za horizontalni let:

$$V = \sqrt{\frac{2gm}{\rho S C_L} \frac{I}{C_L}}$$

Tijekom leta smanjuje se masa zrakoplova zbog potrošnje goriva, pa će i brzina potrebna za horizontalan let opadati. Međutim ta promjena mase nije velika. Obično je krajnja masa oko 80% od početne, pa je krajnja brzina oko 0.9 od početne. Za tako mali pad brzine leta ne mijenja se C_{D0} kao ni koeficijent K , pa koeficijent uzgona C_L ostaje konstantan.



Slika 7-3. Snaga motora P_{mot} ovisno o brzini leta za razne visine leta.

7.3 Raspoloživa sila ili snaga

S druge strane, imamo pogon i njegove karakteristike. Ako je pogon zrakoplova pomoću elise, onda motor daje neku snagu elisi P_{mot} . Na slici 3 prikazana je snaga motora LYCOMING O-360-A (180 HP).

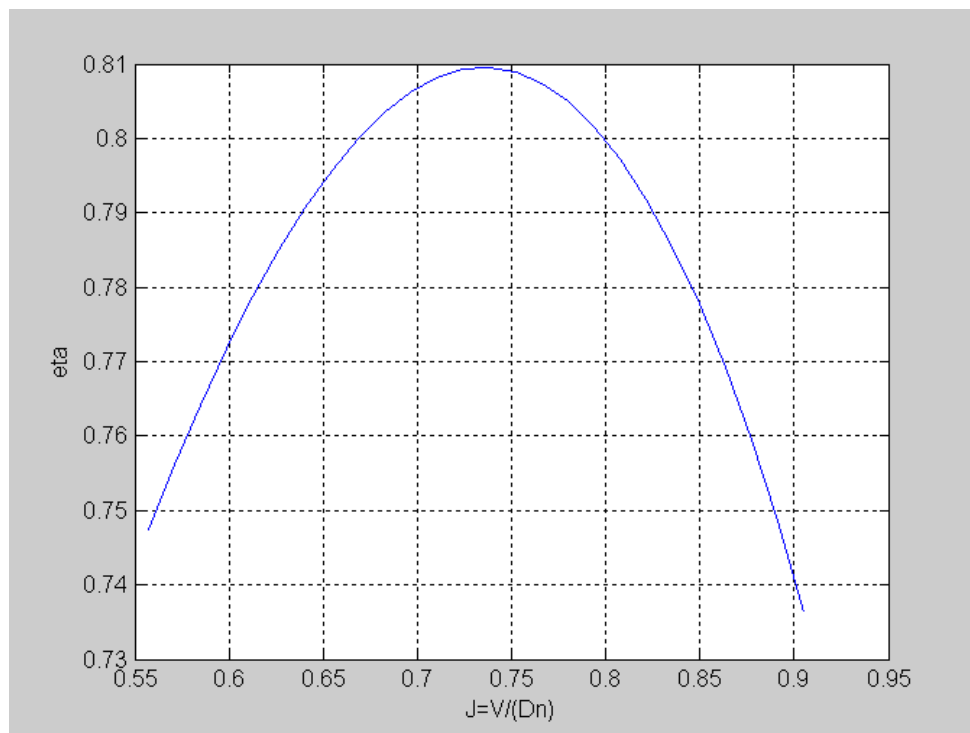
Raspoloživa pogonska snaga P_a (*Power available*) na elisi bit će

$$P_a = \eta_p \cdot P_{mot}$$

Tako i od elise ovisi kakve će biti raspoloživa snaga. Npr. dvokraka elisa konstantnog napadnog kuta zrakoplova Piper Cherokee PA-28, ima koeficijent učinkovitosti η_p koji ovisi o parametru $J = V/(nD)$.

$$\eta_{elise} = -1.6923J^3 + 1.4815J^2 + 0.5670J + 0.2644$$

D je promjer diska elise, a n je broj okretaja elise u sekundi. Ova funkcija $\eta_{elise}(J)$ prikazana je na dijagramu slika 4.



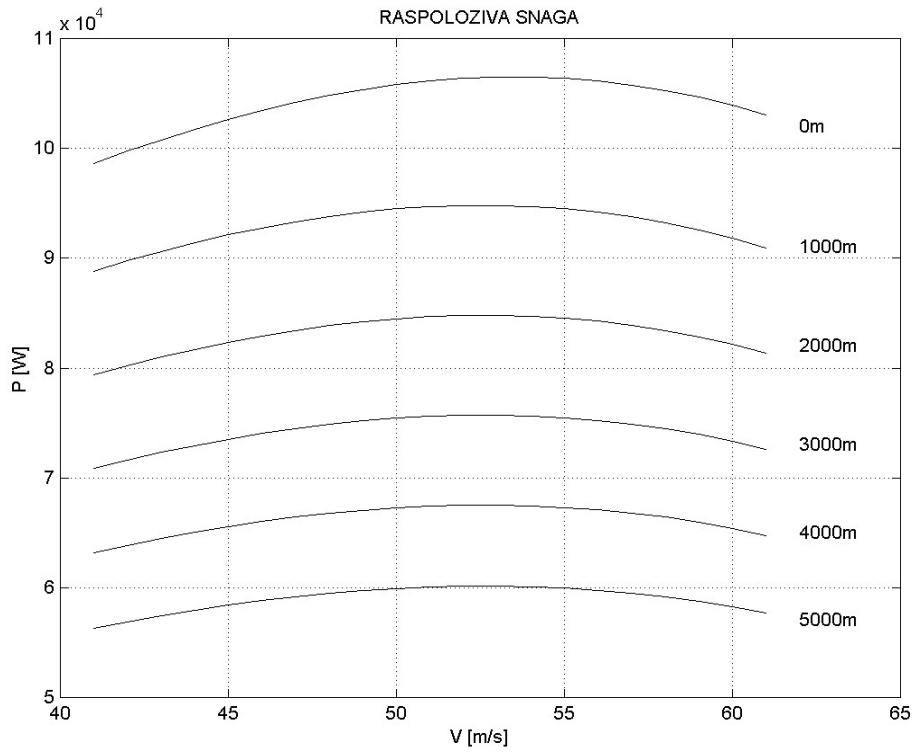
Slika 7-4. Koeficijent učinkovitosti dvokrake elise konstantnog napadnog kuta

Konačno na slici 5 prikazan je ovisnost raspoložive snage motora i elise

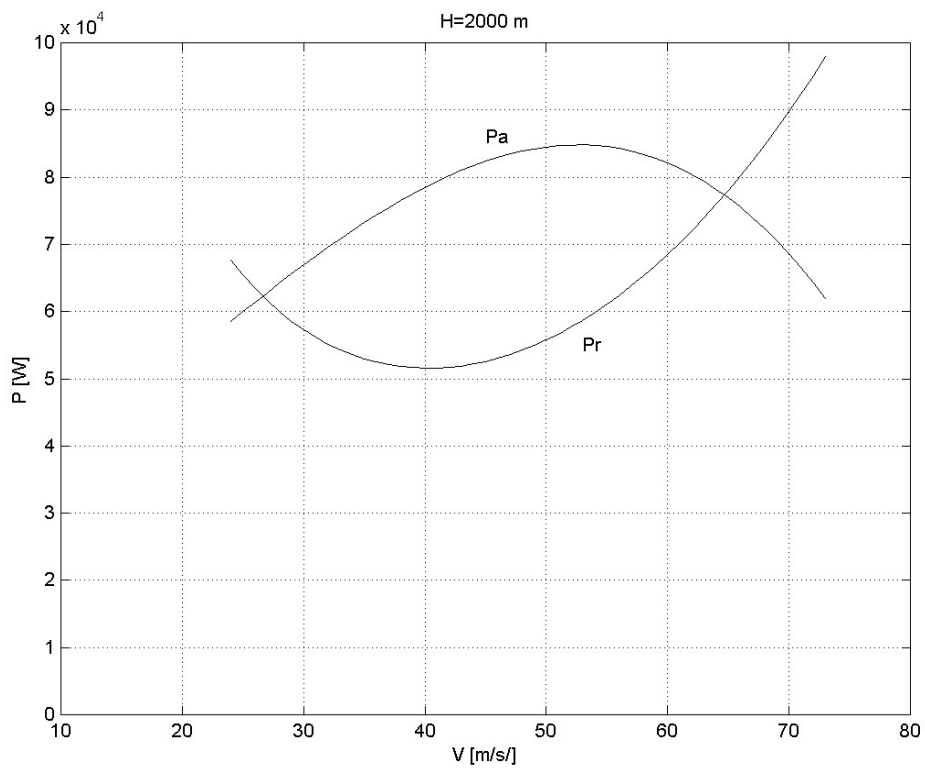
$$P_a = \eta_{elise} \cdot P_{mot}$$

ovisno o brzini leta a za razne visine.

Na nekoj odabranoj visini tu raspoloživu snagu $P_a(V)$ ovisno o brzini, možemo je usporediti s potrebnom $P_r(V)$, kao na slici 6. Iz te usporedbe dobivamo interval mogućih brzina leta od V_{min} do V_{max} s obzirom na pogon u kojem je $P_a > P_r$.

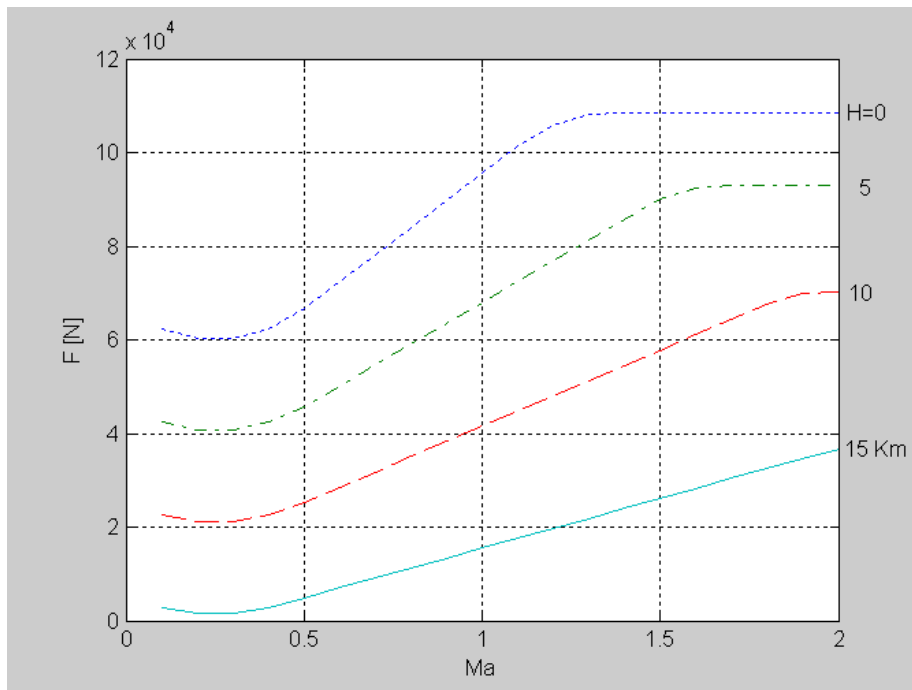


Slika 7-5. Raspoloživa snaga na elisi

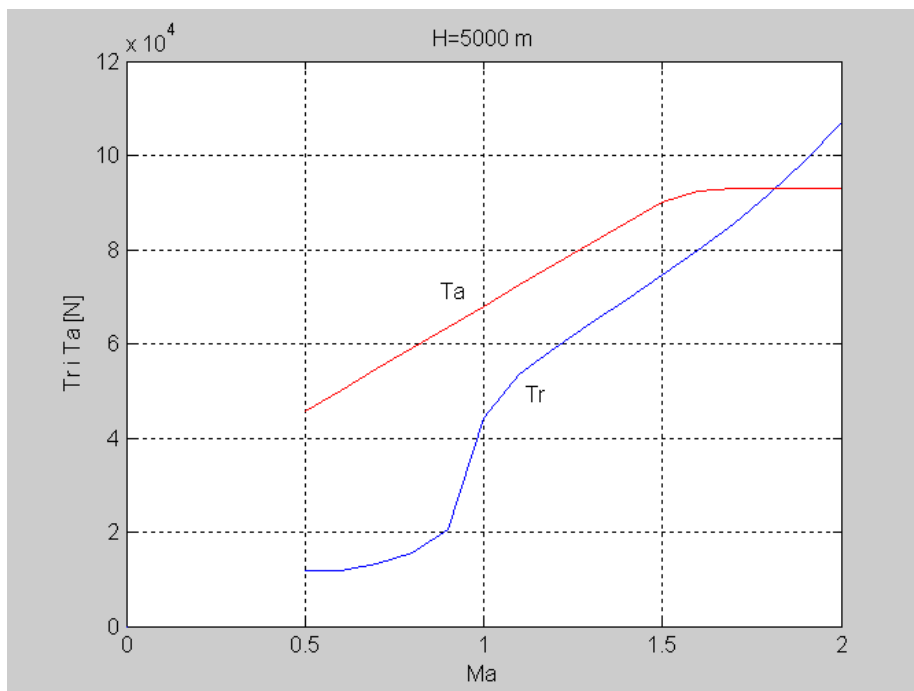


Slika 7-6. Minimalna i maksimalna brzina leta.

Ako zrakoplov ima mlazni pogon, onda je promatramo raspoloživu silu motora $T_a(V)$ u odnosu na potrebnu silu $T_r(V)$, kao što smo kod elisnih motora promatrali raspoloživu snagu u odnosu na potrebnu snagu.



Slika 7-7. Raspoloživa sila jednog mlaznog motora (lovac).



Slika 7-8. Raspoloživa i potrebna sila za lovac na visini 5000 m.

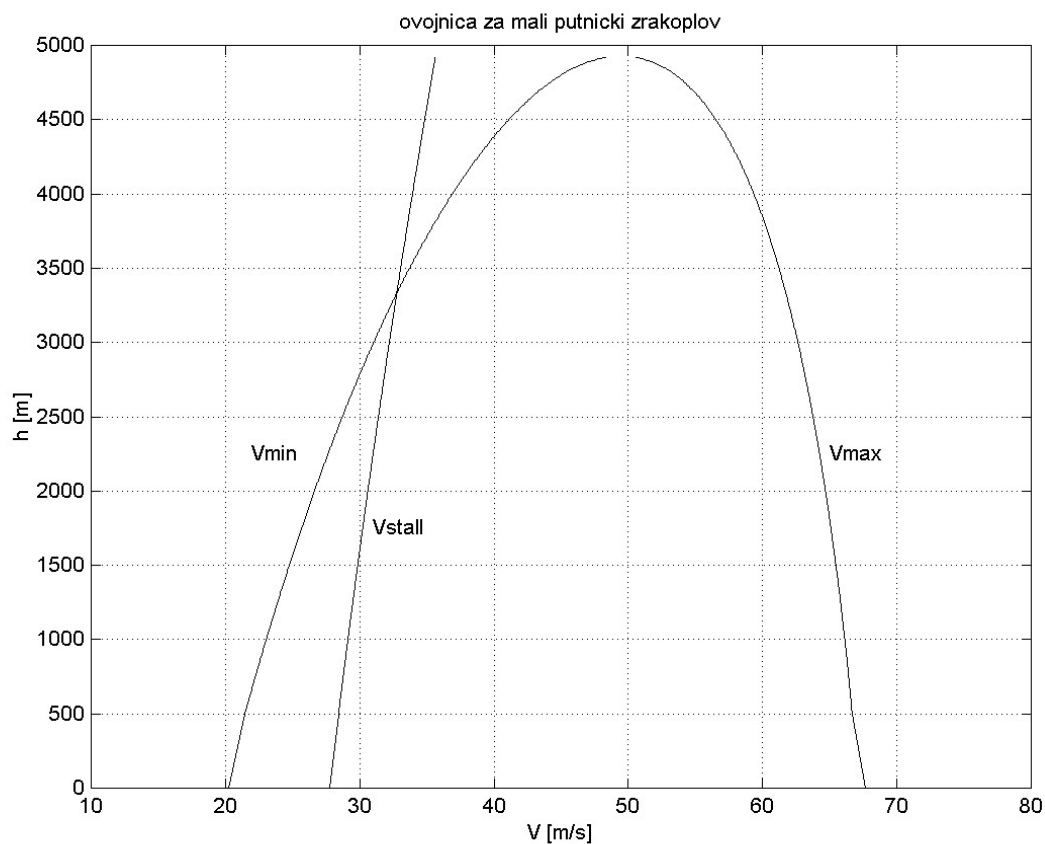
Na slici 7 prikazane su krivulje raspoložive pogonske sile za jedan lovac. Na slici 8 uspoređena je ta raspoloživa sila tog lovca na visini od 5000 m sa potrebnom silom na istoj visini. Vidimo da s tim motorom lovac može letjeti do brzine $Ma = 1.8$ na toj visini.

7.3.1 Ovojnice

Horizontalni let moguć je samo kada je

$$T_a \geq T_r = D \quad \text{ili} \quad P_a \geq P_r = DV$$

Da bi se odredila najmanja i najveća moguća brzinu leta iz ove jednadžbe, promatrat ćemo najveću raspoloživu snagu motora pri maksimalnom broju okretaja motora. Ta snaga prema dijagramu C-2 (prilog C) ovisi o tlaku okolnog zraka i pada kada taj tlak pada. Isto tako otpor ovisi o gustoći okolnog zraka. Prema tome najmanja i najveća moguća brzina bit će različite za razne visini leta jer su tlak i gustoća različiti. Dijagram koji nam daje V_{\min} i V_{\max} ovisno o visini za standardnu atmosferu predstavlja karakteristiku zrakoplova. Svakako se na taj dijagram moraju unijeti i druga ograničenja, kao npr. V_{stall} , koje je iz istih razloga različito na raznim visinama.



Slika 7-9. Ovojnica za "mali" zrakoplov

Izjednačavanjem raspoložive potrebne sile T_r i raspoložive sile T_a u uvjetima standardne atmosfere, dobivamo jednadžbu iz koje možemo izračunati V_{\min} i V_{\max} ovisno o visini leta H :

$$\eta(J) \frac{P_{mot}(H, V)}{V} = \frac{\rho S}{2} C_{D0} V^2 + 2 \frac{KW^2}{\rho S} \frac{1}{V^2}$$

Isto se tako iz jednadžbe $L = W$, za najveći mogući koeficijent uzgona $C_{L \max}$, izračunava V_{stall} ovisno o visini, jer gustoća zraka ovisi o visini:

$$V_{stall} = \sqrt{\frac{2W}{\rho S_{ref} C_{L \max}}}$$

Za "mali" zrakoplov nacrtane su krivulje $V_{\min}(h)$, $V_{\max}(h)$ i $V_{stall}(h)$ na slici 9. Jasno je da zrakoplov ne smije letjeti s brzinom koja je manja od $V_{\min}(h)$ ili $V_{stall}(h)$, niti može letjeti s brzinom koja je veća od $V_{\max}(h)$. Zato ove krivulje predstavljaju teoretske ovojnice područja režima leta zrakoplova.

7.3.2 Primjer

Nacrtati dijagram ovojnice za "mali" zrakoplov (slika 5), ako klipni motor, prema prilogu C, ima kutnu brzinu $\omega = 240 \text{ rad/s}$, a elisa ima koeficijent učinkovitosti

$$\eta(J) = -1.6923J^3 + 1.4815J^2 + 0.5670J + 0.2644,$$

gdje je $J = \frac{V}{nD}$ parametar rada elise, n broj okretaja u sekundi, D promjer diska elise.

Najmanja i najveća brzina dobivaju se iz jednadžbe

$$P_a = P_r$$

u kojoj je raspoloživa snaga

$$P_a = \eta(J) \cdot P_{mot}(\omega, V, p, T),$$

jer je za najveću snagu motora tlak punjenja $p_s = p$, a potrebna snaga

$$P_r = V \cdot \left(\frac{\rho V^2}{2} S C_{D0} + \frac{KW^2}{\frac{\rho V^2}{2} S} \right)$$

Krivulje $V_{\min}(H)$ i $V_{\max}(H)$ na slici 5 nacrtane su pomoću programa *Ovojnica.m*, koji se nalazi na disketu u direktoriju *Performanse\Horizontalni let*.

7.4 Horizontalni let s konstantnim koeficijentom otpora i uzgona

Da bi takav zrakoplov letio horizontalno s konstantnim koeficijentom uzgona njegova brzina mora se mijenjati ovisno o promjeni mase.

$$V = \sqrt{\frac{2g}{\rho S} \frac{m}{C_L}}$$

Najveća brzina V_i bit će za početnu masu m_i , a najmanja V_k za krajnju masu m_k . Odnos krajnjeg prema početnom Machovom broju za konstantni koeficijent uzgona tijekom leta je

$$\frac{Ma_k}{Ma_i} = \sqrt{\frac{m_k}{m_i}}$$

jer je brzina zvuka u horizontalnom letu konstantna. U tom intervalu Machovog broja za mnoge zrakoplove su aerodinamički koeficijenti konstantni ili praktično konstantni, pa je koeficijent uzgona funkcija samo napadnog kuta. Ako je napadni kut konstantan bit će i koeficijent totalnog otpora konstantan $C_D = C_{D0} + KC_L^2$, zato što je koeficijent nultog otpora konstantan C_{D0} , a zato što je za konstantan napadni kut konstantan je i koeficijent uzgona. U tom slučaju zrakoplov tijekom leta ima konstantan koeficijent totalnog otpora i s konstantan koeficijentom uzgona.

U ovim uvjetima koristimo Breguetovu jednadžbu, određujemo trajanje leta, razmatramo problem maskimalnog doleta i maksimalnog trajanja leta.

7.4.1 Dolet zrakoplova

Dolet zrakoplova jest najveća teoretska daljina do koje zrakoplov može letjeti s ukupnom količinom goriva na određenoj visini. Praktično to nije ostvarljivo, jer zrakoplov treba neku količinu goriva da poleti, zatim da dostigne željenu visinu, te da se spusti, i konačno u praksi mora ostati neka rezerva kad je sletio.

Želimo odrediti koliki put može preći zrakoplov u horizontalnom letu ako potroši masu goriva m_f . Za vrijeme leta masa zrakoplova m umanjuje se za potrošeno gorivo. Neka je dm promjena mase u vremenskom intervalu dt . Ta promjena mase dm jednaka je produktu vremena dt i derivacije mase po vremenu \dot{m} . Ako sa dR označimo element puta, za vrijeme promjene mase dm , onda je duž tog elementarnog puta

$$\frac{dR}{dm} = \frac{Vdt}{\dot{m}dt} = \frac{V}{\dot{m}}$$

Jasno je da je ta promjena mase pad mase, tj. da je $\dot{m} < 0$. Masa zrakoplova je zbroj promjenljive mase goriva \dot{m}_f (*fuel*) i konstantnog dijela mase m_c .

$$m = m_c + m_f$$

To znači da je $\dot{m} = \dot{m}_f$, a to je masena potrošnja goriva u jedinici vremena.

Za zrakoplove s elisom potrošnja goriva \dot{m}_f praktički je proporcionalna razvijenoj snazi motora. Zato je $\dot{m} = -C_P P_{mot}$. Koeficijent C_P nazivamo specifična masena potrošnja motora. On ima dimenziju masenog protoka po jedinici snage [$kg/s/W$]. Raspoloživa snaga motora P_{mot} pomnožena s koeficijentom elise η_P predstavlja raspoloživu pogonsku snagu na elisi $T_a V$, koja je u horizontalnom letu s konstantnom brzinom jednaka potrebnoj snazi za let:

$$\eta_P P_{mot} = VD.$$

Kako je $\dot{m} = -C_P P_{mot}$ bit će:

$$\dot{m} = -C_P \frac{VD}{\eta_P},$$

pa je gornja jednadžba za derivaciju puta po masi:

$$\frac{dR}{dm} = \frac{V}{\dot{m}} = \frac{V}{-C_P} \frac{\eta_P}{VD} = -\frac{\eta_P}{C_P} \frac{L}{D} \frac{1}{gm}.$$

Ovu jednadžbu možemo integrirati od neke inicijalne mase m_i do neke krajnje m_k . Razlika $m_i - m_k$ je količina goriva koja je potrošena na prijeđenom putu.

$$R = \frac{\eta_P}{gC_P} \int_{m_i}^{m_k} \frac{C_L}{C_D} \frac{dm}{m}$$

Pri tome pretpostavljamo da je tijekom leta bio konstantan odnos $\frac{C_L}{C_D} = \frac{C_L}{C_{D0} + KC_L^2}$, a da

brzina udovoljava uvjet horizontalnog leta:

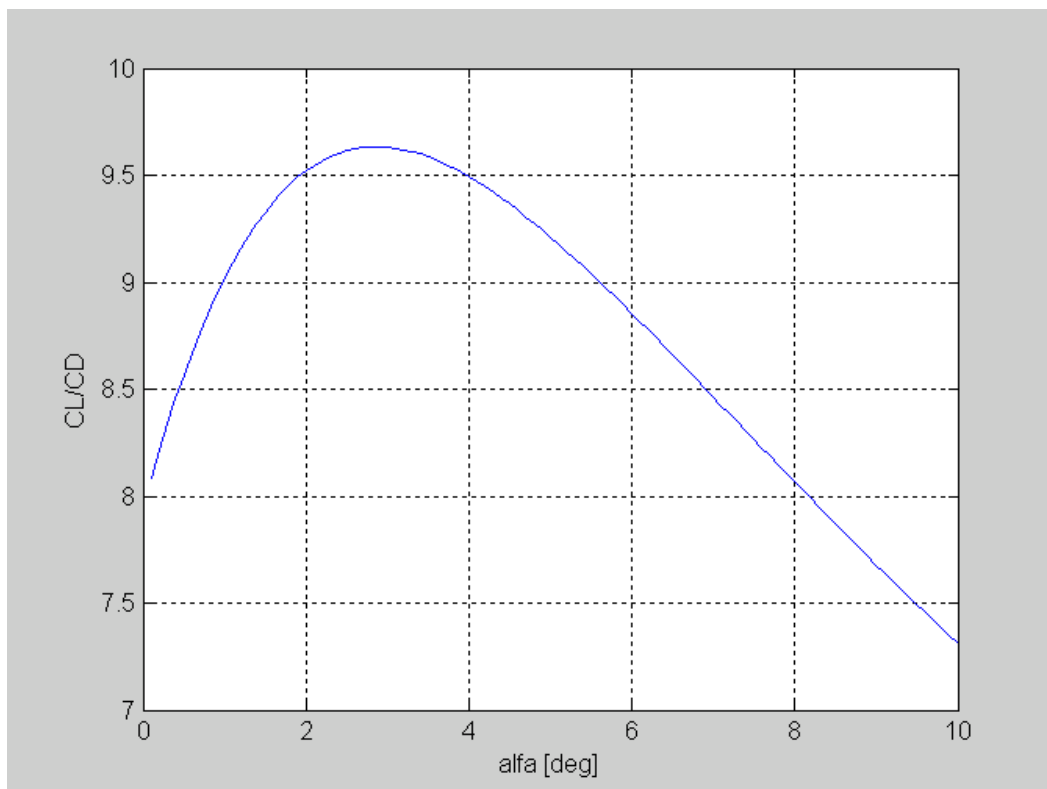
$$V = \sqrt{\frac{2W}{\rho S C_L}}$$

Integriranjem od početnog stanja i do krajnjeg stanja k dobivamo:

$$R = \frac{\eta_P}{gC_P} \frac{C_L}{C_D} \ln\left(\frac{m_i}{m_k}\right)$$

Ovo je poznata jednadžba prijeđenog puta koja se često u literaturi naziva *Bréguetova jednadžba doleta* i ako je ovu jednadžbu prvi postavio Devillers 1918, zatim Coffin 1919, pa

tek Breguet 1921. Kao što vidimo put je proporcionalan odnosu C_L/C_D . Koliki će biti pređeni put to ovisi koji smo odabrali koeficijent uzgona, odnosno koliki je bio napadni kut tijekom leta. Tom napadnom kutu odgovara koeficijent uzgona $C_L = C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha$, a njemu koeficijent otpora $C_D = C_{D0} + K \cdot C_L^2$, pa za taj izabrani napadni kut odgovara i određeni odnos C_L/C_D . Pri tome brzina se mijenja tako da ude udovoljen uvjet horizontalnog leta za spomenuti koeficijent uzgona.



Slika 7-10. Odnos C_L/C_D ovisno o napadnom kutu za mali putnički zrakoplov.

Na slici 10 prikazan je odnos C_L/C_D za mali putnički zrakoplov ovisno o napadnom kutu. Jasno se vidi sa slike da C_L/C_D ima maksimalnu vrijednost za neki napadni kut. Za taj napadni kut bit će najveći pređeni put koga nazivamo dolet zrakoplova ako je on izračunat za cjelokupnu masu goriva m_f . Napadnom kutu odgovara koeficijenta uzgona C_L , pa možemo namjesto ovisnosti C_L/C_D o napadnom kutu promatrati ovisnost odnosa C_L/C_D o koeficijentu uzgona :

$$\frac{C_L}{C_D} = \frac{C_L}{C_{D0} + KC_L^2} = f(C_L)$$

Maksimum ove funkcije nalazimo izjednačavanjem s nulom njene derivacije po koeficijentu uzgona:

$$\frac{df}{dC_L} = \frac{1 \cdot (C_{D0} + KC_L^2) - C_L \cdot 2KC_L}{(C_{D0} + KC_L^2)^2} = 0$$

Odatle dobivamo:

$$KC_L^2 = C_{D0}$$

ili

$$C_L = \sqrt{\frac{C_{D0}}{K}}$$

Drugim riječima dolet zrakoplova dobivamo kad je inducirani otpor jednak parazitskom otporu. Uočimo da je u tom horizontalnom letu s konstantnom brzinom

$$L = W$$

$$T_r = D$$

pa je

$$T_r = W \frac{D}{L} = \frac{W}{C_L/C_D}$$

Iz ove jednadžbe vidimo da najvećim odnosom C_L/C_D dogovara najmanja potrebna pogonska sila, a sad smo vidjeli da u tim uvjetima imamo najveći pređeni put = dolet.

7.4.2 Primjeri

Primjer 1

Odrediti za mali putnički zrakoplov otklone kormila visine za režim leta za najveći dolet.

U režimu leta za maksimalni dolet inducirani otpor jednak je parazitskom otporu

$$C_L = \sqrt{\frac{C_{D0}}{K}} = \sqrt{\frac{0.0259}{0.104}} = 0.499$$

Kut otklona kormila visine dobivamo iz uvjeta da je koeficijent sile uzgona u ravnotežnom letu $C_L = 0.499$ i da je u ravnotežnom letu ($C_m = 0$)

$$\begin{aligned} C_L &= C_{L0} + C_{L\alpha} \alpha_R + C_{L\delta} \delta_m \\ 0 &= C_{m0} + C_{m\alpha} \alpha_R + C_{m\delta} \delta_m \end{aligned}$$

ili

$$0.499 = 0.249 + 4.73 \alpha + 0.216 \cdot K_f \delta_m$$

$$0 = -0.002 - 0.822 \cdot \alpha - 0.577 \cdot K_f \delta_m$$

$$K_f \delta_m = -0.0842 = -4.8^\circ$$

$$\alpha_r = 0.567 = 3.2^\circ$$

S obzirom da je otklon kormila visine mali $K_f = 1$

Primjer 2

Određiti najveći dolet ako motor radi s 75% snage, na visini 2000 m za potrošenih 48 US galon = 48 · 3.785 lit = 181.7 lit goriva.

U režimu za najveći dolet inducirani otpor jednak je nultom otporu, pa je prema prethodnom primjeru

$$C_L = 0.499$$

$$C_D = 2 \cdot C_{D0} = 2 \cdot 0.0259 = 0.0518$$

Na početku leta masa $m_i = m_L + m_g = 1088$. Tom koeficijentu uzgona i toj masi odgovara brzina horizontalnog leta:

$$V_i = \sqrt{\frac{2 m_i g}{\rho S C_L}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1089 \cdot 9.81}{1.006 \cdot 15.1 \cdot 0.499}} = 53.1 \text{ m/s},$$

Specifična masa goriva je 0.720 kg/lit, pa je potrošeno $m_f = 181.7 \cdot 0.720 = 130 \text{ kg}$. Poslije toga masa zrakoplova $m_k = 1089 - 144 = 959 \text{ kg}$. Na kraju leta bit će brzina leta:

$$V_k = \sqrt{\frac{m_k}{m_i}} V_i = \sqrt{\frac{959}{1089}} \cdot 53.1 = 49.8 \text{ m/s}.$$

Prema dijagramu C-5 u prilogu, specifična potrošnja je $0.850 \cdot 10^{-7}$, a u intervalu od $V_k = 49.8$ do $V_i = 53.1$ možemo uzeti da je prosječni koeficijent učinkovitosti elise, prema jednadžbi u primjeru 1, $\eta_{elisa} = 0.81$. Tako dobivamo dolet u tom režimu:

$$R = \frac{\eta_{elisa} C_L}{g C_P C_D} \ln\left(\frac{m_i}{m_k}\right) = \frac{0.81}{9.81 \cdot 0.850 \cdot 10^{-7}} \cdot \frac{0.499}{0.0518} \cdot \ln\left(\frac{1089}{959}\right) = 1190 \text{ km}.$$

Za mlazne motore je specifična masena potrošnja goriva proporcionalna pogonskoj sili $\dot{m} = -C_T T$. Taj koeficijent masene potrošnje goriva C_T ima dimenziju masenog protoka po jedinici sile [kg/s/N]. U horizontalnom ravnotežnom letu konstantnom brzinom, potrebna pogonska sila T_r jednaka je otporu D , a uzgon L jednak je težini mg , te se polazna jednadžba transformira u oblik:

$$\frac{dR}{dm} = \frac{V}{\dot{m}} = \frac{V}{-C_T T} = -\frac{V}{C_T} \frac{L}{D} \frac{1}{gm}$$

Normalno u horizontalnom letu koeficijent masene potrošnje mlaznog motora C_T konstantan, pa se integriranjem te jednadžbe od početka leta do kraja dobiva:

$$R = -\frac{1}{gC_T} \int_{m_i}^{m_k} V \frac{C_L}{C_D} \frac{dm}{m};$$

m_i je početna masa zrakoplova, a m_k krajnja masa. Pretpostavili smo da letimo s konstantnim koeficijentom uzgona a da se tijekom leta brzina mijenja tako da je zadovoljen uvjet horizontalnog leta.

$$V = \sqrt{\frac{2W}{\rho S C_L}}.$$

Dolet će onda biti

$$R = -\frac{1}{gC_T} \int_{m_i}^{m_k} \sqrt{\frac{2gm}{\rho S C_L}} \frac{C_L}{C_D} \frac{dm}{m} = -\frac{1}{C_T} \sqrt{\frac{2}{g\rho S}} \int_{m_i}^{m_k} \frac{\sqrt{C_L}}{C_D} \frac{dm}{\sqrt{m}}$$

Prema usvojenim uvjetima tijekom leta konstantan je koeficijent uzgona jer se ne mijenja napadni kut i konstantan je i koeficijent totalnog otpora jer je $C_D = C_{D0} + K \cdot C_L^2$, te možemo aerodinamičke koeficijente izvući ispred integrala. Tako dobivamo

$$R = -\frac{1}{C_T C_D} \sqrt{\frac{2}{g\rho S}} C_L \int_{m_i}^{m_k} \frac{dm}{\sqrt{m}}$$

Integriranjem od m_i do m_k dobivamo dolet leta za zrakoplove s mlaznim motorima

$$R = \frac{2}{C_T C_D} \sqrt{\frac{2}{g\rho S}} C_L (\sqrt{m_i} - \sqrt{m_k}),$$

ili

$$R = \frac{2}{gC_T} \frac{C_L}{C_D} (V_i - V_k).$$

To je *Breguetovu jednadžbu doleta* za zrakoplove s mlaznim motorima. Zapamtimo da je ta jednadžba za zrakoplove s mlaznim motorima izvedena uz iste pretpostavke kao za elisni pogon, tj. za konstantan napadni kut (konstantan koeficijent uzgona) i za brzinu koja udovoljava horizontalni let.

Breguetova jednadžba za dolet leta može se staviti u oblik:

$$R = \frac{2}{C_T} \sqrt{\frac{2}{g\rho S}} (\sqrt{m_i} - \sqrt{m_f}) \cdot \frac{\sqrt{C_L}}{C_D}$$

Vidimo da dolet ovisi o izabranom napadnom kutu tj. usvojenom koeficijentu uzgona. Dolet mlaznog zrakoplova bit će najveći ako je izabran napadni kut koji daje najveći odnos $\sqrt{C_L}/C_D$. Potražimo maksimum te ovisnosti. Dolet leta bit će najveći kada je funkcija

$$f(C_L) = \frac{\sqrt{C_L}}{C_{D0} + KC_L^2}$$

u maksimumu po C_L :

$$\frac{df}{dC_L} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{C_L}}(C_{D0} + KC_L^2) - \sqrt{C_L} \cdot 2KC_L}{(C_{D0} + KC_L^2)^2} = 0$$

Odatle dobivamo da je

$$KC_L^2 = \frac{1}{3} C_{D0}.$$

tj. inducirani otpor jednak je trećini parazitskog otpora. To znači da će dolet zrakoplova s mlaznim pogonom biti najveći ako letimo s napadnim kutom za koji je:

$$C_L = \sqrt{\frac{1}{3} \frac{C_{D0}}{K}},$$

a brzina leta je određena iz uvjeta za horizontalni let, što znači da će ona opadati jer masa zrakoplova opada zbog potrošnje goriva.

7.4.3 Maksimalno trajanje leta (Endurance)

Ponekad nam je potrebno što dulje boraviti u zraku. To je slučaj kada ne možemo sletjeti iz bilo kojih razloga te moramo čekati da se stvore uvjeti za slijetanje. Takvo čekanje treba ostvariti s režimom leta u kome je najveće vrijeme trajanja leta za određenu količinu goriva. Sa E označavamo vrijeme trajanja letenja (*endurance*). Ono je jednako vremenu da se masa zrakoplova smanji za masu goriva, jer let traje dok ima goriva:

$$E = \int_i^k dt = \int_i^k \frac{dm}{\dot{m}}$$

I u ovom slučaju treba odrediti optimalne režime leta zrakoplova s elisom i zrakoplova s mlaznim pogonom.

Zrakoplov s elisom ima masenu potrošnju $\dot{m} = -C_P P_{mot}$, gdje je P_{mot} snaga motora. Ta snaga motora pomnožena s koeficijentom elise η_P daje potrebnu snagu koja je jednaka produktu VD . Zato je trajanje leta zrakoplova s elisim pogonom:

$$E = \int_i^k \frac{dm}{\dot{m}} = \int_i^k \frac{dm}{-C_P VD/\eta_P} = \frac{\eta_P}{C_P} \int_i^k \frac{1}{V} \frac{L}{D} \frac{dm}{gm} = \frac{\eta_P}{gC_P} \int_i^k \frac{1}{V} \frac{C_L}{C_D} \frac{dm}{m}$$

Za uvjete s konstantnim napadnim kutom i odgovarajućom brzinom za horizontalni let ova jednadžba dobiva oblik

$$E = \frac{\eta_P}{gC_P} \sqrt{\frac{\rho S}{2g}} \frac{C_L^{3/2}}{C_D} \int_i^k m^{-3/2} dm$$

a poslije integracije

$$E = \frac{2\eta_P}{gC_P} \sqrt{\frac{\rho S}{2g}} \frac{C_L^{3/2}}{C_D} \left(\frac{1}{\sqrt{m_k}} - \frac{1}{\sqrt{m_i}} \right)$$

ili

$$E = \frac{2\eta_P}{gC_P} \frac{C_L}{C_D} \left(\frac{1}{V_k} - \frac{1}{V_i} \right).$$

Da bi E bilo što veće, trebamo napadni kut odabrati tako da funkcija koeficijenta uzgona

$$f(C_L) = \frac{C_L^{3/2}}{C_D} = \frac{C_L^{3/2}}{C_{D0} + KC_L^2}$$

bude u maksimumu.

$$\frac{df}{dC_L} = \frac{\frac{3}{2} \sqrt{C_L} (C_{D0} + KC_L^2) - C_L \sqrt{C_L} 2KC_L}{(C_{D0} + KC_L^2)^2} = 0,$$

odakle je

$$KC_L^2 = 3C_{D0},$$

a to znači da je inducirani otpor trostruko veći od parazitskog otpora a to je uvjet da potrebna snaga bude u minimumu.

Za zrakoplov s mlaznim motorom izraz za trajanje letenja bit će:

$$E = \int_i^k \frac{dm}{\dot{m}} = \int_i^k \frac{dm}{-C_T T} = -\frac{1}{C_T} \int_i^k \frac{L}{D} \frac{dm}{gm} = -\frac{1}{C_T} \int_i^k \frac{C_L}{C_D} \frac{dm}{gm}$$

Za uvjete s početka ovog poglavlja bit će

$$E = \frac{1}{gC_T} \frac{C_L}{C_D} \ln \left(\frac{m_i}{m_k} \right)$$

Da bi se postigao maksimum trajanja leta, treba letjeti s napadnim kutom koji će odnos C_L/C_D učiniti maksimalnim. Vidjeli smo da je taj odnos najveći ako je inducirani otpor jednak parazitskom otporu

$$KC_L^2 = C_{D0},$$

a to je slučaj najmanjeg otpora u horizontalnom letu.

7.5 Trajanje leta i dolet električnog zrakoplova

Za električni zrakoplov raspoloživa snaga kojom se savladava potrebna snaga jednaka produktu sile otpora i brzine dolazi od baterije. Kapacitet baterije tipično se izražava u amper satima ili miliamper satima. Peukertova jednadžba povezuje kapacitet baterije C u amper satima (ukupna količina električnog naboja koja može biti pohranjena u bateriji), i jakost struje u amperima sa vremenom pražnjenja u satima

$$t = \frac{C}{i^n} .$$

Značajka pražnjenja baterije n ovisna je o tipu baterije i temperaturi te se mijenja sa starenjem baterije. Za lithium-polymer baterije vrijedi $n=1.3$. Ta jednadžba nije prikladna za promjenjive brzine pražnjenja te je prihvatljiva modifikacija

$$t = \frac{Rt}{i^n} \left(\frac{C}{Rt} \right)^n ,$$

gdje je Rt vrijeme pražnjenja baterije u satima. Snaga baterije može se procijeniti temeljem električnog napona U i jakosti struje i

$$P_B = U i ,$$

odnosno za jakost struje i iz relacije za vrijeme pražnjenja

$$P_B = U \frac{C}{Rt} \left(\frac{Rt}{t} \right)^{1/n} .$$

Ta snaga bit će umanjena za gubitke motora, kontrolera i propelera što se može zajednički označiti sa η_{tot} . Tako bi se ukupna raspoloživa snaga pogona

$$P_a = \eta_{tot} U \frac{C}{Rt} \left(\frac{Rt}{t} \right)^{1/n} ,$$

izjednačila s potrebnom snagom

$$P_r = DV = \frac{\rho S}{2} C_{D0} V^3 + 2 \frac{KW^2}{\rho S} \frac{1}{V}.$$

Izjednačavanjem potrebne i raspoložive snage može se odrediti t vrijeme praznjenja, odnosno istrajnost leta

$$t = E = (Rt)^{1-n} \left[\frac{\eta_{tot} U C}{P_r} \right]^n$$

$$E = (Rt)^{1-n} \left[\frac{\eta_{tot} U C}{\frac{\rho S}{2} C_{D0} V^3 + 2 \frac{KW^2}{\rho S} \frac{1}{V}} \right]^n.$$

Temeljem navedenih jednadžbi jasno je da će se najveći dolet električnog zrakoplova ostvariti u režimu minimalne potrebne snage, odnosno kada je

$$C_L = \sqrt{\frac{3C_{D0}}{K}}$$

Dolet električnog zrakoplova za let s konstantnom brzinom V_{range} može se odrediti kao

$$R = E V_{range}.$$

Za maksimalni dolet prikladan je režim minimalne potrebne sile, odnosno

$$C_L = \sqrt{\frac{C_{D0}}{K}},$$

a tada je određena brzina leta koja će osigurati maksimalan dolet

$$V_{range} = \sqrt{\frac{2W}{\rho S} \frac{1}{C_L}} = \sqrt{\frac{2W}{\rho S} \sqrt{\frac{K}{C_{D0}}}}.$$

7.6 Praktični aspekti optimalnih režima za putničke zrakoplove

Komercijalni putnički zrakoplovi imaju veliki dolet i često je potrebna praktična relacija za određivanje doleta s raspoloživim gorivom. Pri tome od interesa je i problematika „nošenja

goriva“ (engl. fuel-tankering) koja razmatra isplativost nošenja veće količine goriva s praktične, operativne strane niza kraćih letova uz isplativost nadolijevanja na lokacijama s povoljnijim cijenama goriva.

U operativni aktivnostima pripreme leta koristi se pojam specifičnog doleta (engl. specific range)

$$SAR = \frac{dR}{dm} = \frac{dR/dt}{dm/dt} = \frac{V}{\dot{m}}.$$

Primjenom podatka za SAR moguće je lako izračunati inkrement doleta ostvariv s raspoloživom masom goriva

$$\Delta R = SAR \cdot \Delta m.$$

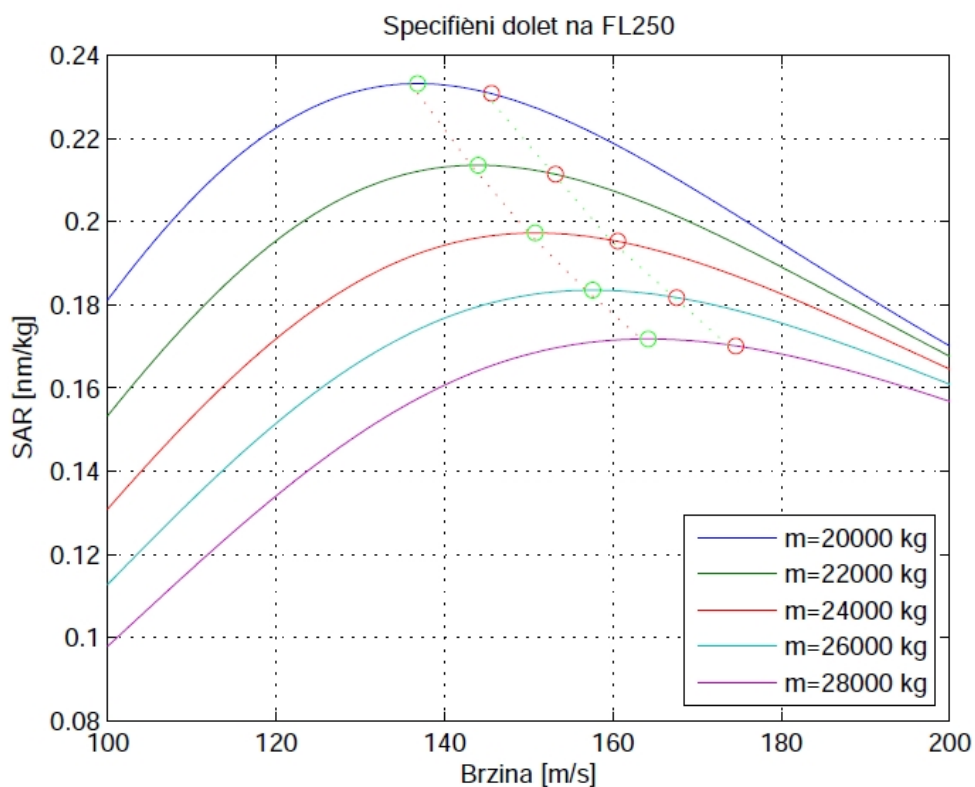
U praksi operateri komercijalnih zrakoplova koriste dva optimalna režima po pitanju doleta:

- Režim maksimalnog doleta, MRC (eng. Maximum range cruise),
- Režim ekonomskog doleta, LRC (engl. Long range cruise).

MRC režim predstavlja ranije opisan režim najvećeg doleta i za njega će SAR imati maksimalnu vrijednost u danim uvjetima.

LRC režim je režim leta s nešto većom brzinom leta od brzine za MRC te sa smanjenjem SAR za 1% od maksimalne vrijednosti. Operater na taj način leti nešto većom brzinom krstarenja što smanjuje vrijeme leta, a time povećava zadovoljstvo putnika. To ide na štetu potrošnje, ali smanjenja od svega 0.01 od maksimalne vrijednosti SAR.

To se može slikovito prikazati na primjeru regionalnog, dvomotornog, turbo-propelerskog zrakoplova za različite mase letjelice na odabranoj visini leta (FL250, engl. flight level, 25000ft = 7620 m). Dijagram prikazuje promjenu SAR određenog prema ranije navedenoj relaciji u ovisnosti o brzini leta. Zeleni kružići označavaju MRC režime, a crveni kružići LRC režime.



Slika 7-11. Ovisnost SAR o brzini leta i masi letjelice (dvomotorni turboprop putnički zrakoplov) za odabranu visinu leta $h=7620$ m: zeleni kružići MRC režimi; crveni kružići LRC režimi

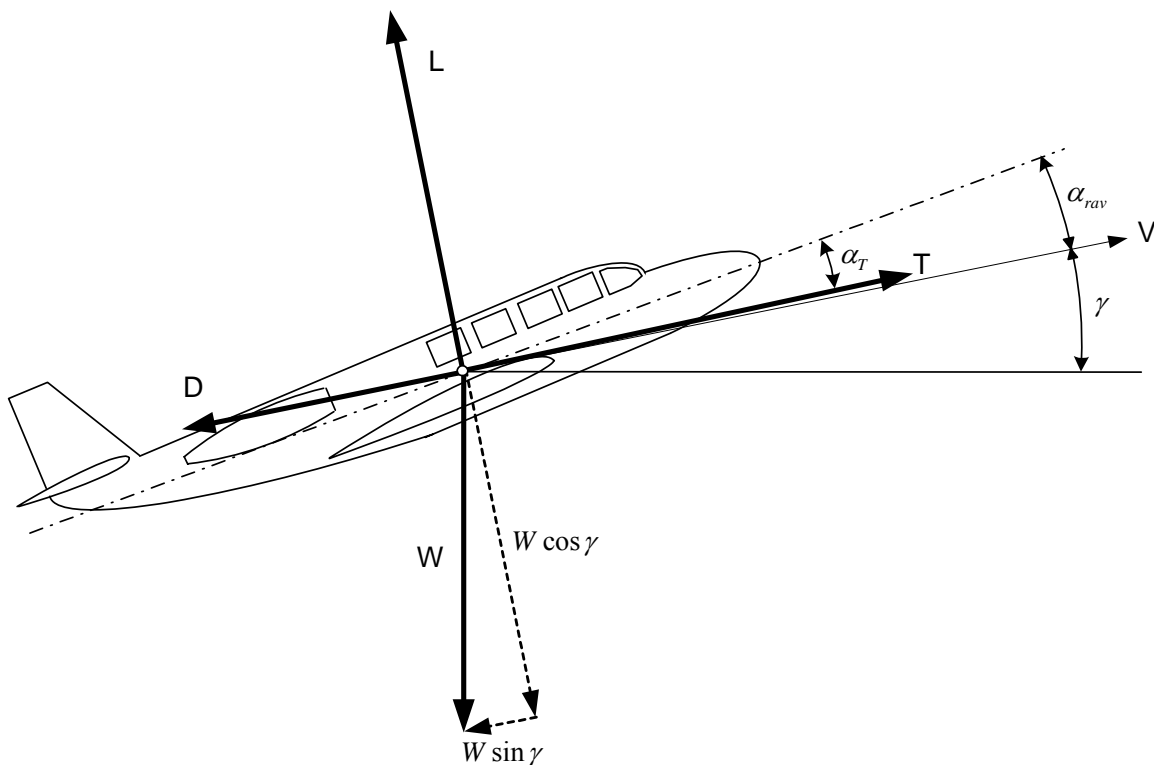
8 Penjanje i spuštanje zrakoplova

Promatramo stacionarno penjanje ili spuštanje zrakoplova u vertikalnoj ravnini. Jednadžbe ravnotežnog gibanja središta mase zrakoplova izveli smo na kraju prethodnog poglavlja:

$$m \frac{dV}{dt} = T - D - W \sin \gamma$$

$$mV \frac{d\gamma}{dt} = L \cos \phi - W \cos \gamma$$

$$mV \cos \gamma \frac{d\chi}{dt} = L \sin \phi$$



Slika 8-1. Zrakoplov u penjanju

Za gibanje u vertikalnoj ravnini kut skretanja χ je konstantan, te iz treće jednadžbe proizlazi da tada nema ni kuta valjanja $\phi = 0$. Tako dobivamo jednadžbe ravnotežnog gibanja u vertikalnoj ravnini koje smo mogli izvesti direktno sa slike 1 :

$$m \frac{dV}{dt} = T - D - W \sin \gamma$$

$$mV \frac{d\gamma}{dt} = L - W \cos \gamma$$

Za pravocrtno ($\gamma = const$) i stacionarno ($V = const$) penjanje ili spuštanje bit će

$$T = D + W \sin \gamma$$

$$L = W \cos \gamma$$

8.1 Penjanje

Iz prve jednadžbe su kut penjanja γ i brzina penjanja V_v :

$$\sin \gamma = \frac{T - D}{W}$$

$$V_v = V \sin \gamma = V \frac{T - D}{W}$$

Brzina penjanja V_v označava se u zrakoplovnoj praksi sa R/C (Rate of Climb), a tangens kuta γ označava se sa G i naziva se gradijent penjanja (Climb Gradient).

Iz jednakosti $L = W \cos \gamma$, koja je potrebna za penjanje (ili spuštanje), nameće se uvjet za penjanje na nekoj određenoj visini:

$$\frac{V^2 C_L}{\cos \gamma} = \frac{2W}{\rho S}$$

S kojom brzinom leta V , s kojim koeficijentom uzgona C_L , te s kojim kutom γ zrakoplov se treba penjati, nije apriorni određeno. Ovdje je problem optimizacije teži od onoga koji je bio u horizontalnom letu. Koriste se dvije mogućnosti optimizacije:

- najveći kut penjanja γ_{\max} (Best Angle of Climb)
- najveća brzina penjanja $V_{v \max}$ (Best Rate of Climb)

8.1.1 Najveći kut penjanja (najkraći put penjanja)

U stacionarnom penjanju pod kutom γ potrebna je pogonska sila

$$T_r = D + W \sin \gamma$$

Najprije valja uočiti da više nemamo jednakost otpora i potrebne pogonske sile. Potrebna pogonska sila treba svladati ne samo otpor, već i komponentu težine. Taj otpor u penjanju

$$D = qS(C_{D0} + KC_L^2) = qSC_{D0} + K \frac{L^2}{qS}$$

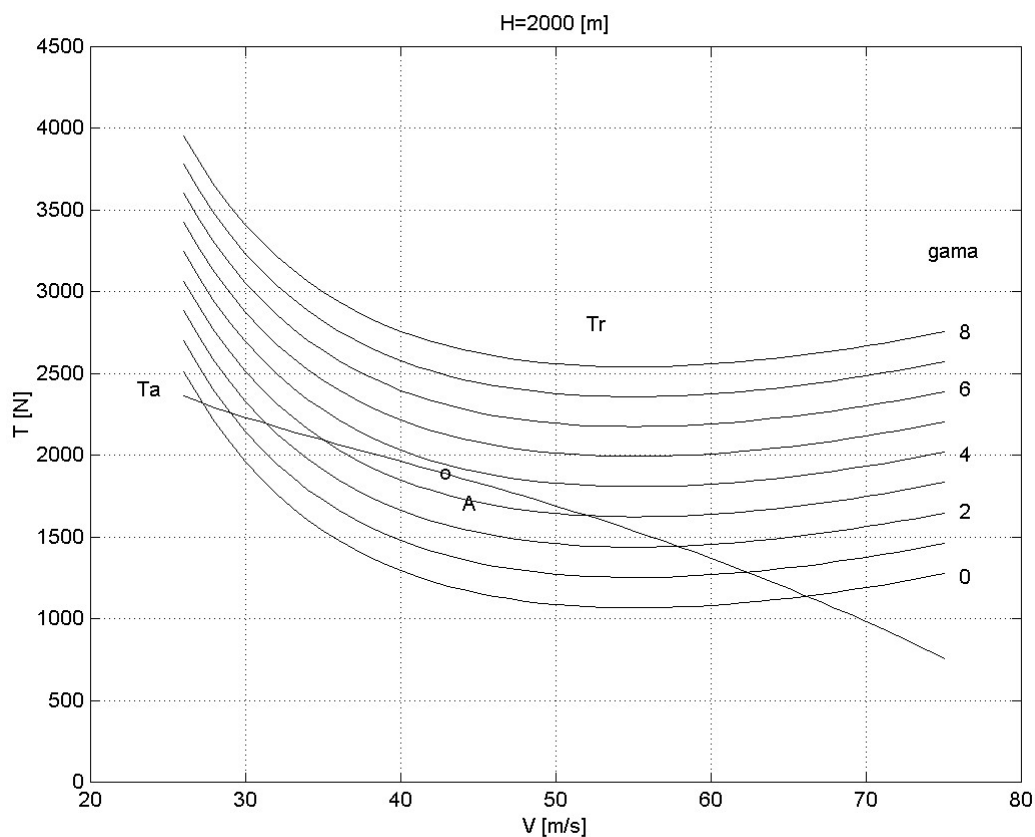
ne može se izraziti samo kao funkcija brzine, jer inducirani otpor ovisi o uzgonu a on ovisi on ovisi i o kutu penjanja $L = W \cos \gamma$.

$$D = qSC_{D0} + \frac{K W^2 \cos^2 \gamma}{q S},$$

Tako je potrebna sila u penjanju :

$$T_r = \frac{\rho S C_{D0}}{2} V^2 + \frac{2KW^2}{\rho S} \frac{1}{V^2} \cos^2 \gamma + W \sin \gamma .$$

Potrebna sila ovisi o tri parametra. Prvo, o kutu penjanja γ , zatim o brzini leta V i konačno o gustoći zraka. To znači da će na određenoj visini, gdje je gustoća zraka neka određena vrijednost, potrebna sila ovisiti o brzini leta i o izabranom kutu penjanja $T_r(V, \gamma)$. Ako se pretpostavi da je visina konstantna, može se promatrati dijagram kao na slici 2 na komu su ucrtane krivulje potrebne sile $T_r(V, \gamma)$ za konstantne kutove penjanja (od 0° do 9°).



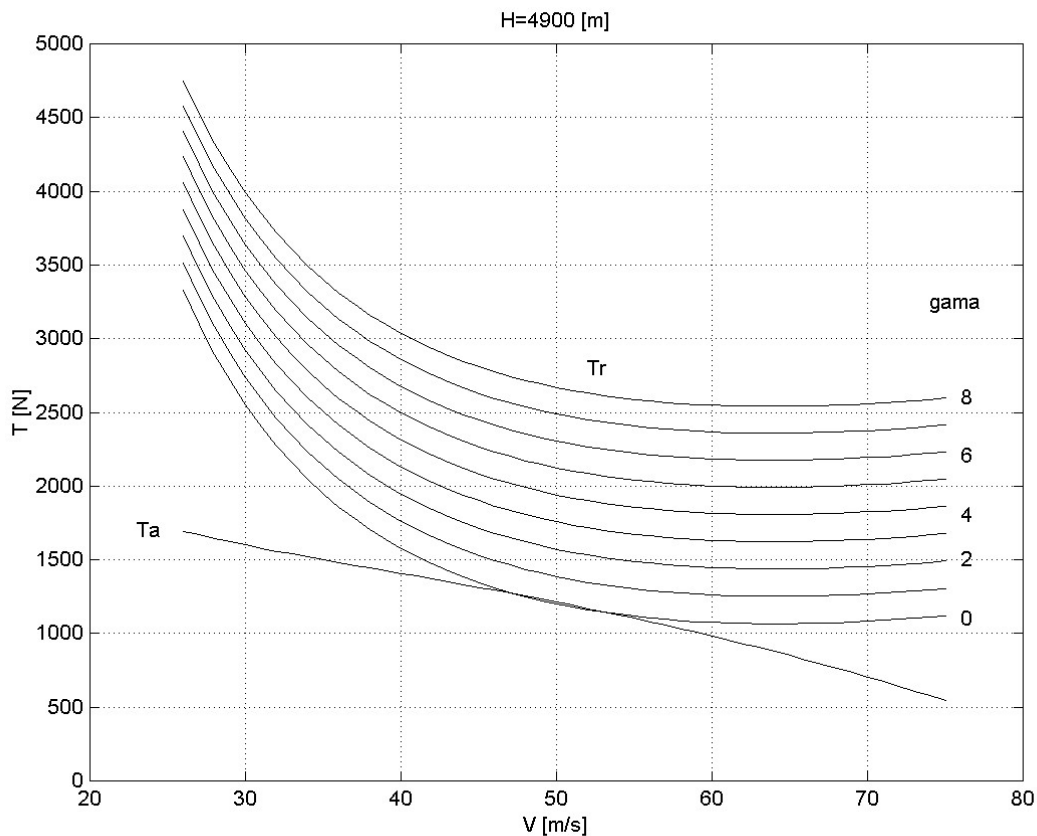
Slika 8-2. Potrebna sila ovisno o brzini leta i kutu penjanja za mali putnički zrakoplov.

S druge strane imamo raspoloživu silu (ili snagu pogona). Raspoloživa pogonska sila ovisi također o brzini $T_a(V)$ ali ne o kutu penjanja. Za neki određeni kut penjanja, u presjeku krivulja $T_r(V, \gamma) = T_a(V)$ dobivamo V_{\min} i V_{\max} , granice intervala mogućih brzina s kojima se može zrakoplov penjati pod tim kutom. Povećavanjem kuta penjanja, kao što se to vidi sa slike 2 taj se interval smanjuje, da bi se za neki određeni kut penjanja te dvije krivulje $T_a(V)$ i $T_r(V, \gamma)$ tangirale u točki A. Kut penjanja ne može biti veći od te vrijednosti, jer pogon ne

raspoláže dovoljnom silom, da bi se taj zrakoplov mogao penjati pod većim kutom. Dakle, krivulja $T_r(V, \gamma)$, na kojoj je točka A, određuje najveći kut penjanja, s kojim se taj zrakoplov s tim pogonom može penjati. Označimo taj kut sa BAC (*Best angle of climb*). Istodobno na apscis točke A očitavamo kojom brzinom treba letjeti V_{BAC} . Koeficijent uzgona, za taj najveći kut penjanja, nalazimo iz uvjeta da je $L = W \cos \gamma$:

$$C_L = \frac{2W \cos \gamma}{\rho S V^2}$$

To rješenje $BAC, V_{BAC}, C_{L BAC}$ dobili smo za određenu visinu, što znači da će za drugu visinu imati neke druge tri vrijednosti. Tako zaključujemo da najveći mogući kut penjanja BAC i njemu odgovarajuća brzina leta V_{BAC} i koeficijent uzgoan $C_{L BAC}$ nisu konstante već se mijenjaju s visinom.



Slika 8-3. BAC za "mali" zrakoplov na visini 4900m

Povećavanjem visine smanjivat će se BAC . Konačno za neku visinu kut će biti jednak nuli, jer tada krivulja $T_a(V)$ tangira krivulju $T_r(V)$ za $\gamma = 0$. To je točno točka koja odgovara vrhu ovojnice (vidi sliku 7-9). Tim istim postupkom za isti zrakoplov, ali za visinu

$h = 4900 \text{ m}$ nacrtana slika 3, prema kojoj je dobiven krajnji slučaj mogućega leta i to za $\gamma = 0$, tj. s tim motorom na tom zrakoplovu više se nije moguće penjati.

Na temelju ove analize vidimo da svakoj visini odgovara neki najveći kut $\gamma_{\max}(h)$ koji se smanjuje s visinom da bi na vrhuncu bio jednak nuli. Isto tako, na svakoj visini imamo odgovarajuću brzinu leta V_{BAC} i odgovarajući koeficijent uzgona $C_{L_{Bac}}$ s kojim treb letjeti. To je režim leta s najvećim mogućim kutom penjanja.

Ova analiza ima jednu teoretsku malu pogrešku. Pošli smo od jednadžba za pravocrtan stacionaran let, a zaključili smo da se kut γ_{BAC} kao i V_{BAC} mijenjaju tijekom leta, što znači da taj let nije ni pravocrtan ni stacionaran. Ipak, te promjene su spore, te su derivacije $\dot{\gamma}$ i \dot{V} male veličine te se mogu zanemariti, što znači da su polazne jednadžbe zadovoljavajuće točne.

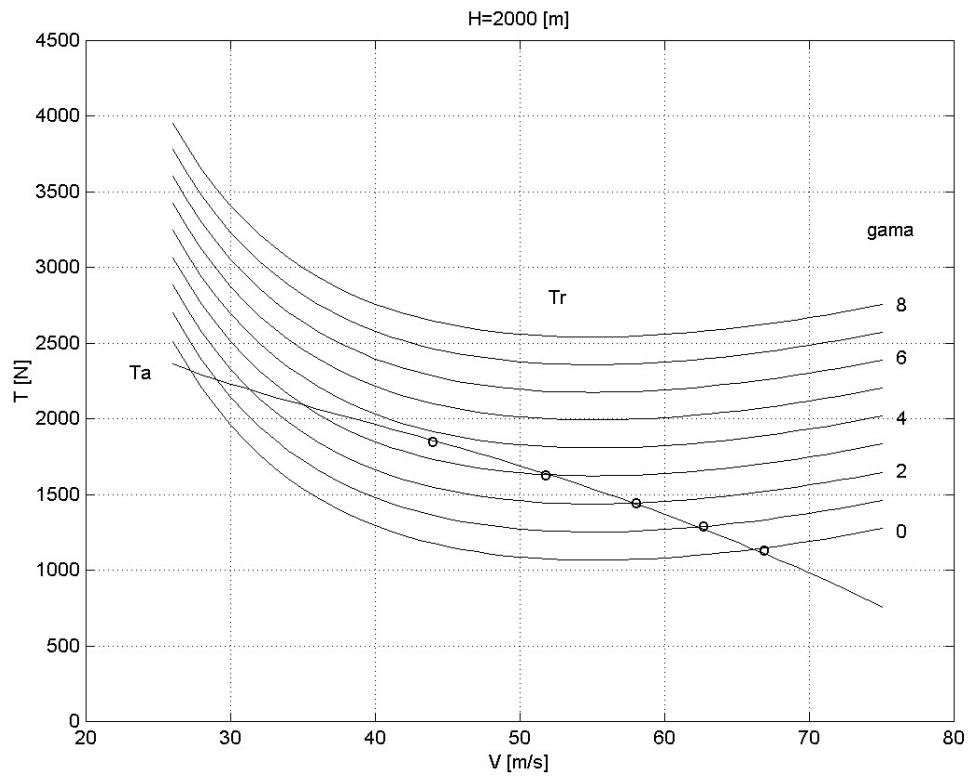
U slučaju zrakoplova s elisom dobivene vrijednosti brzine leta za najveći kut penjanja ili su manje od onih koje su propisane kao minimalne za pravilan i siguran rad elise, ili su tako male da neki drugi efekti dominiraju u penjanju, kao npr. povećani otpor zbog odvajanja struje od elise, pa se zato elisni zrakoplovi obično penju ili spuštaju u režimu najveće brzine penjanja.

8.1.2 Najveća brzina penjanja (najmanje vrijeme penjanja)

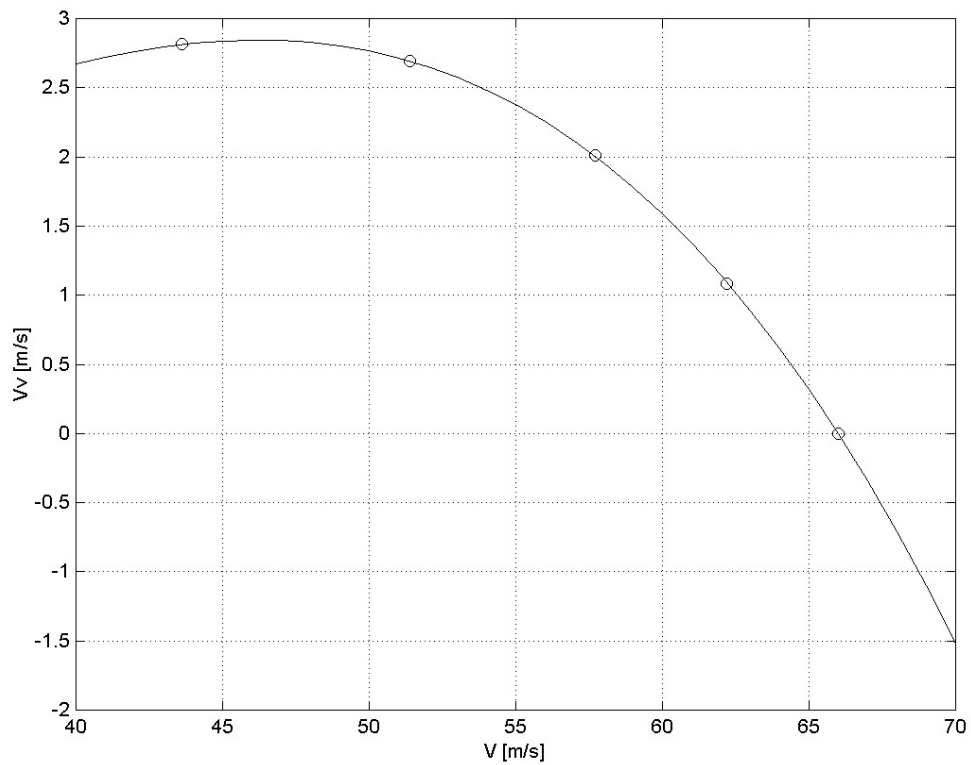
Za lovce presretače vrlo je važno da u što kraćem vremenu budu na određenoj visini H . To znači da trebaju imati što veću brzinu penjanja V_v :

$$\frac{dH}{dt} = V_v = V \sin \gamma.$$

Brzina penjanja označava se u zrakoplovnoj praksi sa RC (*rate of climb*), a najveću sa BRC (*best rate of climb*). Neka su na slici 4 nacrtane krivulje potrebne pogonske sile $T_r(V, \gamma)$ i raspoložive pogonske sile $T_a(V)$, za neku određenu visinu za koju je nacrtana slika. Označimo sa $V_{\max}(\gamma)$ apscisu točke desnog presjeka krivulje $T_a(V)$ sa krivuljama $T_r(V, \gamma)$. Svaka točka presjeka odgovara nekom kutu penjanja i predstavlja maksimalnu brzinu V_{\max} koju može postići zrakoplov s tim motorom na tom kutu penjanja. Drugim riječima za svaki mogući kut penjanja dobivamo par vrijednosti V_{\max} i γ . Pomoću tih parova možemo nacrtati novi dijagram koji na apscisi ima najveću brzinu leta V_{\max} , a na ordinati najveću brzinu penjanja $V_v = V_{\max} \sin \gamma$.



Slika 8-4. Potrebna sila $T_r(V, \gamma)$ i raspoloživa sila $T_a(V)$, za određenu visinu



Slika 8-5. Brzina penjanja $V_v(V)$ za određenu visinu,

Taj dijagram na slici 5 urađen je za onu istu visinu za koju smo nacrtali polazne krivulje na slici 4. Krivulja na slici 5, pokazuje koje će biti brzine penjanja V_V ako se zrakoplov penje s najvećom brzinom leta na tom kutu penjanja. Drugim riječima ta krivulja je geometrijsko mjesto točaka koje imaju na apscisi $V_{\max}(\gamma)$ a na ordinati $V_V(\gamma) = V_{\max}(\gamma) \cdot \sin \gamma$. Na njenom tjemenu nalazi se točka C koja predstavlja najveću moguću brzinu penjanja. U toj točki C određujemo brzinu leta V i kut γ koji osiguravaju najveću brzinu penjanja $V_V = V \sin \gamma$ na visini h za koju smo konstruirali dijagrame 4 i 5. Koeficijent uzgona određen je jednadžbom $C_L = \frac{2W \cos \gamma}{\rho S V^2}$. Te vrijednosti V_{BRC} , γ_{BRC} i C_{LBRC} određuju režim leta BRC za visinu H . Za neku drugu H visinu dobili bi druge vrijednosti za BRC . Drugim riječima V_{BRC} , γ_{BRC} i C_{LBRC} su funkcije visine H koje predstavljaju performanse zrakoplova.

8.1.3 Primjer

Za mali putnički zrakoplov na visini $H = 2000 \text{ m}$, odrediti režim leta za najveću brzinu penjanja.

Rješenje grafičkom metodom nalazi se u direktoriju *Performanse\Penjanje* pod imenom *BRC1.m* s kojim je nacrtana slika 8.4, a zatim očitane točke nacrtane su pomoću programa *BRC2.m*. S tim programom dobiva se vrijednost $\gamma_{\max} = 3.5^\circ$ za brzinu leta $V_{BAC} = 46.2 \text{ m/s}$ na zadanoj visini.

8.1.4 Vrijeme penjanja i potrošnja goriva u penjanju

Nakon analiza, iz prethodnog odjeljka, o režimu penjanja u mogućnosti smo izračunati vrijeme penjanja od visine H_1 do visine H_2 :

$$t = \int_{H_1}^{H_2} \frac{dH}{V_V}$$

Ako se penjemo u režimu BRC onda ćemo imati najmanje vrijeme penjanja:

$$t_{\min} = \int_{H_1}^{H_2} \frac{dH}{V_{VBRC}}$$

U prethodnom odjeljku odredili smo funkciju $V_{VBRC}(H)$. S tom funkcijom trebamo izračunati ovaj integral.

Potrošnju goriva u penjanja zrakoplova određujemo polazeći od jednadžbe

$$\frac{dm}{dh} = -\frac{\dot{m}}{V_v}$$

u kojoj je za elisne zrakoplove

$$\dot{m} = \dot{m}_g = -C_p P_{mot} = -\frac{C_p T_r V}{\eta_{elisa}},$$

a za mlazne

$$\dot{m} = \dot{m}_g = -C_T T_r.$$

U ovim jednadžbama potrebna pogonska sila u penjanju određena je jednadžbom

$$T_r = D + W \sin \gamma = \frac{\rho V^2}{2} (C_{D0} + KC_L^2) + W \sin \gamma$$

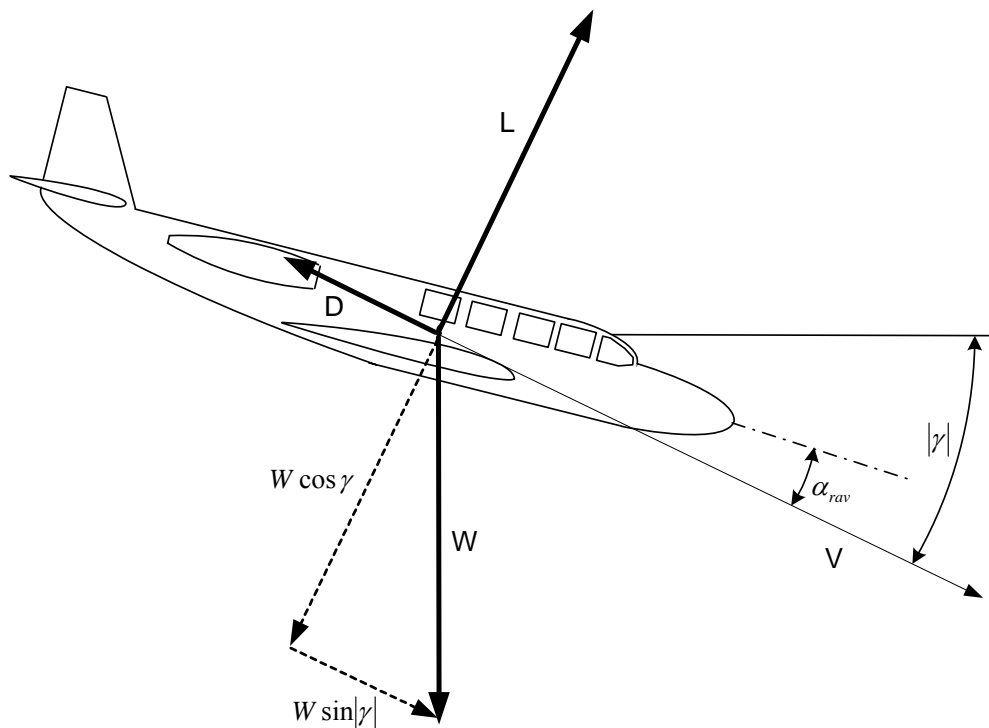
u kojoj su $V(H)$, $\gamma(H)$ i $C_L(H)$ određene u prethodnom poglavlju.

8.2 Spuštanje

Da bi spuštanje bez pogonske sile bilo pravocrtno i s konstantnom brzinom, prema jednadžbama za gibanje u vertikalnoj ravnini, mora biti

$$0 = -D - W \sin|\gamma|$$

$$0 = L - W \cos \gamma$$



Slika 8-6

Te jednadžbe smo mogli i direktno napisati prema slici 6, jer tada sile D , L i W prema d'Alembertovom principu moraju biti u ravnoteži. Dijeljenjem ovih dviju jednadžbi dobivamo

$$\tan \gamma = -\frac{D}{L} = -\frac{C_D}{C_L}$$

ili

$$\tan|\gamma| = \frac{C_D}{C_L} = \frac{C_{D0} + KC_L^2}{C_L}$$

To znači da za svako izabrano C_L imamo jedan kut spuštanja γ pri kome je gibanje pravocrtno s konstantnom brzinom. Tom kutu odgovara daljina spuštanja

$$x = \frac{H}{\tan|\gamma|}$$

Brzinu leta u spuštanju odredit ćemo iz jednadžbe:

$$W = \sqrt{L^2 + D^2} = \frac{\rho S_{ref}}{2} V^2 \sqrt{C_D^2 + C_L^2}$$

$$V^2 = \frac{2W}{\rho S_{ref} \sqrt{C_D^2 + C_L^2}}$$

S obzirom da sve ovisi o izabranom koeficijentu uzgona postavlja se pitanje koji koeficijent uzgona izabrati?

Pri običnom slijetanju transportnih zrakoplova želimo spustiti s najmanjom brzinom i s najvećim kutom $|\gamma|$. Prvi uvjet da brzina bude što manje znači da bude s najveć

$$C_D^2 + C_L^2 = (C_{D0} + KC_L^2)^2 + C_L^2$$

a drugi uvjet da bude najveći kutom $|\gamma|$ treba nam što veće $\frac{C_D}{C_L}$ tj što manja vrijednost odnosa

$$\frac{C_D}{C_L} = \frac{C_{D0} + KC_L^2}{C_L} = f(C_L)$$

Ta odnos ima maksimum za $KC_L^2 = C_{D0}$, a najmanju vrijednost za C_{Lmax} , koja istodobno daje i najmanju brzinu slijetanja. To znači da sliječemo najbolje sa C_{Lmax}

Suprotno tomu, u slučaju jedrilica želimo što više ostati u zraku, a to znači što veću daljinu spuštanja, tj. što manje $\tan|\gamma|$ odnosno što veće $\frac{C_L}{C_D}$. Znamo da ta funkcija $f(C_L)$ ima maksimum kad je $KC_L^2 = C_{D0}$ tj. kad je

$$C_L = \sqrt{\frac{C_{D0}}{K}}.$$

9 Horizontalni zaokret

Ako zrakoplov leti

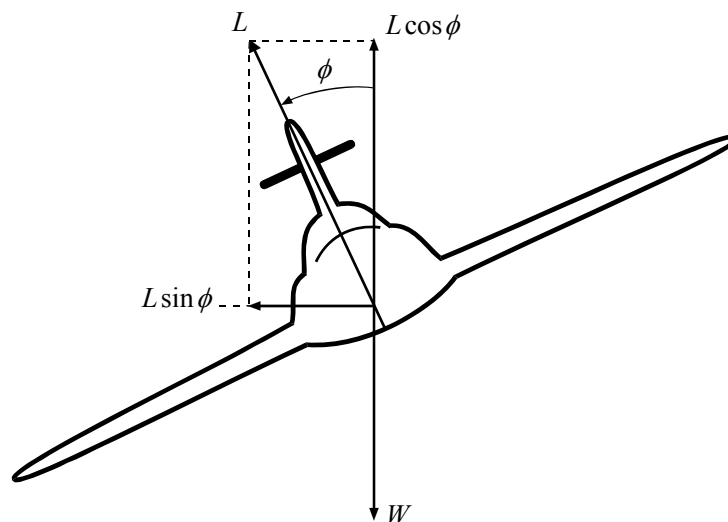
- konstantnom brzinom
- u horizontalnoj ravnini $\gamma = 0$,
- bez kuta klizanja $\beta = 0$, te
- ako je $\alpha_T \approx \alpha_{rav}$ i $\mu_A \approx \phi$,

jednadžbe gibanja centa mase zrakoplova dobivaju oblik:

$$0 = T - D$$

$$mV \frac{d\chi}{dt} = L \sin \phi$$

$$0 = L \cos \phi - W.$$



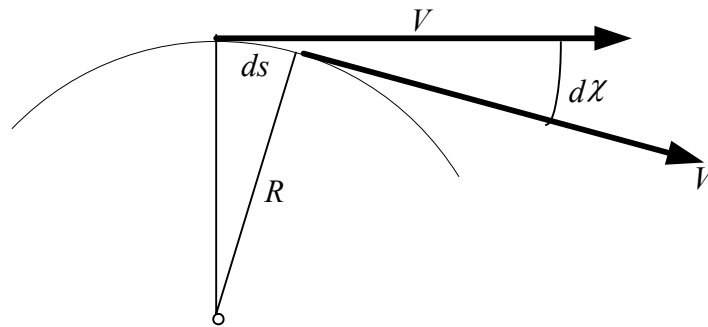
Slika 1. Zrakoplov u horizontalnom zaokretu

Do tih jednadžbi može se doći neposredno promatrajući sile koje djeluju na zrakoplov u zaokretu, kao na slici 8-1. Da bi zrakoplov letio u horizontalnoj ravnini, mora biti vertikalna komponenta uzgona jednaka težini:

$$L \cos \phi = W$$

a horizontalna komponenta stvara centripetalno ubrzanje koje je okomito na brzinu leta:

$$m \frac{V^2}{R} = L \sin \phi,$$



Slika 2

gdje je R polumjer zakrivljenosti putanje središta mase zrakoplova u horizontalnoj ravnini kao na slici 8-2. Podsjetimo se iz mehanike da je kutna brzina vektora brzine

$$\dot{\chi} = \frac{d\chi}{dt} \cdot \frac{ds}{ds} = \frac{d\chi}{ds} \cdot V = \frac{V}{R},$$

jer je polumjer zakrivljenosti:

$$R = \frac{ds}{d\chi}$$

9.1 Jednadžbe zaokreta

Prethodne jednadžbe mogu se s normalnim opterećenjem n napisati u obliku:

$$\dot{\chi} = \frac{ng}{V} \sin \phi$$

$$n = \frac{1}{\cos \phi}$$

Iz ovih jednadžbi eliminacijom kuta valjanja ϕ dobivamo najčešće korištene veze koje nam daju opterećenja u ovisnosti o kutnoj brzini zaokreta, ili obrnuto, kutnu brzinu zaokreta u ovisnosti o opterećenju:

$$\dot{\chi} = \frac{g\sqrt{n^2 - 1}}{V},$$

ili što je isto

$$n = \sqrt{\left(\frac{\dot{\chi}V}{g}\right)^2 + 1}.$$

Osim ovih veličina, u praksi je potreban i polumjer zaokreta R . Znajući iz klasične mehanike da je

$$R = \frac{ds}{d\chi} = \frac{V}{\dot{\chi}},$$

bit će polumjer u horizontalnom zaokretu ovisan o opterećenju:

$$R = \frac{V^2}{g\sqrt{n^2 - 1}},$$

ili obrnuto, opterećenje bit će ovisno o polumjeru zakrivljenosti:

$$n = \sqrt{\left(\frac{V^2}{gR}\right)^2 + 1}$$

9.2 Ograničenja kutne brzine

Opterećenje ne smije biti veće od onog što može izdržati konstrukcija $n < n_s$. Maksimalno opterećenje koje može izdržati konstrukcija poznata je vrijednost, te kutna brzina ne smije biti veća od:

$$\dot{\chi}_s(V) = \frac{g\sqrt{n_s^2 - 1}}{V} = \frac{const}{V}$$

Ta jednadžba u dijagramu $V, \dot{\chi}$ ograničava sa gornje strane područje mogućih kutnih brzina u ovisnosti od brzine leta.

Isto tako, koeficijent uzgona ne smije biti veći od maksimalne vrijednosti $C_L \leq C_{L_{max}}(Ma)$. Ako u jednadžbi za kutnu brzinu, izrazimo opterećenje odnosom $n = L/W$, dobivamo utjecaj koeficijenta uzgona na kutnu brzinu:

$$\dot{\chi}(V) = \frac{g}{V} \sqrt{\left(\frac{\rho V^2 SC_L}{2W}\right)^2 - 1}$$

u koju, kada unesemo najveći koeficijent uzgona, dobivamo najveće dopušteno opterećenje s obzirom na *stall*, ovisno o brzini leta:

$$\dot{\chi}_L(V) = g \sqrt{\left(\frac{\rho SC_{L_{max}}}{2W}\right)^2 V^2 - \frac{1}{V^2}} = g \sqrt{const \cdot V^2 - \frac{1}{V^2}}$$

Ta krivulja također ograničava s gornje strane moguće kutne brzine s obzirom na najveći koeficijent uzgona. Taj maksimalni koeficijent uzgona $C_{L_{max}}$ može biti također ovisan o Mahovu broju.

Vidimo da je najveća moguća kutna brzina ovisno o brzini leta ograničena s gornje strane krivuljama $\dot{\chi}_s(V)$ i $\dot{\chi}_L(V)$. S obzirom na oblik ovih krivulja (krivulja $\dot{\chi}_L(V)$ raste, a krivulja $\dot{\chi}_s(V)$ opada) u njihovom presjeku bit će najveća moguća kutna brzina koja zadovoljava oba ograničenja. Ta kutna brzina se naziva *corner speed*, a brzina leta pri kojoj se ona ostvaruje označava se sa V_C , kao i odgovarajući Machov broj sa M_C . U presjeku brzinu leta dobivamo izjednačavanjem kutnih brzina:

$$\dot{\chi}_L(V) = \dot{\chi}_s(V)$$

Iz te jednadžbe dobivamo

$$V_C = \sqrt{\frac{2n_s W}{\rho S C_{L \max}}}$$

a toj brzini leta odgovara kutna brzina *corner speed*

$$\dot{\chi}_{\text{corner speed}} = g \sqrt{\frac{\rho S C_{L \max}}{2W} \left(n_s - \frac{1}{n_s} \right)}$$

9.3 Najmanji polumjer zaokreta

Iz jednadžbi horizontalnog zaokreta:

$$n = \sqrt{\left(\frac{V^2}{gR} \right)^2 + 1}$$

$$\frac{\rho V^2}{2} S C_L = nW,$$

eliminacijom brzine dobivamo ovisnost polumjera zaokreta o opterećenju n :

$$R = \frac{2W}{g \rho S C_L} \frac{n}{\sqrt{n^2 - 1}}$$

Polumjer zaokreta ovisi o koeficijentu uzgona i o opterećenju. Za najmanji zaokret treba najveći koeficijent uzgona i najveće opterećenje. Zato se najmanji polumjer zaokreta ostvaruje u režimu leta za *corner speed*. Za najveći koeficijent sile uzgona $C_{L \max}$ i najveće strukturalno opterećenje n_s dobivamo najmanji polumjer koji odgovara najvećoj kutnoj brzini (*corner speed*):

$$R_C = \frac{2W}{g \rho S C_{L \max}} \frac{n_s}{\sqrt{n_s^2 - 1}}$$

9.4 Koordinirani zaokret

Uočimo da se u zaokretu povećava otpor. Prije zaokreta otpor je bio

$$D = \frac{\rho V^2}{2} S \cdot (C_{D0} + KC_L^2)$$

gdje je koeficijent uzgona bio određen iz uvjeta horizontalnog leta $L = W$. Međutim, u horizontalnom zaokretu taj uvjet se mijenja

$$L = \frac{W}{\cos \phi}$$

Prema tome, u zaokretu je povećan koeficijent uzgona, zbog čega se povećava inducirani otpor. Da ne bi u horizontalnom zaokretu brzina leta opadala, potrebno je povećati pogonsku silu za onoliko koliko se povećao otpor.

U horizontalnom zaokretu polumjera R , brzinom V , vrijednost opterećenja određena je jednadžbom:

$$n = \sqrt{\left(\frac{V^2}{gR}\right)^2 + 1}.$$

Da bi se ostvario takav zaokret, potrebno je:

- otklonom krilaca δ_ℓ zavaljati letjelicu za kut valjanja

$$\phi = \arccos \frac{1}{n};$$

- otklonom kormila visine δ_m postaviti ravnotežni napadni kut α_{rav} za koji je koeficijent uzgona

$$C_L = \frac{nW}{\frac{\rho V^2}{2} S_{ref}};$$

- otklonom ručice pogona δ_p postići novu potrebnu pogonsku silu koja održava konstantnu brzinu leta.

$$T_r = \frac{\rho V^2}{2} S (C_{D0} + KC_L^2)$$

Za takav koordinirani zaokret moraju se uskladiti: otklon krilaca δ_ℓ , kormila visine δ_m i pogonske sile δ_p . Zato se takav zaokret u kome su usklađene ove tri veličine naziva

koordinirani zaokret. U njemu se leti sa zadanom konstantnom brzinom, na zadanoj visini i izvodi zaokret sa zadanim polumjerom R .

Kako su faktor opterećenja n , koeficijent uzgona C_L i pogonska sila T ograničeni, bit će ograničen i horizontalni zaokret zrakoplova. Sve tri veličine imaju svoje maksimalne vrijednosti n_s , $C_{L_{\max}}$ i T_a . Te granice određuju najmanji mogući polumjer zakrivljenosti R , odnosno najveću moguću kutnu brzinu $\dot{\chi}$ u koordiniranom zaokretu za zadanu brzinu leta V na promatranoj visini leta.

9.4.1 Raspoloživo opterećenje u koordiniranom zaokretu

U horizontalnom letu je normalno opterećenje

$$n = \frac{L}{W}$$

bilo jednako jedinici jer je $L = W$. U horizontalnom zaokretu ono se povećava jer je u horizontalnom zaokretu $n = 1/\cos\phi$ i to utoliko više ukoliko je manji polumjer zakrivljenosti

$$n = \sqrt{\left(\frac{V^2}{gR}\right)^2 + 1}$$

Potrebno normalno opterećenje postiže se povećanjem sile uzgona, odnosno povećanjem ravnotežnog napadnog kuta. Međutim, povećana sila uzgona znači i znatno veći inducirani otpor. Da bi u koordiniranom zaokretu brzina leta ostala nepromijenjena, treba povećati pogonsku silu isto toliko koliko je povećan inducirani otpor. Ta potrebna pogonska sila ne može biti veća od raspoložive, pa se postavlja pitanje za koliko je moguće povećavati normalno opterećenje s obzirom na raspoloživu silu (ili snagu) motora. To najveće opterećenje nazivamo *raspoloživo opterećenje*. Ono ovisi o brzini leta $n_{\text{rasp}}(V)$. Da bi zrakoplov letio konstantnom brzinom leta V potrebna je sila

$$T_r = \frac{\rho V^2}{2} S \cdot \left[C_{D0} + K \left(\frac{L}{\frac{\rho V^2}{2} S} \right)^2 \right].$$

Kako je $L = nW$, ta potrebna sila ovisi o normalnom opterećenju

$$T_r = \frac{\rho S C_{D0}}{2} V^2 + \frac{2K(nW)^2}{\rho S} \frac{1}{V^2}$$

Raspoloživa sila T_a mora biti veća od potrebne, ili u najgoremu slučaju jednaka potrebnoj, pa izjednačavanjem potrebne i raspoložive sile dobivamo

$$\frac{\rho S C_{D0}}{2} V^2 + \frac{2K(nW)^2}{\rho S} \frac{1}{V^2} = T_a,$$

ili

$$n_{rasp}^2 = \frac{T_a \rho S}{2KW^2} V^2 - \frac{(\rho S)^2 C_{D0}}{4KW^2} V^4.$$

Ova jednadžba direktno je primjenljiva za mlazne zrakoplove. Za elisne zrakoplove raspoloživa sila ovisno od raspoložive snage određena je jednadžbom:

$$T_a = \frac{P_a}{V} = \frac{\eta_{elisa} P_{mot \max}}{V}$$

Zato raspoloživo opterećenje za elisne zrakoplove određujemo pomoću jednadžbe:

$$n_{rasp}^2 = \frac{\eta_{elisa} P_{mot \max} \rho S}{2KW^2} V - \frac{(\rho S)^2 C_{D0}}{4KW^2} V^4$$

Ovisnost raspoloživog opterećenja o brzini leta bit će različita na različitim visinama zato što ovisi i o gustoći zraka. Ovisnost normalnog opterećenja o brzini leta $n_{rasp}(V)$ ima maksimalnu vrijednost za brzinu leta koju dobivamo derivacijom funkcije $n_{rasp}(V)$.

9.4.2 Najveća kutna brzina u koordiniranom zaokretu

Kutna brzina je određena jednadžbom

$$\dot{\chi} = \frac{g\sqrt{n^2 - 1}}{V}$$

i bit će utoliko veća ukoliko je veće opterećenje, pa zato promatramo kutnu brzinu pri raspoloživom opterećenju.

$$\dot{\chi}_p = \frac{g\sqrt{n_{rasp}^2 - 1}}{V}$$

Ta kutna brzina ovisi o brzini leta direktno i indirektno preko $n_{rasp}(V)$. Da bismo odredili najveću kutnu brzinu ovisno o brzini leta, zamijenimo raspoloživo opterećenje s njegovom funkcijom o brzini leta. Ako je u pitanju mlazni zrakoplov, raspoloživo opterećenje n_{rasp} određeno je jednadžbom u prethodnom poglavlju, te dobivamo ovisnost $\dot{\chi}_p(V)$:

$$\dot{\chi}_p = g \sqrt{\frac{T_a \rho S}{2KW^2} - \frac{(\rho S)^2 C_{D0}}{4KW^2} V^2 - \frac{1}{V^2}} .$$

Za elisne zrakoplov, raspoloživo opterećenje n_{rasp} određeno je u prethodnom poglavlju, što daje ovisnost $\dot{\chi}_p(V)$:

$$\dot{\chi}_p = g \sqrt{\frac{\eta_p T_{mot} \rho S}{2KW^2} \frac{1}{V} - \frac{(\rho S)^2 C_{D0}}{4KW^2} V^2 - \frac{1}{V^2}} .$$

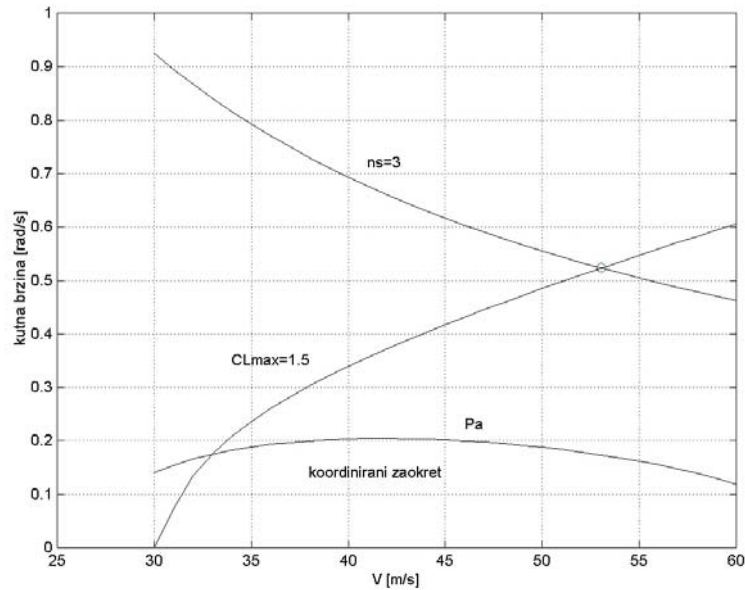
Tu ovisnost $\dot{\chi}_p(V)$ nazivamo ovojnica koordiniranog zaokreta zrakoplova. Ona ima maksimum za brzinu leta $V_{max(\dot{\chi})}$, pri kojoj je najveća moguća kutna brzina leta $\dot{\chi}_{max}$ u koordiniranom zaokretu.

9.5 Primjer

Odrediti za mali zrakoplov koji leti na visi 2000 m kolika je ovisno o brzini leta :

- raspoloživa kutna brzina u koordiniranom zaokretu s obzirom na performanse motora iz priloga C,
- raspoloživa kutna brzina ovisno s obzirom na maksimalni koeficijent uzgona $C_L = 1.5$ i
- raspoloživa kutna s obzirom na maksimalno strukturalno naprežanje $n_s = 3$.

Prema prilogu C napravljen je pod program *Rasp_snaga* koji daje raspoloživu snagu motora ovisno o kutnoj brzini elise, brzine leta, temperaturi i tlaku okolnog zraka. Nominalni broj okretaja motora je $\omega = 240 [rad/s]$.



Slika 3. Ograničenja kutnih brzina malog zrakoplova

Izjednačavanjem potrebne i raspoložive snage $P_r = P_a$ dobivamo:

$$\frac{\rho S C_{D0}}{2} V^2 + \frac{2K(n_{rasp}W)^2}{\rho S} \frac{1}{V^2} = \frac{P_a}{V}.$$

Iz ove je jednadžbe kvadrat raspoloživog opterećenja:

$$n_{rasp}^2 = \frac{\rho S}{2KW^2} \left(P_a V - \frac{\rho S C_{D0}}{2} V^4 \right),$$

S ovim raspoloživim opterećenjem određujemo najveću kutnu brzinu $\dot{\chi}_P$ u koordiniranom zaokretu

$$\dot{\chi}_P = \frac{g \sqrt{n_{rasp}^2 - 1}}{V}$$

Na disketi u direktoriju performanse nalazi se program *Maxkutbr.m* koji crta u MATLABu krivu $\dot{\chi}_P(V)$ kao i dvije krive $\dot{\chi}_L(V)$ i $\dot{\chi}_S(V)$ prema jednadžbama u poglavlju 9.2 u čijem presjeku C se nalazi najveća moguća kutna brzina (*corner speed*). Taj presjek ima koordinate. Na slici 8-3 prikazan je dijagram dobiven tim programom.

10 Vertikalni zaokret

10.1 Jednadžbe

Jednadžbe gibanja središta mase s kojima određujemo performanse zrakoplova:

$$\begin{aligned} m\dot{V} &= T - D - W \sin \gamma \\ mV \cos \gamma \dot{\chi} &= L \sin \phi \\ mV\dot{\gamma} &= L \cos \phi - W \cos \gamma \end{aligned}$$

u slučaju zaokreta u vertikalnoj ravnini $\dot{\chi} = 0$ dobivaju oblik

$$\begin{aligned} m\dot{V} &= T - D - W \sin \gamma \\ 0 &= L \sin \phi \\ mV\dot{\gamma} &= L \cos \phi - W \cos \gamma, \end{aligned}$$

pa iz druge jednadžbe zaključujemo da u slučaju vertikalnog zaokreta mora biti $\phi = 0$, tj. da nema valjanja. Prva i treća jednadžba postaju:

$$\begin{aligned} m \frac{dV}{dt} &= T - D - W \sin \gamma \\ mV \frac{d\gamma}{dt} &= L - W \cos \gamma \end{aligned}$$

Iz druge jednadžbe je

$$\frac{V}{g} \dot{\gamma} = n - \cos \gamma.$$

Kako je $V = R\dot{\gamma}$, ova jednadžba daje vezu između polumjera krivine i normalnog opterećenja

$$n = \frac{V^2}{gR} + \cos \gamma \quad (1)$$

10.2 Najveća kutna brzina

Kao i za horizontalni zaokret, i ovdje je kutna brzina ograničena najvećim konstruktivnim opterećenjem n_s :

$$\dot{\gamma}_s(V) = g \frac{n_s - \cos \gamma}{V}.$$

Zamjenom opterećenja prema definiciji

$$n = \frac{\rho V^2 S C_L}{2W}$$

dobivamo jednadžbu za kutnu brzinu u ovisnosti o koeficijentu uzgona:

$$\dot{\gamma}(V) = g \left(\frac{\rho S C_{L}}{2W} V - \frac{\cos \gamma}{V} \right).$$

Iz toga je očito da je najveća kutna brzina ovisno o maksimalnom koeficijentu uzgona dana jednadžbom:

$$\dot{\gamma}_L(V) = g \left(\frac{\rho S C_{L\max}}{2W} V - \frac{\cos \gamma}{V} \right)$$

U presjeku tih dviju ovisnosti $\dot{\gamma}_s(V)$ i $\dot{\gamma}_L(V)$:

$$g \frac{n_s - \cos \gamma}{V} = g \left(\frac{\rho S C_{L\max}}{2W} V - \frac{\cos \gamma}{V} \right)$$

$$\frac{n_s}{V_c} = \frac{\rho S C_{L\max}}{2W} V_c$$

dobiva se brzina leta V_c :

$$V_c = \sqrt{\frac{2n_s W}{\rho S C_{L\max}}},$$

pri kojoj se može ostvariti najveća kutna brzina u vertikalnoj ravnini. Ta brzina ne ovisi o kutu γ što znači da se bilo u kojemu nagibu putanje može dobiti najveća kutna brzina propinjanja pri ovoj brzini leta. Činjenica je da je to ista brzina pri kojoj se može ostvariti i u horizontalnom zaokretu najveća kutna brzina (*corner speed*). U vertikalnom zaokretu bit će ta najveća kutna brzina (*corner speed*):

$$\dot{\gamma}_{\max} = g \sqrt{\frac{\rho S C_{L\max}}{2W} \frac{n_s - \cos \gamma}{\sqrt{n_s}}}$$

Ta kutna brzina ovisi o kutu penjanja. Zanimljivo je usporediti ovu maksimalnu kutnu brzinu u vertikalnoj ravnini s kutnom brzinom u horizontalnoj ravnini (poglavlje 9.2)

$$\dot{\chi}_{\text{corner speed}} = g \sqrt{\frac{\rho S C_{L\max}}{2W} \left(n_s - \frac{1}{n_s} \right)}$$

Ako zrakoplov leti horizontalno onda je odnos kutnih brzina u vertikalnom zaokretu prema horizontalnom zaokretu:

$$\frac{\dot{\gamma}_{\max}}{\dot{\chi}_{\max}} = \sqrt{\frac{n_s - 1}{n_s + 1}}$$

10.3 Analiza vertikalne petlje

Da bismo pojednostavili analizu vertikalne petlje, pretpostavimo da je u svakom trenutku raspoloživa sila jednaka otporu. Jednadžbe se pojednostavnjuju:

$$\frac{dV}{dt} = -g \sin \gamma$$

$$V \frac{d\gamma}{dt} = gn - g \cos \gamma$$

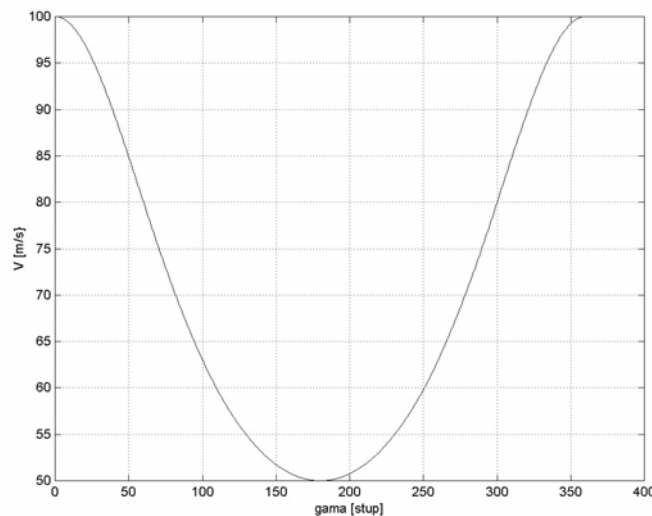
Eliminacijom vremena iz ovih dviju jednadžbi, dobivamo:

$$\frac{dV}{V} = -\frac{\sin \gamma}{n - \cos \gamma} d\gamma$$

Ako zrakoplov sve vrijeme leta u petlji ima isto opterećenje, onda poslije integracije od polazne točke $\gamma = 0$ u kojoj je brzina leta V_0 do bilo koje točke, dobivamo:

$$V = V_0 \frac{n-1}{n-\cos \gamma} \quad (2)$$

Ova ovisnost $V(\gamma)$ prikazana je na slici 1.



Slika 1. Promjena brzine u petlji (za $V_0 = 100$ m/s i $n = 3$)

U ovakvom letu zrakoplov bi imao najmanju brzinu na vrhuncu petlje

$$V_{\min} = V_0 \frac{n-1}{n+1},$$

Jednadžbu (1) možemo napisati u obliku

$$R = \frac{V^2}{g(n - \cos \gamma)}$$

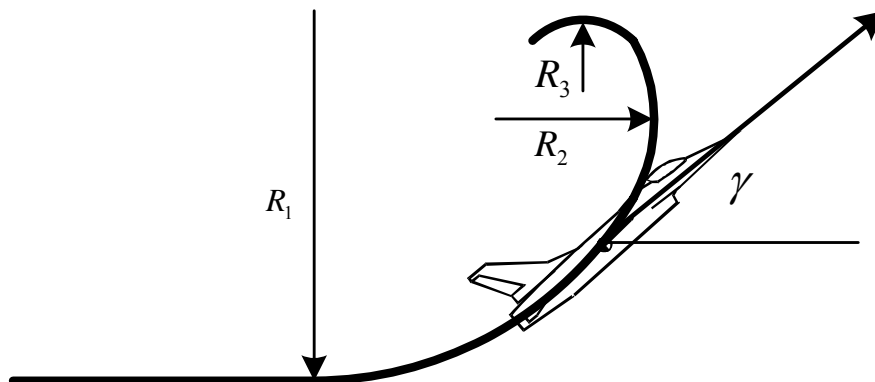
Ona daje veličinu polumjera petlje R ovisno o brzini leta u petlji V i nagibu brzine γ . Zamjenom $V(\gamma)$ prema jednadžbi (2) u jednadžbu (1) dobivamo ovisnost polumjera petlje samo o nagibu tangente.

$$R = \frac{V_0^2}{g} \frac{(n-1)^2}{(n - \cos \gamma)^3}$$

Iz ove jednadžbe možemo za razne položaje odrediti polumjer krivine petlje Tako je u tablici izračunat polumjer krivine za petlju u kojoj je opterećenje $n = 3$, a za tri karakteristična položaja zrakoplova.

$\gamma = 0$	$\gamma = 90^0$	$\gamma = 180^0$
$R = 0.5 \frac{V_0^2}{g}$	$R = 0.148 \frac{V_0^2}{g}$	$R = 0.0625 \frac{V_0^2}{g}$

Na slici 2 prikazan je približan izgled ove petlje.



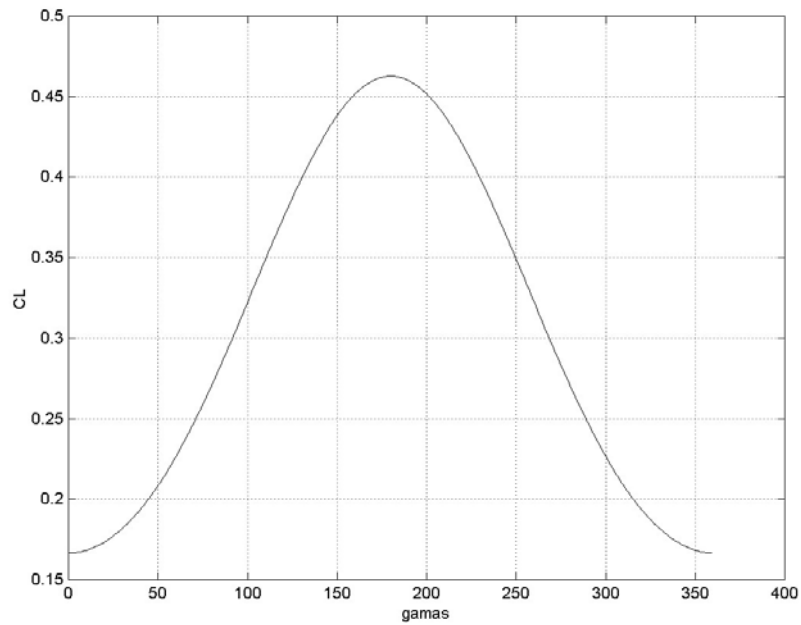
Slika 2. Zrakoplov u vertikalnoj petlji

Da bi zrakoplov sve vrijeme petlje imao konstantno normalno opterećenje u uvjetima promjenljive brzine, on mora mijenjati napadni kut tako da se koeficijent uzgona mijenja ovisno o kutu γ :

$$n = \frac{L}{W} = \frac{\rho S}{2W} C_L V^2$$

$$C_L = \frac{2Wn}{\rho S V_0^2 (n-1)^2} (n - \cos \gamma)^2$$

Ta promjena koeficijenta uzgona prikazana je na primjeru sa slike 3



Slika 3. Primjer promjene koeficijenta sile uzgona u vertikalnom zaokretu

Minimalna vrijednost koeficijenta uzgona je na ulazu u petlju ($\gamma = 0$)

$$C_{L0} = \frac{2Wn}{\rho S V_0^2},$$

a maksimalna na vrhuncu petlje:

$$C_{L1} = \frac{2Wn}{\rho S V_0^2} \left(\frac{n+1}{n-1} \right)^2$$

U vrhuncu petlje centrifugalna sila jednaka je zbroju uzgona i težine zrakoplova,

$$\frac{W}{g} \frac{V^2}{R} = W + L$$

jer je $\gamma = 180^\circ$, pa je polumjer zakrivljenosti $R = \frac{V^2}{g(n+1)}$.

11 UKUPNA ENERGIJA

11.1 Energetska jednadžba

U osmom poglavlju izveli smo jednadžbe gibanja središta mase zrakoplova u ravnotežnom letu. U ovom poglavlju primijenit ćemo zakon o očuvanju ukupne energije na te jednadžbe, u slučaju kad je $\alpha \approx \alpha_T$ i kad nema vjetra:

$$\begin{aligned} m\dot{V} &= T - W \sin \gamma - D \\ mV \cos \gamma \dot{\gamma} &= L \sin \phi \\ mV\dot{\gamma} &= L \cos \phi - W \cos \gamma \end{aligned}$$

Prvoj jednadžbi ovog sustava pridružiti ćemo jednadžbu koja definira brzinu penjanja kao derivaciju visine leta

$$\begin{aligned} \frac{W}{g} \frac{dV}{dt} &= T - D - W \sin \gamma \\ \frac{dh}{dt} &= V \sin \gamma \end{aligned}$$

Eliminacijom kuta γ dobivamo

$$\frac{d}{dt} \left(h + \frac{V^2}{2g} \right) = \frac{VT - VD}{W}.$$

Uvedimo oznaku

$$h_e = h + \frac{V^2}{2g}$$

Zbroj potencijalne i kinetičke energije:

$$E = mgh + \frac{mV^2}{2} = W \cdot h_e$$

predstavlja ukupnu energiju (*energy state*) zrakoplova. To znači da je h_e ukupna energija svedena na jedinicu težine zrakoplova. Nazivamo je *specifična energija* (*specific energy*). Ona predstavlja određenu visinu do koje se zrakoplov može podići, polazeći od stvarne visine i koristeći svoju kinetičku energiju sve dok je posve ne potroši. Zbog toga se ona naziva i energetska visina (*energy high*) i mjeri se u metrima. Za višak snage sveden na jedinicu težine uvodimo oznaku:

$$P_s = \frac{VT - VD}{W}$$

Nazivamo je *višak specifične snage*. Ta funkcija ima dimenziju brzine [m/s]. Konačno se pomoću tih varijabla može energetska jednadžba napisati u obliku

$$\frac{dh_e}{dt} = P_s.$$

Ova jednadžba pokazuje da je derivacija specifične energije jednaka višku specifične snage.

11.2 Specifična snaga zrakoplova

11.2.1 Jednadžba specifičnog viška snage

Otpor je ovisan o brzini leta, o normalnom opterećenju i o svojstvima zraka (prije svega o gustoći):

$$D = qS(C_{D0} + KC_L^2) = qSC_{D0} + \frac{K(nW)^2}{qS}$$

Zamijenimo li tu ovisnosti otpora u specifični višak snage i poslije dijeljenja s težinom, dobivamo

$$P_s = \frac{VT}{W} - \frac{\rho S}{2W} C_{D0} V^3 - 2n^2 \frac{KW}{\rho S} \frac{1}{V}$$

Raspoloživa pogonska sila T , ili raspoloživa pogonska snaga VT , veličine su koje predstavljaju pogonsku grupu zrakoplova. One su poznate zadane funkcije Machova broja Ma ili brzine leta V ($V = a \cdot Ma$) i svojstva zraka.

Da bismo izračunali brojčanu vrijednost specifičnog viška snage trebamo energetske jednadžbi pridružiti aerodinamičke funkcije $C_{D0}(Ma)$ i $K(Ma)$, funkciju raspoloživog pogona $T(Ma, h)$ ili $P(Ma, h)$ i konačno jednadžbe svojstva atmosfere $a(h)$ i $\rho(h)$. Cjelokupan sustav jednadžbi koji definira funkciju $P_s(Ma, h, n)$ ima oblik:

$$P_s = \frac{VT}{W} - \frac{\rho S}{2W} C_{D0} V^3 - 2n^2 \frac{KW}{\rho S} \frac{1}{V}$$

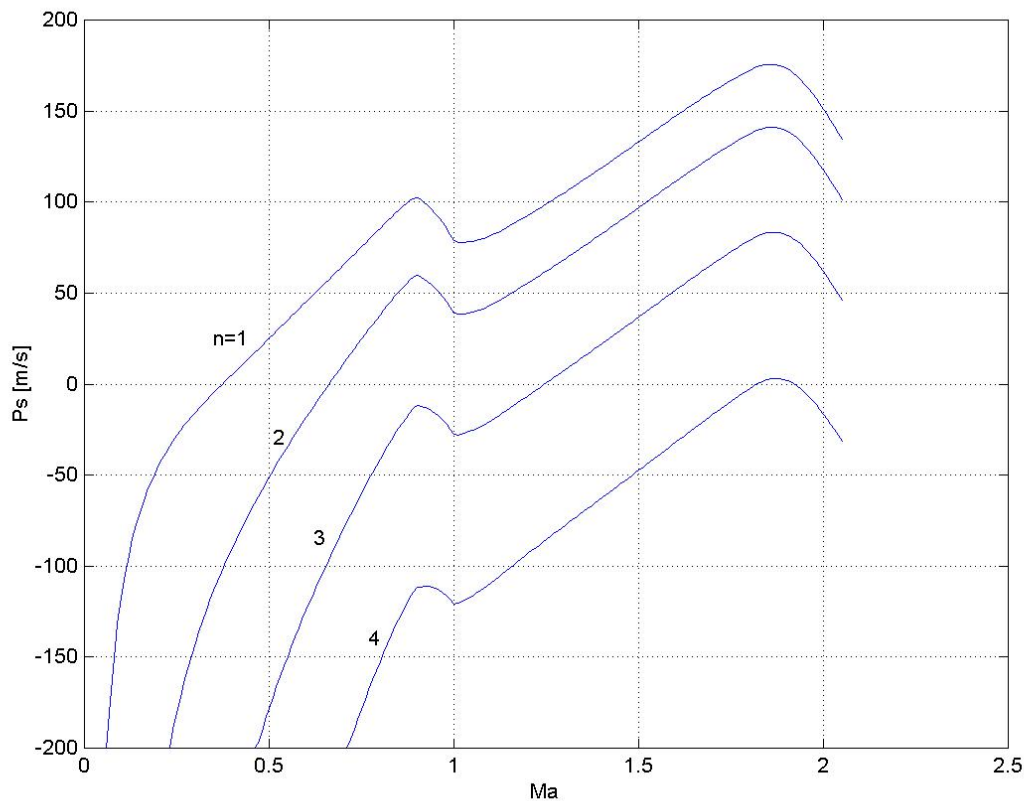
$$C_{D0} = C_{D0}(Ma) \quad \text{i} \quad K = K(Ma)$$

$$T = T(Ma, h) \quad \text{ili} \quad VT = P_a(Ma, h)$$

$$\rho = \rho(h) \quad \text{i} \quad a = a(h)$$

Tako se na desnoj strani energetske jednadžbe pojavljuje određena funkcija o Machovu broju Ma , visine zrakoplova h i opterećenja n . Tu funkciju od te tri varijable Ma , h i n označit ćemo sa $P_s(Ma, h, n)$. Pretpostavimo da smo napravili program u kome su ulazne veličine

Ma , h i n a izlaz je specifičan višak snage P_s . Program za izračunavanje P_s koristi tri podprograma: prvi, za aerodinamičke funkcije $C_{D0} = C_{D0}(Ma)$ i $K = K(Ma)$, drugi za raspoloživu silu (ili snagu) i treći za svojstva zraka ovisno o visini. U programu moramo zadati i dvije konstante masu m ili težinu W i referentnu površinu S . Na slici 10.1 za zrakoplov koji ima karakteristike lovca (vidi primjer) nacrtana je familija krivulja $P_s(Ma)$ za razna opterećenja n , i za jednu visinu.



Slika 11-1. Funkcija $P_s(Ma, n, h)$, $h = 10000 \text{ m}$.

Funkcija $P_s(Ma, h, n)$ lako se računa, ali analitički se ne može riješiti ni po visini h ni po Machovu broju Ma .

11.2.2 Primjer

Zadane su aerodinamičke funkcije lovca $C_{D0}(Ma)$ i $K(Ma)$ u potprogramu *Energija\otpor.m* za referentnu površinu $S = 23,0$. Masa letjelice je $m = 6200 \text{ kg}$, a masa goriva $m_f = 2400 \text{ kg}$. Motor ima maksimalnu pogonsku silu koja u standardnoj atmosferi ovisi o

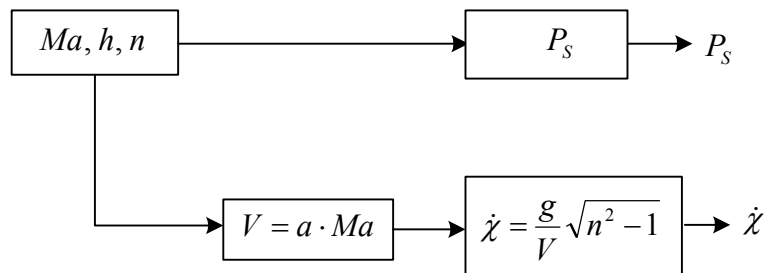
visini i Machovu broju $T(H, Ma)$. Ta ovisnost zadana je potprogramom **motor.m** u istom direktoriju kao i treći potprogram **ISO.m** koji za zadanu visinu vraća temperaturu zraka T , tlak p , gustoću ρ i brzinu zvuka a . Izračunat ćemo i i nacrtati krivulje $P_s(Ma)$ za normalna opterećenja $n = 1, 2, 3, 4, 5$, a za visinu $h = 5000 \text{ m}$. Za izračunavanje krivulja $P_s(Ma)$ napravljen je program **Ps_Ma.m**, u MATLAB-u. Pomoću tog programa nacrtane su krivulje na slici 10-1. I taj program, kao i tri podprograma, nalazi se u direktoriju Energija.

11.3 Usporedba performansi zrakoplova

11.3.1 Specifična snaga u funkciji kutne brzine

Kutna brzina horizontalnog zaokreta važna je performansa borbenih zrakoplova. Bolji je aerodinamički onaj lovac koji može, pri istom višku specifične snage, ostvariti veću kutnu brzinu u horizontalnom zaokretu. Da bismo ocijenili tu performansu lovca trebamo krivulju $P_s(\dot{\chi})$

Za poznati zrakoplov koji leti na visini h s Machovim brojem Ma , možemo izračunati funkciju specifičnog viška snage ovisno o opterećenju n na primjer pomoću programa $P_s(Ma, h, n)$ iz prethodnog poglavlja.

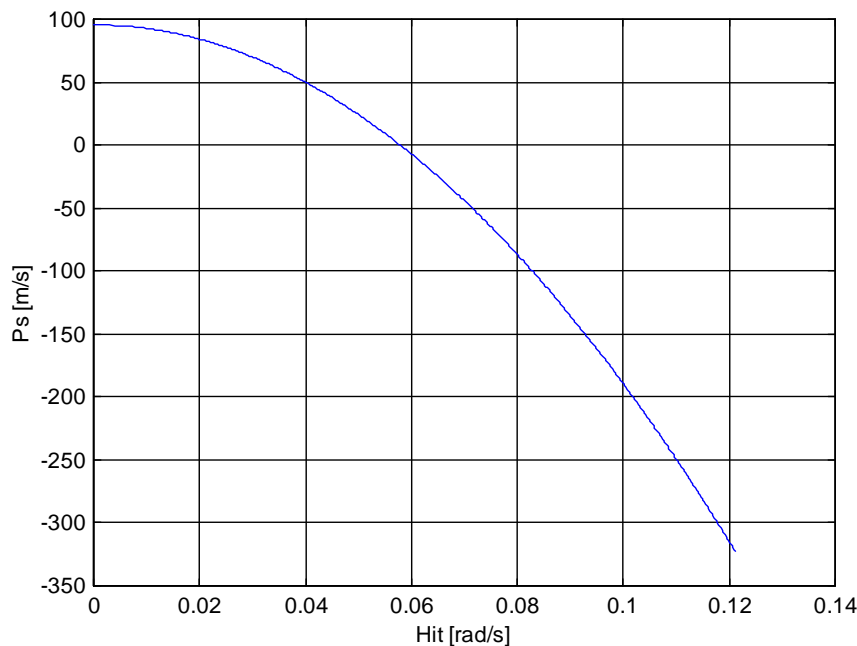


Slika 11-2. Dijagram toka za izračunavanje krivulja $P_s(\dot{\chi})$

Horizontalna kutna brzina za brzinu leta $V = Ma \cdot a(h)$ poznata je funkcija visine h , Machova broja Ma i opterećenja n :

$$\dot{\chi} = \frac{g\sqrt{n^2 - 1}}{V} = \frac{g\sqrt{n^2 - 1}}{Ma \cdot a(h)} = \dot{\chi}(h, Ma, n)$$

Dijagram logičnog toka prikazan je na slici 10-2. Prema tom algoritmu može se napraviti program koji daje parametarske jednadžbe krivulja $\dot{\chi}(P_s)$. Parametar je n , ako su Ma i h zadani. Na slici 10.3 prikazana je krivulja $P_s(\dot{\chi})$ koja je izračunana za borbeni zrakoplov iz primjera u prethodnom poglavlju. Program pod imenom *Ps_Hit.m* nalazi se u istom direktoriju *Energija* jer koristi iste potprograme kao i program *Ps_Ma.m*.



Slika 11-3. Ovisnost viška specifične snage o kutnoj brzini u horizontalnom zaokretu za Machov broj $Ma = 1.2$ i visinu $h = 10000\text{ m}$

Sa slike vidimo da pri $P_s = 0$ ovaj lovac može ostvariti kutnu brzinu

$$\dot{\chi} = 0.057\text{ rad/s} = 3.3\text{ stupnja/s}.$$

Smatra se [20] da je značajno bolji onaj zrakoplov ako pri istoj snazi ima kutnu brzinu veću za 0.035 rad/s (2 stupnja po sekundi)

11.3.2 Krivulje normalnog opterećenja za $P_s=0$

Za relativnu ocjenu performansi borbenih zrakoplova najviše se upotrebljava dijagram na kome su krivulje $n(Ma, h) = \text{const}$ za $P_s = 0$ koje odgovaraju ravnotežnom stanju u letu.

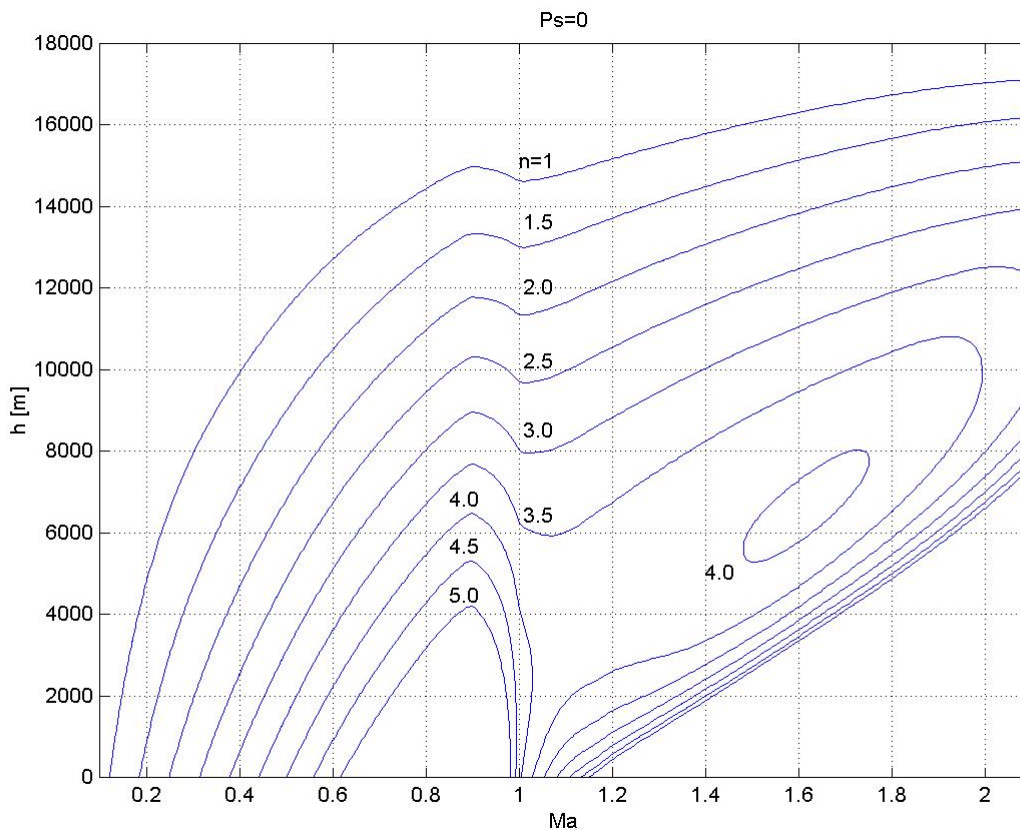
Iz jednadžbe $P_s = 0$ dobivamo

$$\frac{VT}{W} - \frac{\rho V^3 S}{2W} C_{Do}(Ma) - 2n^2 K \frac{W}{\rho V S} = 0$$

Tu jednadžbu rješavamo po normalnom opterećenju:

$$n(h, Ma) = \sqrt{\left[\frac{VT}{W} - \frac{\rho V^3 S}{2W} C_{Do}(Ma) \right] \frac{\rho VS}{2KW}} \quad 11$$

U MATLAB-u postoji naredba *contour* koja nam crta u koordinatnom sustavu Ma na apscisi i h na ordinati krivulje $n(h, Ma) = const$. Pomoću te naredbe napravili smo program *Ps_0.m* kojim smo nacrtali krivulje na slici 10-4 za isti zrakoplov lovac kao u prethodnom poglavlju.



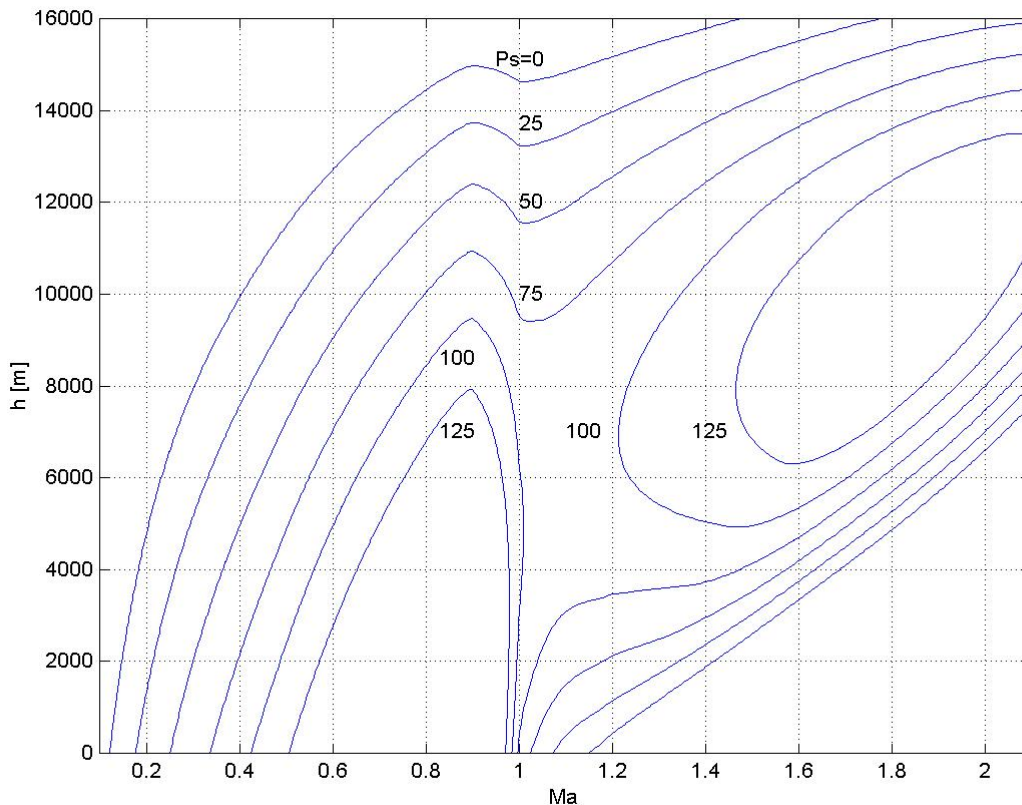
Slika 11-4. Krivulje $n(Ma, h) = const$ za $P_S = 0$

Bolji zrakoplov ima krivulju $n(Ma, h) = const$ koja obuhvaća krivulju njegova suparnika jer može s istim Machovim brojem na istoj visini razviti veće opterećenje, ili na istoj visini pri istom opterećenju može letjeti u većem intervalu Machovih brojeva.

11.4 Područje leta i optimalno penjanje

11.4.1 Krivulje $P_s(Ma, h) = const$ za određeno opterećenje n

Vidjeli smo da se penjanje odvija s konstantnim opterećenjem (blisko jedinici). U koordinatnom sustavu $Ma-h$ (na horizontalnoj osi je Machov broj, a na vertikalnoj osi je visina) možemo nacrtati familiju krivulja s konstantnim opterećenjem n (na primjer za $n = 1$), a za različito $P_s = const$.



Slika 11-5. Krivulje $P_s(Ma, h) = const$, za $n = 1$ za zrakoplov lovac.

Znači da svaka krivulja familije odgovara jednoj vrijednosti $P_s(Ma, h) = const$, a sve krivulje familije imaju isto opterećenje $n = const$:

$$P_s = \frac{VT}{W} - \frac{VqS}{W} C_{D0} - n^2 K \frac{VW}{qS} = const$$

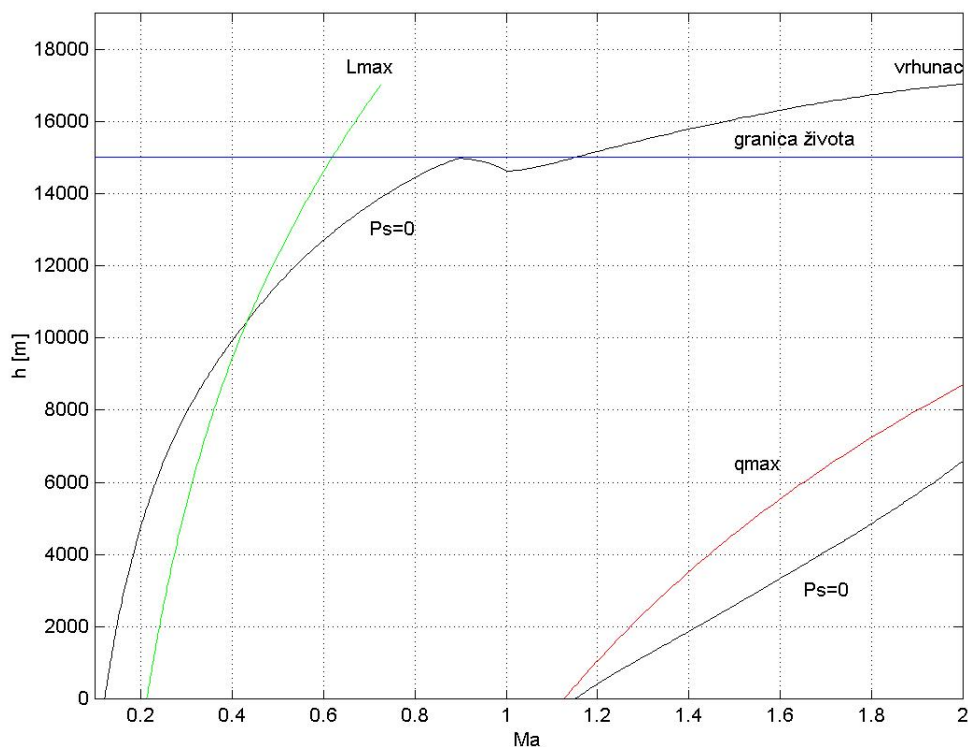
Familija krivulja za $n = 1$ posebno je važna jer je to slučaj horizontalnog leta, a upotrebljava se i za optimalnu putanju penjanja. Oblik ovog dijagrama prikazan je na slici 10-5 za lovac

kao primjer iz prethodnog poglavlja. Program *Ps_const.m* kojim je nacrtan taj dijagram nalazi se u istom direktoriju Energija.

Ti se dijagrami ne upotrebljavaju samostalno. Njihova je uporaba objašnjena u slijedeća dva odjeljka.

11.4.2 Područje uporabe zrakoplova

U prethodnom poglavlju o performansama (odjeljak 8.1.4) vidjeli smo da s obzirom na raspoloživu snagu motora na svakoj visini u horizontalnom letu postoje minimalna i maksimalna brzina leta (ili Machov broj). Te veličine, ovisno o visini, čine ovojnice koje ograničavaju područje mogućih režima horizontalnog leta. U ovom poglavlju imamo krivulje $P_s = 0$, koje ograničavaju područje u kome je snaga motora veća ili jednaka potrebnoj snazi kad je $n = 1$. Npr u horizontalnom letu je $n = 1$, pa nam krivulja $P_s = 0$ određuje područje mogućih horizontalnih letova. Zato bi za isti zrakoplov ovojnice horizontalnog leta iz odjeljaka 8.14 bile iste s krivuljama $P_s = 0$. Na slici 10-6 prikazane su te krivulje $P_s = 0$ za jedan borbeni zrakoplov. Najviša točka te krivulje predstavlja apsolutni vrhunac leta (*absolute ceiling*).



Slika 11-6. Operativne ovojnice

Za neke zrakoplove vrhunac je vrlo velik te se postavlja pitanje preživljavanje pilota u slučaju njegova izbacivanja. Smatra se da je na visinama većim od 15 km (50000 ft) potrebna specijalna oprema koju imaju astronauti da bi čovjek mogao preživjeti. S obzirom da piloti nemaju tu opremu, oni ne mogu biti van kabine zrakoplova iznad 15 km. Ako je apsolutni ili praktični vrhunac iznad te visine, onda se ograničava visina leta do granice preživljavanja pilota izvan kabine.

Dinamički tlak q predstavlja ima neposrednu ulogu u površinskom naprezanju konstrukcije, te njegovu maksimalno dopuštenu vrijednost propisuje konstruktor, jer je to vrijednost s kojom je analizirano naprezanja konstrukcije. Tako je za borbene zrakoplove ta granica oko 100 kPa . Na slici 10-6 ta krivulja označena je q_{\max} .

Na velikim visinama pojavljuje se problem ponovnog pokretanja motora ako se on ugasi, jer je gustoća zraka mala. Tu gornju granicu propisuje proizvođač motora, jer ona ovisi i o brzini leta zato što se motor lakše pokrene ako je brzina zrakoplova veća. Kako gustoća pada s visinom, tako se ta granica dinamičkog tlaka pomiče prema većim brzinama.

I tlak na ulazu usisnika može imati određeno ograničenje. Pri velikim brzinama leta i u donjim slojevima može biti tlak na ulazu usisnika prevelik.

Konačno, na velikim brzinama i aerodinamičko zagrijavanje može biti ograničenje, što ovisi o materijalu na površini onih dijelova koji su najviše izloženi aerodinamičkom zagrijavanju. Unutar svih tih krivulja nalazi se područje normalne uporabe zrakoplova.

11.4.3 Minimalno vrijeme penjanja

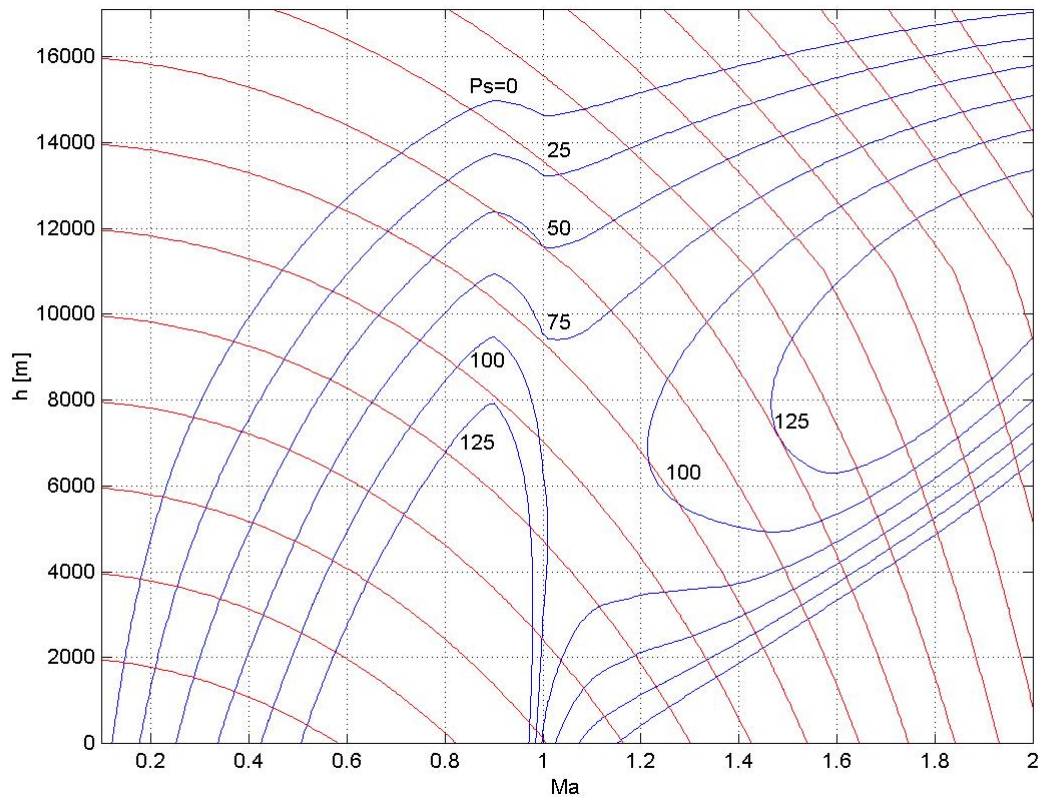
Bez ikakvih problema možemo nacrtati i krivulje $h_e = \text{const}$ u koordinatnom sustavu $Ma-h$ gdje već imamo krivulje $P_s(Ma, h) = \text{const}$ (za $n = \text{const}$ kojim izvodimo penjanje). Jednadžba specifične energije h_e (ukupna energija zrakoplova svedena na jedinicu mase):

$$h_e = h + \frac{V^2}{2g} = \text{const}$$

$$h + \frac{a(h)^2}{2g} Ma^2 = h_e = \text{const}$$

Tako, kroz jednu točku (Ma, h) prolazi jedna krivulja $h_e(Ma, h) = \text{const}$ i jedna krivulja $P_s(Ma, h) = \text{const}$ (za određeno n). To znači da je u toj točki, na visini h pri Machovu broju

Ma , energetska visina $h_e = const$ i specifični višak snage $P_s = const$. Slika 10-7 nacrtana je pomoću programa *Pshe_const.m* koji se nalazi na disketi u direktoriju Energija.



Slika 11-7. Familija krivulja $P_s(Ma, h) = const$ i $h_e(Ma, h) = const$ za zrakoplov lovac kada je $n = 1$

Iz energetske jednadžbe

$$\frac{dh_e}{dt} = P_s$$

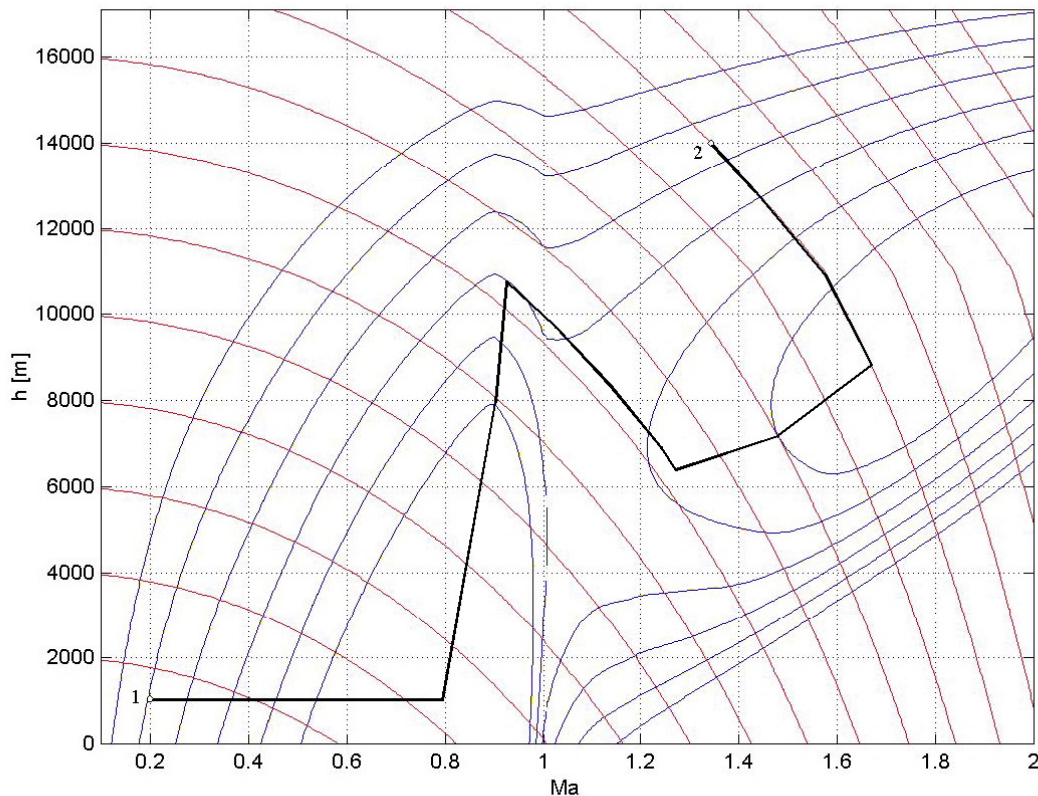
dobivamo

$$dt = \frac{dh_e}{P_s}$$

Vrijeme prelaska iz režima leta h_1, Ma_1 kome odgovara energetska visina h_{e1} , u režim leta h_2, Ma_2 kome odgovara energetska visina h_{e2} , određeno je integralom:

$$t = \int_{h_{e1}}^{h_{e2}} \frac{1}{P_s} dh_e$$

Da bismo izračunali ovaj integral, trebamo znati funkciju $P_s(h_e)$. Ta funkcija je niz točaka kroz koje predstavljaju promjenu režima leta Ma, h od početnog režima leta Ma_1, h_1 koji predstavlja točku 1 u krajnji režim leta Ma_2, h_2 koji predstavlja točku 2. Točke možemo definirati pomoću koordinata Ma, h kao na dijagramu slika 10-8 ili pomoću krivulja koje prolaze kroz tu istu točku h_e, P_s .



Slika 11-8. Prelazak iz stanja $h = 1000; Ma = 0.2$ u stanje $h = 14000; Ma = 1.35$ za minimum vremena

Da bi vrijeme bilo minimalno, treba režim leta mijenjati tako da vrijednosti funkcije $P_s(h_e)$ budu najveće moguće. Režim leta znači određeni Machov broj Ma na zadatoj visini h . Te dvije vrijednosti predstavljaju određenu točku u dijagramu $Ma-h$. Kroz tu točku prolaze dvije krivulje $h_e(Ma, h) = const$ i $P_s(Ma, h) = const$. Ta točka može biti predstavljena krivolinijskim koordinatama h_e, P_s . Zamislimo da mijenjamo tako režim leta da točke na dijagramu sve nalaze na krivulji $h_e(Ma, h) = const$. Vrijednosti P_s od jedne do druge točke će rasti, a

zatim opadati zbog oblika krivulja $P_s(Ma, h) = const$, a bit će najveća u onoj točki u kojoj se krivulje $h_e(Ma, h) = const$ i $P_s(Ma, h) = const$ tangiraju. To znači da iz točke koja predstavlja režim leta 1 treba ići u režim leta koji predstavlja točka 2 kroz kočke u kojima su krivulje h_e i P_s tangentne jedna na drugu. Dok krivulje $h_e = const$ idu pravilno, krivulje $P_s = const$ za vrijednosti Machova broja u transsonici su nepravilne zbog nepravilnog toka funkcija $C_{D0}(Ma)$ i $K(Ma)$. Potrebna snaga raste u transsonici, što ima za posljedicu stvaranja zatvorene krivulje $P_s = const$. Ako prijelaz iz režima leta 1 u režim leta 2 vodi pored te zatvorene krivulje, treba režim leta mijenjati duž $h_e = const$ da bi se opet išlo kroz točke koje imaju zajedničke tangente za krivulje h_e i P_s . Opravdanje za ovakav postupak jest činjenica da kada mijenjamo režim leta po krivulji $h_e = const$, onda je $dh_e = 0$, te se vrijednost integrala ne povećava.

11.4.4 Penjanja s najmanjom potrošnjom goriva

Izbor promjene režima leta u penjanju može se temeljiti i na najmanjoj potrošnji goriva. Da bi se odredila promjena režima leta u penjanju tako da je najmanja potrošnja goriva, trebamo funkciju f_s - prirast specifične energije po jedinici goriva (fuel specific energy)

$$\frac{dh_e}{-dm_f} = f_s$$

Ako zrakoplov ima mlazni motor za koji je potrošnja goriva proporcionalna pogonskoj sili, onda je

$$f_s = \frac{dh_e}{-dm_f} = \frac{P_s dt}{C_T T dt} = \frac{P_s}{C_T T} = f_s(Ma, h, n)$$

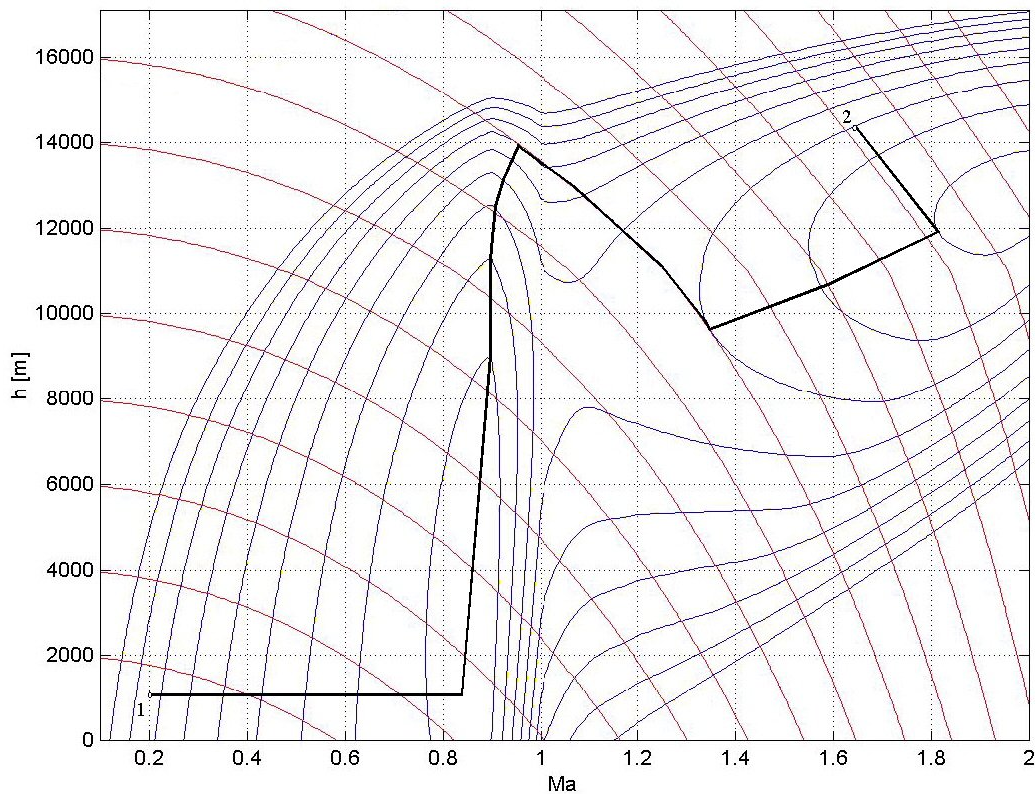
Drugim riječima prirast specifične energije po jedinici gorivi također je funkcija Machova broja, visine i normalnog opterećenja. Za zadano opterećenje n , na desnoj strani je funkcije Machova broja Ma i visine leta h , pa je za određeno opterećenje pri penjanju:

$$f_s = f_s(Ma, h)$$

Na slici 10-9 prikazane su funkcije $f_s(Ma, h) = const$ za normalno opterećenje $n = 1$. Iz definicije za funkciju f_s dobiva se da je količina goriva od režima leta 1 do režima leta 2:

$$-\Delta m_f = m_{f1} - m_{f2} = \int_1^2 \frac{1}{f_s} dh_e$$

Da bi se iz režima leta 1 prešli u režim leta 2 mi prolazi se kroz razne režime leta. Svakom režimu leta odgovara jedna točka, jedna visina h i jedna brzina Ma , ili jedna specifična ukupna energija h_e i jedan *prirast specifične energije po jedinici goriva* f_s . Tako pri prijelazu iz režima leta 1 u režim leta 2 ti parovi vrijednosti h_e, f_s predstavljaju točke puta duž kojega treba izračunati ovaj integral. Da bi na tom putu bila najmanja potrošnja goriva treba režime leta mijenja duž točaka u kojima je f_s u maksimumu. Od svih točaka na krivulji $h_e = const$ bit će f_s u maksimumu u točkama u kojima se krivulje $f_s = f_s(Ma, h)$ i $h_e(Ma, h) = const$ tangiraju. Drugim riječima, od svih točaka s istom ukupnom energijom h_e u tim točkama je funkcija f_s u maksimumu. Te točke vidimo na slici 10-9.



Slika 11-9. Prijelaz iz energetskog stanja 1 u stanje 2 s najmanjom količinom goriva

12 POLIJETANJE I SLIJETANJE

12.1 Polijetanje (*take off*)

Polijetanje i slijetanje su poseban problem mehanike leta, pa i konstrukcije zrakoplova. Taj problem ni u prirodi nije sretno riješen. Neke ptice vrlo teško slijeću, druge teško polijeću. Polijetanje i slijetanje je problematično s obzirom da je aerodinamički oblik letjelice podešen da potrošnja energije bude što manja u letu. Tipičan primjer su kotači, koji su za let uvučeni, a za polijetanje i slijetanje izbačeni. Drugi primjer je brzina, koja u letu treba biti što veća, a pri slijetanju i polijetanju što manja.

Polijetanje promatramo kao ravanski problem, a zrakoplov kao kruto tijelo (ne uzimamo u obzir elastične veze i deformacije podvozja). Ukoliko ima vjetra uzimamo u obzir samo uzdužnu komponentu (duž piste). Označimo taj vjetar duž piste V_w . On je pozitivan ako puše u pravcu zalijetanja zrakoplova (stražnji vjetar), a negativan ako puše u susret zrakoplovu (čeonni vjetar). Drugim riječima vjetar V_w je pozitivan u pravcu i smjeru kao i brzina gibanja V_K i aerodinamička brzina V . Brzina gibanja zrakoplova u odnosu na pistu V_K je zbroj vjetra V_w i aerodinamičke brzine V .

$$V_K = V_w + V$$

Zrakoplovi uvijek polijeću uz vjetar, tj uzdužna komponenta vjetra je uvijek negativna.

$$V_w = -|V_w|$$

Ako je vjetar pozitivan zrakoplov polijeće s drugog kraja piste, tako da na njega u polijetanju uvijek djeluje čeonni vjetar. Uočimo da zbog vjetra postoji aerodinamička brzina V_0 i kad zrakoplov stoji na pisti. To slijedi iz gornje jednadžbe da je brzina u odnosu na pistu V_K jednaka zbroju vjetra i aerodinamičke brzine, pa kad stoji na pisti onda je:

$$0 = V_w + V_0$$

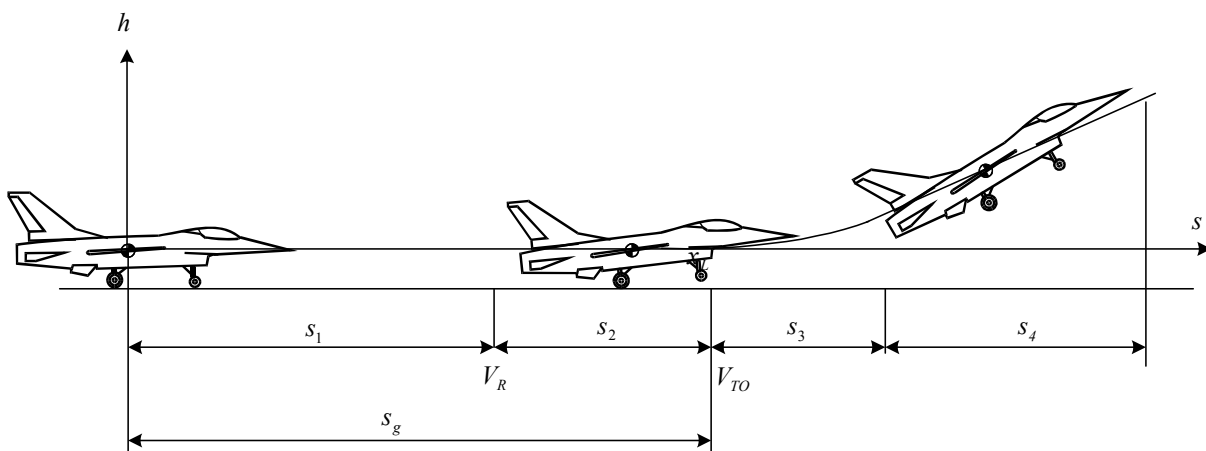
odakle je

$$V_0 = |V_w|.$$

12.1.1 Proces polijetanja

S obzirom na modeliranje polijetanja moramo cijeli proces polijetanja podijeliti na četiri dijela (slika 9-1):

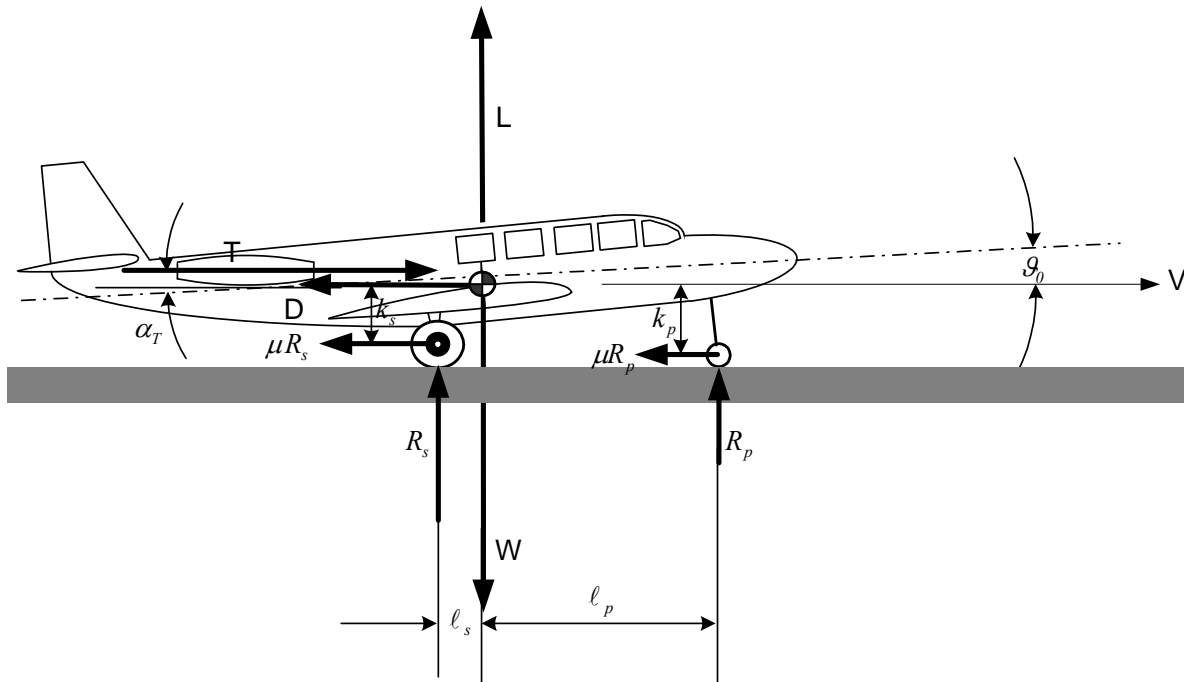
- Zalijetanje po pisti, duljine s_1 od aerodinamičke brzine V_0 na početku do aerodinamičke brzine V_R kad se prednji kotač odvaja od piste,
- Propinjanje letjelice, duljine s_2 od aerodinamičke brzine V_R kad se prednji kotač odvaja od piste do aerodinamičke brzine V_{TO} kad se zadnji kotači odvajaju od piste.
- Vertikalni zaokret, duljine s_3 , od aerodinamičke brzine V_{TO} kad se zadnji kotači odvajaju od piste do postizanja željenog kuta penjanja γ_C .
- Pravocrtno penjanje do propisane visine, duljine s_4 .



Slika 12-1. Dijelovi polijetanja zrakoplova

12.1.2 Određivanje brzine V_R

Rekli smo da je kraj prvog dijela polijetanja kad prednji kotač izgubi kontakt s pistom. U tom trenutku aerodinamička brzina zrakoplova jest V_R , a otpor oslonca prednjeg kotača jednak je nuli ako otklonimo kormilo visine δ_{mTO} . Da bi smo odredili tu brzinu pri kojoj su ispunjeni ti uvjeti napišimo jednadžbe ravnoteže momenata prema d'Alembertovom principu što znači da uzimamo i silu inercije u obzir: *suma momenata za točku rotacije jednaka je nuli.*



Slika 12-2

Tu sumu čine:

- aerodinamički moment za osu kotača koji ima vrijednost $M + L \cdot \ell_s + D \cdot k_s$, zato što su aerodinamičke sile otpor D i uzgon L reducirane na središte mase, a M je aerodinamički moment za središte mase,
- moment sile težine za osu kotača koji je negativan $-W \cdot \ell_s$,
- moment pogonske sile za osu kotača također negativan $-T \cdot k_s$ i konačno
- moment inercijalne sile je pozitivan $ma \cdot k_s$, jer inercijalna sila djeluje u natrag, ima hvatište u središtu mase, a njen je intenzitet:

$$ma = T - D - \mu(W - L).$$

Nemamo moment otpora i kotrljanja zadnjeg kotača jer te sile prolaze kroz os rotacije, kao ni moment otpora i kotrljanja prednjeg kotača jer je u trenutku odvajanja ta sila jednaka nuli.

Tako dobivamo jednadžbu:

$$M + L \cdot \ell_s + D \cdot k_s - T \cdot k_s - W \cdot \ell_s + [T - D - \mu(W - L)] \cdot k_s = 0$$

ili poslije sređivanja

$$M + L \cdot (\ell_s + \mu k_s) - W \cdot (\ell_s + \mu k_s) = 0$$

U ovoj jednadžbi tražena brzina V_R nalazi se u aerodinamičkom momentu i sili uzgona:

$$M = \frac{\rho V_R^2}{2} S_{ref} c_A C_m$$

$$L = \frac{\rho V_R^2}{2} S_{ref} C_L$$

Aerodinamički koeficijenti C_m i C_L su konstante:

$$C_m = C_{m0} + C_{m\alpha} \alpha_0 + C_{m\delta} \delta_{mTO}$$

$$C_L = C_{L0} + C_{L\alpha} \alpha_0 + C_{L\delta} \delta_{mTO}$$

Konačno iz gornje jednakosti momenata dobivamo traženu brzinu u trenutka odvajanja prednjeg kotača od piste:

$$V_R = \sqrt{\frac{2W(\ell_s + \mu k_s)}{\rho S_{ref} [c_A C_m + C_L \cdot (\ell_s + \mu k_s)]}}$$

Kad aerodinamička brzina dostigne ovu vrijednost V_R pilot treba postaviti otklon kormila visine δ_m , kome u ravnotežnom stanju odgovara napadni kut α_{TO} . Uočimo da na brzinu V_R utiče bitno položaj zadnjih kotača u odnosu na središte mase.

12.1.3 Brzina odvajanja V_{TO}

Da bi se zrakoplov odvojio od zemlje, ili da bi spustio na zemlju, u trenutku odvajanja od piste ili dodira s pistom, potreban je uzgon jednak težini:

$$L = W,$$

a to znači potrebna je brzina i koeficijent uzgona čiji produkt mora biti

$$V^2 C_L = \frac{2W}{\rho S_{ref}}$$

Da bi poletjeli ili sletjeli sa što manjom brzinom uzmimo najveći mogući koeficijent sile uzgona $C_{L_{max}}$. Za letnu konfiguraciju zrakoplova (*clear configuration*) dobit ćemo brzinu za odvajanje od zemlje koja zahtijeva dosta dugu pistu za zalijetanje. S tom brzinom u slijetanju pilot bi teško mogao sletjeti na pistu bez udara u nju. Tako se nameće neophodnost da se poveća $C_{L_{max}}$, a to znači promjenu konfiguracije zrakoplova u slijetanju i polijetanju. I bez promjene konfiguracije dolazi do promjene aerodinamike zbog utjecaja blizine piste na optjecanje krila. Drugi utjecaj na aerodinamiku su izbačeni kotači, koji prije svega povećavaju otpor zrakoplova. Da bi postigli znatno veći koeficijent uzgona u polijetanju i slijetanju koristimo izbačena za-krilca i pred-krilca (ako ih zrakoplov ima). To znači da imamo drugu konfiguraciju zrakoplova (izbačeni kotači izbačena zakrilca, izbačena

predkrilca, itd.) koja ima drugu aerodinamiku od one koju zrakoplov ima u letu.. Ta konfiguracija zrakoplova u slijetanju, u anglosaksonskoj literaturi se naziva *full configuration*.

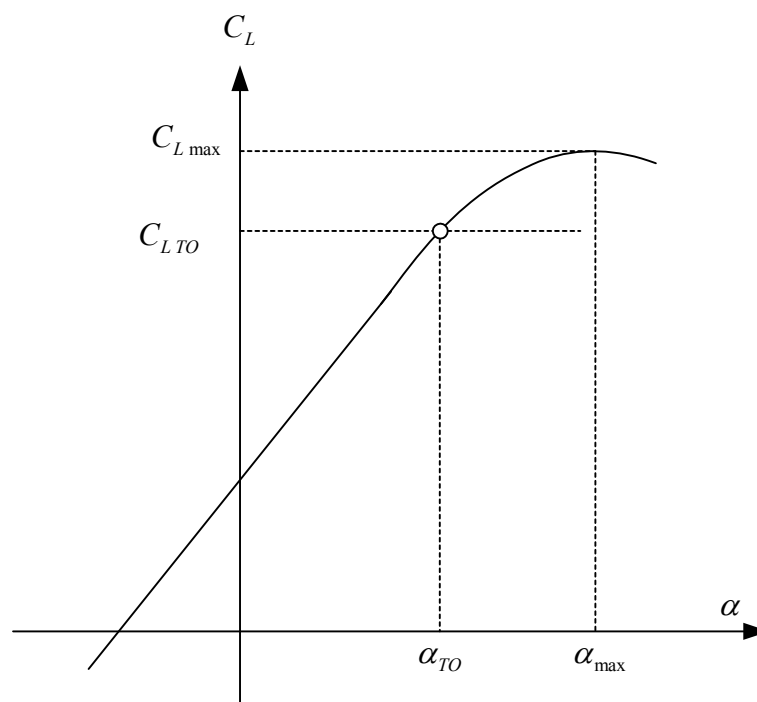
Procjena aerodinamike *full configuration* može se izvršiti pomoću ESDU [21]. Jedan primjer tog proračuna je u [22].

Neka je $C_{L\max}$ maksimalni koeficijent uzgona za konfiguraciju u polijetanju. Sa V_{stall} se označava aerodinamička brzina koja s tim koeficijentom daje uzgon jednak težini letjelice:

$$\frac{\rho V_{stall}^2}{2} S_{ref} C_{L\max} = W$$

Prema tome, V_{stall} je najmanja moguća aerodinamička brzina s kojom bi teoretski mogao zrakoplov poletjeti. U praksi ne smije se koristiti maksimalni koeficijent uzgona zato što bi se moglo dogoditi da neposredno poslije odvajanja, zrakoplov padne natrag na pistu zbog sloma uzgona. Zato se odvajanje, koje označavamo slovima TO (*take off*), vrši sa 10 % većom brzinom (FAR Part 25)

$$V_{TO} = 1.10 \cdot V_{stall}$$



Slika 12-3

S ovom brzinom odvajanja bit će potreban manji koeficijent uzgona od $C_{L\max}$ koji je određen jednadžbom:

$$\frac{\rho V_{TO}^2}{2} S_{ref} C_{LTO} = W$$

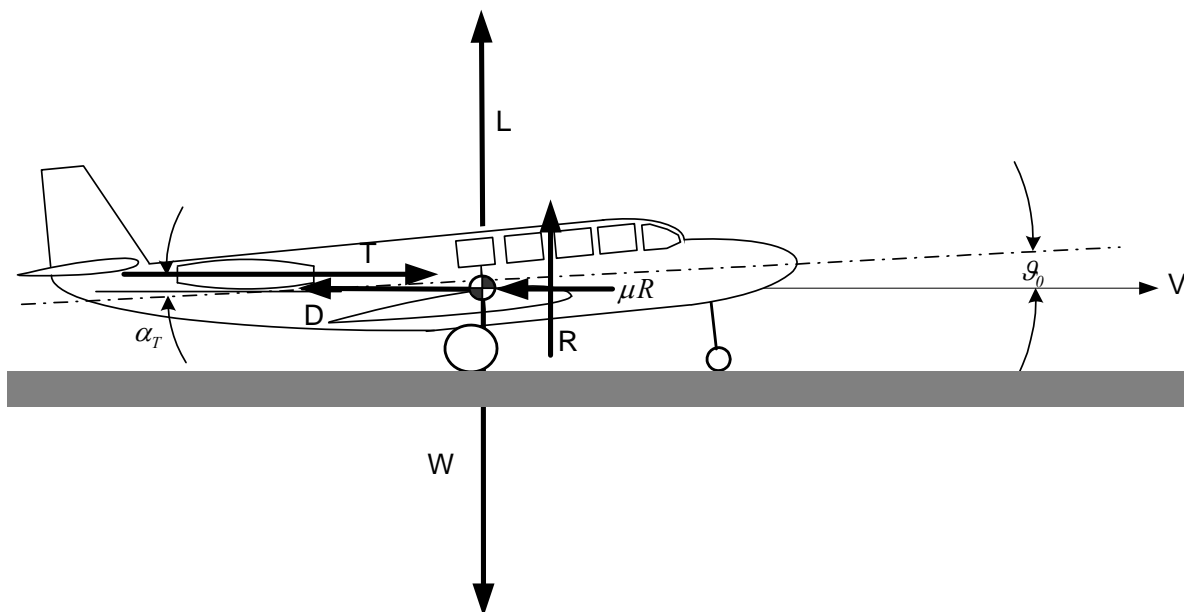
Kad ovu jednadžbu podijelimo s prethodnom jednadžbom (odvajanje sa brzinom V_{stall}) videći račun da je $V_{TO} = 1.10 \cdot V_{stall}$, dobivamo da je

$$C_{LTO} = 0.826 \cdot C_{Lmax}$$

To znači da će se odvajanje zrakoplova od piste vršiti s brzinom V_{TO} i napadnim kutom α_{TO} kome odgovara koeficijent uzgona C_{LTO} .

12.1.4 Zalijetanje - prvi dio

U prvom djelu, tj. tijekom zalijetanja sva tri kotača imaju kontakt s pistom, gibanje zrakoplova je pravocrtno i ubrzano gibanje po pisti od aerodinamičke brzine $V_0 = -V_w = |V_w|$ u startu do aerodinamičke brzine V_R kad započinje odvajanje prednjeg kotača pod djelovanjem otklona kormila visine δ_{mTO} .



Slika 12-4. Sile koje djeluju na zrakoplov u prvom dijelu polijetanja

Tijekom prvog dijela brzina je paralelna pisti $\gamma = 0$, te je konstantni kut nagiba osi zrakoplova jednak napadnom kutu $\vartheta_0 = \alpha_0$. Ta vrijednost određena je geometrijom kotača (tricikla). Zato je u prvom dijelu polijetanja konstantan koeficijent uzgona

$$C_L = C_{L0} + C_{L\alpha} \alpha_0$$

i koeficijent otpora

$$C_D = C_{D0} + KC_L^2.$$

Za vrijeme prvog dijela polijetanja su jednadžbe gibanja središta prema slici 3 :

$$m \frac{dV_K}{dt} = T - D - \mu \cdot R$$

$$L - W + R = 0$$

$$\frac{ds}{dt} = V_K$$

Pogonska sila T je poznat funkcija aerodinamičke brzine, R je otpor oslonca (kotača), a μ je koeficijent kotrljanja kotača po pisti. Ovisno o vrsti podloge na pisti, vrijednosti koeficijenta kotrljanja μ prikazane su tablicom 1.

Vrsta tla	Bez kočenja	Pri kočenju
Suhi asfalt	0.03 - 0.05	0.3 - 0.5
Mokri asfalt	0.05	0.15 - 0.3
Poledica na asfaltu	0.02	0.06 - 0.10
Tvrda zemlja	0.05	0.4
Čvrsto nasuta pista	0.04	0.3
Meka zemlja	0.07	0.2
Vlažna trava	0.08	0.2

Tabela 1. Tablica koeficijenta kotrljanja

Eliminacijom otpora oslonca R dobivamo model zalijetanja zrakoplova po pisti:

$$m \frac{dV_K}{dt} = T - D + \mu L - \mu W$$

$$\frac{ds}{dt} = V_K$$

$$V_K = V - |V_w|$$

Duljina zalijetanja po pisti od početka do trenutka kad se prednji kotač zrakoplova odvoji od piste, može se izračunati točno analitičkim putem. Neka je F rezultujuća sila u pravcu zalijetanja koja ubrzava zrakoplov na pisti. Ona je funkcija aerodinamičke brzine :

$$F = T - \frac{\rho V^2}{2} S(C_D - \mu C_L) - \mu W$$

U problemima polijetanja primjenjuju se tri oblika ove funkcije.

Prvi, koristi se u slučaju turbofan motora kvadratna funkcija pogonska sile o aerodinamičkoj brzini:

$$T = T_0(1 - k_1V + k_2V^2).$$

Na primjer prema [14] za Rolls-Royceov turbofan motor RB211-535E4, ti koeficijenti imaju vrijednosti $k_1 = 2.52 \cdot 10^{-3}$ i $k_2 = 4.34 \cdot 10^{-6}$.

Drugi, koristimo za mlazne motore kad obično usvajamo da je pogonska sila konstantna T_0 . Uočimo da s matematičkog aspekta to je ista funkcija kao u prvom slučaju s tim što su za mlazne motore $k_1 = k_2 = 0$.

Treći, koristimo kad zrakoplov ima elisni pogon s klipnim motorom. Onda je pogonska sila:

$$T = \frac{\eta_{el} P_{mot}}{V}.$$

Snaga motora u zalijetanju P_{mot} je konstantna vrijednost koja odgovara maksimalnom broju obrtaja pri zemlji. Koeficijent učinkovitosti elise ovisi o parametru $J = V/nD$. Međutim $\eta_{el}(0) = 0$, što znači da krivulja $\eta_{el}(J)$ prolazi kroz ishodište. Numeričkim proračunima elise pa raspoložemo sa nizom točaka J_i, η_i . U intervalu od $J_0 = \frac{V_0}{nD}$ do $J_R = \frac{V_R}{nD}$ kroz raspoložive točke i ishodište, provlačimo interpolacioni polinom oblika

$$\eta_{el} = J \cdot f(J)$$

gdje je $f(J) = aJ^2 + bJ + c$ polinom drugog reda. Polinom trećeg reda $J \cdot f(J)$ prolazi sigurno kroz ishodište, a koeficijente polinoma drugog reda a, b i c biramo tako da funkcija prolazi "najbolje" kroz točke u intervalu od J_0 do J_R . S tom funkcijom za koeficijent učinkovitosti elise bit će:

$$T = \frac{\eta_{el} P_{mot}}{V} = J \cdot f(J) \frac{P_{mot}}{V} = \frac{V}{nD} \cdot f(J) \cdot \frac{P_{mot}}{V} = f(J) \cdot \frac{P_{mot}}{nD}.$$

Kako je $f(J) = aJ^2 + bJ + c$ bit će poslije sređivanja

$$T = \frac{P_{mot}c}{nD} \cdot \left(1 + \frac{b}{nDc} \cdot V + \frac{a}{n^2D^2c} \cdot V^2 \right)$$

Prema tome slučaj elisnog pogona svodi se na prvi slučaj.

Konačno, u sva tri slučaja pogonska sila je kvadratna funkcija aerodinamičke brzine pa je ubrzanje oblika

$$a(V) = \frac{F(V)}{m} = \frac{T_0(1 - k_1V + k_2V^2)}{m} - \frac{\rho V^2}{2} \frac{S}{m} (C_{D0} + KC_L^2 - \mu C_L) - \mu g$$

ili

$$a(V) = \underbrace{\frac{T_0}{m} - \mu g}_{A} - \underbrace{\frac{T_0 k_1}{m}}_B \cdot V + \underbrace{\left[\frac{T_0 k_2}{m} - \frac{\rho S}{2m} (C_{D0} + KC_L^2 - \mu C_L) \right]}_C \cdot V^2$$

tj. kvadratna funkcija aerodinamičke brzine:

$$a = A + BV + CV^2,$$

Diobom druge diferencijalne jednadžbe s provom

$$\frac{dV_K}{dt} = a$$

$$\frac{ds}{dt} = V_K$$

dobivamo:

$$\frac{ds}{dV_K} = \frac{V_K}{a}$$

Zamjenom brzine leta sa razlikom aerodinamičke brzine i čeonog vjetra $V_K = V - |V_w|$, dobivamo diferencijalnu jednadžbu prijeđenog puta

$$ds = \frac{V_K dV_K}{a} = \frac{(V - |V_w|) \cdot d(-|V_w| + V)}{a} = \frac{V dV}{a(V)} - |V_w| \frac{dV}{a(V)}$$

odakle je integracijom od početne aerodinamičke brzine $V_0 = |V_w|$ do krajnje V_R , dobivamo pređeni put u prvom dijelu:

$$s_1 = \int_{V_0}^{V_R} \frac{V}{a(V)} dV - |V_w| \int_{V_0}^{V_R} \frac{1}{a(V)} dV.$$

Za slučaj mlaznih motora kad je ubrzanje u zalijetanju kvadratna funkcija aerodinamičke brzine

$$a(V) = A + BV + CV^2$$

oba integrala se mogu izračunati analitički. Duljina zalijetanja do aerodinamičke brzine V_R je tada:

$$s_1 = \int_{V_0}^{V_R} \frac{V dV}{A + BV + CV^2} - |V_w| \cdot \int_{V_0}^{V_R} \frac{dV}{A + BV + CV^2}.$$

Prvi integral rastavljamo na dva integrala:

$$\begin{aligned} \int_{V_0}^{V_R} \frac{V dV}{A + BV + CV^2} &= \frac{1}{2C} \int_{V_0}^{V_R} \frac{-B + B + 2CV}{A + BV + CV^2} dV \\ &= -\frac{B}{2C} \int_{V_0}^{V_R} \frac{dV}{A + BV + CV^2} + \frac{1}{2C} \int_{V_0}^{V_R} \frac{B + 2CV}{A + BV + CV^2} dV \end{aligned}$$

Prvi dio prvog integrala zbrojimo s drugim pa je

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{1}{2C} \int_{V_0}^{V_R} \frac{B + 2CV}{A + BV + CV^2} dV - \left(|V_w| + \frac{B}{2C} \right) \int_{V_0}^{V_R} \frac{dV}{A + BV + CV^2} \\ s_1 &= \frac{I}{2C} \ln \frac{A + BV_R + CV_R^2}{A + BV_0 + CV_0^2} - \left(|V_w| + \frac{B}{2C} \right) \cdot I \end{aligned}$$

gdje je:

$$I = \int_{V_0}^{V_R} \frac{dV}{A + BV + CV^2}.$$

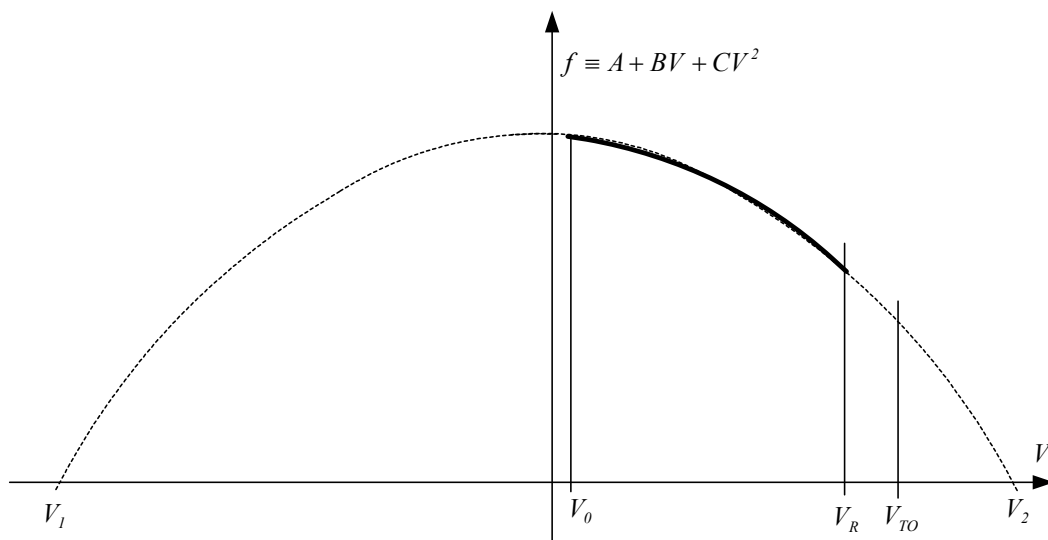
Prvi slučaj

Ako je $B = 0$ (slučaj mlaznih motora)

$$I = \int_{V_0}^{V_R} \frac{dV}{A + CV^2} = \left| \frac{I}{\sqrt{AC}} \arctan \left(V \sqrt{\frac{C}{A}} \right) \right|_{V_0}^{V_R}$$

Drugi slučaj

Rješenje drugog integrala ovisi o korijenima V_1 i V_2 polinoma $A + BV + CV^2 = 0$. Neka su vrijednosti tih korijena



Slika 12-5

$$V_{12} = -\frac{B}{2C} \pm \sqrt{\left(\frac{B}{2C}\right)^2 - \frac{A}{C}}$$

Ako su korijeni V_1 i V_2 , realni, oni ne mogu biti u intervalu integracije V_0, V_R , jer bi to značilo da u tom dijelu postoje trenutci kad je ubrzanje jednako nuli (vrijednost polinoma jednaka je nuli), a zatim i negativno. Kako je

$$A + BV + CV^2 = C(V - V_1)(V - V_2)$$

bit će drugi integral

$$I = \int_{V_0}^{V_R} \frac{dV}{A + BV + CV^2} = \frac{1}{C} \int_{V_0}^{V_R} \frac{dV}{(V - V_1)(V - V_2)}$$

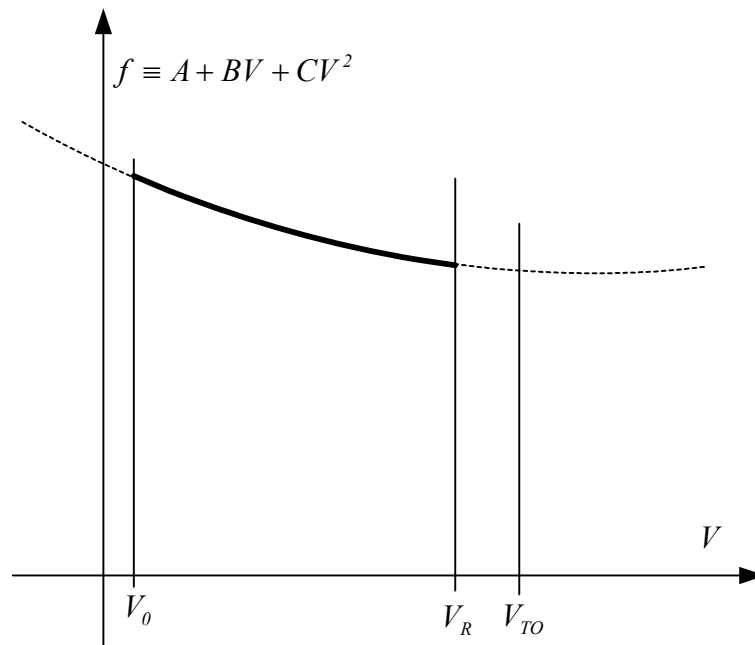
ili s obzirom da je

$$\frac{1}{(V - V_1)(V - V_2)} = \frac{1}{V_1 - V_2} \left(\frac{1}{V - V_1} - \frac{1}{V - V_2} \right)$$

$$I = \frac{1}{C(V_1 - V_2)} \left(\int_{V_0}^{V_R} \frac{dV}{V - V_1} - \int_{V_0}^{V_R} \frac{dV}{V - V_2} \right) = \frac{1}{C(V_1 - V_2)} \left(\ln \frac{V_R - V_1}{V_0 - V_1} - \ln \frac{V_R - V_2}{V_0 - V_2} \right)$$

Treći slučaj

Ako kvadratni polinom nema realne korene (kao na slici 5)



Slika 12-6

onda se on može napisati u obliku

$$A + BV + CV^2 = C \cdot \left[\frac{A}{C} - \left(\frac{B}{2C} \right)^2 + \left(\frac{B}{2C} + V \right)^2 \right] = C \cdot (a^2 + u^2)$$

gdje su

$$a = \sqrt{\frac{A}{C} - \left(\frac{B}{2C} \right)^2}$$

$$u = \frac{B}{2C} + V$$

S tim je smjenama drugi integral:

$$I = \int_{V_i}^{V_R} \frac{dV}{A + BV + CV^2} = \frac{1}{C} \int_{u_i}^{u_R} \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{Ca} \int_{u_i}^{u_R} \frac{d \frac{u}{a}}{1 + \left(\frac{u}{a} \right)^2} = \frac{1}{Ca} \left(\arctg \frac{u_R}{a} - \arctg \frac{u_i}{a} \right).$$

Ukoliko koristimo MATLAB za izračunavanje duljine zalijetanja, ne moramo voditi računa o korijenima kvadratnog polinoma jer se može primijeniti i prvo rješenje (za slučaj realnih korijena) kada su korijeni kompleksni zato što postoji veza između logaritma kompleksnog broja i realnog arkus-tangensa, a tu vezu koristi MATLAB.

12.1.5 Primjer

Aerodinamički koeficijent uzgona i momenta propinjanja malog zrakoplova za konfiguraciju u polijetanju (25/60, djelomice izbačena zakrilca)

$$C_L = 0.825 + 4.72 \alpha + 0.216 \delta_m$$

$$C_m = 0.072 - 0.885 \alpha - 0.566 \delta_m$$

Totalni otpor u polijetanju s utjecajem tla ima vrijednost

$$C_D = 0.0259 + 0.018 C_L^2$$

Maksimalni koeficijent uzgona ove konfiguracije jest $C_{L_{\max}} = 1.69$. Za tu je konfiguraciju

$$C_{L_{TO}} = 0.826 \cdot C_{L_{\max}} = 0.826 \cdot 1.69 = 1.40$$

$$V_{TO} = \sqrt{\frac{2W}{\rho S_{ref} C_{L_{TO}}}} = \sqrt{\frac{2g \cdot 1088}{1.225 \cdot 15.1 \cdot 1.40}} = 28.7 \text{ m/s}$$

Napadni kut α_{TO} i odgovarajući otklon kormila visine $\delta_{m_{TO}}$ za uvjet da $C_L = 1.40$ i $C_m = 0$ određeni su jednadžbama:

$$1.40 = 0.825 + 4.72 \alpha_{TO} + 0.216 \delta_{mTO}$$

$$0 = 0.072 - 0.885 \alpha_{TO} - 0.566 \delta_{mTO}$$

Odavde je $\alpha_{TO} = 0.125 = 7.2^\circ$ za $\delta_m = -0.0681 = -3.9^\circ$.

Izračunajmo pri kojoj brzini treba pilot otkloniti kormilo visine da bi se prednji kotač počeo odvajati od piste. Pretpostavimo da je pilot postavio otklon kormila visine δ_{mTO} u trenutku kad je brzina V_R . U tom trenutku je napadni kut jednak nuli, a otklon kormila visine $\delta_m = -0.068$, pa su aerodinamički koeficijenti :

$$C_L = 0.825 + 4.72 \alpha + 0.216 \delta_m = 0.825 - 0.216 \cdot 0.068 = 0.810$$

$$C_m = 0.072 - 0.885 \alpha - 0.566 \delta_m = 0.072 + 0.566 \cdot 0.068 = 0.110$$

S tim vrijednostima i sa $\ell_s + \mu k_s = 0.10 + 0.04 \cdot 1.00 = 0.14$ odvajanje prednjeg kotača nastat će pri brzini:

$$V_R = \sqrt{\frac{2W(\ell_s + \mu k_s)}{\rho S_{ref} [c_A C_m + C_L \cdot (\ell_s + \mu k_s)]}} = \sqrt{\frac{2g1088 \cdot 0.24}{1.225 \cdot 15.1 [1.73 \cdot 0.110 + 0.810 \cdot 0.24]}} = 26.8 \text{ m/s}$$

To znači da će se zrakoplov početi propinjati kad pilot otkloni kormilo visine na vrijednost $\delta_m = -0.068$ pri brzini 26.8 m/s.

Za vrijeme zalijetanja po pisti mali zrakoplov ima $\mathcal{G}_0 = 0$ pa je $\alpha = 0$, otklon kormila visine $\delta_m = 0$, pa je

$$C_L = 0.825$$

pa je za zalijetanje koeficijent otpora

$$C_D = 0.0259 + K C_L^2 = 0.0259 + 0.018 \cdot 0.825^2 = 0.0382$$

S tim vrijednostima zrakoplov ubrzava sve do brzine V_R .

Pogonska sila u zalijetanju za mali zrakoplov je

$$F = \frac{\eta_{el} P_{mot}}{V} = \frac{\eta_{el} J}{J V} P_{mot} = \frac{\eta_{el} P_{mot}}{J nD}$$

U zalijetanju korak elise ne prelazi vrijednost $J = \frac{V}{nD} = \frac{33}{45.0 \cdot 1.88} \leq 0.4$. Zato smo u intervalu od $J = 0$ do $J = 0.4$ provukli najbolji polinom trećeg reda za funkciju $\eta_{el}(J)$, pa je

$$\frac{\eta_{el}}{J} = (1.2689J - 2.4283)J + 2.3301$$

S tom funkcijom je pogonska sila kvadratni polinom aerodinamičke brzine:

$$F = \left[\left(1.2689 \frac{V}{nD} - 2.4283 \right) \frac{V}{nD} + 2.3301 \right] \frac{P_{mot}}{nD}$$

$$F = 2.3301 \frac{P_{mot}}{nD} \cdot \left(1 - \frac{2.4283}{2.3301 \cdot nD} V + \frac{1.2689}{2.3301 \cdot n^2 D^2} V^2 \right)$$

Za $n = 45.0 \text{ obr/s}$, $D = 1.88 \text{ m}$ i $P_{mot} = 145.8 \text{ KN}$

$$T_0 = 4016$$

$$k_1 = 12.32 \cdot 10^{-3}$$

$$k_2 = 76.09 \cdot 10^{-6}$$

Tijekom zalijetanja po pisti do brzine V_R za određivanje duljine zalijetanja $C_L = 0.825$ i $C_D = 0.0382$. S ovim vrijednostima za pogonsku silu bit će konstante:

$$A = \frac{T_0}{m} - \mu g = \frac{4016}{1088} - 0.04 g = 3.299$$

$$B = -k_1 \frac{T_0}{m} = -12.32 \cdot 10^{-3} \frac{4016}{1088} = -0.04548$$

$$C = k_2 \frac{T_0}{m} - \frac{\rho S_{ref}}{2m} (C_D - \mu C_L)$$

$$= 76.09 \cdot 10^{-6} \frac{4016}{1088} - \frac{1.225 \cdot 15.1}{2 \cdot 1088} (0.0382 - 0.04 \cdot 0.810) = 0.1925 \cdot 10^{-3}$$

Korijeni su: kompleksni jer je

$$B^2 - 4AC = (-0.04548)^2 - 4 \cdot 3.299 \cdot 0.1925 \cdot 10^{-3} = -0.00047 < 0$$

Zato je rješenje dano jednačbom

$$s_1 = \frac{1}{2C} \cdot \ln \frac{A + BV_R + CV_R^2}{A + BV_0 + CV_0^2} - \frac{B}{2C} I$$

Prvi član na desnoj strani ima vrijednost:

$$s' = \frac{1}{2C} \cdot \ln \frac{A + BV_R + CV_R^2}{A + BV_0 + CV_0^2}$$

$$s' = \frac{1}{2 \cdot 0.1925 \cdot 10^{-3}} \cdot \ln \left(\frac{3.299 - 0.04548 \cdot 26.8 + 0.1925 \cdot 10^{-3} \cdot 26.8^2}{3.299} \right) = -1030.7,$$

a drugi :

$$s'' = \frac{B}{2C} I$$

gdje su :

$$I = \frac{1}{aC} \left(\operatorname{arctg} \frac{u_R}{a} - \operatorname{arctg} \frac{u_0}{a} \right)$$

$$a = \sqrt{\frac{A}{C} - \left(\frac{B}{2C} \right)^2} = \sqrt{\frac{3.299}{0.1925 \cdot 10^{-3}} - \left(\frac{0.04548}{2 \cdot 0.1925 \cdot 10^{-3}} \right)^2} = 56.4$$

$$u_0 = \frac{B}{2C} = \frac{-0.04548}{2 \cdot 0.1925 \cdot 10^{-3}} = -118.1$$

$$u_R = \frac{B}{2C} + V_R = -118.1 + 26.8 = -91.3$$

pa je

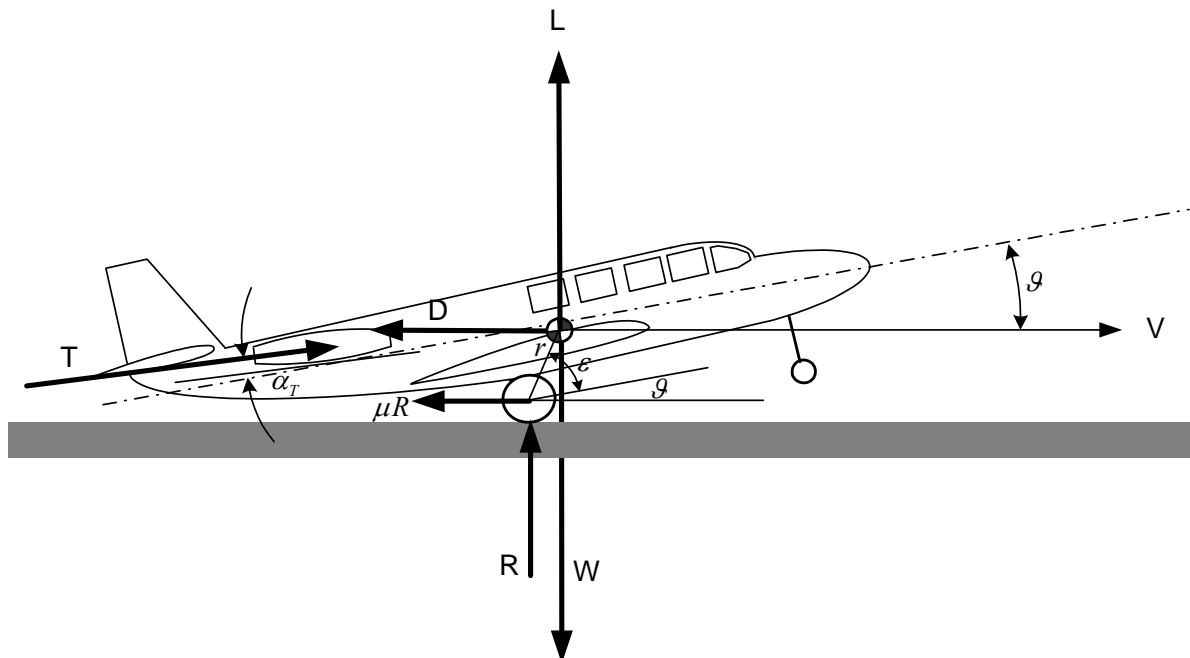
$$I = \frac{1}{0.1925 \cdot 10^{-3} \cdot 56.4} \left(\operatorname{arctg} \frac{-91.3}{56.4} - \operatorname{arctg} \frac{-118.1}{56.4} \right) = 9.926$$

$$s'' = \frac{B}{2C} I = (-118.1) \cdot 9.926 = -1172.3$$

pa je konačno duljina prvog dijela (zalijetanje po pisti do odvajanja prednjeg kotača)

$$s_1 = s' - s'' = -1030.7 - (-1172.3) = 141.6 \text{ m}$$

12.1.6 Propinjanje zrakoplova - drugi dio polijetanja



Slika 12-7

U drugom djelu zrakoplov se okreće također oko osi zadnjih kotača. Ipak ćemo promatrati momentnu jednadžbu oko središta mase jer je tada jednostavniji oblik jednadžbe rotacije. To

smo mogli uraditi i u prethodnom poglavlju ali nije bilo neophodno. Odje je teško izračunati derivaciju kinetičkog momenta zrakoplova za os kotača. Zato izjednačavamo derivaciju kinetičkom momenta za os kroz središte mase i moment za istu os:

$$I_y \frac{dq}{dt} = M^A + M^R$$

$$\frac{d\mathcal{G}}{dt} = q$$

U tom djelu polijetanja imamo samo otpor oslonca zadnjih kotača pa je moment otpora oslonca za središte mase:

$$M^R = -R r \cdot [\cos(\mathcal{G} + \varepsilon) + \mu \sin(\mathcal{G} + \varepsilon)]$$

gdje su r i ε konstruktivne konstante zadnjeg kotača (kao na slici 9-5)

$$r = \sqrt{\ell_s^2 + k_s^2}$$

$$\varepsilon = \arctan \frac{k_s}{\ell_s}$$

Da bi pojednostavili analizu drugog dijela, pretpostavit ćemo da nema vjetera. Zatim ćemo pretpostaviti da se središte mase giba po horizontali i ako se ono diže. Drugim riječima zanemarit ćemo mali porast kuta γ , tj. i dalje ćemo smatrati kut $\gamma \approx 0$, a to znači da je $\alpha = \mathcal{G}$. U tom slučaju otpor oslonca je

$$R = W - L \cos \gamma + D \sin \gamma - T \sin \gamma \approx W - L$$

Jednadžba gibanja duž brzine je

$$\dot{V}_k m = T \cos \alpha - D - \mu R \cos \gamma - (W - R) \sin \gamma \approx T \cos \mathcal{G} - D - \mu R$$

U tim jednadžbama su

$$M = \frac{\rho V^2}{2} S_{ref} c_A C_m$$

$$L = \frac{\rho V^2}{2} S_{ref} C_L$$

a napadni kut u aerodinamičkim koeficijentima je $\alpha = \mathcal{G} - \gamma \approx \mathcal{G}$, pa su aerodinamički koeficijenti C_m i C_L :

$$C_m = C_{m0} + C_{m\alpha} \mathcal{G} + C_{m\delta} \delta_{mTO}$$

$$C_L = C_{L0} + C_{L\alpha} \mathcal{G} + C_{L\delta} \delta_{mTO}$$

Njima ćemo pridodati i diferencijalnu jednadžbu prijeđenog puta

$$\frac{ds}{dt} = V$$

To znači da u modelu gibanja zrakoplova u ovom dijelu polijetanja, imamo nepoznate funkcije:

$$V, q, \vartheta \text{ i } s$$

koje trebamo odrediti iz diferencijalnih jednadžba:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{T \cos \vartheta - D - \mu R}{m}$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{M + M^R}{I_y}$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = q$$

$$\frac{ds}{dt} = V,$$

i algebarskih jednadžba:

$$R = W - L$$

$$M^R = -R r \cdot [\cos(\vartheta + \varepsilon) + \mu \sin(\vartheta + \varepsilon)].$$

S obzirom da smo zanemarili kut γ drugi dio se završava kad kut propinjanja dostigne vrijednost $\vartheta = \alpha_{TO}$.

Ako usporedimo prvu jednadžbu drugog dijela s odgovarajućom prvog dijela jedina razlika je što u drugom dijelu imamo član $T \cos \vartheta$, a prvom samo T , te da su aerodinamički koeficijent u drugom dijelu:

$$C_m = C_{m0} + C_{m\alpha} \vartheta + C_{m\delta} \delta_{mTO}$$

$$C_L = C_{L0} + C_{L\alpha} \vartheta + C_{L\delta} \delta_{mTO}$$

a u prvom:

$$C_m = C_{m0} + C_{m\alpha} \vartheta_0$$

$$C_L = C_{L0} + C_{L\alpha} \vartheta_0$$

Kut propinjanja zrakoplova ϑ mijenja se tijekom drugog dijela od 0 do α_{TO} . Na početku drugog dijela $\cos \vartheta = \cos \vartheta_0 \approx 1$, a na kraju $\cos \vartheta = \cos \alpha_{TO}$. Znači nije veliki odstupanje ako i drugom dijelu zamijenimo $T \cos \vartheta$ s T . U tom slučaju prva jednadžba drugog dijela ista je kao jednadžba gibanja prvog dijela. Zato mnogi autori koriste analitičko rješenje do aerodinamičke brzine V_{TO} , koje smo izveli za prvi dio do aerodinamičke brzine V_R .

12.1.7 Primjer

U prvom dijelom dijelu zalijetanja od brzine 0 do $V_R = 26.8$, koeficijent uzgona je bio $C_L = 0.825$ (za $\alpha = 0$ i $\delta_m = 0$). U drugom dijelu zalijetanja od brzine V_R do $V_{TO} = 28.7$ zrakoplov se propinje. Na početku tog dijela ($\alpha = 0$ i $\delta_m = -3.9^\circ$) aerodinamički koeficijent uzgona trenutno padne na vrijednost $C_L = 0.624$ (zbog otklona kormila visine), a zatim raste da bi na kraju ($\alpha_{TO} = 7.2^\circ$ i $\delta_m = -3.9^\circ$) koeficijent uzgona bio $C_L = 1.40$. Za primjenu analitičkog rješenje treba nam konstantan koeficijent uzgona. Da bi koristili analitičko rješenje u drugom dijelu treba uzeti neku srednju vrijednost za koeficijent uzgona koji se mijenja od $C_L = 0.624$ do $C_L = 1.40$. S obzirom da vrijednost koeficijenta uzgona je bliska nekoj srednjoj vrijednosti mnogi koriste taj koeficijent i u drugom dijelu zalijetanja. To znači da s vrijednostima koeficijenata A , B i C izračunatih za prvi dio možemo računati duljinu zalijetanja i za drugi dio ili drugim riječima da možemo odmah računati duljinu zalijetanja od starta $V = 0$ do brzine V_{TO} i ako su koeficijenti izračunati za interval od $V = 0$ do V_R .

Zato mnogi autori, bez objašnjenja, izračunavaju duljinu zalijetanja do odvajanja zrakoplova od piste, s jednadžbom koja je točna samo do odvajanja prednjeg kotača od piste:

$$s_g = s_1 + s_2 = \frac{1}{2C} \cdot \ln \frac{A + BV_{TO} + CV_{TO}^2}{A} - \frac{B}{2C^2(V_1 - V_2)} \cdot \ln \frac{(V_1 - V_{TO}) \cdot V_2}{(V_2 - V_{TO}) \cdot V_1}$$

U slučaju malog zrakoplova s ovom jednadžbom do točke TO s konstantama koje smo odredili za zalijetanje do brzine $V_R = 26.8$, dobivamo duljinu zalijetanja do brzine odvajanja $V_{TO} = 28.7$

$$s_g = 174.7 \text{ m}$$

Točnija metoda (vidi primjer 9.2.4) daje $s_g = 173.9 \text{ m}$.

12.1.8 Treći dio polijetanja

U ovom djelu usvajamo da je zrakoplov u ravnotežnom letu u vertikalnoj ravnini. Gibanje zrakoplova u ovom dijelu polijetanja je ubrzano i krivolinijsko. Jednadžbe tog gibanja dobivamo iz modela za ravnotežni let kad stavimo da je ravnotežni let u vertikalnoj ravnini, a to znači kad je $\chi = const$. Tako dobivamo jednažbe gibanja u trećem dijelu polijetanja:

$$m \frac{dV}{dt} = T - D - W \sin \gamma$$

$$mV \frac{d\gamma}{dt} = L - W \cos \gamma$$

$$\frac{dx}{dt} = V \cos \gamma$$

$$\frac{dz}{dt} = V \sin \gamma$$

Tijekom ovog dijela otklon kormila visine ostaje konstantan δ_{mTO} , brzina leta V i kut brzine leta γ se povećavaju. U tim jednadžbama, za vrijeme zaokreta je koeficijent uzgona $C_L = C_{LTO}$.

Na početku ovog dijela imamo početne uvjete:

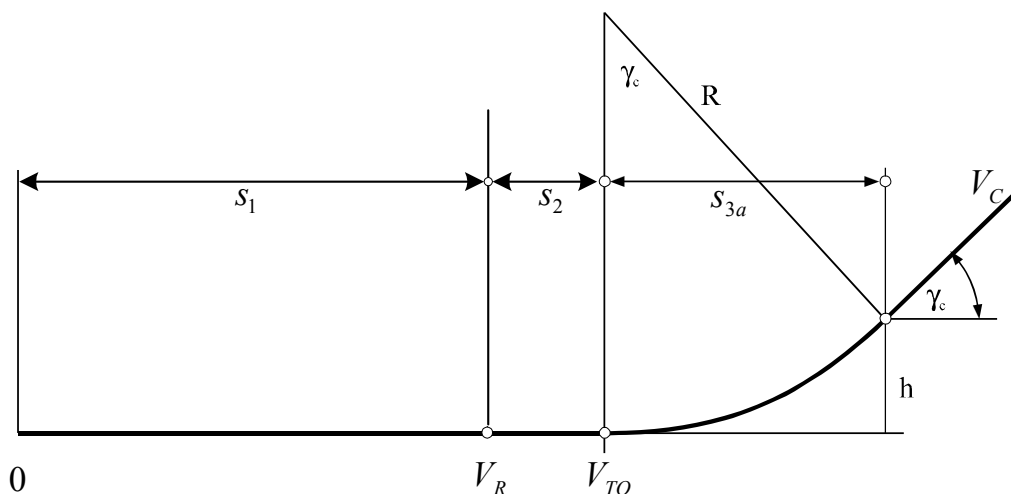
$$V = V_{TO}, \gamma = 0, x = s_g = s_1 + s_2, h = 0.$$

Integraciju vršimo dok kut γ ne dostigne vrijednost γ_c potrebnu za penjanje. U tom trenutku gotov je treći dio polijetanja i započinje četvrti dio.

Može se približno odrediti polumjer vertikalnog zaokreta u ovom dijelu polijetanja:

$$R = \frac{V^2}{g} \cdot \frac{1}{n - \cos \gamma}$$

Procjenu polumjera zakrivljenosti dobit ćemo ako uzmemo prosječne vrijednosti u jednadžbi za polumjer zakrivljenosti, tj. prosječnu brzinu, prosječno normalno opterećenje i $\cos \gamma$.



Slika 12-8

Na ovom dijelu brzina raste od vrijednosti od vrijednosti $V_{TO} = 1.10 \cdot V_{stall}$ do vrijednosti $V_C \approx 1.20 \cdot V_{stall}$, te je vrijednost brzine u zaokretu je $1.15 \cdot V_{stall}$. Toj brzini odgovara prosječno normalno opterećenje:

$$n_m = \frac{\frac{\rho V_m^2}{2} S_{ref} C_{LTO}}{W} = \frac{\frac{\rho (1.15 \cdot V_{stall})^2}{2} S_{ref} 0.826 \cdot C_{Lmax}}{W} = 1.092$$

Ako se uzme u obzir da je sve vrijeme zaokreta kut γ vrlo mali, možemo u prvoj aproksimaciji pretpostaviti da je sve vrijeme vertikalnog zaokreta $\cos \gamma \approx 1$. Tako dobivamo prosječni polumjer u zaokretu

$$R_m = \frac{V_m^2}{g(n_m - \cos \gamma)} = \frac{(1.15 \cdot V_{stall})^2}{g(1.092 - 1)} = 14 \frac{V_{stall}^2}{g}$$

Ukoliko putanju zamijenimo s kružnicom polumjera R_m možemo izračunati visinu na kraju zaokreta, kada je $\gamma = \gamma_C$ (slika 8):

$$h = R(1 - \cos \gamma_C)$$

12.1.9 Četvrti dio polijetanja

Na početku četvrtog dijela pilot mijenja otklon kormila tako da koeficijent uzgona ima vrijednost potrebnu za pravocrtno penjanje s željenim kutom γ_C :

$$C_L = \frac{2W \cos \gamma_C}{\rho S_{ref} V^2}.$$

Time je penjanje pravocrtno, ali za razliku od penjanja koje smo vidjeli u prethodnom poglavlju ovdje je penjanje ubrzano (brzina raste) sve dok zrakoplov ne dostigne brzinu penjanja V_C koja će se dalje mijenjati u ovisnosti od visine. Gibanje na četvrtom dijelu određeno je jednadžbama gibanje za pravocrtno penjanje s ubrzanjem:

$$\begin{aligned} m \frac{dV}{dt} &= T - D - W \sin \gamma_C \\ \frac{dx}{dt} &= V_K \cos \gamma_C \\ \frac{dz}{dt} &= V_K \sin \gamma_C \end{aligned}$$

Zato što brzina stalno raste, tijekom tog leta pilot kontinuirano mijenja otklon kormila visine tako da s porastom brzine smanjuje koeficijent uzgona C_L prema gornjoj jednadžbi. Time osigurava da kut γ ostaje jednak željenoj vrijednosti γ_C .

Četvrti dio se završava kad zrakoplov dostigne visinu $z = h_{obs}$, koju nazivamo *visina nadvisivanja prepreke (obstacle clearance altitude)*. Po civilnim standardima $h_{obs} = 10.7 \text{ m}$ (35 ft), a po vojnim $h_{obs} = 15.2 \text{ m}$ (50 ft).

12.1.10 Ukupna duljina polijetanja

Duljina polijetanja je horizontalna udaljenost od početka piste do točke kad zrakoplov ima visinu $z = h_{obs}$. To znači da je duljina polijetanja zbroj

$$s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = s_g + s_3 + s_4$$

zato što zbroj puta zalijetanja i propinjanja $s_1 + s_2$, put od starta do točke odvajanja označavamo sa $s_g = s_1 + s_2$ od engleske riječi *ground*.

Može se dogoditi za velike zrakoplove da za vrijeme vertikalnog zaokreta u trećem dijelu avion već ima visinu h_{obs} . Duljina polijetanja je

$$s_1 + s_2 + s_3 = s_g + s_3$$

U tom slučaju polijetanje je završeno u trećem dijelu. Bez obzira što je polijetanje završeno zrakoplov će završiti vertikalni zaokret a zatim se penjati s kutom γ_C .

12.1.11 Primjer

Izračunati duljinu polijetanja za mali zrakoplov (primjer iz petog poglavlja) ako je poznato da su za konfiguraciju u polijetanju:

$$C_L = 0.825 + 4.72 \alpha + 0.216 \delta_m$$

$$C_m = 0.072 - 0.885 \alpha - 0.566 \delta_m$$

$$C_D = 0.0259 + 0.018 C_L^2$$

Koeficijent učinkovitosti elise je aproksimiran polinomom

$$\eta_{el} = (((-1.4473 J + 2.4557) J - 2.7437) J + 2.3597) J$$

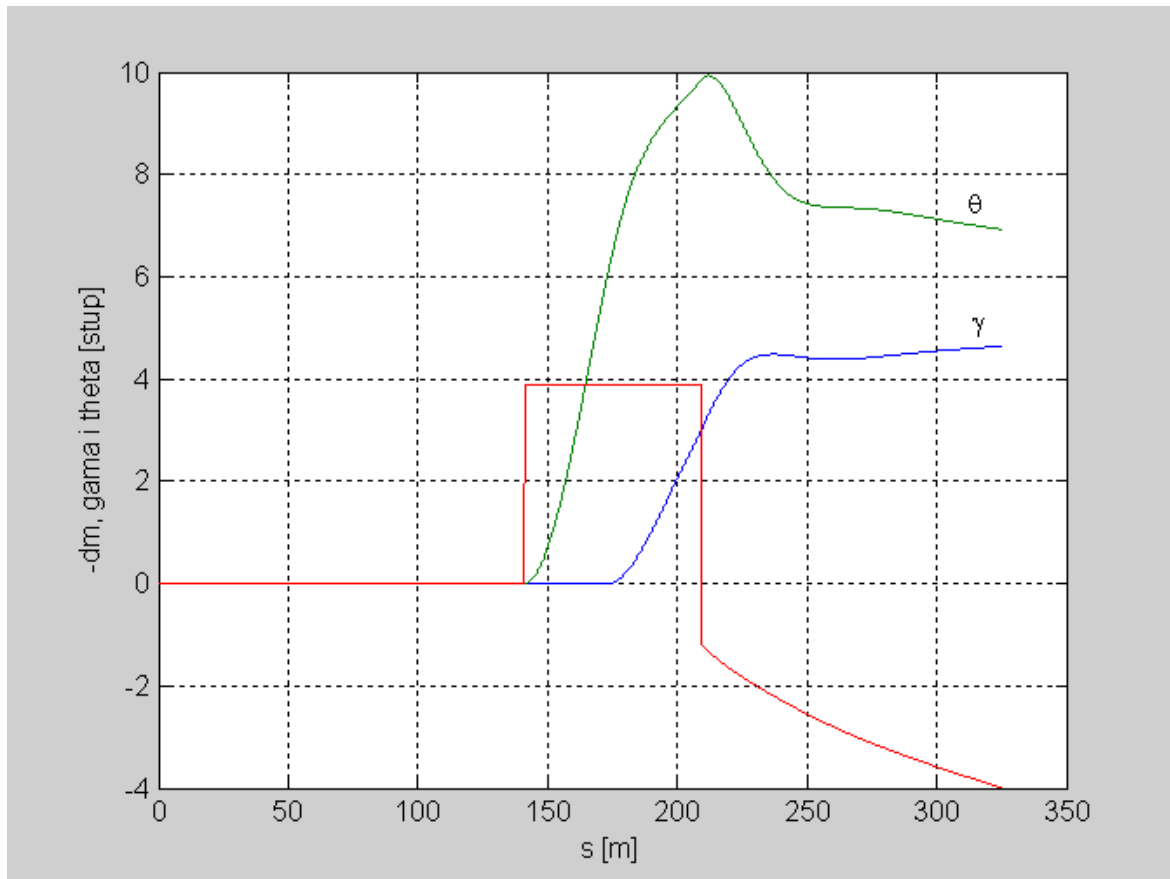
koji važi i za najmanje vrijednosti koraka jer polazi kroz točku $J = 0$, $\eta_{el} = 0$. To nam omogućuje da silu odredimo prema jednadžbi

$$F = \frac{\eta_{el} P_{mot}}{V} = \frac{\eta_{el} J}{J} \frac{P_{mot}}{V} = \frac{\eta_{el} P_{mot}}{J nD}$$

u kojoj je

$$\eta_{el} = -1.4473 J^4 + 2.4557 J^3 - 2.7437 J^2 + 2.3597 J$$

Program se nalazi na disketi u direktoriju **performanse\polijetanje\model** zove se **simpol.m**, ima 9 subrutina. S tim programom dobivene su ovisnost kuta propinjanja $\mathcal{A}(s)$ i kuta penjanja $\gamma(s)$ o prijednom putu kao na slici 7.



Slika 12-9

Dobiveni rezultati su prikazani tabelarno:

	s	v	t	ϑ	γ
odvajanje prednjeg kotača	141.1	26.8	9.88	0	0
odvajanje zadnjih kotača	173.9	29.4	11.05	6.2	0
$h = 10.67 \text{ m}$	325.3	33.6	15.77	6.9	4.6

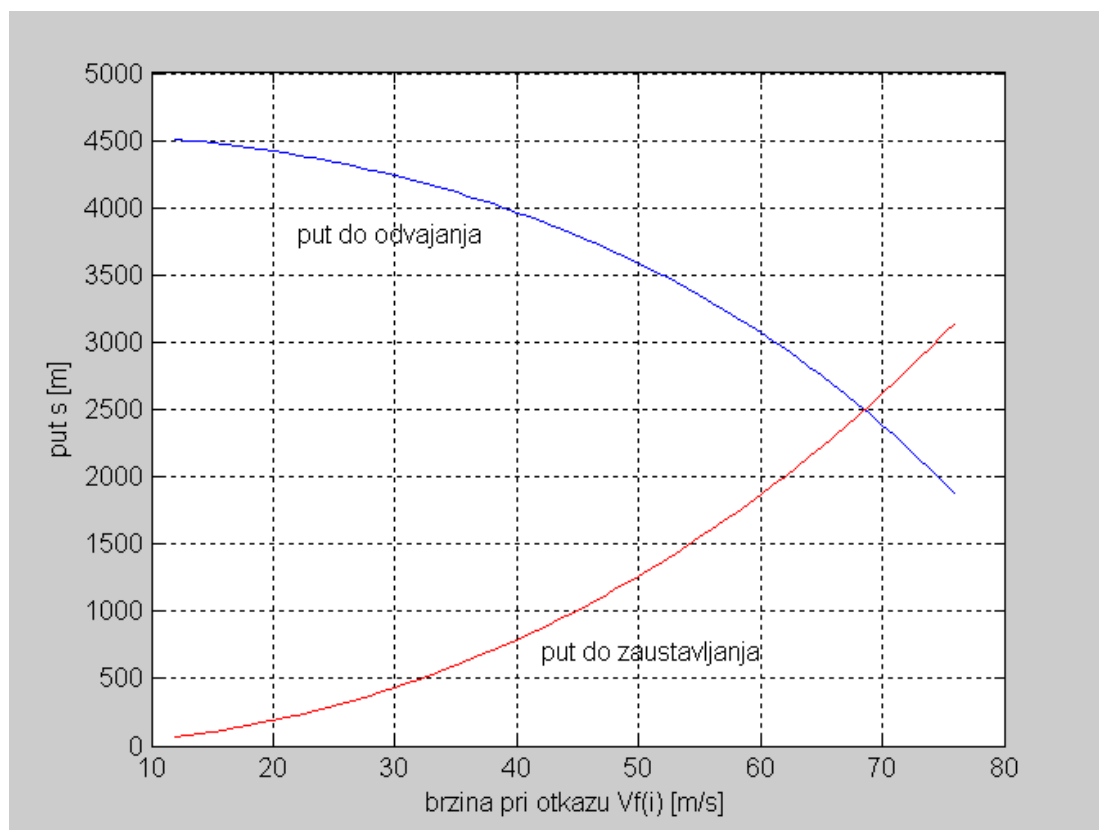
12.1.12 Sigurnost polijetanja

Kada je riječ o zrakoplova s više motora, postoji jedna minimalna aerodinamička brzina pri kojoj je moguće maksimalnim otklonom kormila pravca kompenzirati moment skretanja koji nastaje otkazom jednog bočnog motora. Tu brzinu zovemo V_{mca} (*minimum control speed*). Ta brzina je dosta manja od brzine odvajanja V_{TO} . Ako se otkaz jednog bočnog motora dogodi u

zalijetanju pri brzini V_{fail} koja je manja od $V_{fail} < V_{mca}$ zrakoplov mora kočiti, a ako se otkaz motora dogodi u zalijetanju kad je $V_{fail} > V_{mca}$, postoje dvije mogućnosti:

- kočiti zrakoplov dok ne stane,
- nastaviti polijetanje s jednim motorom jer se zrakoplov može držati u željenom pravcu, a poslije polijetanja sletjeti na pistu.

Jasno je da zrakoplov s jednim motorom ima znatno manje ubrzanje, što zahtijeva duži put zalijetanja od onog koji normalno treba s dva motora te je pitanje da li imamo dovoljno piste za polijetanje.



Slika 12-10. Duljina puta do odvajanja i do zaustavljanja

S druge strane pitanje je također da li imamo dovoljno piste za kočenje. Koje od ove dvije mogućnosti treba realizirati? Da bi odgovorili na to pitanje, promatrimo dijagram na slici 10. Na apscisi je brzina zrakoplova u trenutku otkaza motora V_{fail} . Donja krivulja na apscisi ima "put od starta do zaustavljanja" koji je zbroj dva dijela:

- u prvom dijelu je put zrakoplova do brzine V_{fail} na kome je zrakoplov ubrzavao s dva motora, a

- u drugom djeluje je zrakoplov kočio od brzine V_{fail} do zaustavljanja s jednim motorom.

Gornja krivulja predstavlja isto put koji je zbroj dva dijela:

- prvi dio je isto pređeni put zrakoplova za vrijeme ubrzavanja s dva motora od starta do brzine otkaza V_{fail} , a
- drugi je ubrzavanje s jednim motorom od brzine otkaza V_{fail} do brzine odvajanja V_{TO} .

Gornja krivulja pokazuje da će ukupna duljina biti veća ako je otkaz motora nastao pri manjoj brzini, pa krivulja pada s povećanjem brzine V_{fail} . Dijagrama pokazuje da se te dvije krivulje sijeku za neku brzinu V_1 . Ako je u trenutku otkaza $V_{fail} < V_1$, onda je kraći put do zaustavljanja i pilot treba kočiti. I obrnuto, ako je u trenutku otkaza $V_{fail} > V_1$, pilot treba nastaviti proceduru polijetanja, poletjeti, te onda donijeti odluku što raditi. Ta brzina V_1 se naziva brzina odlučivanja (*decision speed*).

U gornjem dijagramu krajnja točka predstavlja brzinu odvajanja V_{TO} , pa ako je otkaz motora i nastao kad je brzina zrakoplov dostigla tu vrijednost, put do odvajanja isti je kao da nije bilo otkaza. Prema tome očito je da dužina piste za zalijetanje treba biti iz sigurnosnih razloga veća od one koju teoretski određujemo. Ta dužina piste za zalijetanje s_g mora odgovarati dužini piste ako je otkaz nastao pri brzini odlučivanja V_1 , a ta dužina piste dosta je veća od one u normalnom zalijetanju (s_g). Upravo je to jedan od zahtjeva koji mora zadovoljiti dužina piste. Jasno je da ta brzina V_1 mora biti manja od brzini V_R , a veća od V_{cm} .

To znači da je najveća duljina piste potrebna zrakoplovu kome je otkazao jedan motor pri brzini odluke V_1 . Tom istom zrakoplova bit će potrebna i najveća duljina polijetanja kad s jednim motorom postigne visinu $h_{obstacle}$.

12.1.13 Primjer

Neka su

$$S = 511 \text{ m}^2, \quad m = 228.7 \cdot 10^3 \text{ kg}$$

$$T = 705.2 \cdot 10^3 \cdot (1 - 2.94 \cdot 10^{-3}V + 4.97 \cdot 10^{-6}V^2) \text{ N}.$$

Za konfiguraciju u zalijetanju u prisustvu tla:

$$C_{D0} = 0.0364, \quad K = 0.0095, \quad C_L = C_{L0} = 0.654.$$

Sila kočenja pomoću dva motora je $T_{0r} = -352.6 \cdot 10^3 \text{ N}$, a koeficijent kočenja kotačima je $\mu_r = 0.20$

Konfiguracija u polijetanju ima $C_{L\max} = 1.80$,

Za ovaj primjer nacrtati:

- duljinu puta do odvajanja ako je pri brzini V_f otkazao jedan motor, u ovisnosti o toj brzini
- duljinu do zaustavljanja ako je poslije otkaza pri brzini V_f pilot kočio s preostalim jednim motorom i kočnicama na kotačima.

Za rješenje ovog problema služimo se zaključkom iz primjera 9.1.7. Tako je napravljen program koji se nalazi u direktoriju *Performanse\Poletanje* pod imenom *V1decision.m*, a rezultat primjene je prikazan na dijagramu slika 9-8.

12.2 Slijetanje (landing)

12.2.1 Opis slijetanja

Slijetanje se obično vrši s potpuno izbačenom zakrilcima i pretkrilcima (ako postoje). Toj konfiguraciji odgovara neko $C_{L\max}$, a za taj maksimalni koeficijent uzgona odgovara neka brzina V_{stall} prema jednadžbi:

$$\frac{\rho V_{stall}^2}{2} S_{ref} C_{L\max} = W.$$

Brzina leta u trenutku dodira s pistom treba biti $V_{TD} = 1.15 V_{stall}$. S obzirom da tada treba biti $L = W$, znači da je

$$\frac{\rho V_{TD}^2}{2} S_{ref} C_{LTD} = W$$

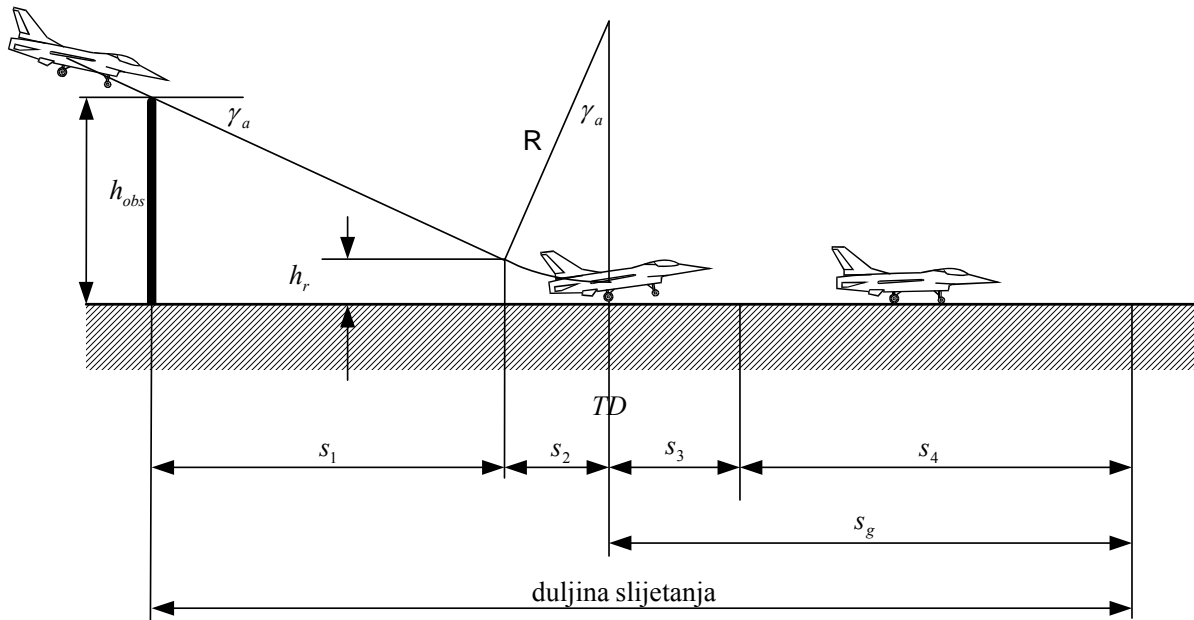
Diobom ove jednadžbe s prethodnom, s obzirom da je $V_{TD} = 1.15 V_{stall}$, dobivamo:

$$C_{LTD} = \left(\frac{V_{stall}}{V_{TD}} \right)^2 C_{Lstall} = 0.756 C_{Lstall}$$

Zrakoplov dolazi na slijetanje bez pogona, s kutom γ_a koji odgovara pravocrtnom gibanju s konstatnom brzinom i s aerodinamičkom brzinom koja prema propisima treba biti malo veća ili jednaka $V_a = 1.3 \cdot V_{stall}$.

Slijetanje ima četiri dijela:

- prvi dio od visine h_{obs} do visine h_r , gdje započinje vertikalni zaokret,
- drugi dio je vertikalni zaokret od visine h_r do dodira zadnjih kotača s pistom,
- treći dio je do dodira prednjeg kotača s pistom i
- četvrti dio je usporavanje na pisti.



Slika 12-11

U prvom dijelu slijetanja zrakoplov nastavlja pravolinijsko spuštanje do visine h_r , koja mu odgovara za vertikalni zaokret da bi na kraju zaokreta tangirao pistu. U zaokretu pilot kontrolira polumjer s promjenom opterećenja n . Prijelaz od kraja zaokreta do dodira s pistom treba se ostvariti bez velike vertikalne brzine (manja od 1 m/s). Usporavanje na pisti ostvaruje se prvo aerodinamičkim kočnicama, zatim motorom ako zrakoplov to omogućuje i na kraju mehaničkim kočnicama na kotačima.

12.2.2 Prvi dio - spuštanje

Kao i za polijetanje, slijetanje se vrši isto uz vjetar. To znači ako imamo vjetar to je čeonu vjetar.

Visina h_{obs} , odakle počinje slijetanje, ista je kao za polijetanje. Na tu visinu zrakoplov treba doći s brzinom većom ili jednakom $1.3 \cdot V_{stall}$, bez pogona s kutom spuštanja:

$$\tan|\gamma_a| = \frac{C_D}{C_L}$$

Onda će se on spuštati pravocrtno s konstantnom brzinom do visine h_r ($h_r \leq h_{obst}$) koja mu odgovara za početak zaokreta u drugom dijelu. Prijedni put u prvom dijelu od visine h_{obst} do visine h_r ima horizontalnu projekcija

$$x_l = \frac{h_{obst} - h_r}{\tan \gamma_a}$$

Visinu h_r biramo tako da bude

$$h_r = R(1 - \cos \gamma_a)$$

u kojoj je

$$R = \frac{V_{sr}^2}{g} \frac{1}{n_{sr} - \cos \gamma_{sr}}$$

U vertikalnom zaokretu brzina opada. Srednja brzina na ovom dijelu treba biti $1.225V_{stall}$ (srednja vrijednost od $V_r = V_a$ do V_{TD}) pa je srednja vrijednost opterećenja

$$n_{sr} = \frac{\frac{\rho V_{sr}^2}{2} S_{ref} C_{LTD}}{W} = \frac{\frac{\rho (1.225 \cdot V_{stall})^2}{2} S_{ref} 0.756 \cdot C_{Lmax}}{W} = 1.13$$

I ovdje kao i u procjeni polumjera pri polijetanju, uzimamo da je $\cos \gamma_{sr} \approx 1$ Prema tome za ove uvjete bit će polumjer

$$R \approx \frac{(1.225 V_{stall})^2}{g(1.134 - 1)} = 11.1 \frac{V_{stall}^2}{g}$$

12.2.3 Drugi dio - zaokret

Dio leta zrakoplova s visine h_r , gdje ima kut poniranja γ_a , do horizontalnog leta $\gamma = 0$ kad bi zrakoplov trebao imati visinu $h = 0$, je zaokret u vertikalnoj ravnini određen jednadžbama:

$$m \frac{dV}{dt} = -D - W \sin \gamma$$

$$mV \frac{d\gamma}{dt} = L - W \cos \gamma$$

$$\frac{dx}{dt} = V_K \cos \gamma$$

$$\frac{dz}{dt} = V_K \sin \gamma$$

Ako želimo zrakoplov s visine h_r i s kutom poniranja γ_a , spustiti na pistu u vertikalnom zaokretu po kružnici, onda ga treba voditi po kružnici čiji je polumjer

$$R = \frac{h_r}{1 - \cos \gamma_a}.$$

Da bi zrakoplov imao taj R tijekom zaokreta, potrebno je u svakom trenutku opterećenje:

$$n_{potrebno} = \frac{V^2}{gR} + \cos \gamma$$

koje ovisi o brzini i kutu. To potrebno opterećenje postizemo promjenom koeficijenta uzgona prema jednadžbi:

$$n = \frac{\rho V^2 S_{ref} C_L}{2W}.$$

Ako se zrakoplov kretao po kružnici konstantnog polumjera R , onda je duljina drugog dijela slijetanja:

$$s_2 = R \sin \gamma_a.$$

Kad je zrakoplov dodirnuo pistu, gotov je drugi dio slijetanja. Pilot postavlja kormilo visine na nulu, i zrakoplov započinje treći dio slijetanja.

12.2.4 Treći dio - rotacija zrakoplova

U ovom dijelu polijetanja zrakoplov se giba na zadnjim kotačima po pisti i okreće se dok prednji kotač ne dodirne pistu. Za to gibanje koristimo isti model koji smo koristili u drugom dijelu polijetanja, jer je to isto gibanje samo u suprotnom smjeru. Za razliku u polijetanju, u slijetanju nemamo pogonsku silu. Kao i u polijetanju u ovom dijelu nećemo uzeti u obzir utjecaj vjetrova i smatrat ćemo da je kut brzine $\gamma \approx 0$.

Moment otpora oslonca (zadnjih kotača) isti je kao u polijetanju (slika 9-5):

$$M^R = -R r \cdot [\cos(\vartheta + \varepsilon) + \mu \sin(\vartheta + \varepsilon)]$$

a jednadžba otpora oslonca R se pojednostavljuje zato što nema pogonske sile i zato što pretpostavljamo da je $\gamma \approx 0$:

$$R = W - L \cos \gamma + D \sin \gamma - T \sin \gamma \approx W - L,$$

Jednadžba gibanja središta mase ima oblik:

$$\dot{V}_K m = -D - \mu R \cos \gamma - (W - R) \sin \gamma \approx -D - \mu R.$$

Kao i u slučaju propinjanja (drugog dijela) u polijetanju, i ovdje pri slijetanju imamo nepoznate funkcije V , q , \mathcal{G} i s , koje trebamo odrediti iz diferencijalnih jednadžba:

$$m \frac{dV}{dt} = -D - \mu R$$

$$I_y \frac{dq}{dt} = M + M^R$$

$$\frac{d\mathcal{G}}{dt} = q$$

$$\frac{ds}{dt} = V,$$

S obzirom da je $\gamma \approx 0$ bit će $\alpha = \mathcal{G}$. U trenutku dodira s pistom pilot anulira otklon kormila visine pa je u ovom dijelu slijetanja $\delta_m = 0$. Zato su aerodinamički koeficijenti C_m i C_L promjenljivi u funkciji kuta \mathcal{G} :

$$C_m = C_{m0} + C_{m\alpha} \mathcal{G}$$

$$C_L = C_{L0} + C_{L\alpha} \mathcal{G}.$$

Diferencijalnim jednadžbama treba pridružiti i algebarske jednadžbe:

$$R = W - L$$

$$M^R = -R r \cdot [\cos(\mathcal{G} + \varepsilon) + \mu \sin(\mathcal{G} + \varepsilon)].$$

Tijekom trećeg dijela kut propinjanja zrakoplova \mathcal{G} se smanjuje od početne vrijednosti s kojom smo dotakli pistu (na kraju zaokreta) do vrijednost \mathcal{G}_0 koja je određena geometrijom podvoza kada prednji kotač dodiruje pistu.

12.2.5 Četvrti dio - usporavanje

Na kraju rotacije zrakoplova brzina je paralelna pisti. Tada, ako je to moguće, zrakoplov koči aerodinamički i motorom, a na kraju i kočnicama na kotačima. Model gibanja zrakoplova na pisti isti je kao u zalijetanja pri polijetanju, samo što je pogonska sila negativna konstantna vrijednost koja odgovara kočenju motorom ili je nema:

$$m \frac{dV_K}{dt} = T_0 - D - \mu \cdot (W - L) \equiv F$$

$$\frac{dx}{dt} = V_K$$

gdje je sila kočenja motorom $T_0 < 0$ obično konstantna. Za razliku od polijetanja, na početku ovog dijela imamo aerodinamičku brzinu V_R , a na kraju je ona V_0 (ukoliko ima vjetra)

$$s_4 = \int_{V_R}^{V_0} \frac{V dV}{a(V)} - |V_W| \int_{V_R}^{V_0} \frac{dV}{a(V)}$$

$$a = \frac{T_0}{m} - \frac{\rho V^2}{2m} S(C_D - \mu C_L) - \mu g,$$

pa je ubrzanje te sile

$$a = \frac{F}{m} = A - CV^2 < 0,$$

gdje je V aerodinamička brzina, a konstante su:

$$A = \frac{T_0}{m} - \mu g$$

$$C = \frac{\rho S}{2m} (C_{D0} + KC_L^2 - \mu C_L)$$

Napadni kut gotovo je uvijek jednak nuli.

A Matrični zapis vektora

A.1 Baza koordinatnog sustava

Svaki Dekartov koordinatni sustav određen je s tri jedinična vektora njegovih koordinatnih osi:

$$\vec{b}_x \quad \vec{b}_y \quad \vec{b}_z$$

koje zovemo baza koordinatnog sustava. U slučaju desnog koordinatnog sustava (uvijek ćemo se služiti desnim koordinatnim sustavom), prva dva vektora pomnožena vektorski daju treći (drugi pomnožen s trećim daje prvi, a treći s prvim daje drugi). Bilo koji vektor \vec{V} bit će u tom koordinatnom sustavu određen jednačinom:

$$\vec{V} = V_x \vec{b}_x + V_y \vec{b}_y + V_z \vec{b}_z$$

u kojoj su V_x V_y V_z projekcije vektora \vec{V} na osi koordinatnog sustava A. Uvodimo oznaku za matricu od jednog stupca koju čine tri komponente jednog vektora:

$$\mathbf{V}^A = \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix} = [V_x \quad V_y \quad V_z]^T$$

i matricu od jednog stupca koju čine tri jedinična vektora nekog koordinatnog sustava

$$\vec{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} \vec{b}_x \\ \vec{b}_y \\ \vec{b}_z \end{bmatrix} = [\vec{b}_x \quad \vec{b}_y \quad \vec{b}_z]^T$$

Tu matricu od tri jedinična vektora nekog koordinatnog sustava zovemo baza toga koordinatnog sustava. Matrice označavamo *masnim* slovima. Indeks gore označava u kojemu su koordinatnom sustavu zadane komponente vektora i izostavljamo ga ako se podrazumijeva u kojem su koordinatnom sustavu dane komponente. S ovim oznakama bit će:

$$\vec{V} = (\vec{\mathbf{b}})^T \mathbf{V}^A = (\mathbf{V}^A)^T \vec{\mathbf{b}}$$

ili

$$\mathbf{V}^A = \vec{\mathbf{b}} \vec{V}$$

A.2 Vektorski i skalarni produkt vektora

Poznate su nam komponente \mathbf{C} i \mathbf{D} dvaju vektora u koordinatnom sustavu čija je baza $\vec{\mathbf{b}}$

$$\vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{b}}^T \mathbf{C}$$

$$\vec{\mathbf{D}} = \vec{\mathbf{b}}^T \mathbf{D}$$

Želimo matrično izračunati komponente u istom koordinatnom sustavu od skalarnog i vektorskog produkta:

$$S = \vec{\mathbf{C}} \cdot \vec{\mathbf{D}}$$

$$\vec{\mathbf{A}} = \vec{\mathbf{C}} \times \vec{\mathbf{D}}$$

Skalarni produkt lako nalazimo prema definiciji:

$$S = \mathbf{C}^T \vec{\mathbf{b}} \cdot \vec{\mathbf{b}}^T \mathbf{D} = \mathbf{C}^T \mathbf{D},$$

jer je $\vec{\mathbf{b}} \vec{\mathbf{b}}^T$ jedinična matrica.

Da bi smo odredili komponente vektorskog produkta, pomnožimo skalarno jednadžbu vektorskog produkta

$$\vec{\mathbf{b}}^T \mathbf{A} = \vec{\mathbf{C}} \times (\vec{\mathbf{b}}^T \mathbf{D})$$

s bazom $\vec{\mathbf{b}}$. Dobivamo:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \vec{\mathbf{b}} \cdot (\vec{\mathbf{C}} \times \vec{\mathbf{b}}^T \mathbf{D}) \\ &= \vec{\mathbf{b}} \cdot \begin{bmatrix} \vec{\mathbf{C}} \times \vec{b}_x & \vec{\mathbf{C}} \times \vec{b}_y & \vec{\mathbf{C}} \times \vec{b}_z \end{bmatrix} \mathbf{D} \end{aligned}$$

Kako je:

$$\begin{aligned} (\vec{b}_x C_x + \vec{b}_y C_y + \vec{b}_z C_z) \times \vec{b}_x &= -C_y \vec{b}_z + C_z \vec{b}_y \\ (\vec{b}_x C_x + \vec{b}_y C_y + \vec{b}_z C_z) \times \vec{b}_y &= C_x \vec{b}_z - C_z \vec{b}_x \\ (\vec{b}_x C_x + \vec{b}_y C_y + \vec{b}_z C_z) \times \vec{b}_z &= -C_x \vec{b}_y + C_y \vec{b}_x \end{aligned}$$

bit će:

$$\vec{\mathbf{b}} \cdot (\vec{\mathbf{C}} \times \vec{\mathbf{b}}^T) = \begin{bmatrix} \vec{b}_x \\ \vec{b}_y \\ \vec{b}_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -C_y \vec{b}_z + C_z \vec{b}_y & C_x \vec{b}_z - C_z \vec{b}_x & -C_x \vec{b}_y + C_y \vec{b}_x \end{bmatrix}$$

ili

$$\vec{\mathbf{b}} \cdot (\vec{\mathbf{C}} \times \vec{\mathbf{b}}^T) = \begin{bmatrix} 0 & -C_z & C_y \\ C_z & 0 & -C_x \\ -C_y & C_x & 0 \end{bmatrix}$$

Ovu antisimetričnu matricu koja ima nule na glavnoj dijagonali, sastavljenu od komponenti vektora nazivamo kososimetrična matrica. Obično je obilježavamo sa $\tilde{\mathbf{C}}$. Tako konačno dobivamo matricu \mathbf{A} od komponenti vektorskog produkta:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -C_z & C_y \\ C_z & 0 & -C_x \\ -C_y & C_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{D}$$

Zapamtit ćemo da vektorski produkt dvaju vektora, čije su komponente poznate, ima komponente koje se dobivaju matričnim množenjem kososimetrične matrice prvoga vektora s matricom od jednog stupca drugog vektora.

A.3 Derivacija vektora

U dinamici leta vrlo se često susrećemo s problemom koji možemo formulirati ovako: u nekom koordinatnom sustavu B, koji rotira poznatom kutnom brzinom $\vec{\Omega}$ (poznate komponente p, q i r duž osi toga koordinatnog sustava), poznate su nam komponente duž osi toga koordinatnog sustava od vektora \vec{V}

$$\mathbf{V} = [u \quad v \quad w]^T$$

koje su funkcije vremena, a nama su potrebne komponente (duž osi toga istog koordinatnog sustava B) derivacije po vremenu vektora \vec{V} . Obilježimo tu derivaciju sa \vec{a} .

Ako je $\vec{\mathbf{b}}$ baza promatranog koordinatnog sustava, onda je

$$\vec{V} = \vec{\mathbf{b}}^T \mathbf{V}.$$

Po definiciji, tražena derivacija je

$$\vec{\mathbf{a}} = \frac{d}{dt}(\vec{\mathbf{b}}^T \mathbf{V}) = \frac{d\vec{\mathbf{b}}^T}{dt} \mathbf{V} + \vec{\mathbf{b}}^T \frac{d\mathbf{V}}{dt}.$$

Komponente bilo kojeg vektora, tj. matricu komponenata, dobivamo kad dani vektor pomnožimo skalarno ispred s bazom koordinatnog sustava:

$$\mathbf{a} = \vec{\mathbf{b}} \dot{\vec{\mathbf{b}}}^T \mathbf{V} + \dot{\mathbf{V}}$$

Napomenimo najprije da izvod po vremenu komponenata koje obilježavamo sa $\dot{\mathbf{V}} = [\dot{u} \quad \dot{v} \quad \dot{w}]^T$ nije isto što i komponente izvoda koje obilježavamo sa \mathbf{a} . Kao što vidimo, razlika je član $\vec{\mathbf{b}} \dot{\vec{\mathbf{b}}}^T \mathbf{V}$. Razvijmo produkt $\vec{\mathbf{b}} \dot{\vec{\mathbf{b}}}^T$.

Kako je derivacija po vremenu bilo kojeg jediničnog vektora jednaka vektorskom produktu kutne brzine toga jediničnog vektora te samog jediničnog vektora, a sva tri jedinična vektora imaju istu kutnu brzinu koja je jednaka kutnoj brzini koordinatnog sustava B, bit će:

$$\dot{\vec{b}}\vec{b}^T = \vec{b} \vec{\Omega} \times \vec{b}^T,$$

a prema definiciji kososimetrične matrice, na desnoj strani je upravo kososimetrična matrica kutne brzine koordinatnog sustava B, tj.

$$\dot{\vec{b}}\vec{b}^T = \tilde{\Omega}.$$

Kako vidimo, dobiveni rezultat je koso simetrična matrica komponenti trenutne kutne brzine $\Omega = [p \quad q \quad r]^T$ koordinatnog sustava B, te je

$$\mathbf{a} = \tilde{\Omega}\mathbf{V} + \dot{\mathbf{V}}.$$

Prema tomu, zapamtimo, ako vektor \vec{V} ima komponente u v w poznate u koordinatnom sustavu B čija je kutna brzina $\Omega = [p \quad q \quad r]^T$, onda derivacija po vremenu vektora \vec{V} ima komponente (u koordinatnom sustavu B)

$$\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix}$$

Moguće je $\dot{\mathbf{V}} = [\dot{u} \quad \dot{v} \quad \dot{w}]^T$ nazvati relativna derivacija vektora \vec{V} , jer ona ne uzima u obzir rotaciju koordinatnih osi, dok apsolutna derivacija jest zbroj relativne derivacije i člana zbog rotacije koordinatnih osi. U jednadžbi apsolutna derivacija nalazi se na lijevoj strani, a na desnoj strani prvi član je posljedica rotacije koordinatnog sustava B, a drugi član predstavlja relativnu derivaciju.

A.4 Matrice transformacija

Kad izračunavamo složene probleme mehanike leta kao što je let zrakoplova, tada primjenjujemo znanja iz više oblasti. Na primjer, aerodinamičke sile određujemo prema teoriji i praksi aerodinamike, pogonske sile prema konstrukciji motora, a sila Zemljine teže određena je u geofizici. Tako se susrećemo s problemom da je jedna sila poznata u jednom koordinatnom sustavu, druga u drugomu, treća u trećemu, a mi želimo kretanje tijela u

četvrtome koordinatnom sustavu. Ovaj problem nameće potrebu za nekim jednostavnim načinom prijelaza iz jednoga koordinativnog sustava u drugi, što znači ne zadržavati se na problemu određivanja komponenti vektora u nekom koordinatnom sustavu ako su one poznate u drugome. Za rješenje tog problema služiti ćemo se matricama transformacija, jer je matrični račun pogodan za rad na računalu.

A.4.1 Definicija i svojstva matrice transformacije

Ako imamo neki drugi desni koordinatni sustav čija je matrica jediničnih vektora $\vec{\mathbf{b}}$ (baza koordinatnog sustava B), onda je taj isti vektor \vec{V} u tom drugom koordinatnom sustavu:

$$\vec{V} = (\vec{\mathbf{b}})^T \mathbf{V}^B$$

te mora biti:

$$(\vec{\mathbf{a}})^T \mathbf{V}^A = (\vec{\mathbf{b}})^T \mathbf{V}^B$$

Množenjem ove matrice ispred s matricom $\vec{\mathbf{b}}$ dobivamo:

$$\mathbf{V}^B = \vec{\mathbf{b}} \vec{\mathbf{a}}^T \mathbf{V}^A$$

Produkt matrica $\vec{\mathbf{b}} \vec{\mathbf{a}}^T$ nazivamo *matricom transformacije u koordinatni sustav B iz koordinatnog sustava A*, te je označavamo sa \mathbf{L}_{BA} , tj. bit će:

$$\mathbf{L}_{BA} = \vec{\mathbf{b}} \vec{\mathbf{a}}^T = \begin{bmatrix} \vec{b}_x \\ \vec{b}_y \\ \vec{b}_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{b}_x \vec{a}_x & \vec{b}_x \vec{a}_y & \vec{b}_x \vec{a}_z \\ \vec{b}_y \vec{a}_x & \vec{b}_y \vec{a}_y & \vec{b}_y \vec{a}_z \\ \vec{b}_z \vec{a}_x & \vec{b}_z \vec{a}_y & \vec{b}_z \vec{a}_z \end{bmatrix}$$

ili

$$\mathbf{L}_{BA} = \begin{bmatrix} a_x^b & a_y^b & a_z^b \end{bmatrix}.$$

Korisno je znati zapis ove matrice u računalu npr. u FORTRANU ona ima oblik

$$\mathbf{L}_{BA} = \begin{bmatrix} L(1,1) & L(2,1) & L(3,1) \\ L(1,2) & L(2,2) & L(3,2) \\ L(1,3) & L(2,3) & L(3,3) \end{bmatrix}$$

Matrica transformacije ima dimenzije 3x3 (kvadratna trećega reda). Njen član ℓ_{ij} predstavlja kosinus kuta između osi “i koordinatnog sustava B” i osi “j koordinatnog sustava A”.

Prvo svojstvo matrice transformacije dobivamo polazeći od jednakosti:

$$\mathbf{V}^B = \mathbf{L}_{BA} \mathbf{V}^A$$

Množenjem inverznom matricom ispred dobivamo:

$$\mathbf{L}_{BA}^{-1} \mathbf{V}^B = \mathbf{V}^A$$

te je prvo svojstvo matrice transformacije

$$\mathbf{L}_{AB} = \mathbf{L}_{BA}^{-1}.$$

Drugo svojstvo matrice transformacije dobivamo iz jednakosti intenziteta vektora

$$(\mathbf{V}^B)^T \mathbf{V}^B = (\mathbf{V}^A)^T \mathbf{V}^A$$

iz koje slijedi:

$$(\mathbf{V}^B)^T \mathbf{L}_{BA} \mathbf{V}^A = (\mathbf{V}^A)^T \mathbf{V}^A$$

$$(\mathbf{V}^B)^T \mathbf{L}_{BA} = (\mathbf{V}^A)^T$$

$$\mathbf{L}_{BA}^T \mathbf{V}^B = \mathbf{V}^A$$

$$\mathbf{L}_{BA}^T = \mathbf{L}_{AB}.$$

To je vrlo važno svojstvo matrice transformacije jer je mnogo lakše transponirati matricu negoli odrediti njenu inverznu matricu. Iz ove jednadžbe slijedi i zaključak da je determinanta matrice transformacije jednaka jedinici:

$$|\mathbf{L}_{BA}| = 1.$$

Zbroj kvadrata članova jednog stupca ili jednog retka bit će zbroj kvadrata kosinusa kutova koje čini jedna od osi s osima drugoga koordinatnog sustava, te taj zbroj mora biti jednak jedinici.

Ako kososimetričnu matricu treba množiti s matricom transformacije ispred \mathbf{L}_{PE} , onda će se ona transformirati, tj. sve će komponente iz jednog koordinatnog sustava prijeći u komponente drugoga sustava, a matrica transformacije bit će iza novo oblikovane kososimetrične matrice

$$\mathbf{L}_{PE} \tilde{\mathbf{C}}^E = \tilde{\mathbf{C}}^P \mathbf{L}_{PE}.$$

Da bismo dokazali ovo svojstvo, pretpostavimo dva različita koordinatna sustava "E" i "P". Vektorsko množenje možemo obaviti u oba koordinatna sustava:

$$\tilde{\mathbf{A}}^E \mathbf{B}^E = \mathbf{C}^E$$

$$\tilde{\mathbf{A}}^P \mathbf{B}^P = \mathbf{C}^P.$$

Kako je

$$\mathbf{L}_{PE} \mathbf{C}^E = \mathbf{C}^P,$$

mora biti

$$\mathbf{L}_{PE} \tilde{\mathbf{A}}^E \mathbf{B}^E = \tilde{\mathbf{A}}^P \mathbf{B}^P$$

odakle dobivamo:

$$\mathbf{L}_{PE} \tilde{\mathbf{A}}^E = \tilde{\mathbf{A}}^P \mathbf{L}_{PE}.$$

Ova jednadžba pokazuje kako množenjem ispred, kososimetrične matrice sastavljene od komponenata vektora u koordinatni sustav "E" s matricom transformacije, dobivamo kososimetričnu matricu istog vektora, ali sastavljenu od komponenata u koordinatnom sustavu "P" pomnoženu iza s istom matricom transformacije, što ima za posljedicu transformaciju vektorskog produkta u matričnom obliku:

$$\mathbf{L}_{PE} (\tilde{\mathbf{A}}^E \mathbf{B}^E) = \mathbf{L}_{PE} \tilde{\mathbf{A}}^E \mathbf{B}^E = \tilde{\mathbf{A}}^P \mathbf{L}_{PE} \mathbf{B}^E = \tilde{\mathbf{A}}^P \mathbf{B}^P.$$

A.4.2 Određivanje matrice transformacije pomoću kutova

Vrijednosti članova matrice transformacija \mathbf{L}_{BA} ovise o položaju koordinatnog sustava B u odnosu na koordinatni sustav 1. U mehanici postoje tri načina za određivanje položaja jednog koordinatnog sustava u odnosu na drugi koordinatni sustav. To su: Eulerovi kutovi, de Sparreovi kutovi i Hamilton - Rodriguezovi parametri.

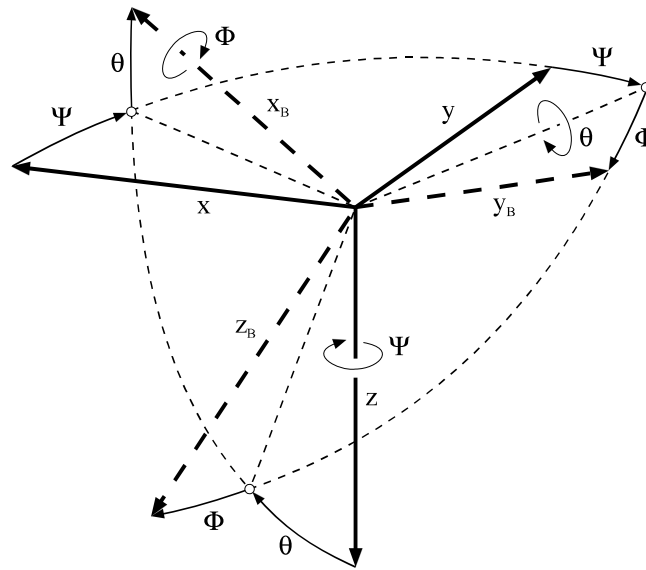
Eulerovi kutovi ne primjenjuju se u mehanici leta, već tzv. de Sparreovi kutovi, te ćemo se i mi koristiti njima. Zadani koordinatni sustav \mathbf{B} zaokrenut je u odnosu na koordinatni sustav \mathbf{A} : za kut ψ oko z osi, za kut ϑ oko novog položaja y osi i konačno za kut ϕ oko najnovijeg položaja x osi. Te kutove ϕ ϑ ψ nazivamo de Sparreovi kutovi (sl.1).

Matricu transformacije odredit ćemo postupno od ta tri kuta. Promatrat ćemo transformaciju \mathbf{L}_{BA} (u B iz A) kao rezultat triju sukcesivnih transformacija:

- 1) za kut ψ oko treće osi $\mathbf{L}_z(\psi)$,
- 2) za kut ϑ oko druge osi $\mathbf{L}_y(\vartheta)$,
- 3) za kut ϕ oko prve osi $\mathbf{L}_x(\phi)$.

Svako od tih transformacija odgovara po jedna matrica transformacije. Rezultat svake sljedeće transformacije jest produkt matrice transformacije ispred vektora. Tako će poslije prve transformacije (rotacija za kut ψ oko treće osi) komponente vektora \vec{V} biti

$$\mathbf{L}_z(\psi) \mathbf{V}^A,$$



Slika 1. De Sparreovi kutovi

poslije druge transformacije (rotacija za kut ϑ oko druge osi) bit će

$$\mathbf{L}_y(\vartheta)\mathbf{L}_z(\psi)\mathbf{V}^A$$

i poslije treće transformacije (rotacija za kut ϕ oko prve osi), bit će

$$\mathbf{L}_x(\phi)\mathbf{L}_y(\vartheta)\mathbf{L}_z(\psi)\mathbf{V}^A.$$

Prema tome vidimo da je matrica transformacija u koordinatni sustav B iz koordinatnog sustava A

$$\mathbf{L}_{BA} = \mathbf{L}_x(\phi)\mathbf{L}_y(\vartheta)\mathbf{L}_z(\psi).$$

Koristeći se definicijom matrice transformacija, dobivamo:

$$\mathbf{L}_x(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}_y(\vartheta) = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & 0 & -\sin \vartheta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \vartheta & 0 & \cos \vartheta \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}_z(\psi) = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Produkt svih triju matrica transformacije daje:

$$\mathbf{L}_{BA} = \begin{bmatrix} c\vartheta c\psi & c\vartheta s\psi & -s\vartheta \\ -c\phi s\psi + s\phi s\vartheta c\psi & c\phi c\psi + s\phi s\vartheta s\psi & s\phi c\vartheta \\ s\phi s\psi + c\phi s\vartheta c\psi & -s\phi c\psi + c\phi s\vartheta s\psi & c\phi c\vartheta \end{bmatrix}$$

Radi kraćeg pisanja označili smo sa “s” sinusnu, a sa “c” kosinusnu funkciju. Općenito, možemo reći kako je matrica transformacija jedna matrična funkciju od tri parametra te je

$$\mathbf{L}_{BA} = \mathbf{L}_X(\varphi) \cdot \mathbf{L}_Y(\vartheta) \cdot \mathbf{L}_Z(\psi) = \mathbf{L}(\varphi, \vartheta, \psi).$$

U korisničkoj biblioteci možemo napraviti potprogram u kojemu su ulazni parametri ta tri kuta (u radijanima) φ , ϑ i ψ , a izlaz je matrica transformacije \mathbf{L}_{BA} , dimenzija 3x3.

A.4.3 Derivacija matrice transformacije

Neka je vektor \vec{r} konstantan u prostoru u kojemu se nalazi koordinatni sustav A koji miruje. Matrica \mathbf{r}^A (koju čine komponente toga vektora u koordinativnom sustavu A) bit će konstantna matrica. Koordinatni sustav B ima kutnu brzinu $\vec{\Omega}_{B/A}$ (u odnosu na koordinatni sustav A), te zato su komponente konstantnog vektora u koordinatnom sustavu B promjenljive veličine, a to znači da su članovi matrice \mathbf{r}^B funkcije vremena. U svakom trenutku postoji matrica transformacija \mathbf{L}_{BA} koja je također funkcija vremena, takva da je

$$\mathbf{r}^B = \mathbf{L}_{BA} \mathbf{r}^A$$

te je

$$\dot{\mathbf{r}}^B = \dot{\mathbf{L}}_{BA} \mathbf{r}^A,$$

jer su članovi matrice \mathbf{r}^A konstante. Sa $\dot{\mathbf{r}}^B$ označili smo matricu koju čine derivacije komponenti vektora \vec{r} u koordinatnom sustavu B. Komponente derivacije bilo kojeg vektora u koordinatnom sustavu B koji rotira kutnom brzinom $\vec{\Omega}_{B/A}$ bit će u koordinatnom sustavu B

$$\tilde{\Omega} \mathbf{r}^B + \dot{\mathbf{r}}^B.$$

Međutim, kako je vektor \vec{r} konstantan, njegova derivacija je nulti vektor, te je

$$\dot{\mathbf{r}}^B = -\tilde{\Omega} \mathbf{r}^B.$$

Zamijenimo li u ovoj jednadžbi $\dot{\mathbf{r}}^B$ sa $\dot{\mathbf{L}}_{BA} \mathbf{r}^A$ i \mathbf{r}^B sa $\mathbf{L}_{BA} \mathbf{r}^A$, dobivamo traženi izvod matrice transformacije

$$\dot{\mathbf{L}}_{BA} = -\tilde{\Omega}_{B/A} \mathbf{L}_{BA}.$$

B ATMOSFERA

B.1 Opće o atmosferi

Prema kemijskom sastavu Zemljinu atmosferu čine: dušik (70 %), kisik (21 %), vodena para ($\cong 3$ %), vodik, ugljik i u veoma malim količinama plemeniti plinovi. Teško je reći dokle se doseže atmosfera, jer gustoća zraka pada s visinom i na kraju je tako mala da se ne može reći od koje visine više nema zraka. Obično se uzima da atmosfera prestaje na visinama od 2000 do 3000 km.

Cjelokupni Zemljin atmosferski omotač zemlje dijelimo na dva dijela:

- homosferu, koju čine tri sloja troposfera, stratosfera i mezosfera. Temeljna značajka homosfere je molekularno stanje plinova. Gornja granica homosfere je na 90 km visine.

- heterosferu, koju čine termosfera i egzosfera. U heterosferi počinju disocijacije molekula plinova pod utjecajem kozmičkih zraka, tj. molekule su razbijene na atome.

Između ovih slojeva postoje prijelazni slojevi od nekoliko stotina metara. Ti prijelazni slojevi imaju imena složena od imena prethodnoga sloja i nastavka "pauza". Tako je primjerice iznad troposfere tropopauza, a iznad stratosfere je stratopauza itd.

Od svih tih slojeva zapravo nas zanima samo troposfera i iznimno i stratosfera. Troposfera nije iste visine na svim geografskim širinama. Na našoj geografskoj širini ona doseže visinu oko 11 km, a u blizini ekvatora i do 16 Km. Ta visina se također mijenja i s godišnjom dobi; ljeti se povećava, a zimi smanjuje. U troposferi se nalazi oko 75 % ukupne mase atmosfere i osnovni dio vodene pare. Bitno obilježje troposfere jest smanjenje temperature ovisno o visini. Zimi i ljeti, poslije vedrih hladnih noći, mogu nastupiti inverzije temperature, kad temperatura u početku raste s visinom, a onda od neke visine počinje opadati. U troposferi mogu nastupiti značajna horizontalna, a rijetko i vertikalna strujanja zračne mase, koja nazivamo vjetrovima. Horizontalni vjetrovi nastaju zbog razlike tlaka na raznim mjestima Zemljine površine, dok su vertikalni vjetrovi posljedice prevelikih razlika temperature ovisno s visini.

Stratosfera, sljedeći sloj, ima donju granicu na 11 km i gornju na približno 50 km. Taj sloj ima konstantnu temperaturu do približno 30 Km. Od te visine do gornje granice sloja temperatura raste. Promjena temperaturnog gradijenta između troposfere i stratosfere zbiva se u uzanom međusloju od nekoliko stotina metara koji nazivamo tropopauza. U tom međusloju javljaju se velika pomicanja zračne mase od zapada prema istoku brzine i do 110 m/s.

Voda u obliku vodene pare nalazi se u atmosferi kao jedna od njenih sastavnica smeše. Nazivamo je vlaga i mjerimo je obično u postocima (najviše do 4 %). Vlaga naglo opada s visinom. Najveći dio cjelokupne vlage nalazi se u donjem graničnom sloju atmosfere. Konkretno, 60 % od ukupne vodene pare na sjevernoj polusferi je do 2 km visine, a 99 % do 10 km. To znači da vlagu postoji zapravo samo u troposferi.

B.2 Ubrzanje Zemljine teže

Zemljina površina ima oblik geoida. U mehanici leta taj se oblik obično zamjenjuje sfernim oblikom. U standardu ISO 5878 dani su polumjeri geoida r u zavisnosti od geografske širine φ . Kada se Zemljin geoid zamijeni sa sferom, onda se uzima polumjer

$$R = 6357 \text{ km} . \quad \text{B.1}$$

Atmosferu izučavamo u odnosu na zemlju. Zato je sila koja djeluje na element mase dm na visini h od razine mora i na geografskoj širini φ , vektorski zbroj gravitacijske sile i sile tromosti uslijed rotacije Zemlje. Gravitacijska sila koja djeluje na elementarnu masu, ako je Zemlja smatramo sfernim oblikom polumjera R , bit će:

$$\frac{\gamma M}{R^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{h}{R}\right)^2} dm \quad \text{B.2}$$

i ona je u pravcu od središta mase dm do središta zemlje, sa smjerom od središta mase dm prema središtu Zemlje.

Sila tromosti posljedica je koordinatnog sustava vezanog za Zemlju u odnosu na koji promatramo atmosferu. Po pravcu okomita je na osu zemlje, po smjeru od Zemljine osi, a njen je intenzitet

$$\Omega^2 (R + h) \cos \varphi \, dm$$

Rezultantu tih dviju sila nazivamo sila Zemljane teže. Jasno je da ubrzanje rezultante tih sila ne prolazi kroz središte Zemljinog geoida, a intenzitet tog ubrzanja složena je funkcija od φ i h . Tu funkciju s dovoljnom točnošću za geografske širine oko 45° zamjenjujemo jednadžbom:

$$g(\varphi, h) = \frac{g_N f(\varphi)}{\left(1 + \frac{h}{R}\right)^2}, \quad \text{B.3}$$

gdje je

$$g_N = 9.80616 \quad \text{B.4}$$

$$f(\varphi) = (1 - 0.0026372 \cos 2\varphi + 0.0000059 \cos^2 2\varphi) \quad \text{B.5}$$

Drugim riječima, za visinu mora ($h=0$) ubrzanje sile Zemljine teže je $g_N f(\varphi)$, a za geografsku širinu $\varphi = 45^\circ$, ubrzanje je $g_N = 9.80616 \text{ m/s}^2$. Za područja bliže ekvatoru ili polovima Zemlje treba pogledati standard ISO 5878. Radi lakšega izučavanja promjena tlaka u atmosferi, uvodi se geopotencijalna visina. Po definiciji geopotencijalne visine H bit će

$$g_N dH = g(h, \varphi) dh$$

Kako je

$$g(\varphi, h) = \frac{g_N f(\varphi)}{\left(1 + \frac{h}{R}\right)^2},$$

bit će diferencijal geopotencijalne visine

$$g_N dH = \frac{g_N f(\varphi)}{\left(1 + \frac{h}{R}\right)^2} dh.$$

Ako je ishodište geopotencijalne visine isto kao i ishodište realne visine (razina mora) postoji veza između realne i geopotencijalne visine:

$$H = \frac{f(\varphi)}{1 + \frac{h}{R}} h \quad \text{B.6}$$

i

$$h = \frac{H}{f(\varphi) - \frac{H}{R}} \quad \text{B.7}$$

B.3 Značajke vlažnog zraka

U mehanici leta potrebne su nam temeljne fizičke značajke zraka - gustoća, brzina zvuka u zraku, temperatura, tlak i vjetar. Sve te značajke zraka izučavaju na razini Međunarodne meteorološke organizacije. Za mjerenje atmosfere postoji niz meteoroloških stanica koje su postavljene na raznim mjestima Zemljine površine. Ispitivanja se obavljaju pomoću složenih meteoroloških uređaja kojima su opremljeni sondažni baloni, specijalni zrakoplovi, sondažne rakete te sateliti. Rezultati mjerenja se prikupljaju s raznih strana svijeta, obrađuju i objavljuju u obliku međunarodnih meteoroloških standarda

Navest ćemo bitne značajke tih ispitivanja koja nas posebno zanimaju u mehanici leta

Zrak je smjesa: dušika, kisika, vodika, ugljičnogdioksida, vodene pare i plemenitih plinova. Isključimo li problem onečišćenja zraka u gradovima i industrijskim središtima, svi sastojci zraka, osim vodene pare (pa i ugljinogdioksida i sumporovodika), u stalnom su međusobnom omjeru i čine suhi zrak. Ta činjenica da je suhi zrak uvijek istoga sastava omogućava nam da ga smatramo kao jednu sastavnicu vlažnog zraka, a druga je vodena para. Utvrđeno je da se suhi zrak ponaša kao idealni plin čija je plinska konstanta

$$R = 287.053 J / (K^0 kg). \quad B.8$$

Odnos J/kg ima dimenziju brzine na kvadrat, te možemo također napisati da je dimenzija plinske konstante $J/(K^0 kg) = [m^2 / (s^2 \cdot K)]$. Zato u anglosaksonskim jedinicama plinska konstanta ima dimenziju brzine na kvadrat po stupnju temperature:

$$R = 1716 ft^2 / (s^2 \cdot R) \quad B.9$$

Isto tako i vodena para se može promatrati kao idealni plin čija je plinska konstanta

$$R_v = \frac{8}{5} R. \quad B.10$$

U zraku oko nas pomiješani su suhi zrak i vodena para. Taj omjer vodene pare prema suhom zraku je vrlo promjenljiv. Zato vlažan zrak promatramo kao smjesu koja je okarakterizirana omjerom vlage prema suhom zraku.

Na vlažan zrak možemo primijeniti d'Alambertov zakon o parcijalnim tlakovima. Neka je na temperaturi T u volumenu V smjesa plinova $m_a + m_v$ (m_a je masa suhog zraka, a m_v masa vodene pare). Totalnim tlakom nazivamo tlak p na kome se nalazi smjesa u volumenu V i na temperaturi T . Ako je masa jedne komponente plinske smjese sama u toj istom volumenu smjese i na toj istoj temperaturi smjese T , onda će ona biti na parcijalnom tlaku. Po d'Alambertovu zakonu, zbroj parcijalnih tlakova jednak je ukupnom tlaku. S p_a označimo parcijalni tlak suhog zraka, a s e' parcijalni tlak vodene pare:

$$p = p_a + e'$$

Jednadžbe stanja komponenata suhog zraka i vodene pare kao idealnih plinova uzete u istom volumenu V i na istoj temperaturi T , kao i smjesa $m_a + m_v$, jesu

$$p_a V = m_a R T$$

$$e' V = m_v R_v T$$

Budući da je $R_v = \frac{8}{5} R$ druga jednadžba može se transformirati u oblik

$$\frac{5}{8}e'V = m_v RT .$$

Zbrajanjem prve i druge transformirane jednadžbe te imaju na umu da je

$$p_a = p - e'$$

$$\rho = \frac{m_a + m_v}{V} ,$$

dobivamo

$$\rho = \frac{p}{R \frac{3e'}{8p} T} . \quad \text{B.11}$$

Iz ove jednadžbe zaključujemo da, vlažan zrak možemo promatrati kao idealan plin

$$\rho = \frac{p}{R_s T} \quad \text{B.12}$$

samo što vlažan zrak ima plinsku konstantu R_s koja ovisi o odnosu parcijalnog tlaka vodene pare prema totalnom tlaku smjese e'/p :

$$R_s = \frac{R}{1 - \frac{3e'}{8p}} \quad \text{B.13}$$

To znači da i brzinu zvuka možemo odrediti pomoću jednadžbe za idealne plinove samo što treba uvest plinsku konstantu vlažnog zraka

$$a = \sqrt{kR_s T} ; \quad \text{B.14}$$

k je odnos specifične topline pri konstantnom tlaku i konstantnom volumenu:

$$k = c_p / c_v = 1.4 \quad \text{B.15}$$

Gustoća ili specifična masa zraka ρ kao i brzina zvuka a veličine su koje nam trebaju u dinamici leta. One se ne mjere, već računaju na osnovi izmjerenih vrijednosti u atmosferi: temperature T , totalnog tlaka p i relativne vlažnosti e'/p . Izmjerenu temperaturu T pomoću izmjerene relativne vlažnosti e'/p pretvorit ćemo u fiktivnu temperaturu τ i s njom ćemo računati tražene vrijednosti koristeći plinsku konstantu suhoga zraka

Za vlažan zrak kaže se da je zasićen pri danoj temperaturi i tlaku ako u zraku ima toliko vlage da voda ne može više isparavati na toj temperaturi i pri tom tlaku, tj. vodena para u vlažnom zraku i voda su u relativnoj ravnoteži. U intervalu od -20^0 do $+30^0$ C možemo koristiti empirijsku formulu za parcijalni tlak vodene pare u zasićenom vlažnom zraku izražen u milibarima ($10^{-5} Pa$).

$$e'_w = 6.107 \exp\left(\frac{AT - B}{T - C}\right), \quad \text{B.16}$$

gdje su

T	<273	>273
A	21.87	17.27
B	5972.	4714.
C	7.50	35.7

Dobiveni broj Pa parcijalnog tlaka vlage u zasićenom zraku možemo preračunati u anglosaksonske jedinice koristeći relaciju $3386 Pa = 1 in.Hg$. U meteorološkoj praksi, najčešće se koristi relativna vlažnost U koja predstavlja postotak parcijalnog tlaka vodene pare e' u odnosu na e'_w parcijalni tlak vlage u zasićenom vlažnom zraku (pri istoj temperaturi i tlaku vlažnoga zraka):

$$U = 100 \frac{e'}{e'_w} \quad \text{B.17}$$

B.4 Vertikalna ravnoteža

Ovisnost tlaka o visini zasniva se na hipotezi o vertikalnoj ravnoteži atmosfere. Prema toj hipotezi, težina horizontalnog sloja zraka elementarne debljine dh i proizvoljne površine A uravnotežava se razlikom sila tlaka s donje Ap i gornje strane $A(p + dp)$ na istu površinu A .

$$g\rho A dh = Ap - A(p + dp)$$

ili

$$dp = -g\rho dh.$$

U ovoj jednadžbi promjenljiva je s visinom ne samo gustoća zraka ρ već i ubrzanje sile Zemljišne teže g . Zato uvodimo na mjesto realne visine h geopotencijalnu visinu H . Prema definiciji o geopotencijalnoj visini, $gdh = g_N dH$, te je diferencijalna promjena tlaka obzirom na geopotencijalnu visinu

$$dp = -g_N \rho dH.$$

Uzima se da je $g_N = 9.80665 m/s^2$ ili u anglosaksonskim jedinicama $g_N = 32.174 ft/s^2$.

Gustoću možemo izraziti pomoću jednadžbe stanja vlažnog zraka

$$\rho = \frac{p}{R_s T},$$

u kojoj je

$$R_s = \frac{R}{1 - \frac{3e'}{8p}}$$

Oznaka R_s treba nas podsjetiti na to da je riječ o plinskoj konstanti smjese koju čini suhi zrak i vodena para, a e'/p odnos parcijalnog tlaka vlage prema totalnom tlaku vlažnog zraka. Tako dobivamo promjenu tlaka ovisno o visini:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g_n}{R_s T} dH \quad \text{B.18}$$

Integracijom od visine H_0 na kojoj je tlak p_0 do visine H na kojoj je tlak $p(H)$ dobivamo promjenu tlaka s visinom za poznatu ovisnost temperature o visini:

$$p(H) = p_0 \exp\left(-g_N \int_{H_0}^H \frac{dH}{R_s T(H)}\right) \quad \text{B.19}$$

To znači da možemo odrediti tlak na visini H ako znamo promjenu temperature T s visinom H , ali i vrijednost tlaka p_0 na visini H_0 . Obično uzimamo da je H_0 razina mora od koje mjerimo visinu, te je $H_0 = 0$.

U praksi pri sondaži atmosfere usvaja se hipoteza o vertikalnoj ravnoteži, te se ne mjeri promjena tlaka s visinom, već je računamo na temelju izmjerene temperature na raznim visinama. Zato je i plinska konstanta vlažnog zraka promjenljiva s visinom $R_s(H)$, a kako je poznat tlak pri zemlji p_0 , ova jednadžba omogućuje da odredimo tlak u ovisnosti o visini. Još je zanimljivije to što možemo obrnuto mjerenjem temperature, tlaka i relativne vlažnosti pomoću ove jednadžbi dobiti visinu mjerenja.

B.5 Standardna atmosfera

Iz svakodnevnoga života znamo da se stanje atmosfere značajno mijenja u ovisnosti o klimatskim uvjetima, godišnjim dobima, visini pa i tijekom jednog dana. Budući da aerodinamičke karakteristike letjelica bitno ovise o gustoći zraka i brzini zvuka, proračuni se u dinamici leta izvode za standardne (normalne) meteorološke uvjete. Ti standardni meteorološki uvjeti odgovaraju srednjim vrijednostima mjerenja u duljim razdobljima i na raznim mjernim mjestima. Oni čine tzv. standardnu, normalnu ili referentnu atmosferu. Utjecaj odstupanja meteoroloških uvjeta od normalnih veličina na let izučava se u teoriji poremećaja. Međunarodna organizacija za standardizaciju usvojila je tipične atmosfere u

ovisnosti o geografskoj širini (ISO 5878). Te tipične atmosfere obuhvaćaju zakonitost promjene najvažnijih parametara do visine 80 km. One se uzimaju u obzir pri proračunu performansi i projektiranju letjelica, pri obradi geofizičkih i meteoroloških podataka, za prikazivanje rezultata ispitivanja letjelica pod istim uvjetima. U tipičnoj atmosferi određena je promjena parametara atmosfere ovisno o visini. Međunarodna organizacija za standardizaciju propisala je standardnom atmosferom tipičnu atmosferu koja vrijedi za geografsku širinu $\varphi = 45^\circ$.

U standardnoj atmosferi zadane su promjene temperature T sa visinom H . U **troposferi**, od 0 do 11 km, u ISO standardima tj. za temperaturu u Kelvinovim stupnjevima $[^\circ K]$ i za visinu u metrima $[m]$:

$$T = T_{0N} + \beta H = 288.15 - 0.0065 \cdot H, \quad \text{B.20}$$

a u anglosaksonskim jedinicama kad je temperatura u Reaumurovim stupnjevima $[^\circ R]$ i visina i u stopama $[ft]$,

$$T = 519 - 0.00035745 \cdot H \quad \text{B.21}$$

U toj standardnoj atmosferi nema vlage i vlada vertikalna ravnoteža. U tim uvjetima u **troposferi** (do visine 11 km), rješenjem integrala koji daje vertikalna ravnoteža, dobivamo zakon promjene tlaka s visinom:

$$p = p_{0N} \left(1 + \frac{\beta}{T_{0N}} H \right)^{-\frac{g_0}{R\beta}} \quad \text{B.22}$$

- u ISO jedinicama (tlak u $[Pa]$ i visina u $[m]$)

$$p = 101325 \cdot \left(1 - 0.02256 \frac{H}{1000} \right)^{5.256}, \quad \text{B.23}$$

- a u anglosaksonskim jedinicama (visina u $[ft]$)

$$p = p_0 \cdot \left(1 - 0.00688 \frac{H}{1000} \right)^{5.256}. \quad \text{B.24}$$

gdje je $p_0 = 29.92 [in.Hg] = 2116.2 [lb/ft^2]$.

U **stratosferi** (od 11 Km visine do 20 Km), temperatura je konstantna

$$T = 216.6 \text{ } ^\circ K = 390.0 \text{ } ^\circ R, \quad \text{B.25}$$

te integracijom dobivamo diferencijalne jednadžbe vertikalne ravnoteže od donje granice stratosfere do bilo koje visine u stratosferi:

$$p = p_{H_0} \exp\left(-g_N \int_{H_0}^H \frac{dH}{RT(H)}\right) = p_{H_0} \exp\left(-g_N \frac{H - H_0}{R \cdot T_{H_0}}\right) \quad \text{B.26}$$

- u ISO sustavu (visina u metrima, a tlak u paskalima)

$$p = 22632 \cdot \exp\left(-0.1577 \frac{H - 11000}{1000}\right), \quad \text{B.27}$$

- ili u anglosaksonskim jedinicama (visina u [ft])

$$p = p_{36089} \cdot \exp\left(-0.04806 \frac{H - 36089}{1000}\right). \quad \text{B.28}$$

a tlak se može mjeriti u $[lb/ft^2]$ ili u $[in.Hg]$. U prvom slučaju je tlak između troposfere i stratosfere $p_{36089} = 472.7 [lb/ft^2]$, a u drugom $p_{36089} = 6.684 [in.Hg]$.

Gustoća zraka i brzina zvuka ovisno o visini izračunavaju se za standardnu atmosferu po jednadžbama:

- u ISO jedinicama (gustoća u $[Kg/m^3]$, tlak u $[Pa]$, temperatura u $[^{\circ}K]$) imaju oblik:

$$\rho_N = 0.003484 \cdot \frac{P_N}{T_N} \quad \text{B.29}$$

$$a_N = 20.05 \cdot \sqrt{T_N}$$

Na razini mora te jednadžbe daju:

$$\rho_{N0} = 1.225 \text{ kg}/m^3 \quad \text{B.30}$$

$$a_{N0} = 340.3 \text{ m}/s$$

- u anglosaksonskim jedinicama (gustoća u $[slug/ft^3] = [lb \cdot s^2/ft^4]$, tlak u $[lb/ft^2]$, temperatura u $[^{\circ}R]$) te jednadžbe imaju oblik

$$\rho_N = 5.826 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{P_N}{T_N} \quad \text{B.31}$$

$$a_N = 49.02 \cdot \sqrt{T_N},$$

što na razini mora daje:

$$\rho_{N0} = 2.3769 \text{ slug}/ft^3 \quad \text{B.32}$$

$$a_{N0} = 1116.4 \text{ ft}/s$$

Na mnogim zrakoplovima instrument za mjerenje tlaka ima skalu u [in.Hg]. Pri tome treba imati na umu da je $29.92[in.Hg] = 2116.2[lb/ft^2] = 101325 Pa$

Konačno, u normalnim uvjetima postoji veza između tlaka i temperature koju dobivamo eliminiramo visinu iz jednadžbi za promjenu tlaka i temperature. U troposferi je promjena tlaka s obzirom na visinu dana jednadžbom

$$p = p_0 \left(1 + \frac{\beta}{T_0} H \right)^{-\frac{g_n}{R\beta}},$$

a temperature

$$T = T_0 + \beta \cdot H.$$

Eliminacijom visine dobivamo jednadžbu po kojoj svakom tlaku odgovara određena temperatura.

$$T = T_0 \left(\frac{p}{p_0} \right)^{-\frac{R\beta}{g_n}} \quad \text{B.33}$$

U sustavu ISO jedinica ta jednadžba ima oblik

$$T = 288.15 \cdot \left(\frac{p}{101325} \right)^{0.1903} \quad \text{B.34}$$

STANDARDNA ATMOSFERA ISO 2533

H	T	p	ρ	a	v
[m]	[K]	[N/m ²]	[Kg/m ³]	[m/s]	[m ² /s]
0	288.1	101325.	1.2250	340.3	0.146E-4
200	286.9	98946.	1.2017	339.5	0.148E-4
400	285.6	96612.	1.1787	338.8	0.151E-4
600	284.3	94323.	1.1560	338.0	0.153E-4
800	283.0	92078.	1.1337	337.2	0.156E-4
1000	281.7	89877.	1.1117	336.4	0.158E-4
1200	280.4	87719.	1.0900	335.7	0.161E-4
1400	279.1	85603.	1.0687	334.9	0.163E-4
1600	277.8	83528.	1.0476	334.1	0.166E-4
1800	276.5	81495.	1.0269	333.3	0.169E-4
2000	275.2	79502.	1.0066	332.5	0.171E-4
2200	273.9	77549.	0.9865	331.7	0.174E-4
2400	272.6	75635.	0.9667	331.0	0.177E-4
2600	271.3	73760.	0.9473	330.2	0.180E-4
2800	270.0	71923.	0.9281	329.4	0.183E-4
3000	268.7	70122.	0.9093	328.6	0.186E-4
3200	267.4	68359.	0.8907	327.8	0.189E-4
3400	266.1	66632.	0.8724	327.0	0.193E-4
3600	264.8	64940.	0.8545	326.2	0.196E-4
3800	263.5	63284.	0.8368	325.4	0.199E-4
4000	262.2	61662.	0.8194	324.6	0.203E-4
4200	260.9	60074.	0.8022	323.8	0.206E-4
4400	259.6	58519.	0.7854	323.0	0.210E-4
4600	258.3	56997.	0.7688	322.2	0.214E-4
4800	257.0	55508.	0.7525	321.4	0.217E-4
5000	255.7	54050.	0.7365	320.5	0.221E-4
5200	254.4	52623.	0.7207	319.7	0.225E-4
5400	253.1	51228.	0.7052	318.9	0.229E-4
5600	251.8	49862.	0.6899	318.1	0.233E-4
5800	250.5	48526.	0.6749	317.3	0.237E-4
6000	249.2	47219.	0.6601	316.5	0.242E-4

H [m]	T [K]	p [N/m ²]	ρ [Kg/m ³]	a [m/s]	γ [m ² /s]
6000	249.2	47219.	0.6601	316.5	0.242E-4
6200	247.9	45941.	0.6456	315.6	0.246E-4
6400	246.6	44692.	0.6314	314.8	0.250E-4
6600	245.3	43470.	0.6174	314.0	0.255E-4
6800	244.0	42275.	0.6036	313.1	0.260E-4
7000	242.7	41107.	0.5900	312.3	0.265E-4
7200	241.4	39966.	0.5767	311.5	0.270E-4
7400	240.1	38850.	0.5637	310.6	0.275E-4
7600	238.8	37760.	0.5508	309.8	0.280E-4
7800	237.5	36694.	0.5382	308.9	0.285E-4
8000	236.2	35653.	0.5258	308.1	0.290E-4
8200	234.9	34637.	0.5136	307.3	0.296E-4
8400	233.6	33644.	0.5017	306.4	0.302E-4
8600	232.3	32674.	0.4899	305.6	0.307E-4
8800	231.0	31727.	0.4784	304.7	0.313E-4
9000	229.7	30803.	0.4671	303.8	0.320E-4
9200	228.4	29900.	0.4560	303.0	0.326E-4
9400	227.1	29019.	0.4451	302.1	0.332E-4
9600	225.8	28159.	0.4344	301.3	0.339E-4
9800	224.5	27320.	0.4239	300.4	0.346E-4
10000	223.3	26502.	0.4135	299.5	0.352E-4
10200	222.0	25703.	0.4034	298.7	0.360E-4
10400	220.7	24924.	0.3935	297.8	0.367E-4
10600	219.4	24165.	0.3838	296.9	0.374E-4
10800	218.1	23424.	0.3742	296.0	0.382E-4
11000	216.8	22702.	0.3648	295.2	0.390E-4
11200	216.6	21998.	0.3537	295.1	0.402E-4
11400	216.6	21317.	0.3428	295.1	0.415E-4
11600	216.6	20658.	0.3322	295.1	0.428E-4
11800	216.6	20019.	0.3219	295.1	0.442E-4
12000	216.6	19400.	0.3119	295.1	0.456E-4
12200	216.6	18800.	0.3023	295.1	0.470E-4
12400	216.6	18218.	0.2929	295.1	0.485E-4
12600	216.6	17655.	0.2839	295.1	0.501E-4
12800	216.6	17109.	0.2751	295.1	0.517E-4
13000	216.6	16580.	0.2666	295.1	0.533E-4

H [m]	T [K]	p [N/m ²]	ρ [Kg/m ³]	a [m/s]	γ [m ² /s]
13000	216.6	16580.	0.2666	295.1	0.533E-4
13200	216.6	16067.	0.2584	295.1	0.550E-4
13400	216.6	15570.	0.2504	295.1	0.568E-4
13600	216.6	15089.	0.2426	295.1	0.586E-4
13800	216.6	14623.	0.2351	295.1	0.605E-4
14000	216.6	14171.	0.2279	295.1	0.624E-4
14200	216.6	13733.	0.2208	295.1	0.644E-4
14400	216.6	13308.	0.2140	295.1	0.664E-4
14600	216.6	12897.	0.2074	295.1	0.686E-4
14800	216.6	12498.	0.2010	295.1	0.707E-4
15000	216.6	12112.	0.1948	295.1	0.730E-4
15200	216.6	11738.	0.1887	295.1	0.753E-4
15400	216.6	11375.	0.1829	295.1	0.777E-4
15600	216.6	11024.	0.1773	295.1	0.802E-4
15800	216.6	10683.	0.1718	295.1	0.828E-4
16000	216.6	10353.	0.1665	295.1	0.854E-4
16200	216.6	10033.	0.1613	295.1	0.881E-4
16400	216.6	9723.	0.1564	295.1	0.909E-4
16600	216.6	9423.	0.1515	295.1	0.938E-4
16800	216.6	9132.	0.1468	295.1	0.968E-4
17000	216.6	8850.	0.1423	295.1	0.999E-4
17200	216.6	8577.	0.1379	295.1	0.103E-3
17400	216.6	8312.	0.1337	295.1	0.106E-3
17600	216.6	8055.	0.1295	295.1	0.110E-3
17800	216.6	7807.	0.1255	295.1	0.113E-3
18000	216.6	7566.	0.1217	295.1	0.117E-3
18200	216.6	7332.	0.1179	295.1	0.121E-3
18400	216.6	7106.	0.1143	295.1	0.124E-3
18600	216.6	6886.	0.1107	295.1	0.128E-3
18800	216.6	6674.	0.1073	295.1	0.132E-3
19000	216.6	6468.	0.1040	295.1	0.137E-3
19200	216.6	6268.	0.1008	295.1	0.141E-3
19400	216.6	6075.	0.0977	295.1	0.146E-3
19600	216.6	5887.	0.0947	295.1	0.150E-3
19800	216.6	5706.	0.0917	295.1	0.155E-3
20000	216.6	5530.	0.0889	295.1	0.160E-3

C PERFORMANSE KLIPNOG MOTORA

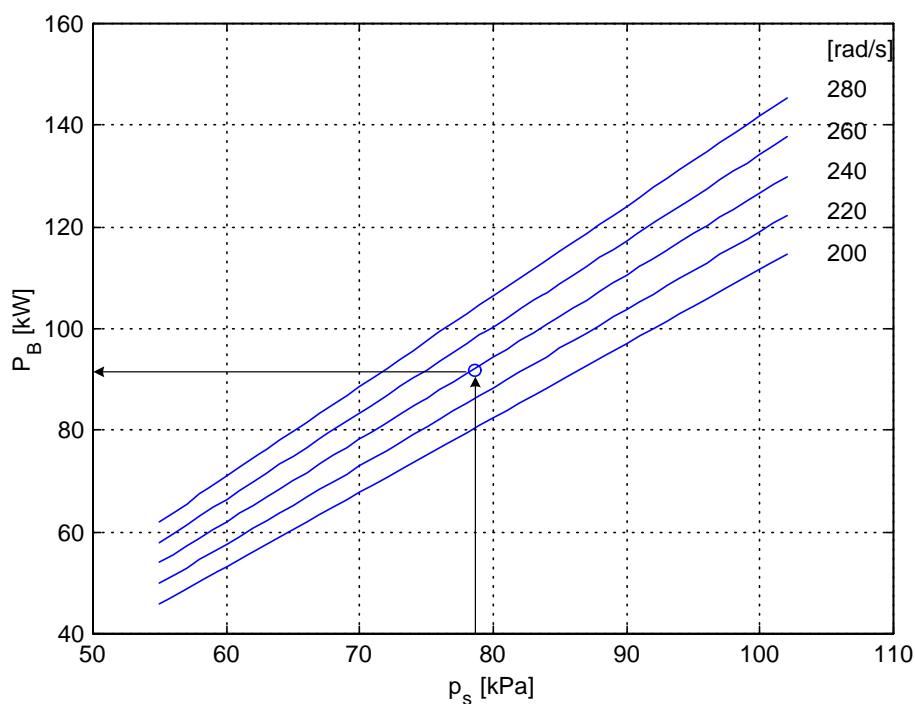
C.1 Snaga klipnog motora

Proizvođači motora na temelju ispitivanja motora daju dva dijagrama prema kojima se može odrediti snaga motora ovisno o parametrima:

- kutna brzina motora ω u $[rad/s]$, a u AS sustavu (anglosaksonske jedinice) RPM u broju okretaja u minuti (revolutions per minute),
- tlak punjenja p_s u $[Pa]$, a u AS jedinicama označava se sa MAP (manifold absolute pressure) i mjeri se $in.Hg$ (inch of Hg) ili u psi (pounds per square inch),
- tlak i temperatura okolnog zraka (vidi prilog B) i
- aerodinamička brzina letjelice V u $[m/s]$, a u AS u miljama po satu mph (miles per hour).

Ta snaga se određuje pomoću dva dijagrama kao na slikama C-1 i C-2.

C.1.1 Prvi dijagram, snaga P_B



Slika C-1 Prvi dijagram snage motora LYCOMING O-360-A (180 HP)

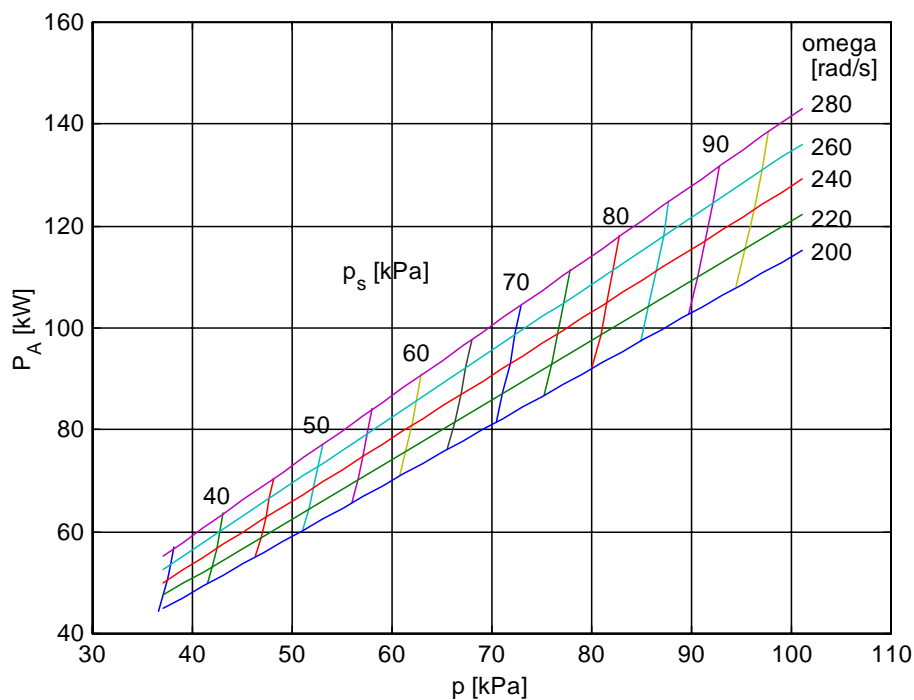
Prvi dijagram je familija krivulja $P_B = f(\omega, p_s)$ dobivena na temelju ispitivanja motora na probnom stolu. Taj dijagram, u statičkim uvjetima (aerodinamička brzina jednaka je nuli), daje snagu P_B ovisno o tlaku punjenja p_s a za razne kutne brzine ω motora, kada je temperatura i tlak okolnog zraka u normalnim uvjetima na razini mora (vidi prilog C). Na apscisi nalazi se tlak punjenja p_s . To je tlak smjese zraka i goriva odmah iza zaklopke rasplinjača. Na ordinati je snaga motora P_B . Svaka krivulja je za jednu određenu kutnu brzinu motora ω .

C.1.2 Drugi dijagram, snaga P_A

Na drugom dijagramu su dvije familije krivulja

$$P_A = f(p, \omega)$$

$$P_A = f(p, p_s)$$



Slika C-2 Drugi dijagram motora LYCOMING O-360-A (180 HP)

Obje familije krivulja daju snagu motora P_A ovisno o promjeni tlaka okolnog zraka p , ali za temperaturu koja odgovara tom tlaku u normalnim uvjetima. Iz priloga C znamo da je ta temperatura

$$T = T_{0N} \left(\frac{P}{P_0} \right)^{\frac{R\beta}{\beta_n}} = 288.15 \cdot \left(\frac{P}{101325} \right)^{0.1903}.$$

Krivulje prve familije $P_A = f(p, \omega)$ daju snagu za određenu kutnu brzinu motora ω , a krivulje druge familije daju istu snagu $P_A = f(p, p_s)$ za određeni tlak punjenja p_s . Analizom ovog drugog dijagrama vidimo da na određenom tlaku okolnog zraka p , malo se mijenja p_s u normalnom radnom intervalu motora (od ω_{\min} do ω_{\max}). Kada opada tlak okolnog zraka, motor radi na sve manjem i manjem p_s , i snaga motora pada te ako je mali tlak okolnog zraka, bit će mala i raspoloživa snaga motora.

Na osi x ovog drugog dijagrama često se nanosi visina umjesto tlaka, koja odgovara u normalnim uvjetima tom tlaku okolnog zraka. Ta visina vezana je za okolni tlak jednadžbom normalne atmosfere (vidi prilog B). U tom slučaju ove dvije familije krivulja imaju visinu kao neovisnu varijablu:

$$P_A = f(H, \omega)$$

$$P_A = f(H, p_s)$$

Takvi dijagrami obično se sreću u literaturi (npr. [14], [26] i dr.) Treba još reći kada umjesto tlaka okolnog zraka na os x nanesimo odgovarajuću visinu onda se dijagram C-2 okrene (desna strana postane lijeva i obratno), jer kad raste visina, tlak pada.

C.2 Grafička metoda određivanja snage P_D

Snaga motora, u okolnom zraku koji ima temperaturu T_D i tlak p_D , za određene vrijednosti parametara ω i p_s može se odrediti pomoću ova dva prikazana dijagrama. Postupak određivanja snage je slijedeći

- 1) Na prvom dijagramu, na odgovarajućoj krivulji za zadani broj okretaja motora ω , očita se snaga P_B ovisno o tlaku punjenja p_s .
- 2) Na drugom dijagramu ucrtava se točka A u presjeku krivulje za zadani tlak punjenja p_s i krivulje za zadanu kutnu brzinu motora ω . Odredi se ordinata P_A i apscisa p_A te točke. To je snaga koju bi motor razvio u okolnom zraku koji ima taj tlak i njemu odgovarajuću temperaturu u normalnim uvjetima.
- 3) Ucrtava se na tom istom dijagramu točka C koja ima apscisu jednaku normalnom tlaku na razini mora p_{0N} , a ordinatu jednaku dobivenoj snazi prema prvom dijagramu P_B . Ta

točka predstavlja snagu motora za zadani tlak punjenja p_s i zadanu kutnu brzinu motora ω , ali u zraku koji ima i tlak koji odgovara razini mora i odgovarajuću temperaturu u normalnim uvjetima..

- 4) Spoje se točke C i A. Ako prihvatimo pretpostavku da je snaga motora, za zadani tlak punjenja p_s i zadanu kutnu brzinu motora ω , linearno ovisna o tlaku okolnog zraka (i na odgovarajućoj temperaturi u normalnim uvjetima), onda je to pravac CA.
- 5) Na tom pravcu CA odredimo točku D koja ima apscisu jednaku zadanom tlaku okolnog zraka p_D .
- 6) Ordinata točke D predstavlja snagu motora za zadane radne parametre motora p_s i ω u okolnom zraku koji ima zadani tlak p_D i temperaturi koja odgovara tom tlaku u normalnim uvjetima T_N , a ne odgovara zadanoj temperaturi okolnog zraka T_D :

$$T_N = 288.15 \cdot \left(\frac{p_D}{101325} \right)^{0.1903}$$

- 7) Da bismo konačno dobili traženu snagu na zadanoj temperaturi, pretpostavit ćemo da je snaga obrnuto proporcionalna kvadratnom korijenu iz temperature okolnog zraka. Zato se očitana snaga u točki D množi sa $\sqrt{T_N/T_D}$.

C.2.1 Primjer

Da bismo prikazali originalnu primjenu dijagrama, u ovom ćemo se primjeru služiti anslosaksonskim jedinicama. Temperatura okolnog zraka je $T_D = 269 \text{ }^0K$, a tlak je $p_D = 95 \text{ kPa}$. Kutna brzina elise je $\omega_{elise} = 240 \text{ rad/s}$, a tlak punjenja je $p_s = 78.5 \text{ kPa}$. Treba grafički odrediti raspoloživu snagu motora čije su performanse dane dijagramom na slici G-1 i G-2.

- 1) Na prvom dijagramu nacrtana je točka B koja predstavlja raspoloživu snagu na razini mora. Ona se nalazi na krivulji $\omega = 240$ za vrijednost apscise $p_s = 78.5 \text{ kPa}$:

$$P_B = 91 \text{ kW}$$

- 2) točka A određena je na drugom dijagramu u presjeku krivulja $\omega = 240 \text{ rad/s}$ i $p_s = 78.5 \text{ kPa}$:

$$P_A = 103 \text{ kW}$$

$$p_A = 80 \text{ kPa}$$

Na tom tlaku temperatura u normalnim uvjetima ima vrijednost:

$$T_A = 288.15 \cdot \left(\frac{P_A}{101325} \right)^{0.1903} = 288.15 \cdot \left(\frac{80.0}{101325} \right)^{0.1903} = 275.5 \text{ } ^\circ K$$

U normalnim uvjetima atmosfere taj tlak i ta temperatura vladaju na visini $H = 1950 \text{ m}$. Drugim riječima, za zadane p_s i ω , pri tlaku okolnog zraka 80 kPa i temperaturi $275.5 \text{ } ^\circ K$, snaga je 103 kW .

- 3) Ucertamo točku C u drugi dijagram. Apscisa te točke je $p_{0N} = 101.3 \text{ kPa}$, a ordinata je $P_B = 91 \text{ kW}$.
- 4) Od A do C snaga opada od vrijednosti $P_A = 103 \text{ kW}$ do $P_B = 91 \text{ kW}$, zbog porasta tlaka i temperature okolnog zraka od $p_A = 80 \text{ kPa}$ i $T_A = 275.5 \text{ } ^\circ K$ do $p_{0N} = 101.3 \text{ kPa}$, i $T_{0N} = 288.2 \text{ } ^\circ K$. Zato pravac AC predstavlja promjenu snage ovisno o tlaku i odgovarajućoj temperaturi okolnoga zraka, pri zadanim parametrima p_s i ω .
- 5) Na pravcu AC odredimo točku D u kojoj je zadani tlak okolnog zraka $p_D = 95.0 \text{ kPa}$ i odgovarajuća temperatura

$$T_N = 288.15 \cdot \left(\frac{P_D}{101325} \right)^{0.1903} = 288.15 \cdot \left(\frac{95.0}{101.325} \right)^{0.1903} = 284.6 \text{ } ^\circ K$$

- 6) Ordinata te točke predstavlja snagu motora za zadani p_s i ω u okolnom zraku koji ima tlak p_D i njemu odgovarajuću temperaturu T_N :

$$P'_D = 95 \text{ kW}$$

- 7) Tu snagu trebamo još svesti na zadanu temperaturu:

$$P_D = P'_D \cdot \sqrt{\frac{T_N}{T_D}} = 95 \cdot \sqrt{\frac{284.6}{269}} = 98 \text{ kW}$$

C.2.2 Analitička metoda određivanja snage P_D

Prema lit. [22], dana je metoda kojom se mogu ova dva dijagrama motora pretvoriti u jednadžbe. Tako su u lit. [26], za motor LYCOMING O-360-A (180 HP) dane jednadžbe u AS jedinicama:

$$BHPB = -42.8 + 3.08 \cdot MAP + 0.00186 \cdot RPM \cdot MAP - 0.0018 \cdot RPM$$

$$BHPA = 4.3 + 1.37 \cdot MAP + 0.0018 \cdot RPM \cdot MAP + 0.003 \cdot RPM$$

U tim jednadžbama je kutna brzina motora RPM izražena brojem okretaja u minuti, tlak punjenja MAP izražen je u palcima živinoga stupca $in.Hg$, a snaga BPH (*brake power hors*) u konjskim snagama. Te jednadžbe možemo transformirati u sustav ISO jedinica. U ISO sustavu jedinica koristit ćemo oznake P_B, P_A u vatima, tlak punjenja p_s u Pa , a za kutnu brzinu motora ω u rad/s :

$$\frac{P_B}{745.7} = -42.8 + 3.08 \cdot \frac{P_s}{3386} + 0.00186 \cdot 9.5493 \omega \cdot \frac{P_s}{3386} - 0.0018 \cdot 9.5493 \omega$$

i

$$\frac{P_A}{745.7} = 4.3 + 1.37 \cdot \frac{P_s}{3386} + 0.0018 \cdot 9.5493 \omega \cdot \frac{P_s}{3386} + 0.003 \cdot 9.5493 \omega$$

Sređivanjem dobivamo tražene jednadžbe u ISO sustavu jedinica:

$$P_B = -31916 + 0.6783 \cdot p_s + 0.003912 \cdot p_s \cdot \omega - 12.817 \cdot \omega \quad C.1$$

$$P_A = 3206.5 + 0.3017 \cdot p_s + 0.003785 \cdot p_s \cdot \omega + 21.363 \cdot \omega \quad C.2$$

Prva jednadžba $P_B = f(p_s, \omega)$ omogućuje nam izračunati ordinatu točke C (slika C-2). Apscisa točke C je normalni tlak na razini mora, jer je cijela jednadžba određena za uvjete na razini mora. Prema tome koordinate točke C na slici C-2 jesu:

$$p_C = p_{0N}$$

$$P_C = P_B$$

Tako smo odredili radno stanje C, u kome je snaga P_C pri tlaku zraka $p_C = p_{0N}$. Drugo radno stanje koje možemo odrediti jest snaga motora P_A ako je kutna brzina $\omega_{elise} = 240 \text{ rad/s}$ i tlak okolnog zraka p . Da bismo odredili položaj te točke A (slika C-2), znamo da je ona na pravcu $P_A = f(p, \omega)$ za $\omega_{elise} = 240 \text{ rad/s}$. Jednadžba familije pravaca na slici C-1 ima oblik

$$P_A = 3922 + 1.638 \cdot \omega + 0.0034406 \cdot \omega \cdot p + 0.41009 \cdot p \quad C.3$$

Iz ove jednadžbe možemo odrediti tlak okolnog zraka ako je poznata snaga motora P_A i njegova kutna brzina ω . Taj tlak je apscisa točke A:

$$p_A = \frac{P_A - 3922 - 1.638 \cdot \omega}{0.0034406 \cdot \omega + 0.41009} \quad C.4$$

U točki A imamo snagu motora P_A pri tlaku okolnog zraka p_A i njemu odgovarajućoj temperaturi T_A , a u točki C snagu P_B pri tlaku okolnog zraka p_{0N} i temperaturi T_{0N} . Objekti točke daju snagu za zadane parametre p_s i ω . Zato možemo linearno interpolirati između

točaka A i C da bismo odredili snagu P'_D ako je tlak okolnog zraka jednak zadanom tlaku p_D i njemu odgovarajućoj temperaturi T_N :

$$P'_D = P_B + (P_A - P_B) \frac{P_D - P_{0N}}{P_A - P_{0N}} \quad \text{C.5}$$

Tako smo dobili snagu P'_D za zadane parametre p_s i ω , u okolnom zraku koji ima zadani tlak p_D , ali kad je temperatura okolnog zraka jednaka temperaturi (vidi prilog B):

$$T_N = 288.15 \cdot \left(\frac{p_D}{101325} \right)^{0.1903} \quad \text{C.6}$$

Da bismo konačno dobili snagu pri zadanoj temperaturi T_D , koristimo činjenicu da je snaga obrnuto proporcionalna kvadratnom korijenu iz temperature:

$$P_D = P'_D \sqrt{\frac{T_N}{T_D}} \quad \text{C.7}$$

Tako dobivamo snagu P_D za zadane parametre motora p_s i ω , u atmosferi koja ima zadani tlak p_D i zadanu temperaturu T_D zraka.

C.2.3 Primjer

Uradimo isti primjer analitički. Karakteristike su okolnoga zraka:

$$T_D = 269 \text{ } ^\circ K$$

$$p_D = 95 \text{ kPa}$$

Parametri rada motora su

$$\omega = 240 \text{ rad/s}$$

$$p_s = 78.5 \text{ kPa}$$

Treba odrediti analitički istu raspoloživu snagu motora LYCOMING O-360-A (180 HP) kao u prethodnom primjeru:

$$\begin{aligned} P_B &= -31916 + 0.6783 p_s + 0.003912 \omega \cdot p_s - 12.817 \omega \\ &= -31916 + 0.6783 \cdot 78500 + 0.003912 \cdot 240 \cdot 78500 - 12.817 \cdot 240 \\ &= 92.0 \text{ kW} \end{aligned}$$

$$p_B = 101325 \text{ Pa}$$

$$\begin{aligned} P_A &= 3206.5 + 0.3017 p_s + 0.003785 \omega \cdot p_s + 21.363 \omega \\ &= 3206.5 + 0.3017 \cdot 78500 + 0.00378 \cdot 240 \cdot 78500 + 21.363 \cdot 240 \\ &= 103.2 \text{ kW} \end{aligned}$$

$$P_A = \frac{P_A - 3922 - 1.638 \cdot \omega}{0.0034406 \cdot \omega + 0.41009} = \frac{103200 - 3922 - 1.638 \cdot 240}{0.0034406 \cdot 240 + 0.41009} = 80.0 \text{ kPa}$$

$$P'_D = P_B + (P_A - P_B) \frac{P_D - P_{0N}}{P_A - P_{0N}} = 92.0 + (103.2 - 92.0) \cdot \frac{95.0 - 101.3}{80.0 - 101.3} = 95.3 \text{ kW}$$

$$T_N = 288.15 \cdot \left(\frac{P_D}{101325} \right)^{0.1903} = 288.15 \cdot \left(\frac{95}{101.325} \right)^{0.1903} = 284.6 \text{ } ^\circ\text{K}$$

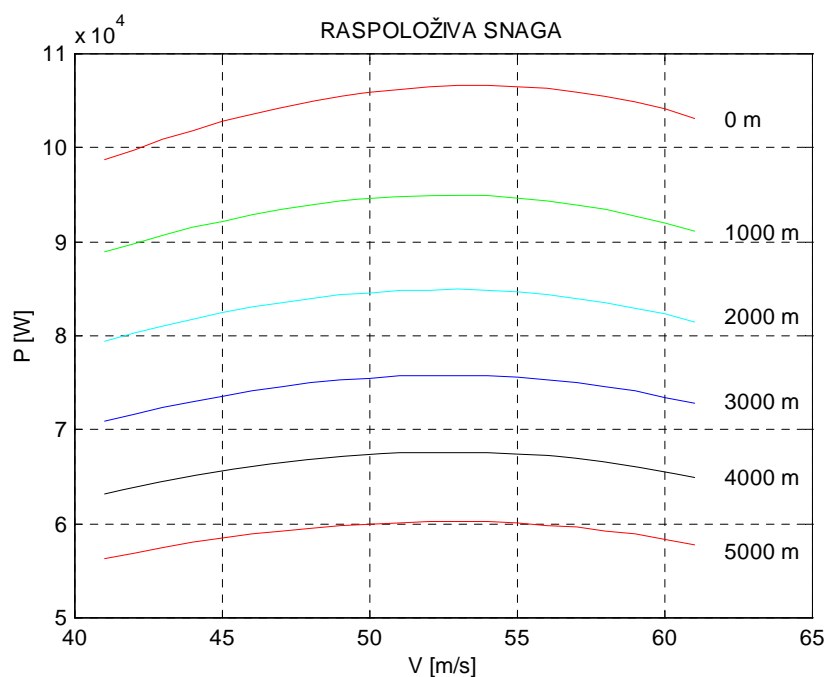
$$P_D = P'_D \sqrt{\frac{T_N}{T_D}} = 95.3 \cdot \sqrt{\frac{284.6}{269}} = 98.0 \text{ kW}$$

C.2.4 Vježba

Treba odrediti promjenu raspoložive snage pogonske grupe koju čini motor LYCOMING O-360-A (180 HP) i elisa zrakoplova Piper Cherokee PA-28, ovisno o aerodinamičkoj brzini za visine 0, 1000, 2000, 3000 i 4000 m. Pretpostavimo da motor radi na kutnoj brzini $\omega_{\max} = 240 \text{ rad/s}$, a koeficijent učinkovitosti elise neka je

$$\eta_{elise} = -1.6923J^3 + 1.4815J^2 + 0.5670J + 0.2644,$$

gdje je parametar elise $J = \frac{V}{nD} = 0.80$ (promjer elise je $D = 1.88 \text{ m}$, n broj okretaja u s.).



Slika C-3 Raspoloživa snaga motora LYCOMING O-360-A (180 HP) i elise zrakoplova Piper Cherokee PA-28

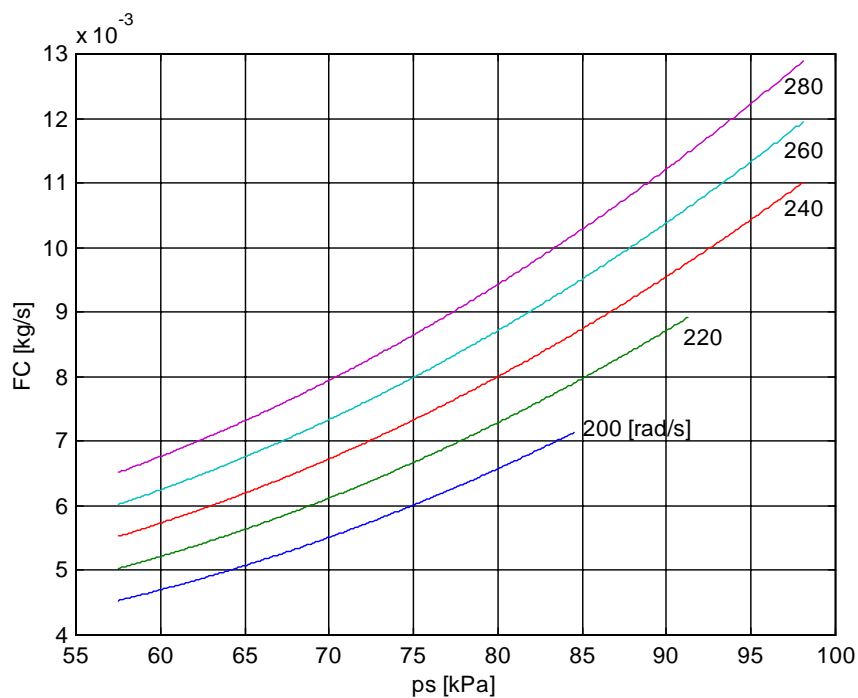
Pretpostavljamo normalne uvjete atmosfere. Zbog aerodinamičke brzine tlak okolnog zraka treba povećati za dinamički tlak, tako da ulazni tlak bude jednak totalnom tlaku, koji je zbroj okolnog tlaka i dinamičkog tlaka. Taj dinamički tlak umanjuje se do 15% zbog gubitaka u strujanju oko motora do otvora gdje zrak ulazi u motor:

$$p_{total} = p_N + 0.85 \cdot \frac{\rho_N V^2}{2}$$

Snaga motora P_{mot} računa se prema analitičkom postupku iz prethodnog primjera C.2.3. Raspoloživa snaga bit će

$$P_a = \eta_{elise} \cdot P_{mot}$$

S ovim jednadžbama napravljen je program u MATLAB-u, koji se zove *Rasp_snaga*, nalazi se na disketi u direktoriju *Motor*. Pomoću toga programa nacrtan je dijagram C-3.



Slika C-4 Potrošnja goriva za motor LYCOMING O-360-A (180 HP)

C.2.5 Potrošnja goriva

Na temelju eksperimentalnih ispitivanja proizvođači motora izrađuju dijagrame koji daju potrošnju goriva u normalnim uvjetima okolnog zraka (T_{0N} i p_{0N}) za razne kutne brzine motora ovisno o tlaku punjenja MAP. Na temelju takvog dijagrama za slučaj motora

LYCOMING O-360-A (180 HP) usklađen je polinom drugog reda koji daje potrošnju goriva FC (fuel consumption) ovisno o tlaku punjenja:

$$FC = a_1 p_s^2 + a_2 p_s + a_3, \quad \text{C.8}$$

u kome su koeficijenti funkcije kutne brzine motora:

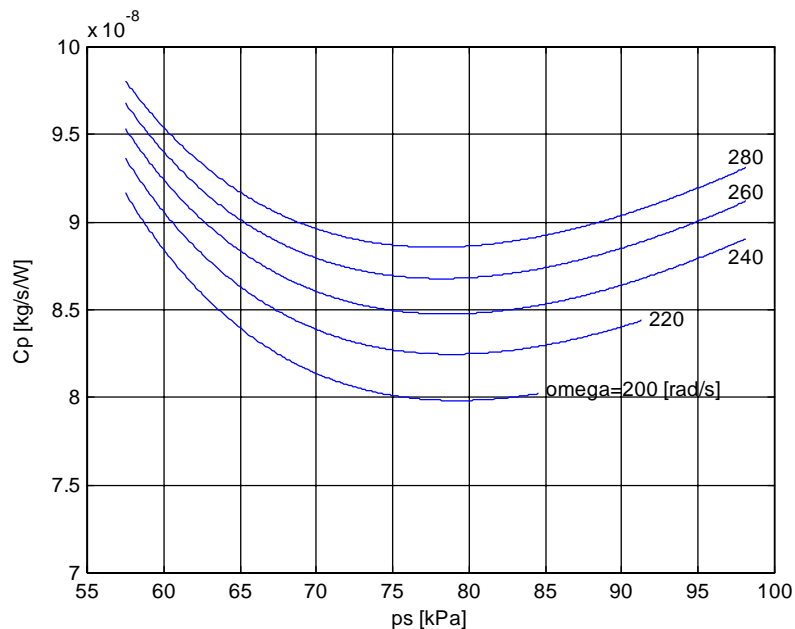
$$a_1 = \frac{0.000053562 \cdot \omega + 0.0081068}{3.386^2} \cdot C$$

$$a_2 = -\frac{0.0000090642 \cdot \omega + 0.35685}{3.386} \cdot C$$

$$a_3 = (0.017431 \cdot \omega + 3.17) \cdot C$$

$$C = 0.720 \cdot 3.785 / 3600$$
C.9

Da bi dobili potrošnju u $[kg/s]$ za slučaj specifične mase goriva $0.72 kg/l$ koeficijente trebamo pomnožiti sa C . Bez koeficijenta C dobili potrošnju u USA galonima na sat. S tom jednadžbom nacrtan je dijagram prikazan na slici C-4. Na ordinati je potrošnja goriva FC (fuel consumption) u $[kg/s]$. U mehanici leta upotrebljavamo specifičnu potrošnju goriva C_p . Ona pokazuje kolika je potrošnja goriva u jedinici vremena po jednoj jedinici proizvedene snage, a to znači da je njena dimenzija $[kg/(sW)]$. Da bismo dobili dijagram specifične potrošnje C_p , moramo vrijednosti očitane na dijagramu potrošnje FC podijeliti s ostvarenom snagom u istim uvjetima.



Slika C-5 Specifična potrošnja motora LYCOMING O-360-A (180 HP)

Na temelju jednadžba raspoložive snage motora i potrošnje goriva, treba za motor LYCOMING O-360-A (180 HP), odrediti ovisnost specifične potrošnje goriva (potrošnja goriva po jedinici ostvarene snage) o tlaku punjenja za razne kutne brzine motora u normalnim atmosferskim uvjetima. Potrošnju goriva, koja ovisi o tlaku punjenja, dana je jednadžbama C-8 i C-9, a ostvarena snaga u istim uvjetima je

$$P_B = -31916 + 0.6783 p_s + 0.003912 \omega \cdot p_s - 12.817 \omega, \quad \text{C.10}$$

Tako dobivamo da je tražena specifična potrošnja

$$C_P = \frac{FC}{P_B}. \quad \text{C.11}$$

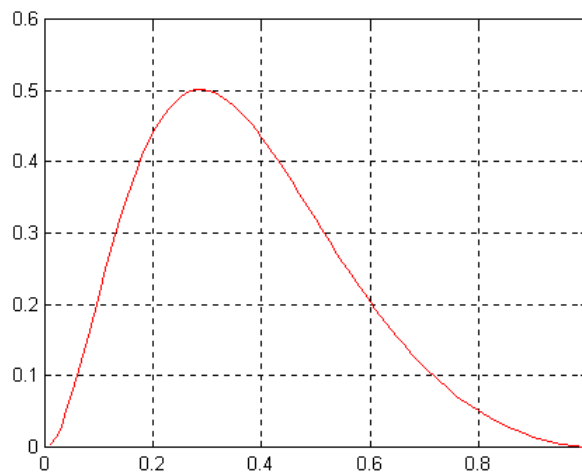
Prema ovom algoritmu napravljen je program u MATLAB-u koji se zove *spec.m*. Nalazi se u direktoriju *Motor* na disketi. Pomoću njega nacrtan je dijagram na slici C-5

D MAKSIMALNI UZGON KRILA

Ovaj postupak procjene maksimalnog koeficijenta uzgona krila $C_{L\max}$ i napadnog kuta α_{\max} prema [18], razlikuje se za krila male vitkosti od postupka procjene za krila velike vitkosti. Granica malih i velikih vitkosti krila A_B ovisi o Machovu broju kao i o obliku krila.

$$A_B = \frac{3\sqrt{|1 - Ma^2|}}{[C_1(\lambda) + 1]\cos \Lambda_{LE}} \quad D.1$$

λ je suženje krila, odnos vršne prema korijenskoj tetivi krila, a Λ_{LE} je strijela prednjeg napadnog ruba krila. Eksperimentalna funkcija $C_1(\lambda)$ prikazana je na slici D-1



Slika D-1. Funkcija $C_1(\lambda)$

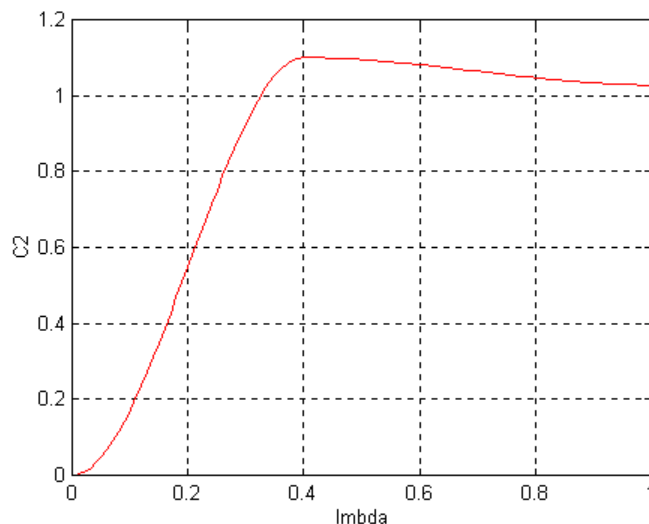
Ako je krilo male vitkosti, tj. ako je $A < A_B$, onda je

$$\begin{aligned} C_{L\max} &= f_L(A', \Delta_y) + \Delta f_L(A'', Ma) \\ \alpha_{\max} &= f_\alpha(A') + \Delta f_\alpha(A'', Ma) \end{aligned} \quad D.2$$

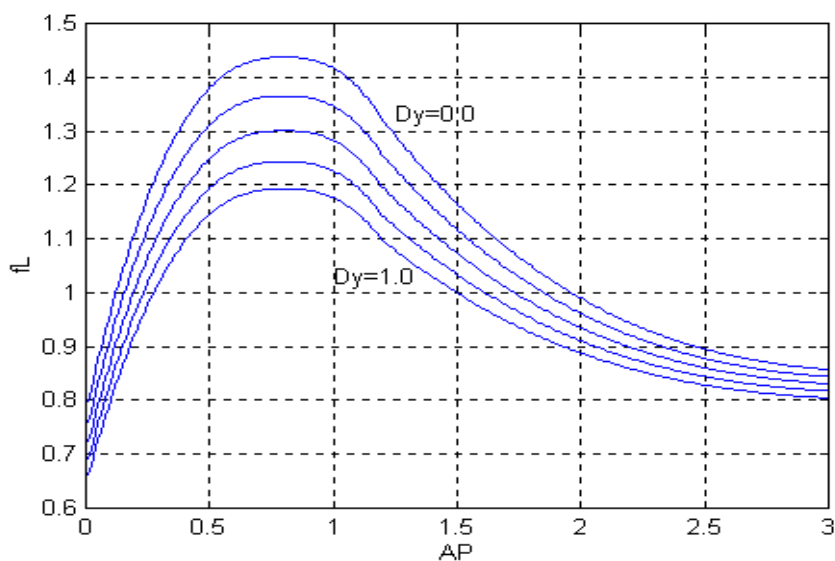
Uz već objašnjeni parametar Δ_y , koji predstavlja utjecaj oblika prednjeg ruba na maksimalni koeficijent uzgona, pojavljuju se još dva parametra:

$$\begin{aligned} A' &= (C_1 + 1) \frac{A \cos \Lambda_{LE}}{\sqrt{|1 - Ma^2|}} \\ A'' &= (C_2 + 1) A \tan \Lambda_{LE} \end{aligned} \quad D.3$$

U ovim parametrima pojavljuje se još jedna funkcija od suženja krila $C_2(\lambda)$. Ona je prikazana na slici D-2.

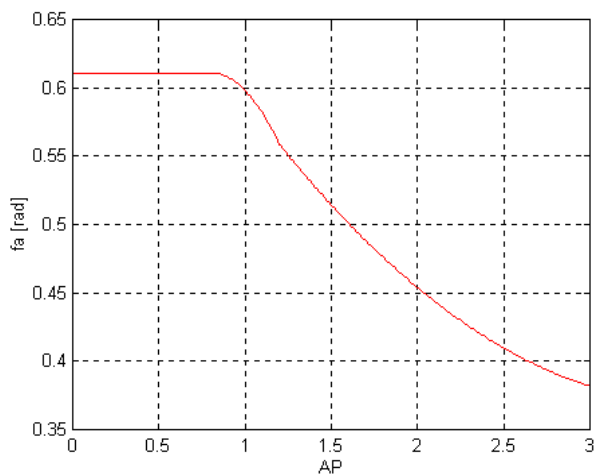
Slika D-2. Funkcija $C_2(\lambda)$

Ekperimentalne funkcije f_L i f_α ovisno o ovim parametrima prikazane su na slikama D-3 i D-4. Na tim dijagramima je Δ_y označeno s D_y .

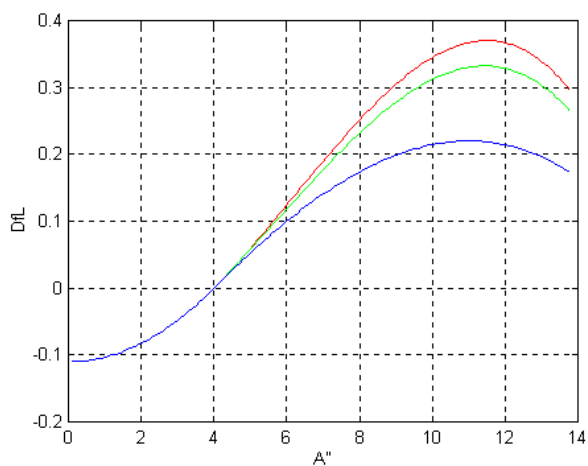
Slika D-3. Funkcija $f_L(A', \Delta_y)$

Funkcije Δf_L i Δf_α dane su dijagramima na slikama D-5 i D-6.

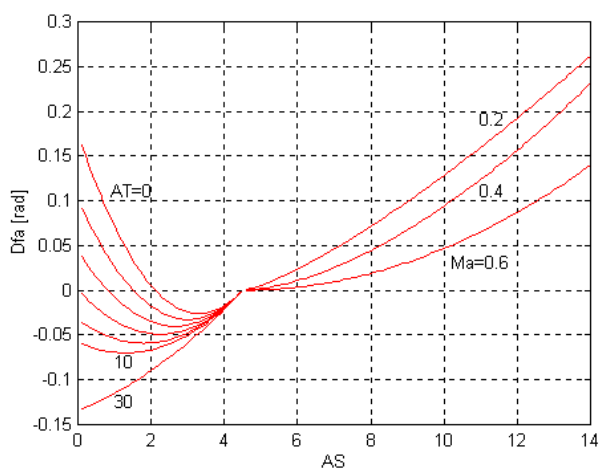
Za krila velike vitkosti, a to su krila koja imaju $A > A_B$, koeficijent maksimalnog uzgona krila $C_{L_{\max}}$ za $0.2 \leq Ma \leq 0.6$ zbroj je dvaju dijelova :



Slika D-4. Funkcija $f_\alpha(A')$



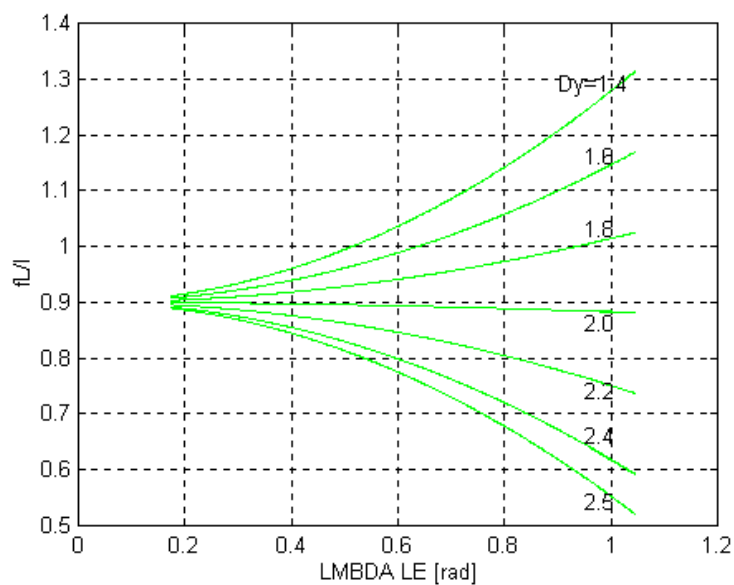
Slika D-5. Funkcija $\Delta f_L(A'', Ma)$



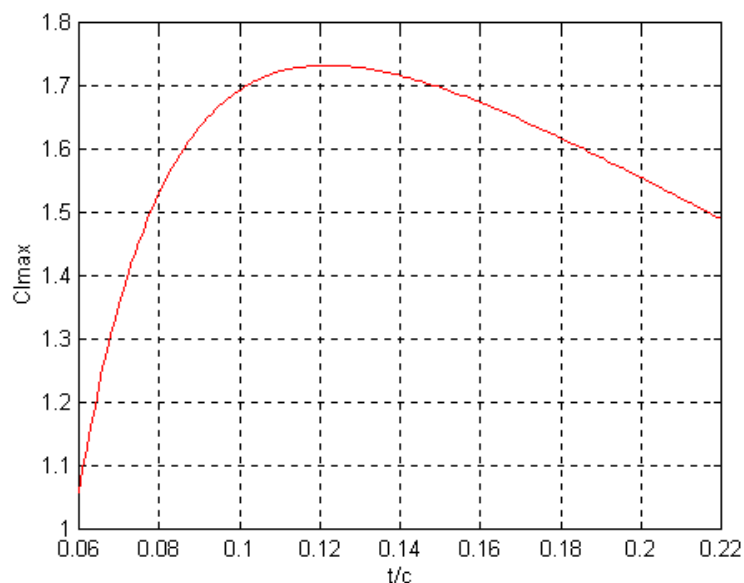
Slika D-6. Funkcija $\Delta f_\alpha(A'', Ma)$

$$C_{L\max} = f_{L/\ell} C_{\ell\max} + \Delta C_{L\max} \quad \text{D.4}$$

- Prvi dio $f_{L/\ell} C_{\ell\max}$, koeficijent maksimalnog uzgona krila pri $Ma = 0.2$ proporcionalan je maksimalnom uzgonu profila krila. Koeficijent proporcionalnosti $f_{L/\ell}$ ovisi o strijeli napadnog ruba Λ_{LE} i o parametru Δ_y . Ta ovisnost prikazana je na dijagramu slike D-7, a koeficijent maksimalnog uzgona profila $C_{\ell\max}$ koji ovisi o relativnoj debljini t/c prikazan je na slici D-8.

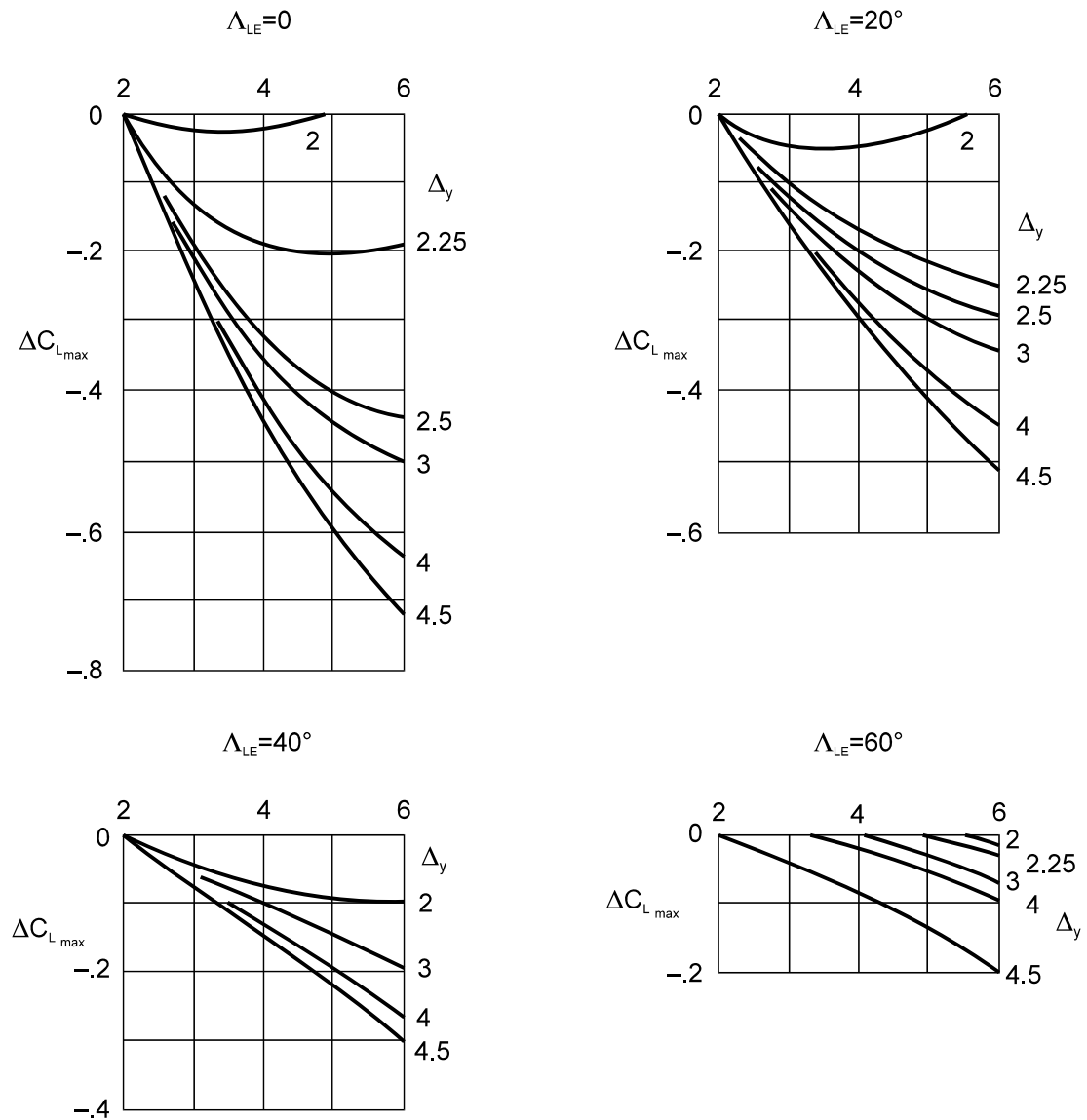


Slika D-7. Funkcija $f_{L/\ell} = f_{L/\ell}(\Lambda_{LE}, \Delta_y)$



Slika D-8. Maksimalni koeficijent uzgona profila $C_{\ell\max}$ u ovisnosti o relativnoj debljini t/c

- Drugi dio $\Delta C_{L_{\max}}$ predstavlja korekciju maksimalnog uzgona krila za $\Delta M = Ma - 0.2$. Ta korekcija je negativna. Osim ΔMa ta korekcija ovisi o strijeli napadnog ruba Λ_{LE} i o parametru Δy . Ta ovisnost $\Delta C_{L_{\max}}(\Delta Ma, \Delta y, \Lambda_{LE})$ prikazana je na slici D-9.



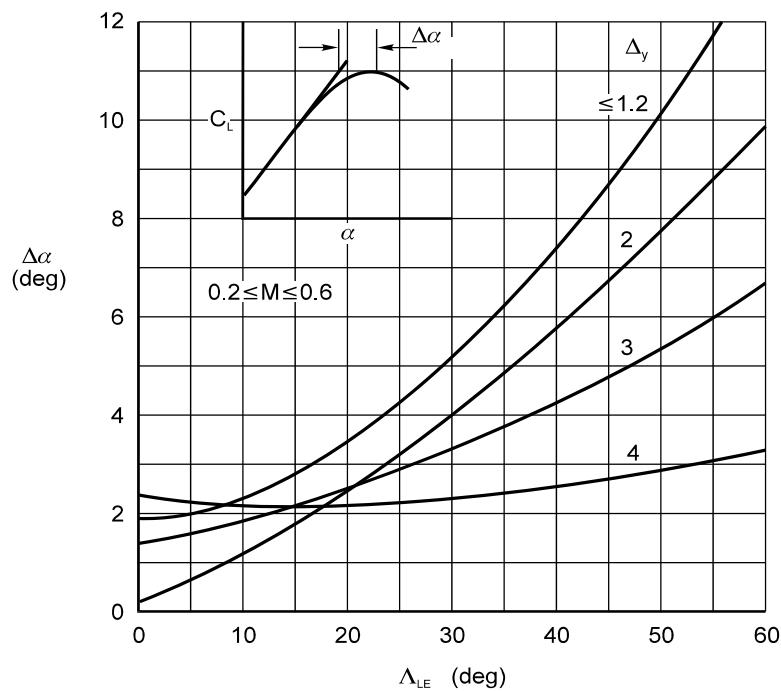
Slika D-9.

Koeficijenti maksimalnog uzgona krila $C_{L_{\max}}$ i napadnog kuta α_{\max} , osim o vrijednosti Δy , ovise i o obliku krila (vitkosti krila A , suženja krila λ , strijele napadnog ruba krila Λ_{LE}), o

relativnoj debljini krila i o Machovu broju Ma. Napadni kut pri kome krilo ostvaruje maksimalni uzgon je zbroj tri dijela:

$$\alpha_{\max} = \alpha_{OL} + \frac{C_{L\max}}{C_{L\alpha}} + \Delta\alpha_{\max} \quad D.5$$

Prva dva člana predstavljaju linearni dio. Prvi je aerodinamička značajka krila i ako krilo nije uvijeno, treći je prirast pri kojemu se dostiže maksimalni uzgon. Na slici D-10 prikazan je dijagram pomoću kojega određujemo $\Delta\alpha_{\max}$ u ovisnosti o strijelji napadnog ruba Λ_{LE} i o parametru Δ_y .



Slika D-10.

LITERATURA

- 1) Anderson, J.D., "Aircraft Performance and Design", McGraw Hill, New York, 1999.
- 2) Бочкарева, А.Ф. "Аэромеханика самолета", Машиностроение, Москва 1977.
- 3) Eshelby M.E., "Aircraft Performance", Arnold, London 2000.
- 4) Etkin, B., "Dynamics of Atmospheric Flight", John Wiley & Sons, Inc. New York, 1972.
- 5) Gantmaher F. R., Levin L. M., "The Flight of uncontrolled Rockets", Pergamon Press, Oxford 1964.
- 6) Goldstein, H., "Classical Mechanics", Second edition, Addison-Westley Publishing Company, London, 1981.
- 7) Haug, E., "Computer Aided Kinematics and Dynamics of Mechanical Systems", Volume I: Basic Methods, Allyn and Bacon, Boston, 1989.
- 8) ISO Concepts, Quantities and Symbols for Flight Dynamics, 1988, Part 1: Aircraft motion relative to the air, ISO/DIS 1151/1, and Part 2: Motion of the aircraft and the atmosphere relative to the Earth, ISO/DIS 1151/2
- 9) Janković S., "Mehanika leta zrakoplova", Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb 2002.
- 10) Jumper, E.J., "Wave Drag Prediction Using a Simplified Supersonic Area Rule", J. Aircraft, Vol. 20, No. 10, October 1983.
- 11) Jecić, S. "Mehanika II, Kinematika i mehanika", Tehnička knjiga d.d., Zagreb, 1995.
- 12) Лебедев, А.А., Чернобговкин, Л.С. "Динамика полета", Машиностроение, Москва, 1973.
- 13) McCormick, B. "Aerodynamics, Aeronautics and Flight Mechanics", John Wiley & Sons, Inc. New York, 1995.
- 14) Mair, W.A. and Birdsall, D. "Aircraft Performance", Cambridge, University Press, 1992.
- 15) Nielsen, J. N., "Missile Aerodynamics", McGraw-Hill, New York, 1960.
- 16) Pamadi, B. N., "Performance, Stability, Dynamics and Control of Airplanes", Education Series AIAA, Washington, 1998.
- 17) Raymer, D. "Aircraft Design: A Conceptual Approach, AIAA Education Series, Washington, 1992.
- 18) Rendulić, Z., "Mehanika leta", Vojno-izdavački i novinarski centar, Beograd, 1987.

- 19) Vinh, N. X. "Flight Mechanics of High Performance Aircraft", Cambridge, University Press, 1993.
- 20) "The USAF DATCOM, Public Domain Computer Programs for the Aeronautical Engineer. Last updated: 2 June 2003 by Ralph Carmichael ralph@pdas.com, Public Domain Aeronautical Software, P.O. Box 1438 Santa Cruz CA 95061 USA
- 21) ESDU (Engineering scientific data units), The Royal Aeronautical Society, London.
- 22) Janković S.: AERODINAMIČKI PRORAČUN PUTNIČKOG ZRAKOPLOVA, FSB, Zavod za zrakoplovstvo, TP-01/0120-01/A1

KAZALO

aerodinamička

apscisa krila, 2-5

ishodište, 2-5

tetiva, 2-5

aerodinamički

koeficijenti, 2-1

model zrakoplova, 2-2

parametri, 2-3

atmosfera

standardna, B-1

baza koordinatnog sustava, A-1

brzina

aerodinačka 1-5

apsolutna, 1-5

leta, 1-5

najmanje upravljivosti (Minimum Control Speed), 11-22

odvajanja (Take off Velocity), 11-4

penjanja (Rate of Climb, R/C), 8-2

penjanja, najveća (Best Rate of Climb, BRC), 8-5

derivacija matrice transformacije, A-9

derivacija vektora, A-3

derivativi, 2-4

dolet (Range), 7-11

energetska visina (Energy Height), 12-1

gradijent momenta propinjanja, 4-1

gradijent normalne sile, 4-1

gradijent penjanja (Climb Gradient), 8.2

gradijenti, 2-4

horizontalni zaokret, 8.3.1

jednadžba stanja zraka, B-3

koordinatni sustavi, 1-1

koordinanti sustav

aerodinamički, 1-7

brzinski, 1-5

letjelice, 1-3

lokalni, 1-2

nošeni, 1-2

koordinirani zaokret, 9-5

korak elise, 5-9

kut

napadni, 1-7

napadni motora, 5-1

penjanja najveći (Best Angle of Climb, BAC), 8-2

propinjanja, 1-3

ravnotežni napadni, 6-1

valjanja letjelice, 1-3

zanosa, 1-3

kutna brzina motora (Revolution Per Minute, RPM), C-1

minimalno vrijeme penjanja, 8-5

model zrakoplova

kao materijalne točke, 6-21

momenta propinjanja

horizontalni rep - trup, 4-6

krilo - tijelo, 4-2

nulti članovi, 4-9

tijela, 4-9

stacionarni gradijenti, 4-9

moment pogonske sile, 5-5 i 5-10

neutralna točka, 6-9

normalna sila

krilo - tijelo, 4-2

nulti članovi, 4-9

horizontalni rep - trup, 4-6

stacionarni gradijenti, 4-9

normalno opterećenje, 6-5 i 9-2

otpor, 3-1

- dna, 3-5
- dodatni, 3-11
- inducirani, 3-14
- nulti, 3-13
- transonični, 3-8
- trenja, 3-1
- valni, 3-6

Oswaldov koeficijent, 3-17

otklon upravljačke površine, 2-3

ovojnice horizontalnog leta, 7-9

ovojnica koordiniranog zaokreta, 9-9

petlja, 10-3

plinska konstanta zraka, B-3

područje uporabe zrakoplova, 7-9

polara, 3-16

polijetanje (Take off), 9-1

pogonska sila, 5-4 i 5-10

potrebna sila, 5-2

potrebna snaga, 5-2

potrošnja goriva (Fuel Consumption, FC), C-5

površina

- referentna, 2-1
- krila, 2-5

prirast specifične energije po jedinici goriva (Fuel Specific Energy), 12-12

raspoloživo opterećenje, 9-6

raspoloživa sila, 7-5

raspoloživa snaga, 7-5

savijanje struje, 4-6

sigurnost polijetanja, 11-22

slijetanje (Landing), 11-25

specifična energija (Specific Energy) 12-1

specifična potrošnja goriva (Specific Fuel Consumption), C-5

stabilnost

statička, 6-8
tlak punjenja (Manifold Absolute Pressure, MAP), C-1
trajanje leta (Endurance) 7-17
ukupna energija (Energy State), 12-1
upravlјivost
 uzdužna, 6-12
usporeenje struje, 4-7
uzgon, 2-2
vektorski i skalarni produkt A-2
vertikalna ravnoteža zraka, B-4
vertikalni zaokret, 10-1
visina nadvisivanja prepreke (Obstacle Clearance Altitude), 11-20
višak specifične snage, 10-1
vlažnost zraka, B-3
vrijeme penjanja, 8-7

Oznake

Opće oznake

a	brzina zvuka, ubrzanje
A	vitkost krila, azimut
b	raspon krila
c	tetiva profila
c_A	aerodinamička tetiva krila
C	napadna točka normalne sile
C_D C_L C_K	aerodinamički koeficijenti sila u aerodinamičkom koordinatnom sustavu
C_X C_Y C_Z	aerodinamički koeficijenti sila u koordinatnom sustavu letjelice
C_ℓ C_m C_n	aerodinamički koeficijenti momenata u koordinatnom sustavu letjelice
$C_A = -C_X$	aerodinamički koeficijent aksijalne sile
$C_N = -C_Z$	aerodinamički koeficijent normalne sile
d	promjer
D	otpor
e	Oswaldov koeficijent krila
E	trajanje leta
F	sila
g	ubrzanje sile Zemljine teže
h	udaljenost od aerodinamičkog ishodišta u pravcu x osi zrakoplova, visina leta
h_e	specifična energija
H	visina leta
i	postavni kut noseće površine, imaginarna jedinica
J	jedinična matrica
k_{BW}	koeficijent interferencije otklonjene kombinacije krilo - tijelo
K	koeficijent induciranog otpora zrakoplova
K_{BW}	koeficijent interferencije planarne kombinacije krilo - tijelo
ℓ	udaljenost od elise u pravcu x osi zrakoplova
L	uzgon, moment valjanja
\mathbf{L}_{AB}	matrica transformacije iz koordinatnog sustava A u koordinatni sustav B
\mathbf{L}_X \mathbf{L}_Y \mathbf{L}_Z	temeljne matrice transformacija

m		masa zrakoplova
M		moment propinjanja
Ma		Machov broj
n		normalno opterećenje
N		moment skretanja
N		neutralna točka.
p	}	komponente kutne brzine
q		
r		
p		tlak
P		snaga
P_a	P_r	raspoloživa snaga, potrebna snaga
P_s		specifični višak snage
R		dolet
$s = [\phi \ \vartheta \ \psi]$		stav zrakoplova
S		površina
t		vrijeme
T		pogonska sila, temperatura zraka
T_a	T_r	raspoloživa, potrebna pogonska sila
u	}	komponente brzine
v		
w		
V		intenzitet aerodinamičke brzine
V_k		intenzitet brzine leta
W		težina
W_f		širina trupa
X		aerodinamička sila u pravcu x osi
Y		aerodinamička sila u pravcu y osi
Z		aerodinamička sila u pravcu z osi

Grčka slova

α	β	napadni kut, kut klizanja
χ	γ	kut skretanja brzine, kut propinjanja brzine

ψ ϑ ϕ	De Sparraini kutovi zrakoplova
χ_A γ_A μ_A	De Sparraini kutovi aerodinamičkog koordinatnog sustava
δ_ℓ δ_m δ_n	otklon krilaca, otklon kormila visine, otklon kormila pravca
δ_f	otklon zakrilca
λ	suženje krila
η_V	koeficijent umanjenja dinamičkog tlaka na vertikalnom stabilizatoru
η_h	koeficijent umanjenja dinamičkog tlaka na horizontalnom stabilizatoru
ρ	gustoća zraka

Indeksi

$()_A$	veličina aerodinamičkog koordinatnog sustava
$()_B = ()_f$	veličina tijela
$()_F$	veličina koordinatnog sustava letjelice
$()_h$	veličina horizontalnog repa
$()_K$	brzina ili ubrzanje u odnosu na zemlju
$()_L$	veličina lokalnog koordinatnog sustava
$()_m$	veličina za središte mase
$()_n$	veličina za neutralnu točku
$()_O$	veličina nošenog koordinatnog sustava
$()_V$	veličina brzinskog koordinatnog sustava
	veličina vertikalnog repa
$()_W$	veličina krila (od dva polukrila)

EkspONENTI

$()^L$	komponente u lokalnom koordinatnom sustavu
$()^O$	komponente u nošenom koordinatnom sustavu
$()^F$	komponente u koordinatnom sustavu letjelice (obično se izostavlja)
$()^V$	komponente u brzinskom koordinatnom sustavu
$()^A$	komponente u aerodinamičkom koordinatnom sustavu

Sveučilište u Zagrebu
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE
ZAVOD ZA ZRAKOPLOVNO INŽENJERSTVO

dr. sc. Slobodan Janković, prof. u mirovini
dr. sc. Milan Vrdoljak, prof.

PERFORMANSE

ZRAKOPLOVA

Zagreb, 2022



Copyright © 2007., 2016., 2022. Zavod za zrakoplovstvo, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Sveučilište u Zagrebu, e-mail: milan.vrdoljak@fsb.hr

Ovo je djelo dano na korištenje pod licencom Imenovanje-Nekomercijalno-Bez prerada 4.0 međunarodna (CC BY-NC-ND 4.0). Licenca je dostupna na <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

SADRŽAJ

1. Kinematika leta
 2. Projektna aerodinamika
 3. Otpor aviona
 4. Normalna sila i moment propinjanja
 Primjer
 5. Pogonska sila i moment
 6. Ravnotežni let
 7. Horizontalni let
 8. Penjanje i spuštanje
 9. Horizontalni zaokret
 10. Vertikalni zaokret
 11. Ukupna energija
 12. Polijetanje i slijetanje
 - A. Prilog: Linearna algebra
 - B. Prilog: Atmosfera
 - C. Prilog: Performanse klipnog motora
 - D. Prilog: Maksimalni uzgon krila
- Literatura
- Kazalo
- Popis oznaka

1 KINEMATIKA LETA

1.1 Uvod

Pod pojmom performanse letjelice podrazumijevamo koliki je najveći dolet zrakoplova, najduže vrijeme letenja, najveći kut penjanja, najmanji kut spuštanja (bez pogonske sile), najmanji polumjer horizontalnog zaokreta i vertikalni zaokret itd.

Sve ove veličine izračunavamo za točno određene uvjete leta. Ti uvjeti u stvarnosti nisu ispunjeni, ali nam omogućuju da kompariramo i ocjenjujemo zrakoplove relativno jedne u odnosu na druge. S obzirom da ti uvjeti nisu daleko od realnih, oni predstavljaju i prvu aproksimaciju onog što zrakoplov može napraviti u stvarnosti.

Prva pretpostavka je da nema vjetra. Posljedica je ove činjenice, da se aerodinamička sila nalazi u ravni simetrije zrakoplova, zato što komponenta aerodinamičke sile okomite na ravan simetrije zrakoplova postoji samo kad postoji kut klizanja ili/i otklon vertikalnog kormila (vidi sliku), a ove veličine su vezane za pojavu vjetra..

Druga važna pretpostavka je ravnotežni let. To znači da je za vrijeme leta aerodinamički moment jednak nuli, tj sve tri komponente aerodinamičkog momenta su jednake nuli.

Treća pretpostavka je da računamo performanse zrakoplova ne uzimajući u oblik krivinu i rotaciju Zemlje. Podsjetimo se da je utjecaj rotacije zemlje ušao u ubrzanje g .

1.2 Koordinatni sustavi (k.s.)

Analizu i proračun performansi zrakoplova vršimo u tzv. *lokalnom k.s.* (L), a one ovise od mehaničkih svojstva zrakoplova (masa, središte mase i momenti tromosti), od pogonske sile i od aerodinamičke sile. Mehanička svojstva zrakoplova i pogonska sila poznate su u *k.s. letjelice* (F), dok je aerodinamička sila poznata u *aerodinamičkom k.s.*(A). Konačno potreban nam je još jedan k.s. u kome su izvedene jednadžbe gibanja. To je s matematičke točke gledanja sferni k.s. koji u mehanici leta nazivamo *brzinski k.s.* (V). Zato prije analize performansi moramo definirati ova četiri koordinatna sustava i veze između njih. Kad kažemo veze između tih koordinatnih sustava, to znači da trebamo znati, kako izračunati komponente nekog vektora u bilo kom k.s., ako ih znamo u jednom k.s. od ova četiri,

Napomenimo da su svi k.s. desni, što znači da je dovoljno definirati dvije osi, a treća čini desni trijedrar. Uvijek si možemo pomoći desnom šakom, ako palac, kažiprst i srednjak namjestimo okomito jedan na drugi. Ako palac označuje x os, kažiprst y os, onda će z os biti u pravcu smjeru srednjaka. Za svaki k.s. osim položaja ishodišta, trebamo znati kutove u odnosu na neki poznati k.s., i njegovu kutnu brzinu. Kutna brzina nužna je da bismo odredili inercijsku silu, a kutovi da bismo odredili matricu transformacije u taj k.s. iz nekog drugog k.s..

Vektor kutne brzina k.s. imat će indeks dolje od kog k.s. je to kutna brzina, a indeks gore označavat će k.s. duž čijih osa su komponente. Primjerice, ako su $[p \ q \ r]$ komponente kutne brzine brzinskog k.s. duž osi aerodinamičkog k.s. ona ih označavamo sa

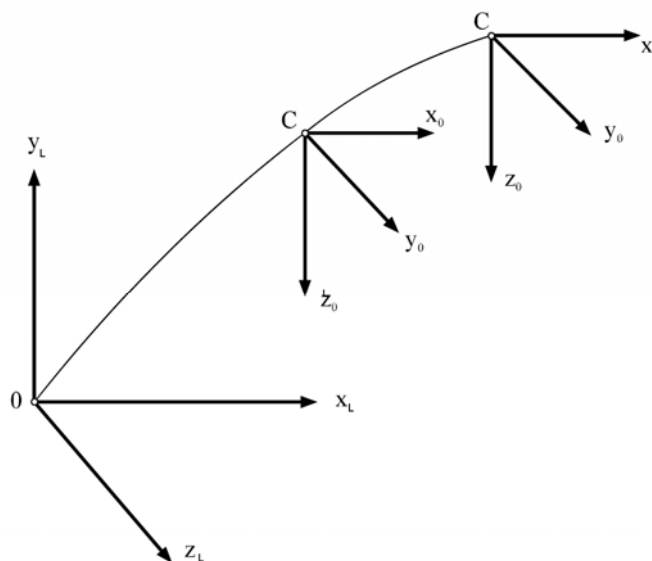
$$\begin{bmatrix} p_V^A & q_V^A & r_V^A \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Omega}_V^A.$$

1.2.1 Lokalni k.s. (L)

Ovaj k.s. nije propisan ISO standardima. On se može izabrati onako kako je potrebno za zadani problem. Npr. ako proučavamo polijetanje zrakoplova onda ishodište stavimo u središte mase zrakoplova prije pokretanja, x os usmjerimo u pravcu piste, a y ili z os usmjerimo prema gore. Treća os čini desni trijedrar.

1.2.2 Nošeni k.s. (O)

Nošeni k.s. sustav ima ishodište u središtu mase letjelice. Os x_o je u horizontalnoj ravnini, a z_o je vertikalna u smjeru prema dolje (slika 1). Zato što zanemarujemo zakrivljenost



Slika 1. Translacija nošenog koordinatnog sustava

Zemljine površine, ovaj k.s. nema kutnu brzinu, tj. nošeni k.s. sustav ne rotira tijekom leta, već ostaje paralelan samom sebi, drugim riječima tijekom leta zrakoplova nošeni k.s. ima samo translatorno gibanje. Radi pojednostavljenja, postavljamo nošeni k.s. paralelno s lokalnim, pa on ostaje stalno u tijeku leta paralelan s lokalnim k.s., ali putuje sa središtem mase letjelice (zato smo mu dali ime "nošeni", slika 1).

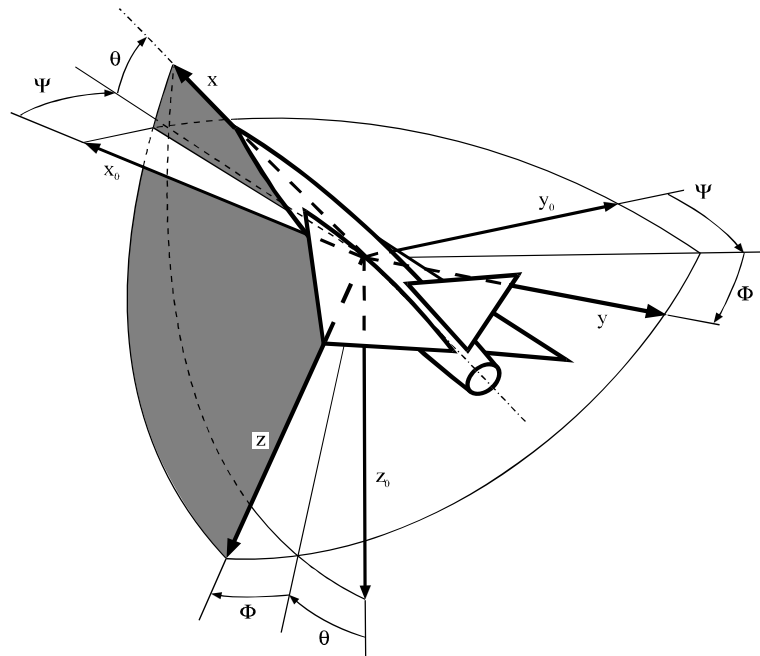
1.2.3 K.s. letjelice (F)

Ovaj k.s. čine glavne centralne osi tromosti letjelice što znači da je njegovo ishodište u središtu mase. Os x i os z nalaze se u ravnini simetrije letjelice i to os x duž tijela u smjeru leta, a os z je nadolje, dok je os y okomita na ravninu simetrije. Zato što je taj k.s. kruto vezan za letjelicu, njegova je kutna brzina ujedno i kutna brzina letjelice. Slovo F sa kojim označavamo taj k.s. dolazi od engleske riječi "frame", ali kako je to najviše upotrebljavan k.s., sve veličine definirane u tom koordinatnom sustavu nemaju nikakvih oznaka. Usmjerenost osi tog k.s. određena je u odnosu na nošeni pomoću tri kuta (slika 2)

ψ u horizontalnoj ravnini oko osi z_0 , nazivamo ga *kut zanosa*,

θ u vertikalnoj ravnini oko horizontalne osi \tilde{y} , nazivamo ga *kut propinjanja*,

ϕ oko osi x , nazivamo ga *kut valjanja letjelice*.



Slika 2. K.s. letjelice

Matrica transformacije u k.s. letjelice iz nošenog k.s. pomoću ovih kutova jest:

$$\mathbf{L}_{FO} = \mathbf{L}_X(\phi) \mathbf{L}_Y(\theta) \mathbf{L}_Z(\psi).$$

što pišemo kraće $\mathbf{L}_{FO}(\phi, \vartheta, \psi)$. Kutna brzina letjelice (jednaka kutnoj brzini njenog k.s. F) bit će zbroj triju rotacija:

$$\vec{\Omega} = \vec{\dot{\psi}} + \vec{\dot{\theta}} + \vec{\dot{\phi}}.$$

Ona ima projekcije na osi tog k.s.

$$\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{L}_{FO} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + \mathbf{L}_X(\phi) \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Poslije množenja matrica i zamjene dobivamo

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\psi} \sin \theta + \dot{\phi} \\ \dot{\psi} \sin \phi \cos \theta + \dot{\theta} \cos \phi \\ \dot{\psi} \cos \phi \cos \theta - \dot{\theta} \sin \phi \end{bmatrix}.$$

Kao što je već spomenuto, nije potrebno posebno označavati da su to projekcije na osi letjelice, jer kada nije tako onda to posebno označimo. Matricu na desnoj strani gornje jednadžbe možemo rastaviti u produkt dviju matrica

$$\begin{bmatrix} -\dot{\psi} \sin \theta + \dot{\phi} \\ \dot{\psi} \sin \phi \cos \theta + \dot{\theta} \cos \phi \\ \dot{\psi} \cos \phi \cos \theta - \dot{\theta} \sin \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \cos \theta \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

Matricu 3×3 na desnoj strani označavamo sa \mathbf{R} . Ona je funkcija dvaju kutova ϕ i ϑ , nije matrica transformacije i na nju se ne odnose pravila o matrici transformacija. Sa \mathbf{s} označavamo novi pojam *stav*. To je matrica koju čine tri kuta

$$\mathbf{s} = [\phi \quad \theta \quad \psi]^T.$$

S ovim oznakama je

$$\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{R}(\phi, \vartheta) \cdot \dot{\mathbf{s}}$$

$$\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{R}(\phi, \vartheta)^{-1} \cdot \boldsymbol{\Omega},$$

ili

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin \phi \tan \theta & \cos \phi \tan \theta \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi / \cos \theta & \cos \phi / \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}.$$

1.3 Brzine letjelice

Razlikujemo dvije brzine letjelice. Prva je brzina letjelice u odnosu na Zemlju. Nazivamo je *brzina leta* i označavamo je sa \vec{V}_K . Druga je brzina letjelice u odnosu na zrak \vec{V} i nju nazivamo *aerodinamička brzina* (bez indeksa). Između te dvije brzine imamo vezu

$$\vec{V}_K = \vec{V}_W + \vec{V},$$

gdje je \vec{V}_W brzina zraka (u odnosu na Zemlju) ili, kratko, *vjetar*.

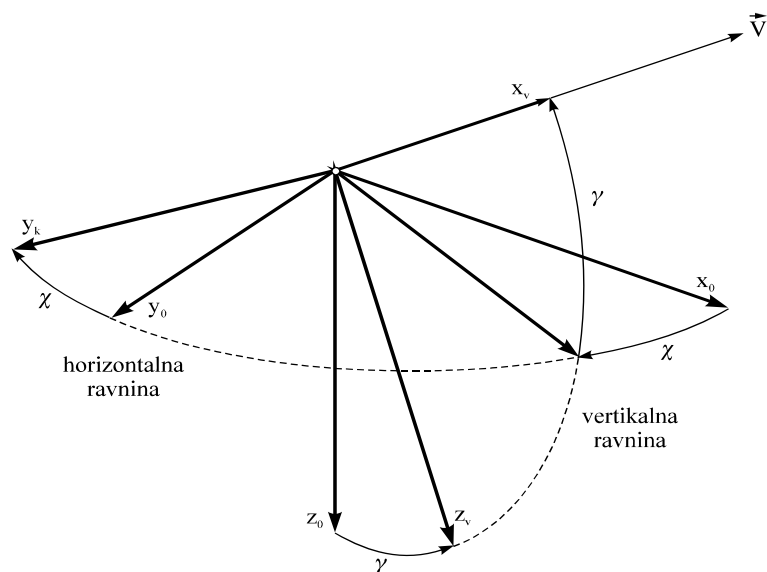
Aerodinamička brzina V je jednaka po veličini i pravcu a suprotna po smjeru *brzini opstrujavanja*, koju označavamo sa \vec{V}_∞ . Drugim riječima

$$\vec{V}_\infty = -\vec{V}.$$

1.3.1 Brzinski k.s. (V)

Kao što je rečeno brzina leta V_K je brzina letjelice u odnosu na Zemlju. Ona je određena svojim intenzitetom V_K i pomoću dva kuta (slika 3) u odnosu na osi nošenog koordinatnog sustava:

- χ je kut u horizontalnoj ravnini oko osi z_0 od osi x_0 do horizontalne projekcije brzine (pozitivan oko osi z prema dolje), nazivamo ga *kut skretanja*,
- γ je u vertikalnoj ravnini od horizontalne projekcije do brzine leta (pozitivan prema gore), nazivamo ga *kut penjanja*.



Slika 3. Brzinski k.s.

Projekcije brzine leta na osi letjelice obilježavamo uvijek sa $u_K \quad v_K \quad w_K$.

Za rješenje nekih problema kao što su to izračunavanja performansa zrakoplova, dovoljno je promatrati samo gibanje središta mase. Tada je pogodno primjenjivati brzinski k.s.. Brzinski k.s. ima os x_V u pravcu i smjeru brzine leta, os z_V mu je u vertikalnoj ravnini kroz brzinu leta prema dolje, a os y_V koja čini desni k.s. je horizontalna. Prema slici 4 iz nošenog koordinatnog sustava "O" u brzinski prelazi se s dvije rotacije: prvo oko osi z_0 za kut χ , a zatim oko osi y_V za kut γ :

$$\mathbf{L}_{VO} = \mathbf{L}_Y(\gamma)\mathbf{L}_Z(\chi).$$

Npr.

$$\mathbf{V}_K^O = \mathbf{L}_{OV} \mathbf{V}_K^V = \mathbf{L}_Z(-\chi) \cdot \mathbf{L}_Y(-\gamma) \cdot \begin{bmatrix} V_K \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_K \cos \chi \cos \gamma \\ V_K \cos \gamma \sin \chi \\ -V_K \sin \gamma \end{bmatrix}$$

Taj k.s. ima dvije kutne brzine:

- $\dot{\chi}$ kutnu brzinu oko vertikalne osi z_0 i
- $\dot{\gamma}$ oko horizontalne osi y_V

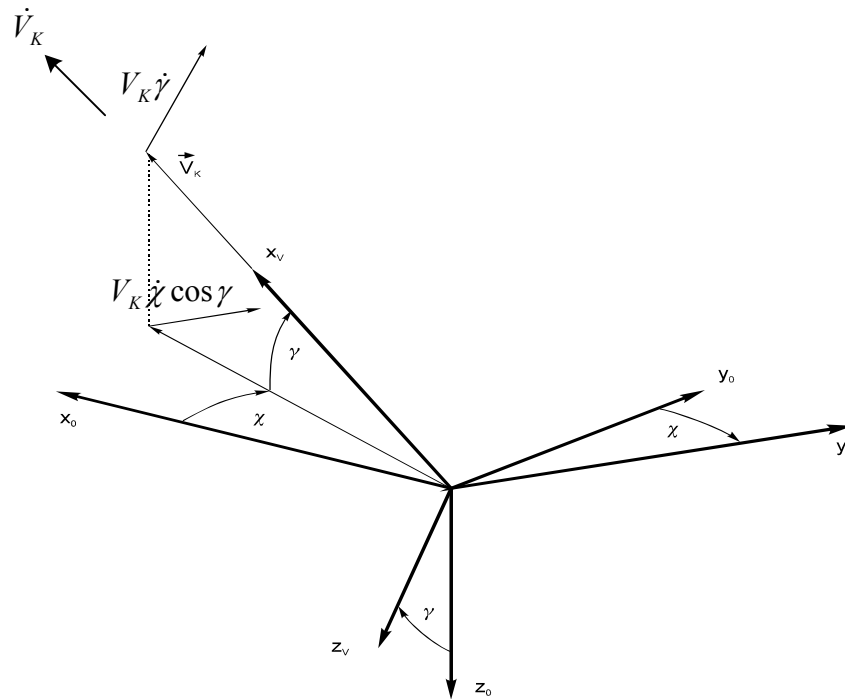
$$\vec{\Omega}_V = \vec{\dot{\chi}} + \vec{\dot{\gamma}},$$

Taj vektor ima komponente duž osa brzinskog k.s.

$$\Omega_V^V = \mathbf{L}_{VO} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\chi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\gamma} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\chi} \sin \gamma \\ \dot{\gamma} \\ \dot{\chi} \cos \gamma \end{bmatrix}.$$

Komponente brzine leta u brzinskom koordinatnom sustavu su $\mathbf{V}_K^V = [V_K \quad 0 \quad 0]^T$, pa su komponente ubrzanja u brzinskom koordinatnom sustavu

$$\mathbf{a}^V = \dot{\mathbf{V}}_K^V + \tilde{\Omega}_V^V \mathbf{V}_K^V = \begin{bmatrix} \dot{V}_K \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\chi} \cos \gamma & \dot{\gamma} \\ \dot{\chi} \cos \gamma & 0 & \dot{\chi} \sin \gamma \\ -\dot{\gamma} & -\dot{\chi} \sin \gamma & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_K \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{V}_K \\ V_K \dot{\chi} \cos \gamma \\ -V_K \dot{\gamma} \end{bmatrix}. \quad 1.1$$



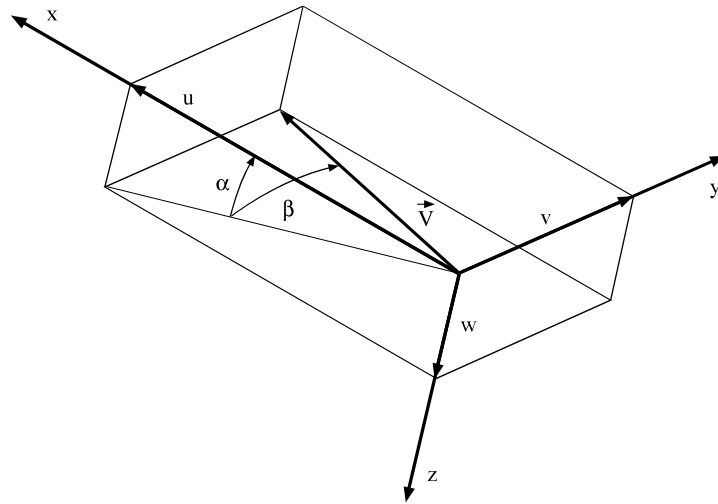
Slika 4. Ubrzanja uzduž osi brzinskoga koordinatnog sustava

Do tih komponenata ubrzanja u brzinskom koordinatnom sustavu mogli smo doći ako tražimo komponente brzine hodografa. Iz mehanike znamo da je hodograf putanja točke čiji je vektor položaja brzina. Znamo da je brzina derivacija vektora položaja. Ako je vektor položaja jednak brzini leta, onda je derivacija tog vektora položaja tj. brzina hodografa jednaka ubrzanju.

1.3.2 Aerodinamički k.s. (A)

Položaj aerodinamičke brzine određujemo u odnosu na letjelicu, jer o njenom intenzitetu i položaju u odnosu na letjelicu ovise aerodinamičke sile i momenti.

Napadni kut α nalazi su u ravnini simetrije (vanjske površine letjelice), od projekcije aerodinamičke brzine na tu ravninu do osi x letjelice u toj ravnini (slika 5), a kut klizanja β je od projekcije aerodinamičke brzine do aerodinamičke brzine. Drugim riječima, kut klizanja je odklon aerodinamičke brzine od ravnine simetrije letjelice (simetrije vanjske površine letjelice). Sa tim kutovima komponente aerodinamičke brzine u koordinatnom sustavu letjelice su



Slika 5. Napadni kut i kut klizanja

$$\begin{aligned} u &= V \cos \beta \cos \alpha \\ v &= V \sin \beta \\ w &= V \cos \beta \sin \alpha . \end{aligned}$$

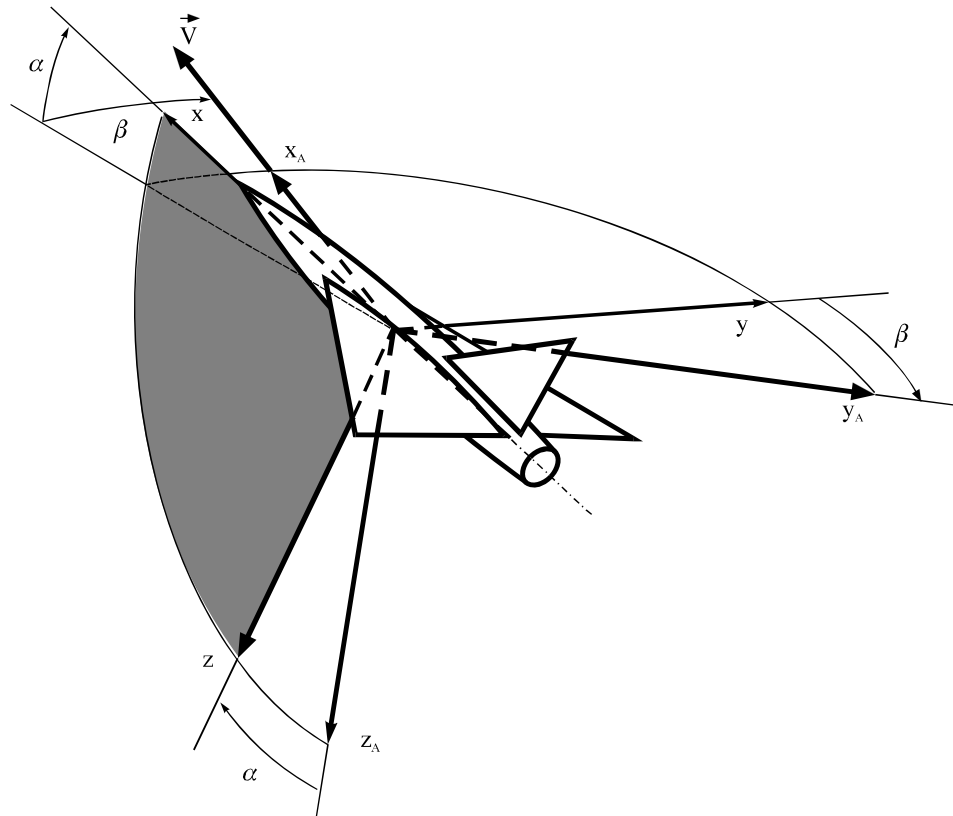
Na osnovu tih jednadžbi dobivamo zavisnost napadnog kuta i kuta klizanja od komponenti aerodinamičke brzine:

$$\sin \beta = \frac{v}{V} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{w}{u} .$$

Uočavamo da je napadni kut α pozitivan kad je pozitivna komponenta w , te isto tako da je kut klizanja pozitivan ako je pozitivna komponenta v aerodinamičke brzine. To je najsigurniji način kontrole predznaka napadnog kuta i kuta klizanja. Vrlo često su os letjelice i aerodinamička brzina vrlo blizu, te su napadni kut i kut klizanja mali kutovi. To nam omogućava primjenu pojednostavljenih jednadžba

$$v = \beta V \quad w = \alpha V .$$

U aerodinamici zrakoplova upotrebljava se osim k.s. letjelice i aerodinamički k.s. (slika 6). Njegovo ishodište je u središtu mase ili nekoj određenoj točki letjelice, a os x_A je u pravcu i smjeru aerodinamičke brzine. Os z_A je u ravnini simetrije letjelice. Kako je ta os okomita na aerodinamičku brzinu (jer je brzina na osi x_A), ona se nalazi u presjeku dviju ravnina, ravnine okomite na aerodinamičku brzinu i ravnine simetrije letjelice.



Slika 6. Aerodinamičke osi i glavne osi tromosti

Najviše trebamo matricu transformacije u k.s. letjelice iz aerodinamičkog koordinatnog sustava. Ta transformacija predstavlja dvije sukcesivne rotacije: (slika 6):

- prvo, oko osi z_A za kut β i to u negativnom smjeru rotacije (dok os x_A ne uđe u ravninu simetrije letjelice)
- drugo, oko novodobivene osi y , za kut α (dok os x_A ne dođe u položaj osi x).

Prema tome je matrica transformacije

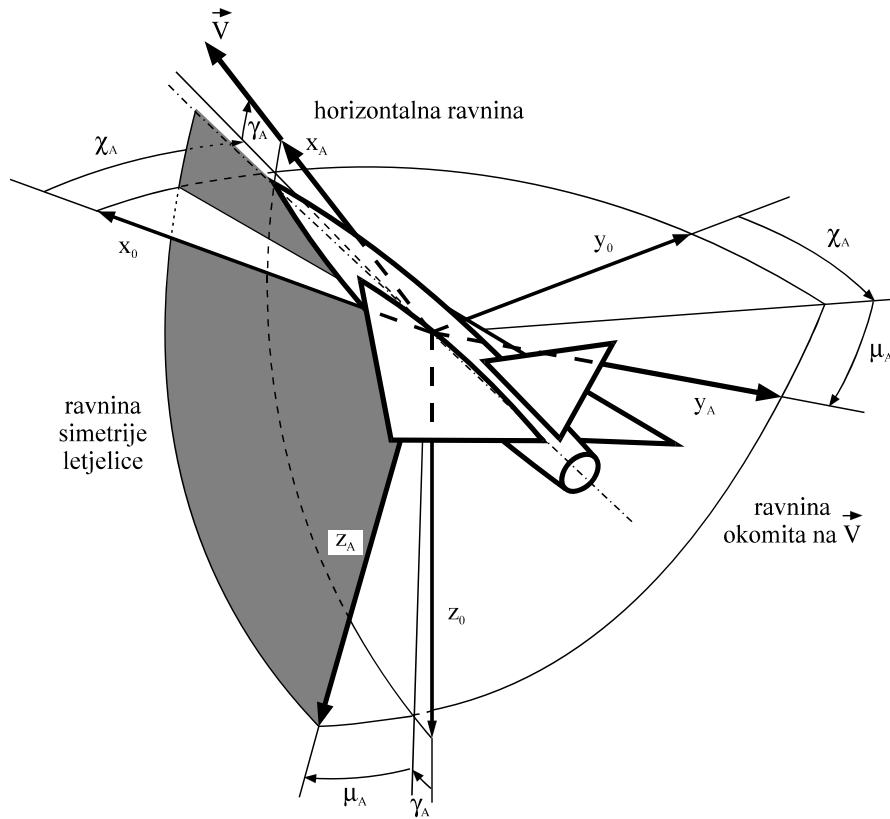
$$\mathbf{L}_{FA} = \mathbf{L}_Y(\alpha) \mathbf{L}_Z(-\beta),$$

što množenjem daje

$$\mathbf{L}_{FA} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta & -\cos \alpha \sin \beta & -\sin \alpha \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ \sin \alpha \cos \beta & -\sin \alpha \sin \beta & \cos \alpha \end{bmatrix}.$$

Ako su kutovi mali, onda je

$$\mathbf{L}_{FA} = \begin{bmatrix} 1 & -\beta & -\alpha \\ \beta & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$



Slika 7. Transformacija iz nošenog koordinatnog sustava
u aerodinamički k.s.

Kada nema vjetra, možemo lako usporediti aerodinamički i brzinski k.s., jer su tada brzina leta i aerodinamička brzina jedan isti vektor, pa oba k.s. imaju istu os x . Osi z_A i z_V se razlikuju. Obje su u ravnini okomitoj na brzinu, ali dok je os z_A u ravnini simetrije letjelice, os z_V je u vertikalnoj ravnini kroz brzinu (slika 6). Između njih je kut μ_A koji se nalazi u ravnini okomitoj na brzinu od osi z_V do osi z_A , mjereno oko brzine. Zato je matrica transformacije iz aerodinamičkog u brzinski k.s.

$$\mathbf{L}_{VA} = \mathbf{L}_X(-\mu_A). \quad 1.2$$

Kada nema vjetra, može se lako prijeći iz koordinatnog sustava letjelice u brzinski kroz aerodinamički k.s.. Matrica transformacije u brzinski iz koordinatnog sustav letjelice jest produkt dviju matrica

$$\mathbf{L}_{VF} = \mathbf{L}_{VA} \mathbf{L}_{AF}, \quad 1.3$$

pa se množenjem matrica $\mathbf{L}_{VA} = \mathbf{L}_X(-\mu_A)$ i $\mathbf{L}_{AF} = \mathbf{L}_Z(\beta)\mathbf{L}_Y(-\alpha)$, dobiva tražena matrica transformacije

$$\mathbf{L}_{VF} = \mathbf{L}_X(-\mu_A)\mathbf{L}_Z(\beta)\mathbf{L}_Y(-\alpha) \quad 1.4$$

koja vrijedi samo u slučaju ako nema vjetra. No tada vrijedi i $\beta = 0$ te je matrica transformacije iz koordinatnog sustava letjelice u brzinski koordinatni sustav

$$\mathbf{L}_{VF} = \mathbf{L}_X(-\mu_A)\mathbf{L}_Y(-\alpha). \quad 1.5$$

1.3.3 Stvarna brzina i mjerenje brzine

Stvarna brzina, brzina letjelice u odnosu na zrak, s kojom će se provoditi sve analize performansi u ovom tekstu nije poznata pilotu tijekom leta. Mjerenje brzine zasniva se na mjerenju tlaka, točnije razlike zaustavnog i statičkog tlaka pomoću Pitot cijevi. Primjenom Bernulijeve jednadžbe za izmjerenu vrijednost $p_0 - p$ razlike zaustavnog i statičkog tlaka može se odrediti stvarna brzina letjelice u odnosu na zrak

$$V = \sqrt{\frac{2(p_0 - p)}{\rho}}.$$

No mjerenje gustoće zraka nije jednostavno. Za zrakoplove malih brzina indikatori su kalibrirani sa standardnom vrijednošću gustoće zraka ρ_s na razini mora. Tada se brzina

$$V_e = \sqrt{\frac{2(p_0 - p)}{\rho_s}}$$

naziva ekvivalentna brzina. Između stvarne i ekvivalentne brzine postoji veza

$$V_e = V \cdot \sqrt{\frac{\rho}{\rho_s}}.$$

Ekvivalentna brzina ne uzima u obzir stlačivost te je primjenjiva samo za male brzine leta. Ekvivalentna brzina V_e jednaka je stvarnoj brzini V kada zrakoplov leti na razini mora u uvjetima standardne atmosfere. Za pilote je ekvivalentna brzina vrlo korisna jer predstavlja parametar potreban za upravljanje letjelicom bez obzira na atmosferske uvjete.

Kada je utjecaj slačivosti potrebno uzeti u obzir ($Ma > 0.3$) nije primjenjiva Bernulijeva jednadžba. Za stlačivo, izentropsko strujanje vrijedi

$$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}.$$

Za mjerenje Machovog broja (tzv. Mach metar) dozvučne struje temeljem gornje relacije uz zasebna mjerenja p_0 i p primjenjuje se formula

$$M = \left\{ \frac{2}{\gamma - 1} \left[\left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}} - 1 \right] \right\}^{\frac{1}{2}},$$

te je stvarna brzina $V = M \cdot a$. Za mjerenje stvarne brzine potrebna je informacija o a brzini zvuka, odnosno temperature koju je na letjelici teško odrediti. Za zrakoplove većih dozvučnih brzina brzinomjeri se kalibriraju sa vrijednostima a_s brzine zvuka i p_s tlaka za standardnu atmosferu. Tada se brzina određuje pomoću $p_0 - p$ razlike zaustavnog i statičkog tlaka

$$V_c = \left\{ \frac{2a_s^2}{\gamma - 1} \left[\left(\frac{p_0 - p}{p_s} + 1 \right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}} - 1 \right] \right\}^{\frac{1}{2}}$$

i naziva se kalibrirana brzina. Kalibrirana brzina V_c predstavlja ekvivalentnu brzinu korigiranu za utjecaj stlačivosti. Može se također pokazati direktna veza između V stvarne brzine i V_c kalibrirane brzine

$$V_c = a \left[5 \left\{ \left[\frac{p}{p_s} \left(1 + \frac{M^2}{5 \cdot T/T_s} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} - 1 \right] + 1 \right\}^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}} - 1 \right]^{1/2},$$

pri čemu su p_s i T_s tlak, odnosno temperatura u standardnim uvjetima za visinu na razini mora, a $M = V/a$ stvarni Machov broj.

Za nadzvučne brzine koristi se Mach metar kao osnovni instrument za brzinu no tada je potrebno primijeniti tzv. formulu Rayleighove Pitot cijevi.

Kao i svaki instrument tako i brzinomjer ima svoju mehaničku grešku - instrumentalnu grešku. Pored toga položaj Pitot cijevi i otvora za mjerenje statičkog tlaka ima značajan utjecaj na izmjerenu vrijednost brzine. Ta greška naziva se instalacijska ili položajna greška.

Kalibrirana brzina koja uključuje instrumentalnu i položajnu grešku naziva se instrumentalna brzina V_i i specifična je karakteristika svakog zrakoplova. Instrumentalna brzina je brzina koju pilot može očitati sa brzinomjera.

2 TEMELJI PROJEKTNE AERODINAMIKE

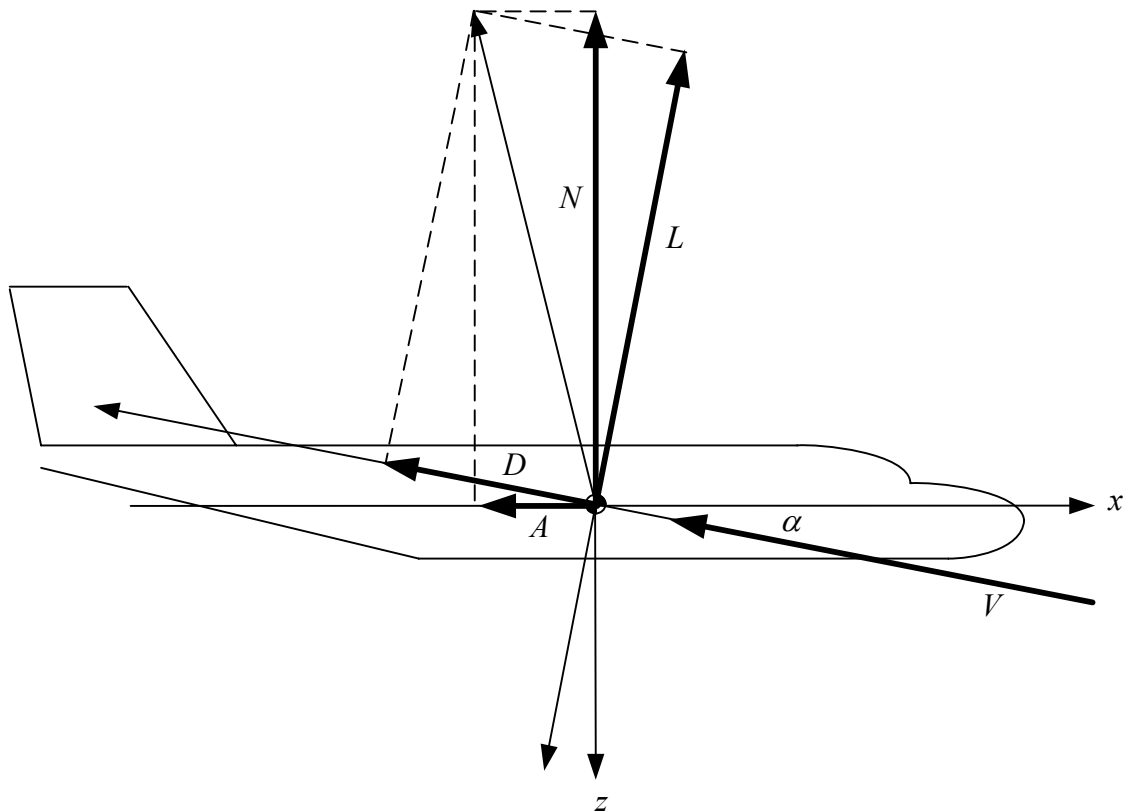
2.1 Aerodinamički koeficijenti zrakoplova

Kada su u pitanju aerodinamička sila ili aerodinamički moment zrakoplova upotrebljavamo dva koordinatna sustava:

- koordinatni sustav letjelice (F) i
- aerodinamički koordinatni sustav (A).

Promatrajmo ravan simetrije zrakoplova i u njoj koordinatni sustav (F) glavnih osa tromosti zrakoplova i koordinatni sustav (A) koji ima x_A os duž brzine leta, a z_A os okomito na brzinu na dolje na slici 2-6. Napomenimo da je ishodište u središtu mase zrakoplova. Sustav (F) zaokrenut je za pozitivan kut α u odnosu na sustav (A).

A i N su komponente aerodinamičke sile duž osi tromosti zrakoplova, a D i L duž i okomito na brzinu leta. Aerodinamički moment u ovom slučaju je okomit na ravan simetrije zrakoplova. Za zrakoplov u svim uvjetima definira se referentna sila koja predstavlja produkt referentnog tlaka i referentne površine. Referentni tlak je uvijek isti. To je dinamički tlak izračunan s brzinom leta (kad nema vjetra), odnosno s brzinom optjecanja koja je po intenzitetu jednaka brzini leta ali je suprotnog smjera $q_\infty = \frac{\rho V^2}{2}$.



Slika 1

Za zrakoplove referentna površina je površina krila s nepostojećim dijelom kroz tijelo zrakoplova. To znači da je referentna sila $\frac{\rho V^2}{2} S_{ref}$.

Tablica 1

Koeficijent aksijalne sile	$C_A = \frac{A}{q_\infty S_{ref}}$	Koeficijent otpora	$C_D = \frac{D}{q_\infty S_{ref}}$
Normalne sile	$C_N = \frac{N}{q_\infty S_{ref}}$	Koeficijent uzgona	$C_L = \frac{L}{q_\infty S_{ref}}$
Moment propinjanja	$C_m = \frac{M}{q_\infty S_{ref} c_A}$		

Kao što vidimo u tablici 1 za propinjanje referentna duljina je aerodinamička tetiva krila. Svi aerodinamički koeficijenti u općem slučaju su funkcije:

- aerodinamičkih parametara:

$$\text{Machova broja } Ma = \frac{V}{a} \quad \text{i} \quad \text{Reynoldsova broja } Re = \frac{V\ell}{\nu}$$

gdje je ℓ duljina opstrujavanja, a ν je kinematički koeficijent viskoznosti zraka,

- kutova položaja aerodinamičke brzine u odnosu na letjelicu

$$\alpha \text{ i } \beta;$$

- bezdimenzijskih kutnih brzina aerodinamičke brzine u odnosu na letjelicu

$$\dot{\alpha}^* = \frac{\dot{\alpha}}{V_\infty/c_A} \quad \dot{\beta}^* = \frac{\dot{\beta}}{V_\infty/b};$$

- bezdimenzijskih kutnih brzina letjelice

$$p^* = \frac{p}{V_\infty/b} \quad q^* = \frac{q}{V_\infty/c_A} \quad r^* = \frac{r}{V_\infty/b};$$

2

- tklona upravljačkih površina

δ_ℓ otklon krilaca (aileron)

δ_m otklon kormila visine oko osi y letjelice (elevator)

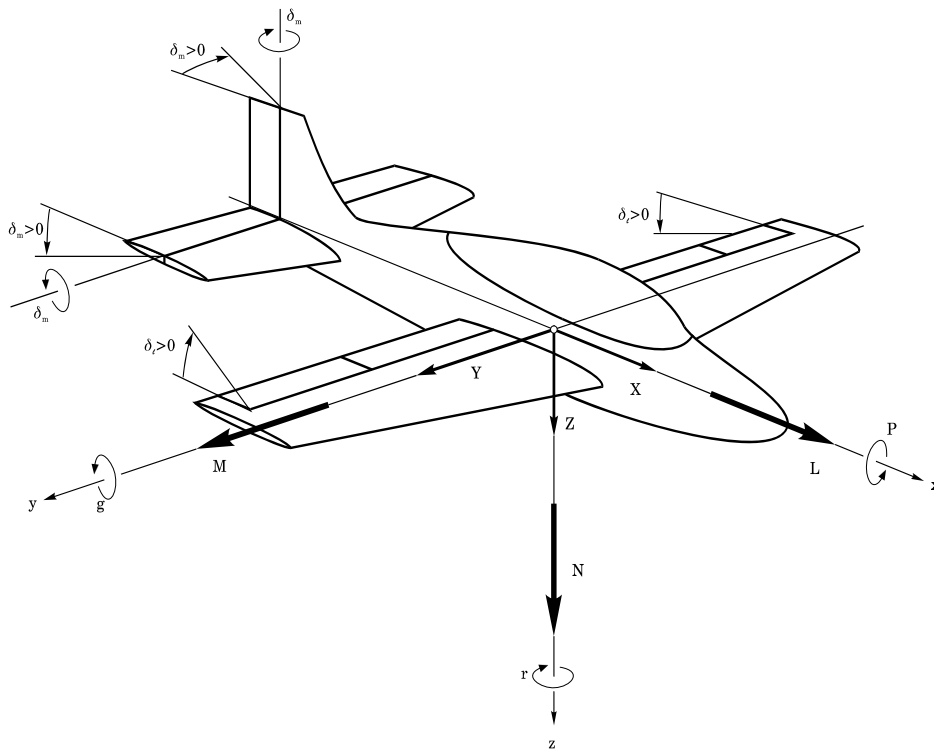
δ_n otklon kormila pravca oko osi z letjelice (ruđer)

- otklona

δ_f otklon zakrilca (flaps)

otklon pretkrilca

zračnih kočnica (spoiler) itd.



Slika 2. Pozitivni smjerovi rotacija, momenata i otklona upravljačkih površina

Određivanje aerodinamičkih koeficijenata ovisno o parametrima i konfiguraciji letjelice zadaća je aerodinamike. Ona se rješava na različite načine.

Teoretski pristup na temelju mehanike fluida vodi nas na numeričko rješavanje sustava parcijalnih diferencijalnih jednadžbi sa zadanim rubnim uvjetima na letjelici i u beskonačnosti, koji rješavamo numeričkim metodama na računalima (CFD).

Teoretska aerodinamika rješava analitički iz određena, fizički opravdana pojednostavljenja te iste jednadžbe i tako dobivamo približne, ali vrlo korisne ovisnost aerodinamičkih koeficijenata o parametrima letjelice.

Eksperimentalno aerodinamički koeficijenti se određuju u zračnom tunelu.

Najtočnije vrijednosti aerodinamičkih koeficijenata dobivamo mjerenjem u letu zrakoplova. Treba reći da se koeficijenti ne mogu mjeriti već se mjere druge fizičke veličine, a iz tih mjerenih podataka se određuju aerodinamički koeficijenti.

Metode “projektne aerodinamike” predstavljaju kombinaciju drugog i trećeg načina određivanja aerodinamičkih koeficijenata.

2.2 Veze između aerodinamičkih koeficijenata

Sa slike vidimo da je

$$\begin{aligned} A &= D \cos \alpha - L \sin \alpha \\ N &= L \cos \alpha + D \sin \alpha \end{aligned}$$

Poslije dijeljenja gornje jednadžbe transformacija s tom silom dobivamo:

$$\begin{aligned} C_A &= C_D \cos \alpha - C_L \sin \alpha \\ C_N &= C_L \cos \alpha + C_D \sin \alpha \end{aligned}$$

Ove iste jednadžbe možemo napisati i u obrnutom obliku

$$\begin{aligned} C_D &= C_A \cos \alpha + C_N \sin \alpha \\ C_L &= C_N \cos \alpha - C_A \sin \alpha \end{aligned}$$

Derivacijom druge jednadžbe po napadnom kutu dobivamo:

$$\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} = \frac{\partial C_N}{\partial \alpha} \cos \alpha - C_N \sin \alpha - \frac{\partial C_A}{\partial \alpha} \sin \alpha - C_A \cos \alpha.$$

Za $\alpha = 0$ dobivamo vezu

$$\left(\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \right)_0 = \left(\frac{\partial C_N}{\partial \alpha} \right)_0 - C_{A0}.$$

Kako je $C_A \approx C_{A0} = C_{D0}$, ovu jednadžbu možemo napisati u obliku

$$(C_{L\alpha})_0 = (C_{N\alpha})_0 - C_{D0}.$$

Iz toga vidimo da je uvijek $(C_{L\alpha})_0$ manje od $(C_{N\alpha})_0$ za vrijednost C_{D0} . U slučaju zrakoplova treba razlikovati $(C_{L\alpha})_0$ od $(C_{N\alpha})_0$, jer C_{D0} nije zanemarivo u odnosu na $(C_{L\alpha})_0$ ili $(C_{N\alpha})_0$. No, ta razlika nije velika.

2.3 Noseća površina

2.3.1 Geometrijske karakteristike

Koordinatni sustav noseće površine ima ishodište u vrhu korijenske tetive, os x duž korijenske tetive, os y je okomito na ravninu simetrije noseće površine, a os z čini desni trijedrar (u ravnini simetrije krila).

Aerodinamička apscisa je srednja udaljenost napadnog ruba krila od os y

$$x_A = \frac{2}{S} \int_0^{b/2} x_0(y) \cdot c(y) \cdot dy,$$

gdje je $x_0(y)$ jednadžba napadnog ruba krila. Za trapeznu noseću površinu po toj jednadžbi nalazi se aerodinamička apscisa na udaljenosti od vrha korijenske tetive :

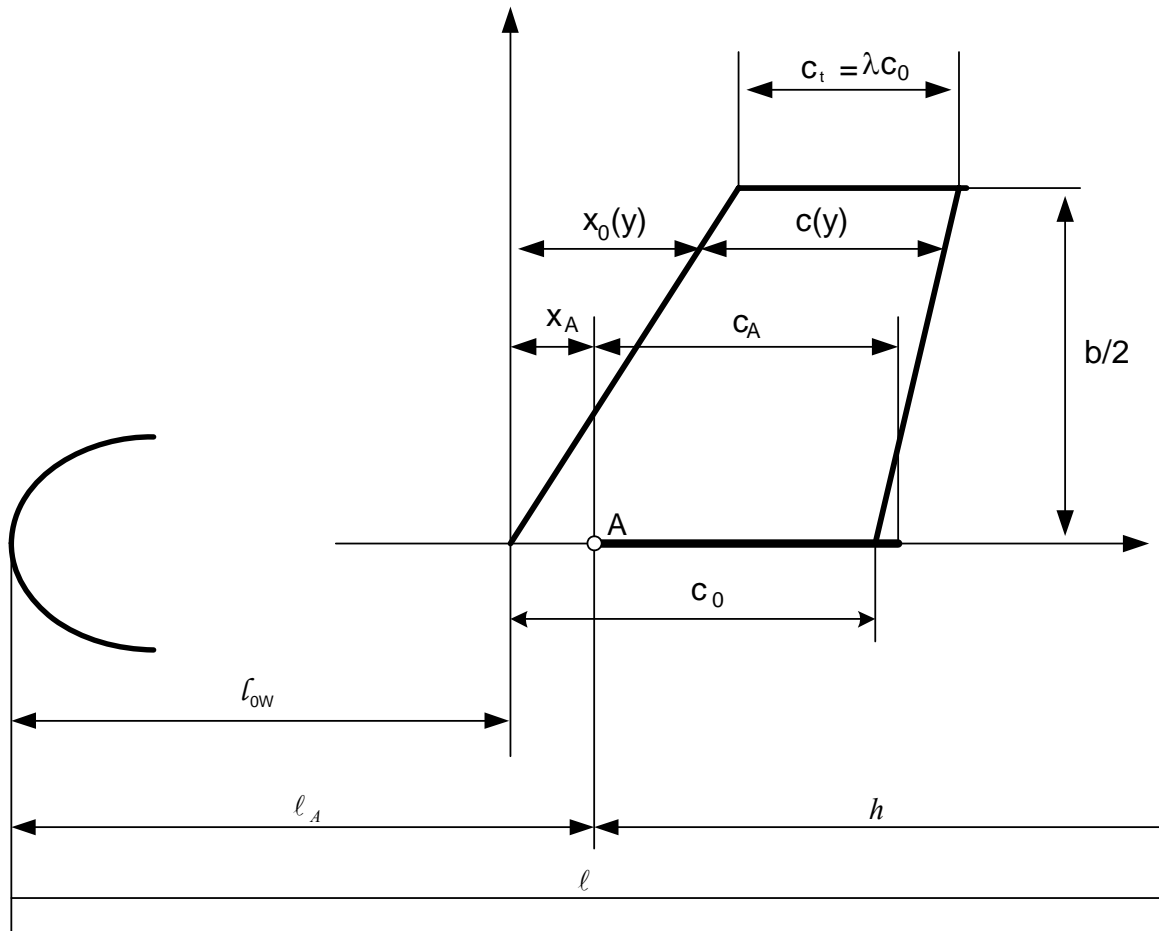
$$x_A = \frac{1 + 2\lambda}{1 + \lambda} \cdot \frac{b \tan A_{LE}}{6}.$$

Aerodinamička tetiva noseće površine dana je jednadžbom

$$c_A = \frac{2}{S} \int_0^{b/2} [c(y)]^2 dy.$$

Za trapeznu noseću površinu po toj jednadžbi aerodinamička tetiva se izračunava prema obrascu :

$$c_A = \frac{2}{3} c_r \left(1 + \frac{\lambda^2}{1 + \lambda} \right).$$



Slika 3. Aerodinamička tetiva i aerodinamičko ishodište

Udaljenosti svih točaka u pravcu osi x letjelice označavat ćemo sa ℓ ako ih mjerimo od vrha zrakoplova. Međutim, u zrakoplovstvu se često udaljenosti mjere od aerodinamičke apscise krila, gdje se nalazi početak aerodinamičke tetive. Tu točku nazivamo *aerodinamičko ishodište*. Ako je početak krila udaljen ℓ_{0W} od vrha zrakoplova, onda je ℓ_A udaljenost aerodinamičkog ishodišta od vrha $\ell_A = \ell_{0W} + x_A$. Kada udaljenosti točaka mjerimo od aerodinamičkog ishodišta, označavamo ih sa h . Tako na primjer središte mase je udaljeno od vrha letjelice ℓ_m , a od aerodinamičkog ishodišta h_m . Treba li prelaziti s jedne na drugu udaljenost, onda koristimo vezu

$$\ell = \ell_A + h.$$

Bez obzira na to odakle mjerimo udaljenosti uvijek ih izražavamo u multiplima aerodinamičke tetive krila c_A , koja je referentna duljina u svim problemima propinjanja.

Uvest ćemo oznake

$$\bar{\ell} = \frac{\ell}{c_A} \quad \text{i} \quad \bar{h} = \frac{h}{c_A}.$$

2.3.2 Veza između uzgona i normalne sile

Podsjetimo se da je uzgon letjelice komponenta aerodinamičke sile koja je u ravnini simetrije okomita na projekciju aerodinamičke brzine na ravninu simetrije letjelice, a da je normalna sila okomita na os x tromosti u istoj ravnini simetrije letjelice. Vežu između gradijenata uzgona i normalne sile vidjeli smo na kraju prethodnog odjeljka.

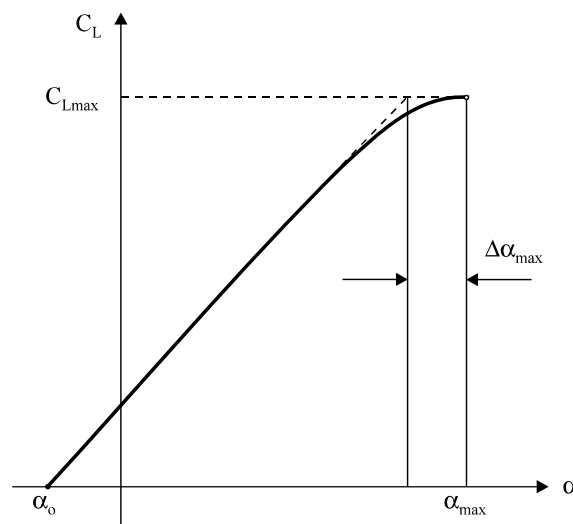
$$(C_{L\alpha})_0 = (C_{N\alpha})_0 - C_{D0}.$$

Ova jednadžba vrijedi za zrakoplov u cjelini, ali i za krilo i horizontalni rep. Krilo, horizontalni rep, vertikalni rep i canari zajednički nazivamo *noseće površine*. Napadni kut noseće površine α mjerimo od aerodinamičke brzine do korijenske tetive. Kada je u pitanju noseća površina, treba uzeti u obzir još tri činjenice:

- **Prvo**, za noseću površinu C_{D0} je vrlo malo u odnosu na $(C_{L\alpha})_0$ ili $(C_{N\alpha})_0$ (manje od 1%), pa u granicama točnosti, s kojom radimo, možemo C_{D0} u gornjoj jednadžbi zanemariti te je

$$(C_{L\alpha})_0 = (C_{N\alpha})_0.$$

- **Drugo**, tipična ovisnost koeficijenta uzgona krila o napadnom kutu prikazana je na slici 3.



Slika 4. Ovisnost sile uzgona krila o napadnom kutu

Na većem dijelu, gdje napadni kut nije mali (npr. do $\approx 20^\circ$), ona se može predstaviti linearnom zavisnošću

$$C_L(\alpha) = C_{L\alpha}(\alpha - \alpha_{OL}),$$

u kojoj je $C_{L\alpha}$ konstantno u odnosu na napadni kut (ali je ovisno o Machovu broju). To znači da je na linearnom dijelu $C_{L\alpha} = (C_{L\alpha})_0$.

Zato je opravdano ne praviti razliku između $C_{L\alpha}$ i $C_{N\alpha}$ noseće površine.

- Treće, iz jednadžbe

$$C_L = C_N \cos \alpha - C_A \sin \alpha$$

za $\alpha = 0$ slijedi da je

$$C_{L0} = C_{N0}.$$

Na temelju ovih činjenica slijedi zaključak da na linearnom području, imaju sile uzgona i normalna sila isti gradijent i istu vrijednost pri nultom napadnom kutu. Drugim riječima, na linearnom području sila uzgona je brojno jednaka normalnoj sili i obje imaju istu ovisnost o napadnom kutu (slika 4).

$$C_N(\alpha) = C_{N\alpha}(\alpha - \alpha_0) \equiv C_L(\alpha) = C_{L\alpha}(\alpha - \alpha_0),$$

ali ne i isti pravac. U ovim jednadžbama je $\alpha_0 < 0$, što znači da je uzgon (ili normalna sila) jednak nuli kada je napadni kut $\alpha = \alpha_0 < 0$, tj. kada je os x krila ispod brzine (točnije ispod aerodinamičke projekcije brzine na ravninu simetrije krila). Taj negativni napadni kut α_0 pri kome je uzgon (normalna sila) jednak nuli nazivamo “kut nultog uzgona”. Ako je u letu napadni kut krila jednak nuli, tj. aerodinamička brzina je u pravcu osi x krila, uzgon, pa i normalna sila, nisu jednaki nuli, već je to neka određena pozitivna vrijednost koeficijenta uzgona (ili normalne sile) $C_{L\alpha} \cdot (0 - \alpha_0) = C_{L\alpha} |\alpha_0|$. Ako noseća površina nije uvijena (tj. ako su tetive profila u svim presjecima paralelne) onda je kut nultog uzgona samog krila zapravo jednak kutu nultog uzgona profila koji je značajka profila.

Osim koeficijenta uzgona noseće površine C_L , koristimo i koeficijent uzgona profila koji označavamo sa c_ℓ , što ne treba dovoditi u vezu s koeficijentom momenta valjanja koga označavamo s velikim slovom C_ℓ , ali s istim indeksom.

2.3.3 Gradijent normalne sile

Dobru procjenu gradijenta koeficijenta uzgona u subsonici sve do kritičnog Machovog broja, možemo dobiti pomoću jednadžbe koja daje količnik gradijenta uzgona krila (ili gradijent normalne sile) prema vitkosti krila:

$$\left(\frac{C_{L\alpha}}{A}\right)_w = \frac{2\pi}{2 + \sqrt{4 + \left(\frac{2\pi A}{c_{l\alpha}}\right)^2 \left(1 + \frac{tg^2 \Lambda_t}{1 - Ma^2}\right)}} = \left(\frac{C_{N\alpha}}{A}\right)_w$$

A je vitkost noseće površine, Λ_t je strijela geometrijskog mjesta najveće debljine, a $c_{l\alpha}$ gradijent uzgona profila. Ta jednadžba je dobivena na temelju teorije vrtloga, uzimajući u obzir utjecaj stlačivosti i korekcije prema eksperimentalnim mjerenjima.

Prema lit. 8 u transsonici i supersonici, količnik gradijenta uzgona (ili gradijenta normalne sile) i vitkosti, funkcija je triju parametara :

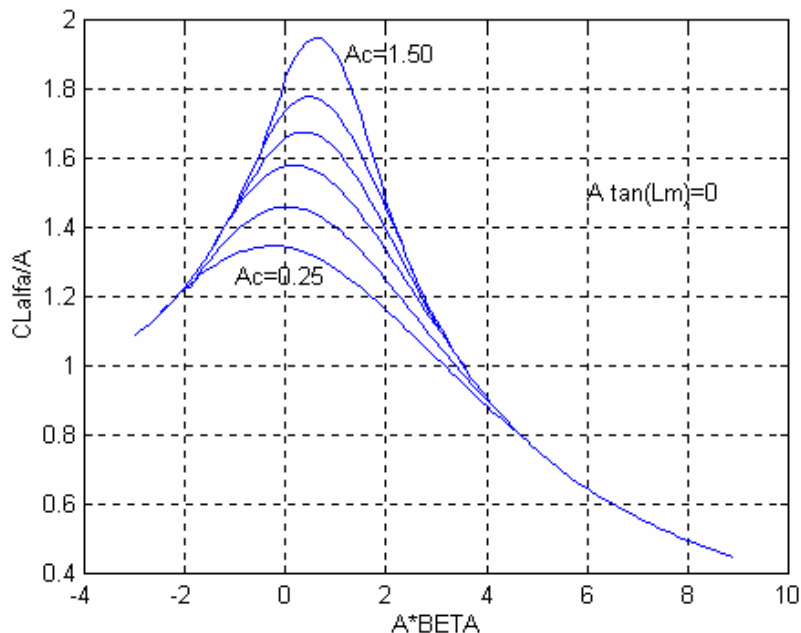
$$\frac{C_{N\alpha}}{A} = f(A_m, A_C, A\beta),$$

Gdje su

$$A_m = A \tan \Lambda_m \quad \beta = \begin{cases} -\sqrt{1 - Ma^2} & Ma < 1 \\ \sqrt{Ma^2 - 1} & Ma > 1 \end{cases}$$

$$A_C = A^3 \sqrt{\bar{t}}$$

U tim parametrima je $\bar{t} = t/c$ srednja relativna debljina noseće površine, Λ_m je kut strijele geometrijskog mjesta srednjih točaka tetiva. Na slikama od 5 do 8, prikazana su četiri dijagrama za vrijednosti parametra $A_m = 0, 1, 2$ i 3 prema [15]. Na tim dijagramima je Λ_m označeno sa Lm , a β sa $BETA$.



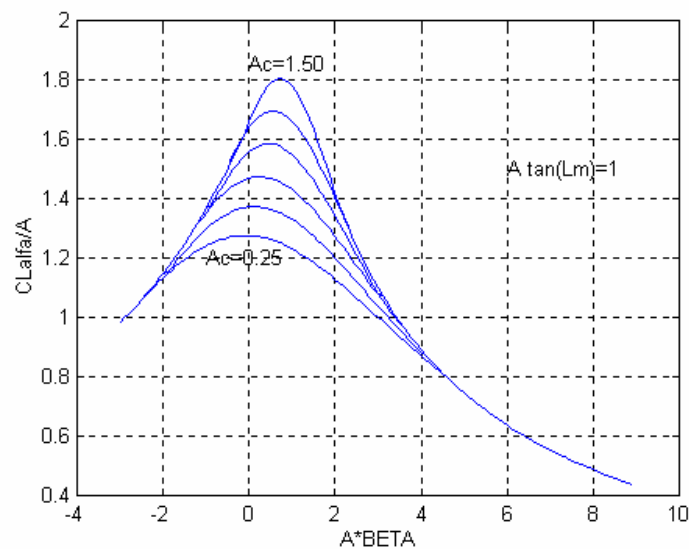
Slika 5. Krivulje $\frac{C_{N\alpha}}{A} = f(A_C, A\beta)$ za slučaj $A_m = 0$

U literaturi [20] preporučuje se povećati vitkost krila kako bi se uzeli u obzir dodaci na kraju krila koji mijenjaju raspored vrtloga na krilu. Za kraj krila u obliku “endplate” preporučuje se

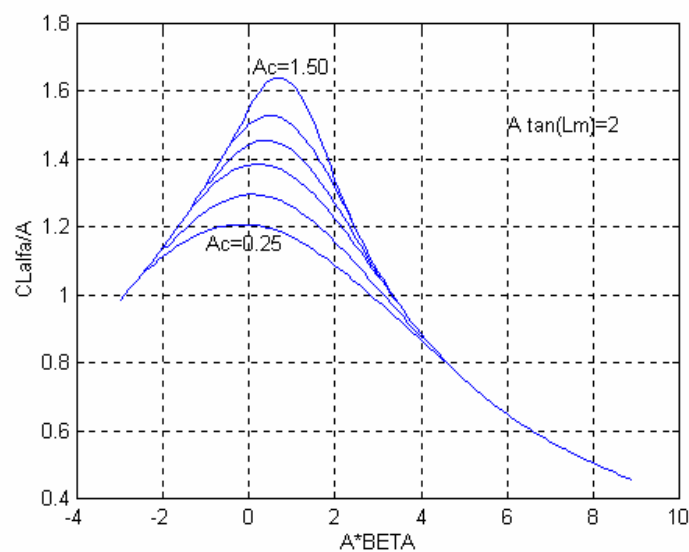
$$A_{\text{effective}} = A \left(1 + 1.9 \frac{h}{b} \right);$$

h je visina “endplate”, a za kraj krila u obliku “winglet”

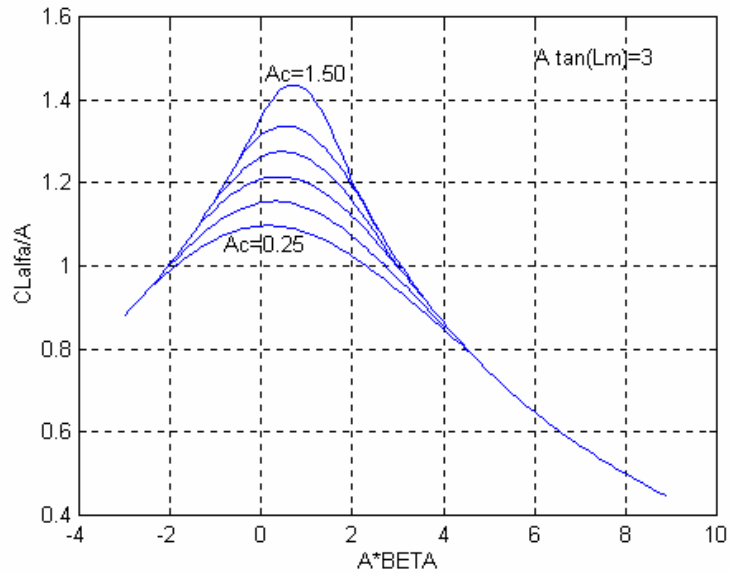
$$A_{\text{effective}} = 1.2 A .$$



Slika 6. Krivulje $\frac{C_{N\alpha}}{A} = f(A_c, A\beta)$ za slučaj $A_m = 1$



Slika 7. Krivulje $\frac{C_{N\alpha}}{A} = f(A_c, A\beta)$ za slučaj $A_m = 2$



Slika 8. Krivulje $\frac{C_{N\alpha}}{A} = f(A_c, A\beta)$ za slučaj $A_m = 3$

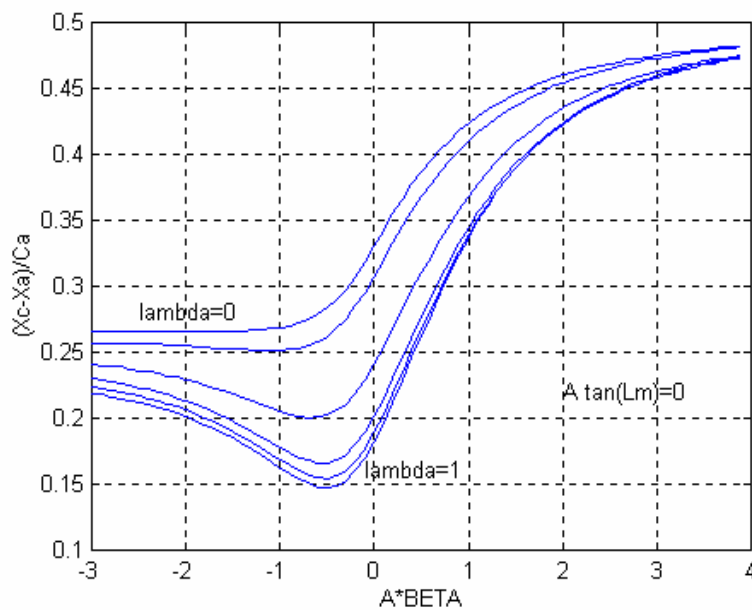
Postoji i drugi postupak tzv DATCOM (lit. 16) koji je primijenjen u lit.12.

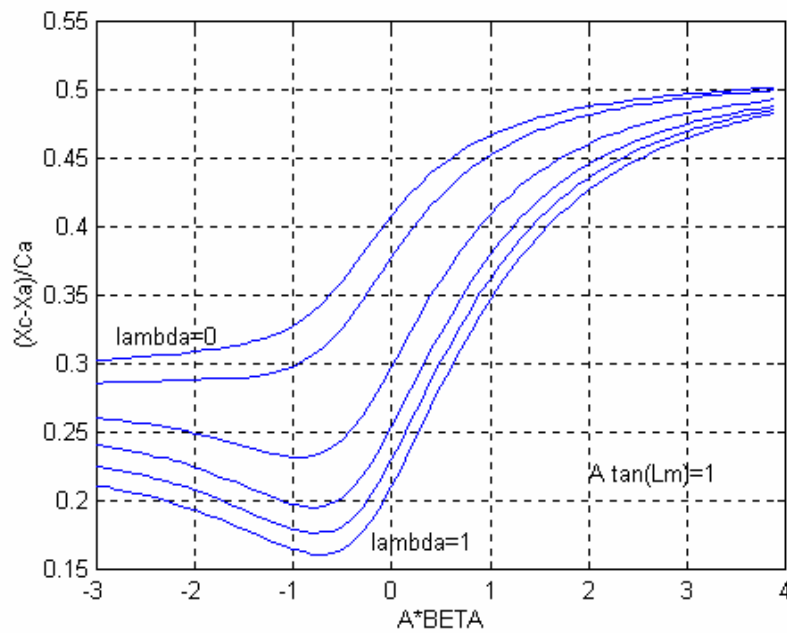
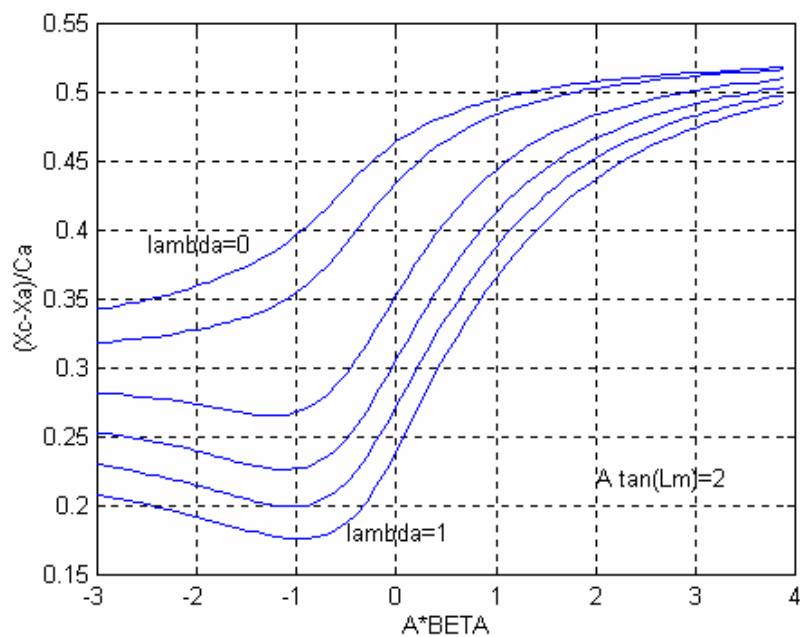
2.3.4 Položaj hvatišta normalne sile

Položaj napadne točke normalne sile krila određen je također trima parametrima:

$$\bar{h}_c = f(A_m, \lambda, A\beta).$$

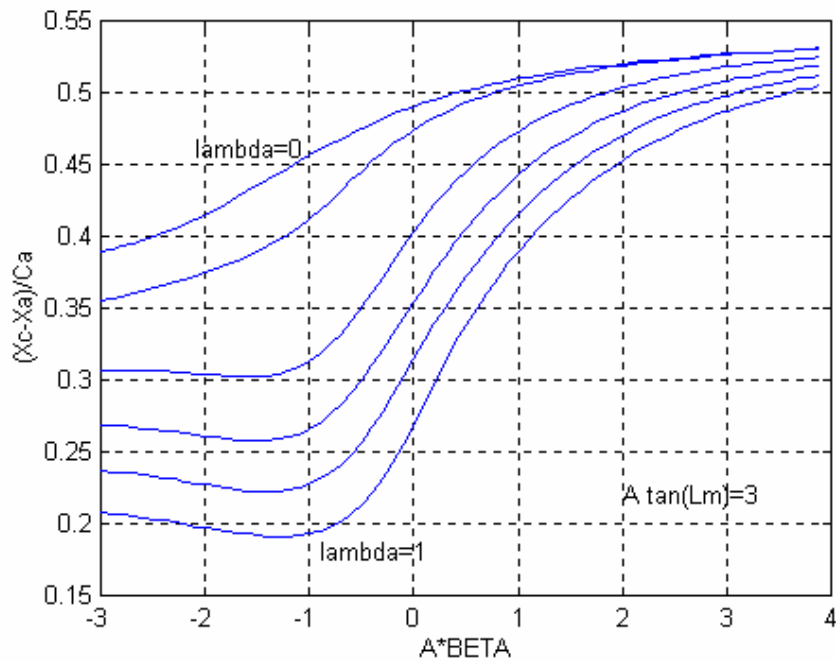
Za vrijednosti parametra $A_m = 0, 1, 2$ i 3 napravljena su četiri dijagrama na 9 do 12 prema [15].



Slika 9. Krivulje $\bar{h}_c = f(\lambda, A\beta)$ za slučaj $A_m = 0$ Slika 10. Krivulje $\bar{h}_c = f(\lambda, A\beta)$ za slučaj $A_m = 1$ Slika 11. Krivulje $\bar{h}_c = f(\lambda, A\beta)$ za slučaj $A_m = 2$

Svaki dijagram je izrađen za jednu vrijednost parametra A_m , a na jednom dijagramu predočene su krivulje za šest raznih vrijednosti parametra suženja krila λ . Na horizontalnoj

osi je parametar $A\beta$, a na vertikalnoj osi je \bar{h}_c udaljenost hvatišta normalne sile od aerodinamičkog ishodišta krila podijeljena s aerodinamičkom tetivom.

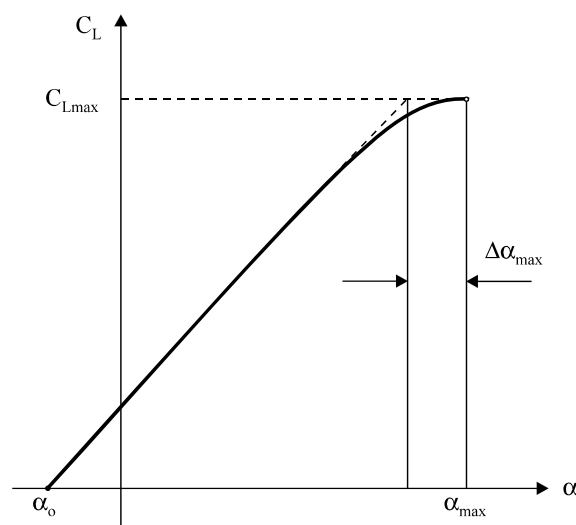


Slika 12. Krivulje $\bar{h}_c = f(\lambda, A\beta)$ za slučaj $A_m = 3$

Podatke o hvatištu normalne sile daje i postupak tzv DATCOM (lit. 16).

2.3.5 Maksimalni uzgon

Pri polijetanju ("take off"), i slijetanju ("landing") zrakoplova veliku ulogu ima maksimalna vrijednost sile uzgona krila. Da ne bi smo povećavali nepotrebno površinu krila i kvadrat brzine, treba iskoristiti maksimalni koeficijent uzgona krila.



Slika 13. Maksimalni uzgon krila C_{Lmax} i napadni kut pri maksimalnom uzgonu α_{max}

Zato treba znati taj maksimalni koeficijent uzgona $C_{L\max}$ i vrijednost α_{\max} pri kojoj je maksimalni uzgon. Poslije te vrijednosti α_{\max} nastaje naglo opadanje koeficijenta uzgona ("stall"). Treba napomenuti da se ta vrijednost maksimalnog koeficijenta uzgona teško određuje ne samo teoretski već i eksperimentalno u aerodinamičkom tunelu.

Pri velikim vrijednostima napadnog kuta, na prednjem rubu krila pojavljuju se vrtlozi koji su posebno izraženi kod strelastih krila male vitkosti. Pod utjecajem tih vrtloga odvaja se zračna struja na početku gornjake profila. To odvajanje struje od krila smanjuje uzgon, te on nije više linearno proporcionalan napadnom kutu. Odvajanje se zbiva na početnom dijelu gornjake, pa stoga ova pojava ovisi o nagibu tangente na početnom dijelu gornjake profila. Nagib tangente na tom mjestu u direktno je vezi s parametrom Δ_y koji predstavlja prirast ordinate gornjake profila od apscise $0.0015 \cdot c$ do apscise $0.06 \cdot c$, a koji se također mjeri u postocima tetive:

$$\Delta_y = 100 \frac{\Delta y}{c}$$

Taj parametar uobičajeno ima vrijednosti 26 za profile s četiri i pet znamenki, za seriju profila 64 ima vrijednost 21.3, a za seriju 65 ima vrijednost 19.3.

Koeficijent maksimalnog uzgona krila $C_{L\max}$ i napadnog kuta α_{\max} ovise osim o vrijednosti Δ_y i o obliku krila (vitkost krila A , suženje krila λ , strijele napadnog ruba krila A_{LE}) i o relativnoj debljini krila te konačno i o Machovu broju. U prilogu je empirijski postupak za procjenu maksimalnog koeficijenta uzgona krila $C_{L\max}$ i napadnog kuta α_{\max} . Prema tom postupku možemo reći da ove vrijednosti su funkcije parametara:

$$C_{L\max} = f_L(\Delta_y, A, \lambda, A_{LE}, t^*, Ma)$$

$$\alpha_{\max} = f_\alpha(\Delta_y, A, \lambda, A_{LE}, t^*, Ma)$$

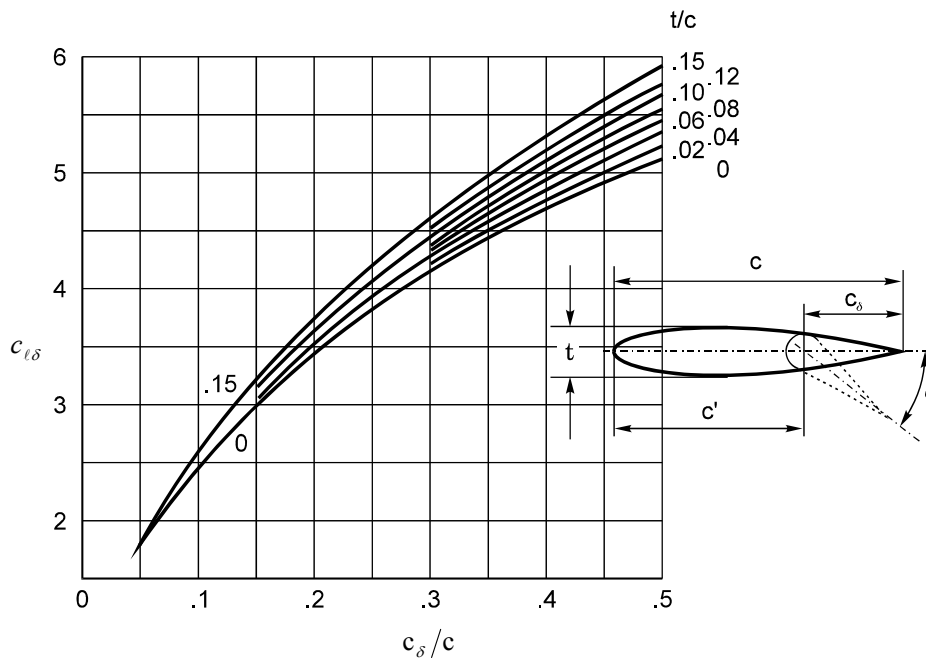
2.3.6 Gradjent normalne sile po otklonu upravljačke površine

Upravljačke površine mogu biti dio noseće površine ili cijela noseća površina koja mijenja kut otklona u odnosu na letjelicu. U subsonici je obično upravljačka površina dio noseće površine ili stabilizatora, jer se poremećaj njenog otklona prenosi uz struju na cijelu površinu, a moment oko osi otklona je proporcionalan samo otklonjenoj površini. To znači da nije potrebno mnogo snage za pokretanje tih upravljačkih površine, a učinkovitost je velika. U supersonici da bi se postigla dovoljna učinkovitost mora se otkloniti cijela noseća površina ili stabilizator, jer se poremećaji otklona ne prenose uz struju. U prvom slučaju, kada je

upravljačka površina dio noseće površine, onda se u subsonici gradijent $C_{N\delta}$ po otklonu upravljačke površine (kormilo visine, kormilo pravca ili kormila valjanja subsoničnih letjelica) može procijeniti na temelju gradijenta profila $c_{l\delta}$ prema jednadžbi

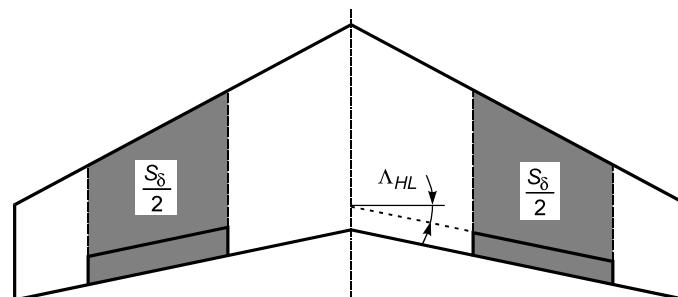
$$C_{N\delta} = 0.9 \cdot \frac{S_\delta}{S_{ref}} \left(\frac{C_{L\alpha}}{c_{l\alpha}} \right) \cdot c_{l\delta} \cdot \cos \Lambda_{HL} \cdot K_f,$$

gdje je $c_{l\alpha}$ gradijent uzgona profila, a $C_{L\alpha}$ gradijent uzgona krila.



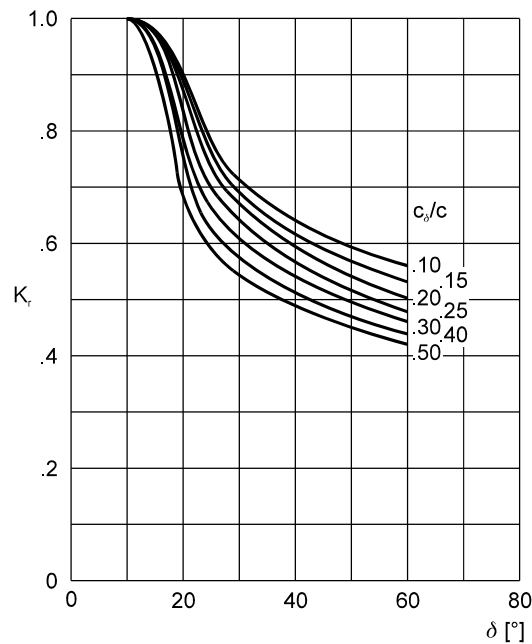
Slika 14. Krivulje $c_{l\delta} = f\left(\frac{c_{\delta}}{c}, \frac{t}{c}\right)$

Gradijent profila $c_{l\delta}$ ovisi o odnosu tetive otklonjene površine c_{δ} i ukupne tetive c noseće površine, kao i o relativnoj debljini profila t/c noseće površine. Ta ovisnost prikazana je na slici 14 prema [27]. Sa S_δ označili smo dio noseće površine na kojoj se nalazi upravljačka površina kao na slici 15.



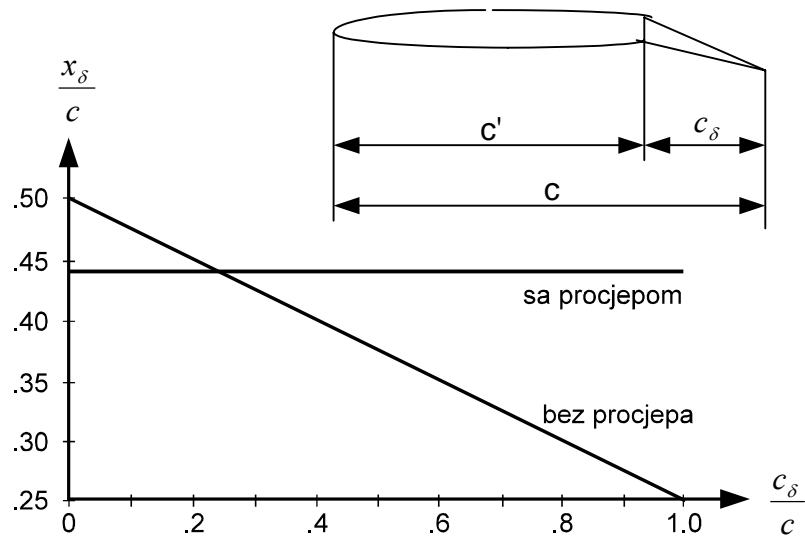
Slika 15. Površina S_δ

Koeficijent K_f je korekcija zbog nelinearnost te ovisi o otklonu δ , ali i o odnosu tetiva c_δ/c . Ta ovisnost prikazana je na slici 16 prema [27].



Slika 16. Krivulje $K_f = f\left(\delta, \frac{c_\delta}{c}\right)$

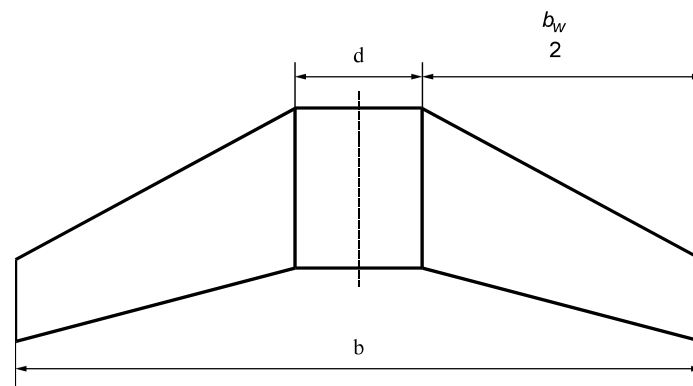
Položaj hvatišta upravljačke sile zbog otklona upravljačke površine x_δ , može se u subsonici dobiti linearnom interpolacijom između dva ekstremna slučaja. Prvo, ako je cijela noseća površina upravljačka površina onda je napadna točka na četvrtini tetive. Drugo, ako je upravljački dio iznimno mali onda je napadna točka na polovici neotklonjenoga dijela tetive c' . Ovaj odnos može bitno promijeniti veličina procjepa između pokretnog dijela i nepokretnog dijela, kao što se to vidi sa slike 17.



Slika 17. Položaj hvatišta normalne sile upravljačke površine

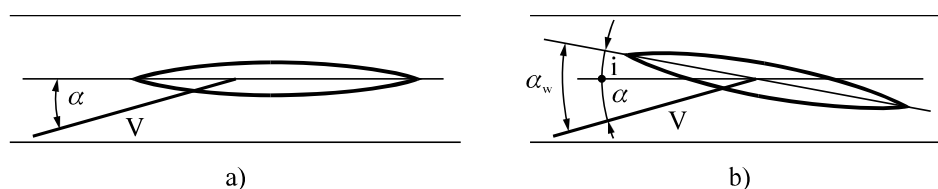
2.4 Normalna sila kombinacije tijelo – noseća površina

Pod kombinacijom tijelo – noseća površina razumijemo dvije konzole polukrila i onaj dio tijela za koji su vezane te konzole (slika 18). Kada govorimo o normalnoj sili na samom krilu N_w , mislimo na normalnu silu koja djeluje na krilo koje je dobiveno spajanjem dvaju polukrila skinuta sa zrakoplova.



Slika 18. Kombinacija tijelo – noseća površina

Ta dva polukrila spojena čine *samo krilo*. Samo krilo ima raspon b_w koji je manji od raspona kombinacije b za širinu trupa na mjestu kombinacije d . Za takvo krilo sastavljeno od dva polukrila određujemo gradijent normalne sile $(C_{N\alpha})_w$ i za to krilo određujemo površinu krila S_w .



Slika 19. Kombinacija tijelo – noseća površina
 a) planarna kombinacija b) otklonjena kombinacija

Razlikujemo dvije vrste kombinacije. U prvoj je os tijela u ravnini noseće površine, pa tijelo i noseća površina imaju isti napadni kut $\alpha_w = \alpha$. Takva kombinacija naziva se *planarna*. U drugom slučaju, noseća površina ima *postavni kut* i u odnosu na tijelo. Tu kombinaciju nazivamo *otklonjena*, a taj kut i nazivamo postavni kut noseće površine.

Prema teoriji konformnog preslikavanja [18], planarna kombinacija ima K_{BW} puta veću normalnu silu od normalne sile samog krila pod istim napadnim kutom α . Pri preslikavanju pretpostavlja se da je tijelo rotacijskog oblika promjera d , te da je os tijela u ravnini krila. U tom slučaju dobivamo da je koeficijent interferencije

$$K_{BW} = 1 + 3\bar{d} - \lambda\bar{d}(1 - \bar{d}),$$

gdje je $\bar{d} = d/b$, b je raspon kombinacije, a d promjer kruga presjeka trupa.

U slučaju otklonjene kombinacije, tj. kada tetiva krila ima postavni kut i u odnosu na os tijela, onda je normalna sila kombinacije (kada je napadni kut jednak nuli, tj. brzina u pravcu osi tijela) k_{BW} puta veća od normalne sile samog krila pod napadnim kutom i :

$$k_{BW} = \frac{(1 + 0.41\bar{d})^2}{(1 + \bar{d})^2} [1 + 3\bar{d} - \lambda\bar{d}(1 - \bar{d})]$$

U realnosti neki uvjeti koji su pretpostavljeni u teoriji konformnog preslikavanja nisu zadovoljeni. Dva odstupanja su najvažnija: **prvo**, trup zrakoplova nije rotacijskog oblika pa koristimo ekvivalentni promjer d , koji određujemo kao promjer površine kruga čija je površina jednaka površini poprečnog presjeka tijela na mjestu kombinacije krilo- tijelo. **Drugo**, os tromosti x od koje mjerimo napadni kut nije pravac nultog uzgona tijela. Ova pogreška nije velika jer tijelo ima malu normalnu silu.

Zbog tih nedostataka, neki autori kao npr. [20], uzimaju vrijednost K_{BW} za pravokutno krilo ($\lambda = 1$) uvećanu za 7%. To daje koeficijent interferencije tijelo-krilo

$$K_{BW} = 1.07 \left(1 + \frac{d}{b}\right)^2$$

i usvajaju $k_{BW} = K_{BW}$. Drugi [6, 7, 16] zanemaruju oba koeficijenta, kao da su jednaki jedinici $k_{BW} = K_{BW} = 1$, ali zamjenjuju kombinaciju s krilom koje čine dva polu-krila i dio krila pod tijelom.

U stvarnosti imamo otklonjenu kombinaciju pod napadnim kutom. U tom slučaju normalna sila kombinacije je zbroj normalne sile planarne kombinacije pod napadnim kutom i otklonjene kombinacije bez napadnog kuta. Osim toga, treba imati na umu da nesimetrični profili imaju još i dodatni napadni kut α_{0L} (koji je negativan) zbog zakrivljenosti srednje linije profila. Taj kut ima istu ulogu kao postavni kut:

$$N_{BW} = K_{BW} N_{\alpha W} \alpha + k_{BW} N_{\alpha W} (i - \alpha_{0L})$$

ili

$$N_{BW} = N_{\alpha W} [K_{BW} \alpha + k_{BW} (i - \alpha_{0L})]$$

Iz toga zaključujemo da kombinacija ima normalnu silu (ili uzgon) koja je jednaka normalnoj sili samog krila ali pod *ekvivalentnim napadnim kutom*:

$$\alpha_{eq} = K_{BW} \alpha + k_{BW} (i - \alpha_{0L}).$$

2.5 Usporenje i savijanje struje

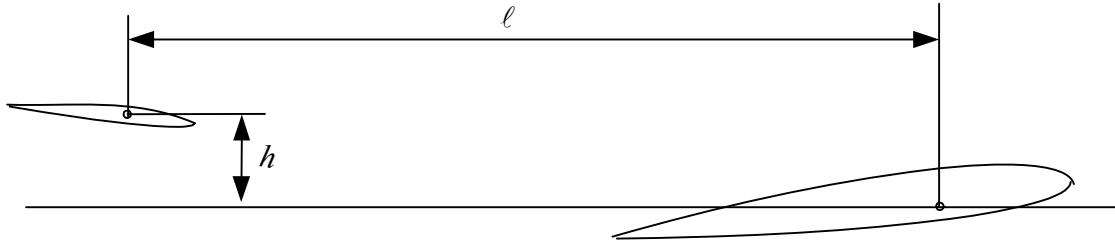
Iza prednje noseće površine zračna struja je poremećena. Rep se nalazi u zračnoj struji koja je poremećena opstrujavanjem krila, ili bolje reći kombinacijom krilo – trup. Taj poremećaj se osjeća u gubitku dinamičkog tlaka i pravcu brzine opstrujavanja. Zato dinamički tlak iza kombinacije krilo – trup umanjujemo množenjem s jednim koeficijentom η_V koji uzima u obzir te gubitke. Procjenjuje se da u subsonici treba uzeti koeficijent gubitaka oko $\eta_V = 0.98$, a u supersonici gubici rastu i dosežu za $Ma = 2.5$ vrijednost $\eta_V = 0.90$, no za veće brzine ostaju približno isti.

Iz teorijske aerodinamike znamo da s izlaznog ruba krila silaze vrtložne niti koje se vrlo brzo udružuju u dva slobodna vrtloga, jedan s jednoga i drugi s drugoga polukrila. Ti vrtlozi induciraju brzine koje s brzinom opstrujavanja mijenjaju pravac zračne struje. Te promjene su različite u svakoj točki prostora, a nas zanima prosječna promjena pravca zračne struje na horizontalnom repu. Iz razloga simetrije, kada nema kuta skretanja, prosječna promjena pravca bit će smanjenje napadnog kuta α za kut ε . Zato je napadni kut iza kombinacije krilo -trup, gdje se nalazi horizontalni rep, manji od napadnog kuta zrakoplova za veličinu ε . Tu veličinu nazivamo *savijanje struje* od kombinacije krilo - trup. Matematički modeli za određivanje savijanja struje pokazuju da je to savijanje struje prije svega proporcionalno napadnom kutu krila:

$$\varepsilon = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} \alpha_w$$

Gradijent savijanja struje $\frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}$ ovisi o:

- obliku krila: razmaha b , vitkosti A i suženju λ te o
- položaju repa u odnosu na krilo: ℓ i h kao na slici 20.



Slika 20. Položaj repa u odnosu na krilo

Zato ovisnost gradijenta savijanja struje o parametrima može se predstaviti jednačbom prema [7, 19, 28]:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} = 4.44 \cdot \left(K_A K_\lambda K_H \sqrt{\cos A_{c/4}} \right)^{1.19},$$

gdje su:

$$K_A = \frac{1}{A} - \frac{1}{1 + A^{1.7}}$$

$$K_\lambda = \frac{10 - 3\lambda}{7}$$

$$K_H = \frac{1 - \frac{|h|}{b}}{\sqrt[3]{\frac{2\ell}{b}}}$$

U ovim su jednačbama b , λ i A su karakteristike krila s podtrupnim dijelom, a h i ℓ su veličine kao na slici 20.

3 Otpor

Otpor zrakoplova ima dva dijela. Prvi dio je otpor zrakoplova kada ne postoji uzgon zrakoplova. Označavamo ga sa C_{DO} i naziva se *nulti otpor*. Drugi dio je *inducirani otpor* koji je posljedica postojanja uzgona. Označavamo ga sa C_{Di} .

Nulti otpor letjelice zbroj je otpora dijelova letjelice: krila, tijela, horizontalnog repa, vertikalnog repa. Osim ovih komponenti, za vrijeme polijetanja i slijetanja postoje još i dodani otpori od podvoza i otklona zakrilaca (flapsova).

Nulti otpor svakog dijela letjelice može se podijeliti na tri dijela prema uzroku zbog kojega nastaje, pa je koeficijent otpora svakog dijela zbroj triju koeficijenata:

$$C_D = C_{Df} + C_{Dw} + C_{Db};$$

C_{Df} (*friction drag*) je aerodinamički koeficijent onog dijela otpora koji je nastao zbog trenja zraka po površini svih dijelova letjelice,

C_{Dw} (*wave drag*) je aerodinamički koeficijent rezultante u pravcu aerodinamičke brzine od elementarnih sila tlaka okomitih na sve dijelove površine,

C_{Db} (*base drag*) je aerodinamički koeficijent otpora dna zbog podtlaka koji nastaje iza dijelova letjelice.

3.1 Otpor trenja

Kao što je poznato iz aerodinamike, koeficijent otpora trenja ravne površine C_f definira se kao količnik između sile trenja i produkta referentnog tlaka i “kvašene površine” S_{wet} , tj. površine na kojoj se ostvaruje trenje

$$C_f = \frac{D_f}{q_\infty S_{wet}}.$$

Procjenu koeficijenta trenja na prostornoj površini C_{Df} (trodimenzionalno strujanje), izvodimo posredstvom koeficijenta trenja c_f u ravninskom (dvodimenzionalnom) strujanju.

Kako nam treba koeficijent trenja za referentnu površinu imat ćemo vezu

$$D_f = q_\infty S_{wet} c_f = q_\infty S_{ref} C_{Df},$$

odakle je

$$C_{Df} = \frac{S_{wet}}{S_{ref}} c_f,$$

Ako usvojimo zakon trećeg stupnja za profil brzine u graničnom sloju za laminarno dvodimenzionalno opstrujavanje ravne površine, dobivamo koeficijent trenja [1], bez obzira je li opstrujavanje subsonično ili supersonično

$$c_{f\ell} = \frac{1.3}{\sqrt{Re}}$$

Re je Reynoldsov broj određen za duljinu opstrujavanja. Ako je opstrujavanje turbulentno (subsonično ili supersonično), onda je prema Schlichtingovoj formuli

$$c_{f\ell} = \frac{3.91}{(\ln Re)^{2.58}}.$$

Eksperimentalna ispitivanja pokazala su da je za $Re < 10^5$ na ravnoj i glatkoj površini strujanje laminarno. Međutim, ako je $Re > 10^6$, čak i na ravnoj i glatkoj površini strujanje je turbulentno. Na ravnoj i glatkoj površini u intervalu

$$3.5 \cdot 10^5 < Re < 10^6$$

strujanje će biti na početku laminarno, zatim će na jednom kratkom dijelu biti prijelazno, da bi na drugom dijelu bilo turbulentno. Prijelaz iz laminarnog u turbulentni granični sloj nije ni trenutni, ni stabilan, pa se zato u literaturi daju različite granice intervala u kome se odvija prelazak iz laminarnog u turbulentni granični sloj. Da bismo odredili koeficijent trenja takvog laminarno - turbulentnog opstrujavanja, uvodimo dvije pretpostavke:

- prelazak iz laminarnog u turbulentni granični sloj ostvaruje se trenutno na mjestu ℓ_t
- od ℓ_t turbulentni granični sloj je isti kao da je imao početak u ishodištu $\ell = 0$

Prema ovim hipotezama bit će

$$c_f = \int_0^{\ell_t} \bar{\tau}_{0\ell} d\bar{x} + \int_{\ell_t}^{\ell} \bar{\tau}_{0\ell} d\bar{x}.$$

U ovim integralima su bezdimenzijska tangencijalna naprezanja na površini:

$$\bar{\tau}_{0\ell} = \frac{\tau_0}{q_\infty} = \frac{0.646}{\sqrt{Re \cdot \bar{x}}} \quad \text{za laminarno opstrujavanje na temelju zakona trećeg stupnja profila brzine,}$$

$$\bar{\tau}_{0\ell} = \frac{\tau_0}{q_\infty} = \frac{0.058}{\sqrt[5]{Re \cdot \bar{x}}} \quad \text{za turbulentno opstrujavanje prema zakonu 1/7 profila brzine.}$$

Integracijom dobivamo:

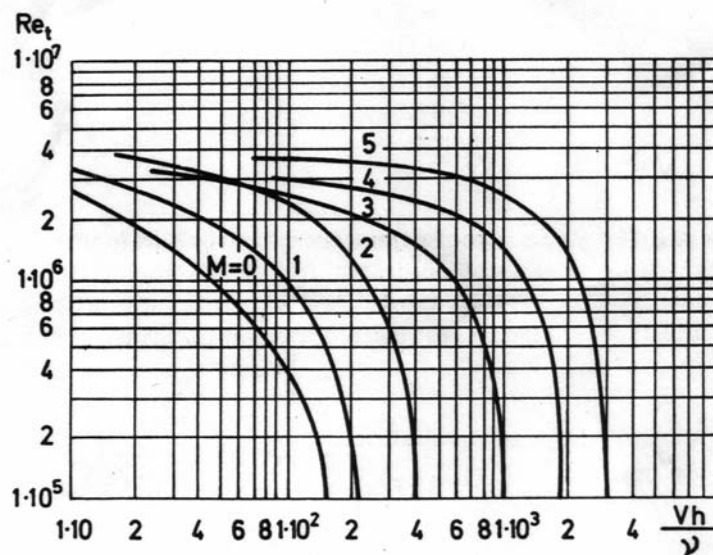
$$c_f = \frac{1.3}{\sqrt{Re}} \sqrt{\ell_t} + \frac{0.072}{\sqrt[5]{Re}} (1 - \bar{\ell}_t^{0.8}).$$

U ovoj jednadžbi $0.072/\sqrt[5]{Re}$ predstavlja koeficijent turbulentnog trenja za usvojeni profil brzine prema zakonu jedne sedmine. Ako se taj koeficijent zamijeni s točnijom Schlichtingovom formulom, dobiva se bolja procjena za koeficijent trenja u laminarno - turbulentnom graničnom sloju :

$$c_f = \frac{1.3}{\sqrt{Re}} \sqrt{\bar{\ell}_t} + \frac{3.91}{(\ln Re)^{2.58}} (1 - \bar{\ell}_t^{0.8}).$$

Točki prijelaza laminarnog u turbulentno opstrujavanje odgovara tzv. prijelazni Reynoldsov broj

$$Re_t = \frac{\ell_t V_\infty}{\nu_\infty}.$$



Slika 1. $Re_t = f\left(Ma, \frac{hV_\infty}{\nu_\infty}\right)$

Kako odrediti ℓ_t ? Neki nepravilni oblik opstrujavane površine može izazvati turbulenciju, to više što se s duljinom opstrujavanja Reynoldsov broj približava vrijednosti granice prelaska laminarnog u turbulentno opstrujavanje. Općenito uzevši, turbulentnost će nastati prije na hrapavijoj površini. Hrapavost se mjeri prosječnom visinom h . Ispitivanja su pokazala da Re_t ovisi o Machovu broju i o parametru $\frac{hV_\infty}{\nu_\infty}$. Ta ovisnost prema [15] prikazana je na slici 3-1.

Na temelju ovih jednadžbi možemo odrediti koeficijent trenja na ravnim dijelovima zrakoplova pri malim brzinama leta kada je utjecaj stlačivosti zanemariv. Nije li Ma^2 zanemariv u odnosu na 1, znači da treba uzeti u obzir utjecaj stlačivosti, što činimo množeći izračunat c_f s koeficijentom

$$F_{Ma} = \frac{1}{(1 + 0.144 \cdot Ma^2)^{0.65}}.$$

Međutim, dijelovi zrakoplova nisu ravne površine, što mijenja raspored tlaka, a raspored tlaka utječe bitno na koeficijent trenja. Zbog toga treba koeficijent trenja u dvodimenzionalnoj struji pomnožiti s koeficijentom oblika F_F ovisno o obliku opstrujavane površine. Isto tako pri prelasku u trodimenzionalno strujanje trebamo koeficijent trenja iz dvodimenzionalnog strujanja pomnožiti s koeficijentom F_S :

$$C_f = F_S F_F c_f$$

- za noseće površine u subsonici prema [20]

$$F_F = \left(1 + \frac{0.6 \bar{t}}{\bar{x}_t} + 100 \bar{t}^4 \right)$$

Produkt $F_F \cdot 2c_f$ predstavlja koeficijent trenja profila. Ako ne postoji valni otpor onda je ta vrijednost nulti otpor profila za zadanu hrapavost. U tablicama standardnih profila nalazi se minimalni otpor profila $c_{d \min}$ za slučaj standardne hrapavosti. Te vrijednosti se mogu uspoređivati, što nam omogućuje kontrolu procjene.

$$F_S = (\cos A_t)^{0.28},$$

gdje je $\bar{t} = \frac{t}{c}$, $\bar{x}_t = \frac{x_t}{c}$, x_t je apscisa maksimalne debljine profila., a A_t je strijela geometrijskog mjesta maksimalnih debljina profila. Za slučaj repa treba $F_F F_S$ povećati još za 10 % zbog dodatnog otpora kroz zazore između noseće površine i upravljačke površine.

- za trup s dobro oblikovanom kabinom prema [20]

$$F_S \cdot F_F = 1 + \frac{60}{f^3} + \frac{f}{400},$$

gdje je f vitkost tijela, koju određujemo za stvarnu duljinu tijela i fiktivni promjer d . Ovaj koeficijent daje dobre vrijednosti ako se kabina uklapa u oblik tijela (kao npr. za zrakoplov F16), ali ako kabina iskače iz oblika tijela, onda treba koeficijent povećati (npr. za F15 treba povećati 40 %). Isto tako ako tijelo ima kvadratni presjek, oštri bridovi mogu povećati koeficijent oblika oko 40 %.

- za kućište motora i spremnik goriva prema [20]

$$F_S \cdot F_F = 1 + \frac{0.35}{f}$$

U supersonici nema prenošenja poremećaja uz zračnu struju, pa je $F_F F_S$ za sve oblike blisko jedinici.

Konačno, postoji i međuutjecaj dijelova. Prisutnost drugoga tijela u blizini opstrujavanoga tijela mijenja raspored tlaka po površini opstrujavanog tijela, što utječe na koeficijent trenja. Taj se utjecaj uzima u obzir koeficijentom Q . Evo nekoliko rezultata ispitivanja u aerotunelu prema [20]:

- tijelo motora postavljeno neposredno na krilo ima povećan otpor za 50 % ($Q = 1.5$), a taj se utjecaj izgubi kad je tijelo udaljeno za jedan svoj promjer od krila;
- obješeni projektili ispod krila imaju koeficijent interferencije $Q \approx 1.25$;
- za klasične kombinacije tijelo - noseća površina uzima se $Q = 1$;
- za repne površine V-oblika uzima se $Q \approx 1.03$, a za repne površine H-oblika $Q \approx 1.08$.

U supersonici međuutjecaj dijelova na otpor gotovo i ne postoji, te je u supersonici koeficijent $Q = 1$.

Tako je konačno otpor trenja letjelice zbroj otpora trenja svih njenih dijelova:

$$D_f = q_\infty S_{ref} C_{Df} = \sum_c q_\infty (c_f F_{Ma} F_F F_S Q_f S_{wet})_c$$

Odnos D_f / q_∞ naziva se *površina otpora*

$$\frac{D_f}{q_\infty} = F_{Ma} \cdot \sum_c (c_f F_F F_S Q_f S_{wet})_c$$

Prema tome, ukupna površina otpora zrakoplova je zbroj površina otpora komponenata. Dijeljenjem površine otpora s referentnom površinom dobivamo traženu vezu između koeficijenta otpora trenja letjelice i površinskih koeficijenata trenja dijelova letjelice:

$$C_{Df} = F_{Ma} \sum_c \left(c_f F_F F_S Q \frac{S_{wet}}{S_{ref}} \right)_c$$

3.2 Otpor dna

Iza svakog dijela letjelice pojavljuje se trag u kome je tlak manji od neporemećenog tlaka. Posljedica tog podtlaka je sila kočenja, jednaka produktu podtlaka i površine na kojoj on djeluje. Na kraju nosećih površina je izlazni rub, pa nema površine na kojoj bi djelovao taj podtlak (ako nije došlo do odvajanja struje od noseće površine). Tom podtlaku odgovara koeficijent

$$C_p = \frac{p_b - p_\infty}{q_\infty}.$$

Međutim, otpor dna postoji iza kućišta motora, spremnika goriva, nosača naoružanja, i iza kućišta kabine ako nije dobro uklopljena s oblikom tijela, itd.

$$D_b = (p_\infty - p_b) \cdot S_b = q_\infty (-C_p) S_b$$

Da bi se izbjegao otpor dna ili bar smanjio na prihvatljivu mjeru, tijelu lagano smanjujemo poprečni presjek prema kraju na što manju površinu dna S_b . Procjena koeficijenta tlaka na dnu može se izvesti prema [18] pomoću jednadžbi:

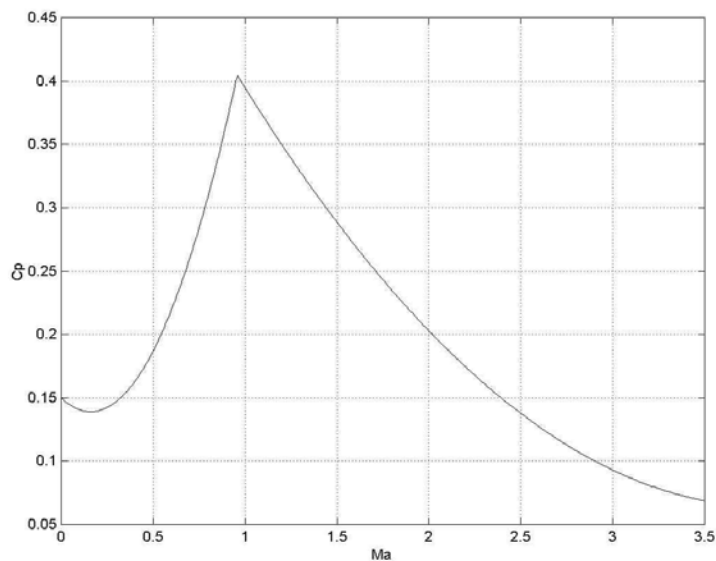
- za subsoniku

$$-C_p = 0.139 + 0.419(Ma - 0.161)^2$$

- za supersoniku

$$-C_p = 0.064 + 0.042(Ma - 3.84)^2.$$

Na slici 3-2 prikazana je ovisnost koeficijenta tlaka na dnu o Machovom broju prema navedenim jednadžbama



Slika 2. Koeficijent tlaka na dnu $C_p(Ma)$

3.3 Valni otpor

Valni otpor je posljedica rasporeda tlaka na površini. U subsonici prema d'Alembertovom principu, zasnovanom na neviskoznom opstrujavanju, valni otpor je jednak nuli. Međutim,

poznato je da realni uvjeti opstrujavanja ne prate d'Alembertov princip. Raspored tlaka u stvarnosti je zbog viskoznih učinaka izmijenjen, te se pojavljuje valni otpor. Mjerenja otpora standardnih profila, pri malim brzinama pri kojima možemo zanemariti utjecaj stlačivosti, pokazuju da je izmjereni otpor jednak otporu trenja što je očigledan dokaz da ne postoji valni otpor. Ta mjerenja otpora profila zajedno s drugim karakteristikama profila (uzgon i moment propinjanja) objavljena su u mnogim knjigama kao npr. [1].

U supersonici postojanje udarnih valova stvara uvijek valni opor. Zato je ta komponenta otpora i dobila to ime, premda udarni valovi nisu jedini razlog nastajanja valnog otpora. Već smo rekli da valni otpor postoji i u subsonici kada nisu ispunjeni uvjeti za d'Alambertov princip, a udarni valovi javljaju se samo u transsonici i supersonici.

Mnogo je manje objavljenih podataka o mjerenju valnog otpora profila i zrakoplova nego što je to slučaj s otporom trenja ili otporom dna, pa za procjenu nema pouzdanih metoda.

Prema zakonu površine [13] u transsoničnom području ($Ma \approx 1$) valni otpor zrakoplova za zadani Machov broj ovisi samo o promjeni veličine površine poprečnog presjeka zrakoplova $S(x)$ (uključujući sve njegove dijelove) okomito na brzinu opstrujavanja.. To znači da je otpor zrakoplova u transsonici isti kao otpor rotacijskog tijela koje ima istu površinu poprečnog presjeka na svim mjestima. U teorijskoj aerodinamici postoji tzv. teorija tankih tijela [12] kojom se dokazuje da za zadani volumen W i duljinu tijela ℓ postoji tzv. optimalno tijelo (Sears-Haackovo tijelo) čije su parametarske jednadžbe:

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3S_m}{\pi} \left(\sin \theta - \frac{\sin 3\theta}{3} \right)}$$

$$x = \frac{\ell}{2} (1 + \cos \theta).$$

To tijelo ima teoretski valni otpor

$$D_W = q_\infty S_{\max} \cdot \frac{9\pi S_{\max}}{2\ell^2}.$$

To znači da će zrakoplov imati minimalni valni otpor ako njegov poprečni presjek prati promjenu poprečnog presjeka Sears_Haackova tijela, ili što bliže tom obliku. Realni oblici zrakoplova odstupaju od tog uvjeta. Pretpostavimo da za $Ma = 1.2$, realni oblik zrakoplova ima E_{WD} puta veći valni otpor od Sears-Haackova tijela (koeficijent E_{WD} se kreće od 1.20 do 3, pa i više). S promjenom Machova broja iznad $Ma = 1.2$, valni otpor zrakoplova opada po zakonu

$$\frac{D_W(Ma)}{D_W(1.2)} = f(Ma, A_{LE}) = 1 - 0.386(Ma - 1.2)^{0.57} (1 - 0.709 A_{LE}^{0.77}),$$

gdje je A_{LE} strijela napadnog ruba krila u radijanima, a valni otpor

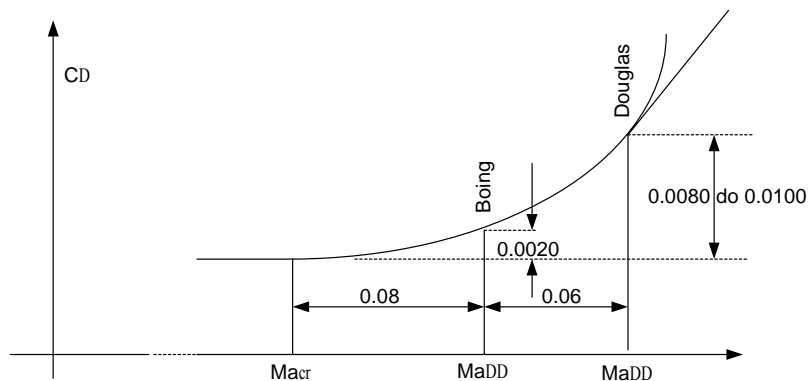
$$D_W(1.2) = E_{WD} \cdot q_\infty S_{\max} \frac{9\pi S_{\max}^2}{2\ell^2}.$$

Tako možemo, ako je $Ma > 1.2$, procijeniti valni otpor zrakoplova jednadžbom

$$C_{Dw} = E_{WD} \frac{9\pi S_{\max}^2}{2\ell^2 S_{ref}} f(Ma, A_{LE}).$$

3.4 Otpor u transonici

Pojava valnog otpora je posljedica činjenice što lokalni Machov broj dostigne supersoničnu vrijednost prije Machova broja letjelice. Na tom mjestu počinje supersonično strujanje koje treba opet prijeći u subsonično. Taj proces prelaska iz subsoničnog u supersonično strujanje nije reverzibilan. Povratak na subsonično strujanje zbiva se diskontinuirano, što ima za posljedicu stvaranje lokalnih udarnih valova. S udaljavanjem od letjelice ta pojava slabi. Kada se pojavi prvi lokalni Machov broj koji je dostigao supersoničnu vrijednost, Machov broj letjelice nazivamo *kritični Machov broj* i označavamo ga sa Ma_{cr} .

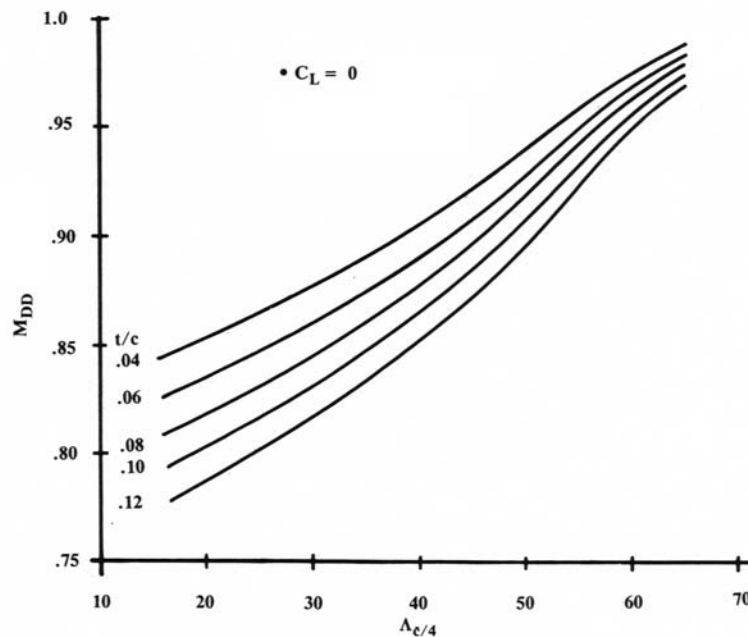


Slika 3. Kritičan Machov broj Ma_{cr} i Ma_{DD} (*Drag Divergent Ma*)

Teško je utvrditi kada je dostignuta kritična vrijednost. Zato velike tvrtke definiraju točku Ma_{DD} na kojoj je $C_{D0}(Ma)$ porastao za 0.0020 (Boeing) ili točku na krivulji $C_{D0}(Ma)$ u kojoj je tangens kuta tangente 0.10 (Douglas) itd. Međusobni položaj tih dviju točaka pokazan je na slici 3-3.

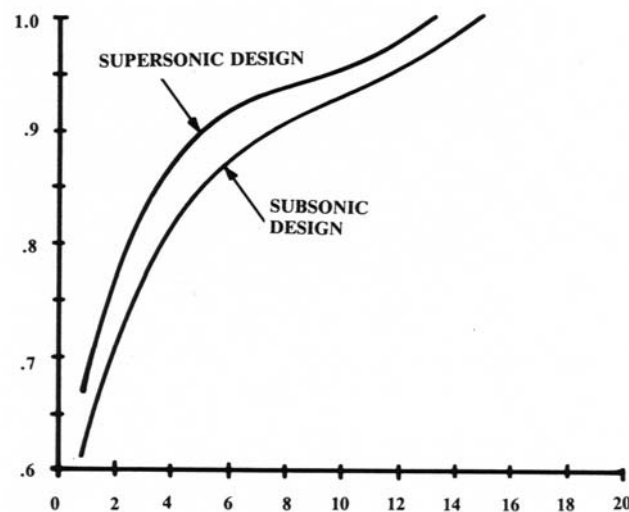
S povećanjem Machova broja letjelice, prvi lokalni Machov broj jednak jedinici može se dogoditi na krilu ili na tijelu. Nije nam unaprijed poznato koja će se od tih dviju

možnosti prva dogoditi, pa zato moramo procijeniti obje, i usvojiti onu koja je manja za kritičnu vrijednost Machova broja letjelice.



Slika 4. $(Ma_{DD})_{L=0} = f\left(A_{1/4}, \frac{t}{c}\right)$

Kada je riječ o krilu, lokalni Machov broj dostiže jedinicu najprije na gornjoj površini krila zbog povećanja brzine opstrujavanja profila pri povećanoj sili uzgona. To će se dogoditi utoliko prije ukoliko je veći napadni kut letjelice tj. ukoliko je veća sila uzgona, a to znači da će utoliko biti manji kritični Machov broj Ma_{cr} . Budući da procjenjujemo nulti otpor, trebamo procijeniti kada nastaje lokalni Machov broj jednak jedinici u slučaju nultog uzgona.



Slika 5. $Ma_{DD}(f_n)$ za subsonični i supersonični oblik trupa

Prema metodi tvrtke Boeing procjena $(Ma_{DD})_{L=0}$ na krilu provodi se prema dijagramu na slici 3-4 za $C_L = 0$, ovisno o strijeli $A_{1/4}$ i relativnoj debljini profila $\bar{t} = t/c$.

Tijelo koje nije dobro oblikovano imat će lokalni Machov broj jednak jedinici prije krila. Na slici 3-5 prikazane su dvije krivulje koje daju vrijednost Ma_{DD} tijela ovisno o vitkosti prednjeg dijela trupa. Konačno Ma_{DD} letjelice bit će manja vrijednost od Ma_{DD} krila i Ma_{DD} tijela.

Znamo da je $C_{Dw} = 0$ do kritične vrijednosti Machova broja, zatim smo odredili Ma_{DD} i znamo da je $C_{Dw}(Ma_{DD}) = 0.0020$. Isto tako poznat nam je valni otpor iznad $Ma = 1.2$. trebamo još odrediti $C_D(Ma)$ u intervalu od Ma_{DD} do 1.2. To je interval transsonike. To je vrlo složena teorijska zadaća i zato ćemo se zadovoljiti približnom metodom. Praksa je pokazala da možemo usvojiti pet točaka:

$$C_{DW}(Ma_{DD} - 0.080) = 0$$

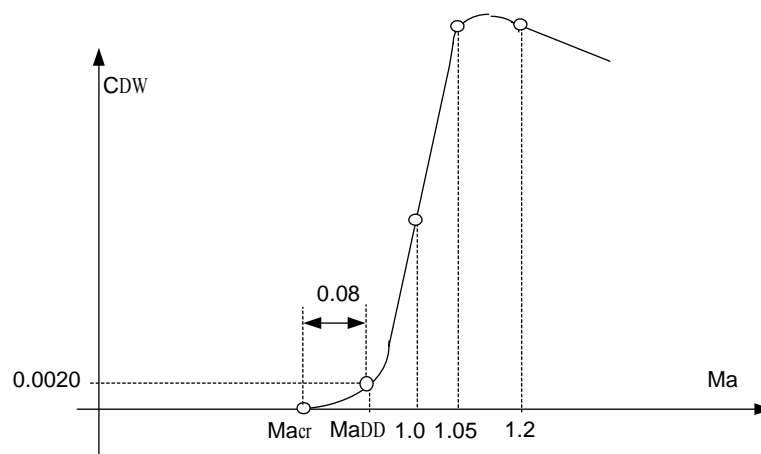
$$C_{DW}(Ma_{DD}) = 0.0020$$

$$C_{DW}(1.00) = \frac{C_{DW}(1.2)}{2}$$

$$C_{DW}(1.05) = C_{DW}(1.2)$$

$$C_{DW}(1.2) = E_{WD} \frac{9\pi S_{\max}^2}{2\ell^2 S_{ref}}$$

Kroz tih pet točaka provlačimo kontinuiranu krivulju koja ima zajedničku tangentu sa $C_D(Ma)$ u subsonici ($Ma < Ma_{cr}$) i s krivuljom $C_D(Ma)$ u supersonici ($Ma > 1.2$), kao na slici 3-6.



Slika 6. Konstrukcija krivulje $C_{Dw}(Ma)$ u transsoničnoj oblasti

3.5 Dodatni otpor

Postoji više uzroka zbog kojih se pojavljuje dodatni otpor.

Prvo, neke dijelove zrakoplova nismo obuhvatili gornjom metodom, kao npr. kućište motora, spremnike goriva, nosače naoružanja, kabinu, ili poseban oblik zadnjeg dijela transportnog zrakoplova. Svi oni povećavaju otpor zrakoplova.

Drugo, u određenim uvjetima zrakoplov mijenja svoj oblik. Primjerice pri polijetanju zrakoplov ima izbačene kotače i djelomično izbačena zakrilca, u letu ima uvučene kotače i zakrilca, a pri slijetanju ima opet izbačene kotače i potpuno izbačena zakrilca, a na kraju i zračne kočnice. Zbog toga se otpor zrakoplova znatno povećava. I ta povećanja nazivamo dodatni otpor.

Treće, zaustavljeni motor ne samo što nema pogonsku silu već je uzrok dviju vrsta dodatnog otpora. Ako je rotor ukočen, onda motor ima jednu vrijednost otpora, a ako se rotor okreće pod utjecajem zračne struje, onda motor ima drugu vrijednost otpora. Procjena dodatnog otpora zaustavljenog motora iznimno je važna zato što ta komponenta kod zrakoplova sa dva ili više motora ima jak bočni moment za središte mase, te dovodi u pitanje bočnu stabilnost zrakoplova, što ćemo razmatrati kasnije.

U većini slučajeva, koeficijent dodatnog otpora procjenjujemo prema jednadžbi

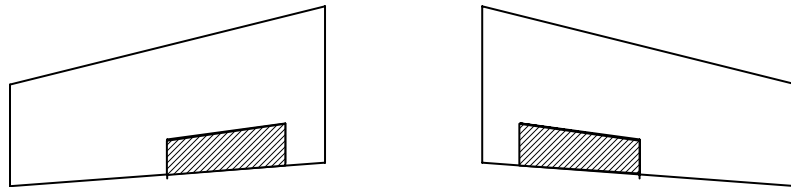
$$\Delta C_D = k \frac{S_{front}}{S_{ref}},$$

u kojoj je S_{front} silueta (dijela koji stvara dodatni otpor) gledano u pravcu aerodinamičke brzine. Koeficijent k je obično poznat za tipizirane oblike. U donjoj tablici prikazani su koeficijenti za neke dijelove zrakoplova prema [20].

	k
Zračne kočnice (<i>spoiler</i>) na 60% tetive	1.6
Vjetrobran (laki zrakoplovi)	
dobro uklopljen u oblik trupa	0.07
loše uklopljen u oblik trupa	0.15
Kotač s gumama	0.25
Drugi kotač iza prvoga	0.15

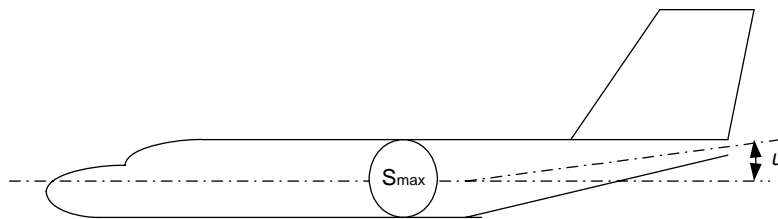
Povećanje koeficijenta otpora krila zbog otklona zakrilca δ_{flap} može se procijeniti jednadžbom

$$\Delta C_D = 0.13 \frac{S_{flap} \sin \delta_f}{S_W}$$



Slika 7. Površina S_{flap}

Površina S_{flaps} prikazana je na slici 3-7, a $S_{flaps} \sin \delta_{flaps}$ predstavlja frontalnu površinu flapsova (okomito na brzinu zračne struje).



Slika 8. Otpor dna transportnog zrakoplova

Transportni zrakoplovi radi što većega korisnoga prostora imaju suženje zadnjega dijela trupa veće od kritičnog, zbog čega dolazi do odvajanja struje od tijela. To odvajanje stvara dodatni otpor na tom dijelu trupa, što je teško i složeno teoretski izučavati. Za procjenu otpora, zbog odvajanja struje od trupa transportnog zrakoplova, možemo koristiti empirijsku formulu

$$\Delta C_D = 3.83 u^{2.5} \frac{S_{max}}{S_{ref}}$$

u kojoj je u kut u radijanima srednje crte tijela na tom zadnjem dijelu kao na slici 3-8, a S_{max} površina najvećeg poprečnoga presjeka tijela.

Koeficijent otpora zaustavljenog motora ili onoga kojega pokreće zračna struja treba odrediti konstruktor motora. Ako taj koeficijent nije poznat može se procijeniti.

Za zaustavljenu elisu u subsonici

$$\Delta C_D = k \frac{S_{elise}}{S_{ref}}.$$

Ako se elisa okreće pod djelovanjem zračne struje, onda je $k = 0.1$, a ako se elisa ne okreće, onda je $k = 0.8$ (prema [18]). Površina elise $S_{elise} = \sigma S_{disk}$, gdje je $\sigma = N/(A\pi)$, N je broj poluelisa, A je vitkost poluelise.

Za mlazni motor koji se okreće pod utjecajem zračne struje

$$\Delta C_D = 0.3 \frac{S_{front}}{S_{ref}},$$

gdje je S_{front} poprečni presjek kućišta mlaznoga motora.

Za kućišta motora, spremnike goriva i za nosače naoružanja postoje, umjesto procjena, mjerenja zbroja površina otpora trenja i otpora dna [20]:

$$\left(\frac{D}{q_\infty} \right)_c = \frac{D_f + D_b}{q_\infty},$$

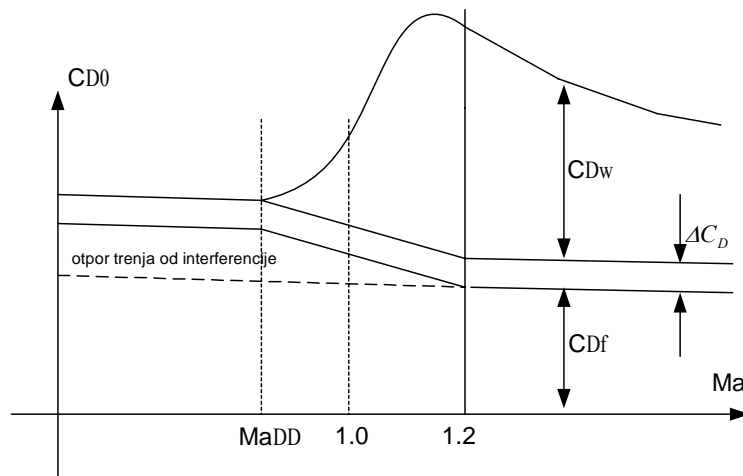
ovisno o Machovu broju, za tipizirane oblike i veličine.

Najveći problem su strujanja kroz otvore na trupu iz područja povišenog tlaka u područja smanjenog tlaka, bilo da je to iz atmosfere u unutrašnjost ili iz unutrašnjosti prema van. U oba slučaja mijenja se bitno slika opstrujavanja, mijenja se tlak pa i trenje na površini. Isto tako, razni uređaji na površini zrakoplova, kao što su svjetla, Pito-cijev, antena i drugo, mogu izmijeniti vrijednost koeficijenta trenja. Svi ti nepredviđeni i nametnuti uzroci mogu povećati koeficijent trenja i do 15%.

3.6 Nulti otpor

Do sada smo promatrali otpor letjelice kada nema sile uzgona. Drugim riječima, tako dobiveni otpor je aerodinamička sila jer nema drugih komponenata. U tom slučaju napadni kut je jednak kutu nultog uzgona letjelice α_{0L} . Otpor u ovom slučaju ($\alpha = \alpha_{0L}$) nazvamo *nulti otpor* i označavamo ga sa D_0 , a njegov koeficijent sa C_{D0} . Konačno smo u mogućnosti nacrtati cijelu krivulju $C_{D0}(Ma)$, koja je zbroj triju krivulja komponenata otpora $C_{Df}(Ma)$,

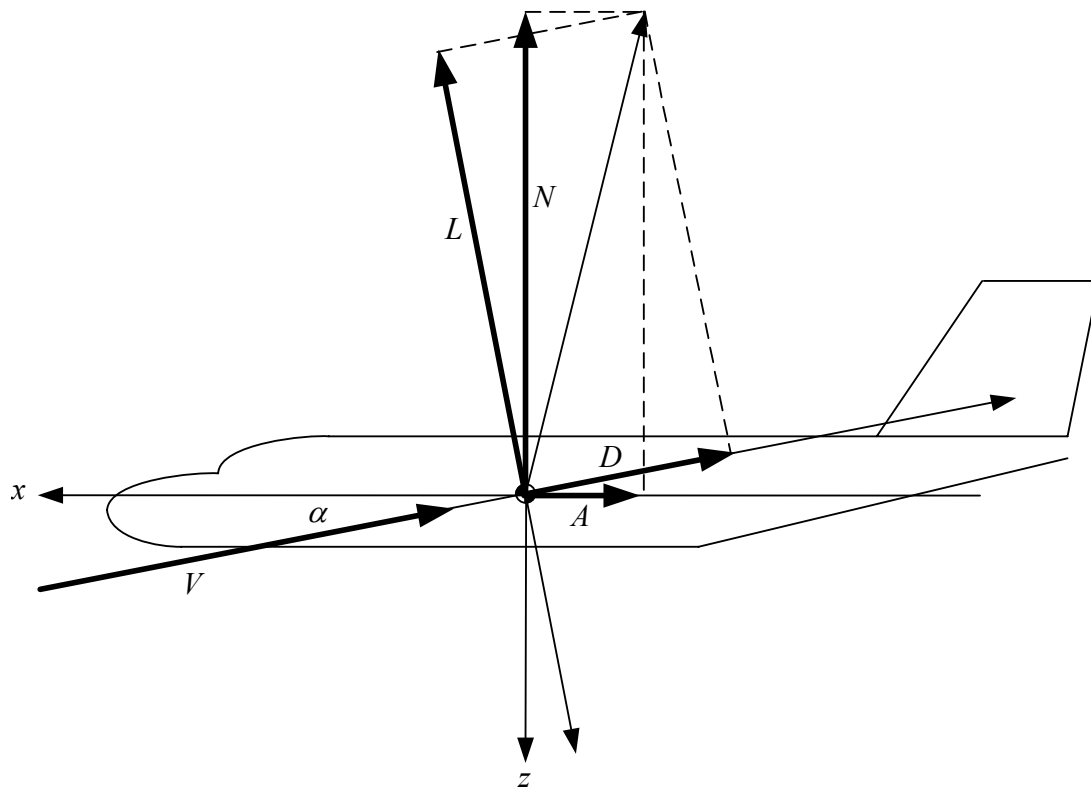
$C_{D_b}(Ma)$, $C_{D_w}(Ma)$ i krivulje uslijed dodatnog otpora $\Delta C_D(Ma)$. Taj zbroj je shematski prikazan na slici 3-9.



Slika 9. Zbroj komponenta nultog otpora

3.7 Inducirani otpor

Promatrajmo ravan simetrije zrakoplova i u njoj dva sustava koordinatnih osa kao na slici 3-10:



Slika 10

Sa slike vidimo da je

$$A = D \cos \alpha - L \sin \alpha$$

$$N = L \cos \alpha + D \sin \alpha$$

gdje su A i N komponente aerodinamičke sile duž osi tromosti zrakoplova, a D i L duž i okomito na brzinu leta. Poslije dijeljenja sa referentnom silom $\frac{\rho V^2}{2} S_{ref}$ dobivamo:

$$C_A = C_D \cos \alpha - C_L \sin \alpha$$

$$C_N = C_L \cos \alpha + C_D \sin \alpha$$

Ako je napadni kut α mali broj onda nam prva jednadžba daje vezu

$$C_A = C_D - C_L \alpha$$

Primijenimo je slučaj $\alpha = \alpha_{0L}$ kad je $C_D = C_{D0}$ i nema uzgona $C_L = 0$. U tom slučaju ova jednadžba se svodi na

$$C_{A0} = C_{D0},$$

tj. nulti otpor je istodobno i *nulta aksijalna sila*.

Ako upotrijebimo istu tu jednadžbu primjenimo na slučaj kad je napadni kut $\alpha \neq \alpha_{0L}$, dobivamo

$$C_D = C_A + \alpha C_L.$$

Pretpostavit ćemo da aksijalna sila C_A za male napadne kutove ne zavisi od napadnog kuta, što znači da je

$$C_A \approx C_{A0} = C_{D0}.$$

Ta pretpostavka nije nerealna jer mjerenja pokazuju da aksijalna sila mnogo manje ovisi o napadnom kutu od sile otpora. To je aproksimacija koja nam omogućuje da bolje razumijemo ovisnost otpora o uzgonu. S tom pretpostavkom dobivamo:

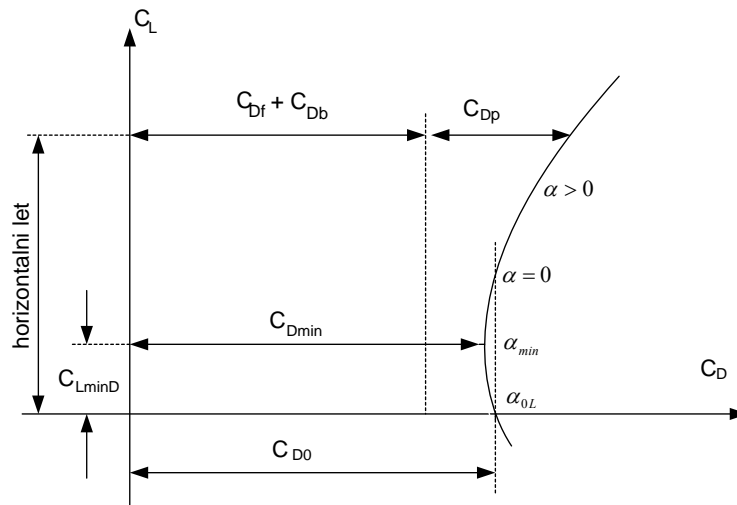
$$C_D = C_{D0} + \alpha C_L.$$

Ova jednadžba pokazuje utjecaj napadnog kuta na otpor letjelice. Vidimo da je totalni otpor zbroj otpora pri nultom uzgonu i otporu zbog uzgona, koji nazivamo inducirani otpor. Taj dodatni otpor ostvaruje se uglavnom kroz D_w , jer je utjecaj napadnog kuta na otpor trenja i otpor dna neznatan. Kako je sila uzgona također ovisna o napadnom kutu, te dvije ovisnosti

$$\begin{aligned} C_D &= C_{D0} + \alpha C_L \\ C_L &= C_{L\alpha} (\alpha - \alpha_{0L}) \end{aligned}$$

predstavljaju parametarske jednadžbe *polare* zrakoplova (slika 11) ili eliminacijom napadnog kuta

$$C_D = C_{D0} + \alpha_{0L} C_L + \frac{1}{C_{L\alpha}} C_L^2.$$



Slika 11. Polara zrakoplova

Iz ove jednadžbe dobivamo da je najmanji otpor zrakoplova C_{Dmin} za napadni kut $\alpha_{min} = \alpha_{0L}/2$ i on ima vrijednost

$$C_{Dmin} = C_{D0} - C_{L\alpha} \left(\frac{\alpha_{0L}}{2} \right)^2,$$

a pri minimalnom otporu bit će uzgon

$$C_{LminD} = C_{L\alpha} (\alpha_{min} - \alpha_{0L}) = -C_{L\alpha} \frac{\alpha_{0L}}{2}.$$

Pri napadnom kutu α_{0L} , kada je uzgon jednak nuli, otpor C_{D0} nije najmanji. Najmanja vrijednost otpora je pri napadnom kutu $\alpha_{min} = \alpha_{0L}/2$, kad postoji neki mali uzgon L_{minD} .

Pomoću vrijednosti za C_{Dmin} i C_{LminD} , jednadžba polare može se napisati u obliku

$$C_D = C_{Dmin} + \frac{1}{C_{L\alpha}} (C_L - C_{LminD})^2.$$

Tu jednadžbu izveli smo uz pretpostavku da aksijalna sila ne ovisi o napadnom kutu. Naznačili smo da je to samo jedna aproksimacija koja je za supersoniku dovoljno točna, a manje točna za subsoniku. Zato se koristimo jednadžbom

$$C_D = C_{Dmin} + K (C_L - C_{Lmin})^2.$$

Međutim, u poglavlju o performansama zrakoplova, s namjerom a se olakšaju i omoguće jednostavne veze između performansi i karakteristika zrakoplova, koristi se oblik polare

$$C_D = C_{D0} + K C_L^2,$$

što pretpostavlja da je $C_{Dmin} \approx C_{D0}$ i da je $C_{Lmin} \approx 0$. Za zrakoplove koji imaju profil krila bez velike zakrivljenosti srednje linije ove su aproksimacije prihvatljive.

Koeficijent K ima veliko značenje i bitnu ulogu na performanse zrakoplova. Jasno je da želimo zrakoplov koji ima što manji taj koeficijent, jer će takav zrakoplov za isti uzgon imati manji otpor.

U subsonici, kad postoji sila uzgona, pod dejstvom vezanog vrtloga zrak prelazi oko prednjega ruba krila s donje strane krila na gornju zbog razlike tlaka. To opstrujavanje prednjega ruba stvara područje podtlaka oko prednjega ruba, a podtlak oko prednjega ruba uzrokuje silu u pravcu gibanja. Ta sila sisanja smanjuje prirast aksijalne sile zbog promjene tlaka po površini krila usled napadnog kuta. Rezultanta tih dviju sila je inducirani otpor. Prema *Glauertovoj* teoriji za slučaj eliptičnog krila koeficijent inducirano otpora je

$$\frac{1}{\pi A} C_L^2 = K C_L^2$$

Za trapezna krila inducirani otpor ima drugu vrijednost, pa radi primjene iste jednadžbe uvodimo Oswaldov koeficijent e :

$$\frac{1}{e\pi A} C_L^2 = K C_L^2$$

ili

$$K = \frac{1}{e\pi A},$$

gdje je $0.65 < e < 0.85$. Procjena Oswaldova koeficijent izvodi se prema jednadžbama:

- za zrakoplov s trapeznim krilom bez strijele

$$e = 1.78(1 - 0.045A^{0.68}) - 0.64,$$

- za zrakoplov s trapeznim strelastim krilom

$$e = 4.61(1 - 0.045A^{0.68})(\cos \Lambda_{LE})^{0.15} - 3.1$$

Takva procjena za e u subsonici daje K konstantno, što se pokazalo prihvatljivim do Ma_{cr} .

Međutim za veće vrijednosti Machovog broja K se povećava. To daljnje povećanje objašnjava se daljnjim smanjenjem sile u pravcu gibanja zbog nemogućnosti zraka da dovoljno brzo opstrujava prednji rub krila, što ima za posljedicu nedovoljni podtlak da bi se dobila potrebna sila u pravcu gibanja.

U supersonici iz linearne teorije krila znamo da je za vrijednosti Machova broja

$$Ma > Ma_{LE} = \frac{1}{\cos \Lambda_{LE}}$$

napadni rub krila supersoničan te zrak ne prelazi oko prednjega ruba krila s jedne na drugu stranu krila. Zato nema nikakve sile u pravcu gibanja. Inducirani otpor nastaje samo kao posljedica prirasta aksijalne sile zbog promjene tlaka po površini krila usled napadnog kuta. U slučaju profila ploče taj koeficijent inducirano otpora iznosi

$$KC_L^2 = C_N \sin \alpha .$$

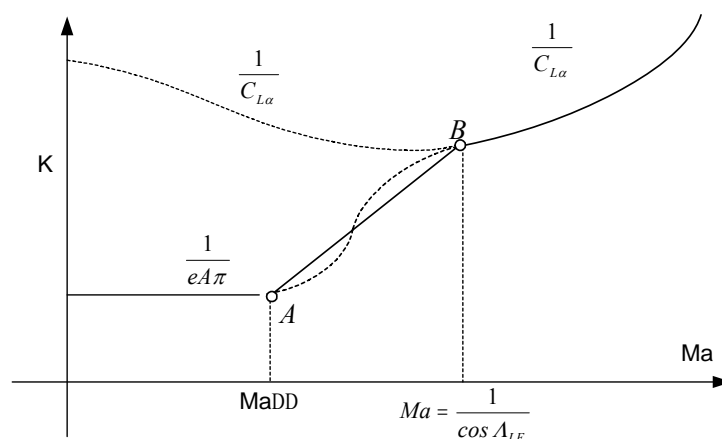
Iz ove jednadžbe dobivamo

$$K = \frac{1}{C_{L\alpha}} .$$

Na granicama transonike dva su ekstremna slučaja:

- do Ma_{cr} kad postoji sila u pravcu gibanja $S = 1$ odgovara joj $K = \frac{1}{\pi A}$ i
- od Ma_{LE} kad nema sile u pravcu gibanja $S = 0$ tada je $K = \frac{1}{C_{L\alpha}}$.

Za Machove brojeve u transonici $Ma_{cr} < Ma < Ma_{LE}$ pretpostavlja se da postoji djelomično opstrujavanje prednjeg ruba $1 > S > 0$. Primijenit ćemo stoga linearnu interpolaciju u tom intervalu, ali tako da za vrijednost Ma_{DD} odgovara $K_1 = 1/eA\pi$, a za Ma_{LE} je $K_0 = 1/C_{L\alpha}$.



Slika 12. Koeficijent K u ovisnosti o Machovu broju

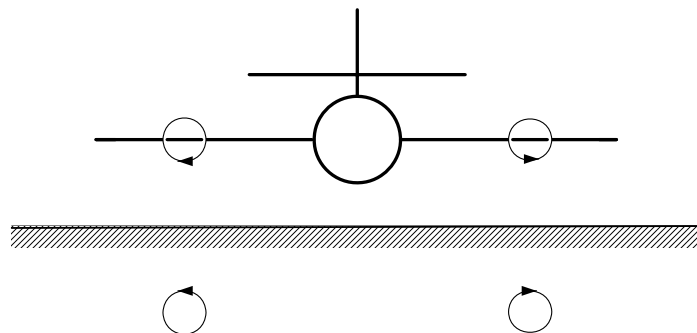
To znači da je u tom intervalu za zadani Machov broj koeficijent linearne interpolacije

$$\xi = \frac{Ma - Ma_{DD}}{Ma_{LE} - Ma_{DD}}$$

te je K za zadanu vrijednost Ma dano jednadžbom

$$K = \frac{1}{eA\pi} + \xi \left(\frac{1}{C_{L\alpha}} - \frac{1}{eA\pi} \right).$$

Na slici 3-11 predstavljena je promjena $K(Ma)$. U subsonici $Ma < Ma_{DD}$ je $K = 1/eA\pi$. U supersonici za vrijednosti $Ma > Ma_{LE}$, kada je napadni rub krila supersoničan, $K = 1/C_{L\alpha}$. Konačno, od točke A do točke B ostala je nepoznata prijelazna krivulja. Poslužit ćemo se vrijednostima koje dobivamo linearnom interpolacijom koeficijenta K od točke A do točke B .



Slika 13. Simetrični fiktivni vrtlozi

Na veličinu induciranog otpora utječe i prisutnost tla. U trenutku polijetanja i slijetanja tlo utječe na sliku opstrujavanja krila. Iz graničnih uvjeta da brzina zraka pri opstrujavanju krila mora biti tangencijalna s tlom, zaključuje se da u tlu mora postojati za svaki elementarni vrtlog koji silazi s krila, odgovarajući i fiktivni vrtlog jednakog intenziteta, suprotnog smjera i simetrične pozicije u odnosu na stvarni vrtlog. Ti fiktivni vrtlozi uzrokuju promjene slike opstrujavanja krila, a to znači da mijenjaju i uzgon krila i inducirani otpor krila. Izmjene će ovisiti o udaljenosti krila od tla. Glauertova teorija u ovom slučaju daje odnos

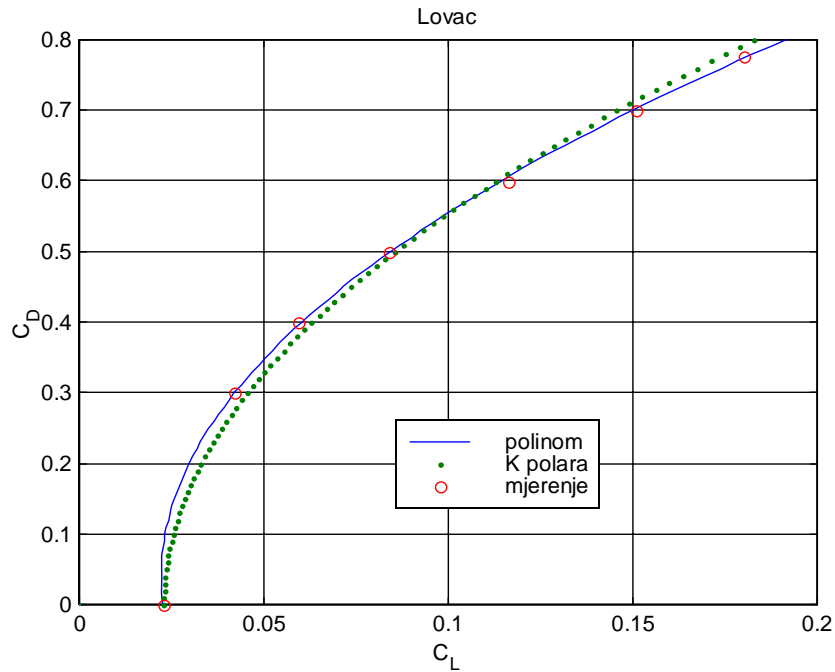
$$\frac{C_{Di \text{ ground}}}{C_{Di}} = \frac{\left(16 \frac{h}{b}\right)^2}{1 + \left(16 \frac{h}{b}\right)^2}.$$

U toj jednadžbi je h visina krila od tla, a b raspon krila na zrakoplovu.

3.7.1 Primjer

Mjerenja u aerotunelu otpora i uzgona zrakoplova *lovca* pri $Ma = 0.8$ i pri različitim napadnim kutovima dala su ove rezultate

C_L	0.000	0.300	0.400	0.500	0.600	0.700	0.776
C_D	0.0228	0.042	0.0593	0.084	0.116	0.1506	0.180



Slika 14. Slika mjerene polare i usklađene

Na temelju tih mjerenja treba odrediti stvarnu polaru i polaru oblika

$$C_D = C_{D0} + KC_L^2.$$

U MATLAB-u napravljen je program *Polara.m* koji se nalazi na disketi u direktoriju *Aerodinamika*, s kojim je nacrtan dijagram na slici 3-13. Najbolji polinom drugoga reda jest

$$C_D = 0.0226 - 0.0226 \cdot C_L + 0.2924 \cdot C_L^2 = 0.0222 + 0.293 \cdot (C_L - 0.0386)^2$$

Taj polinom prolazi kroz mjerene točke. Ako želimo oblik bez linearnog člana po napdnom kutu pogodan za analizu performansi, onda je rezultat

$$C_D = 0.0228 + 0.250 \cdot C_L^2$$

Ovu polaru dobit ćemo ako svakoj točki C_D, C_L dodamo simetričnu točku $C_D, -C_L$ pa odredimo najbolji polinom drugog reda za sve točke.

4 NORMALNA SILA I MOMENT PROPINJANJA

Aerodinamički koeficijent normalne sile i momenta propinjanja imaju oblik

$$C_N = f_N(\alpha, \dot{\alpha}^*, q^*, \delta_m)$$

$$C_m = f_m(\alpha, \dot{\alpha}^*, q^*, \delta_m).$$

Ako te funkcije razvijemo u red, dobivamo linearnu zavisnost aerodinamičkog koeficijenta normalne sile i momenta propinjanja:

$$C_N = C_{N_0} + C_{N\alpha}\alpha + C_{N\dot{\alpha}}\dot{\alpha}^* + C_{Nq}q^* + C_{N\delta_m}\delta_m$$

$$C_m = C_{m_0} + C_{m\alpha}\alpha + C_{m\dot{\alpha}}\dot{\alpha}^* + C_{mq}q^* + C_{m\delta_m}\delta_m$$

Ovim lineariziranim modelom možemo se služiti ako su parametri α , $\dot{\alpha}^*$, q^* i δ_m male veličine u odnosu na interval u kome se aerodinamički koeficijenti C_N i C_m ponašaju linearno. To uvijek vrijedi za putničke i transportne zrakoplove, ali za sportske i borbene zrakoplove koji trebaju velike manevarske sposobnosti to treba provjeriti.

Analiza performansi letjelice podrazumijeva ravnotežni, stacionarni let te se nestacionarni parametri $\dot{\alpha}^*$ i q^* ne uzimaju u obzir tako da su aerodinamički koeficijenti normalne sile i momenta propinjanja

$$C_N = C_{N_0} + C_{N\alpha}\alpha + C_{N\delta_m}\delta_m$$

$$C_m = C_{m_0} + C_{m\alpha}\alpha + C_{m\delta_m}\delta_m.$$

Normalnu silu kao i aerodinamički moment propinjanja zrakoplova stvaraju svi dijelovi zrakoplova: kombinacija krilo-tijelo, kombinacija horizontalni rep-tijelo (ili kombinacija canari-tijelo u slučaju *canard* konfiguracije) i tijelo:

$$C_N = (C_N)_{WB} + (C_N)_{hB} + (C_N)_B$$

$$C_m = (C_m)_{WB} + (C_m)_{hB} + (C_m)_B$$

To načelo superpozicije vrijedi i za nulte članove i za gradijente. Tako je za nulte članove

$$C_{N0} = (C_{N0})_{WB} + (C_{N0})_{hB} + (C_{N0})_B$$

$$C_{m0} = (C_{m0})_{WB} + (C_{m0})_{hB} + (C_{m0})_B,$$

a za gradijent na primjer po napadnom kutu

$$C_{N\alpha} = (C_{N\alpha})_{WB} + (C_{N\alpha})_{hB} + (C_{N\alpha})_B$$

$$C_{m\alpha} = (C_{m\alpha})_{WB} + (C_{m\alpha})_{hB} + (C_{m\alpha})_B.$$

Isto tako možemo pisati i za druge gradijente, samo što gradijente po otklonu kormila visine stvara samo kombinacija horizontalni rep-tijelo:

$$C_{N\delta_m} = (C_{N\delta_m})_{hB}$$

$$C_{m\delta_m} = (C_{m\delta_m})_{hB}$$

Zato ćemo za potrebe normalne sile i momenta propinjanja analizirati posebno kombinaciju krilo - tijelo, zatim horizontalni rep - tijelo i konačno samo tijelo.

4.1 Normalna sila i moment propinjanja kombinacije BW

Trebamo razlikovati napadni kut krila α_w od napadnog kuta zrakoplova α . Napadani kut krila mjerimo od aerodinamičke brzine do korenske tetive, a napadni kut zrakoplova od aerodinamičke brzine do glavne osi tromosti x . Kako je korenska tetiva postavljena pod kutom i_w (postavni kut krila) u odnosu na os x tromosti zrakoplova, dobivamo vezu

$$\alpha_w = \alpha + i_w.$$

Kao što je poznato iz aerodinamike krilo sa nesimetričnim profilom ima normalnu silu koja je linearna po napadnom kutu krila α_w

$$C_N = C_{N\alpha} (\alpha_w - \alpha_{0w}).$$

Ta normalna sila krila ima svoju napadnu točku na udaljenosti ℓ_{cw} od vrha letjelice. Moment propinjanja letjelice čine moment te sile, koji ovisi o napadnom kutu, i spreg propinjanja $(C_{m0})_w$ koji ne ovisi o napadnom kutu. Koeficijent $(C_{m0})_w$ i kut $(\alpha_0)_w$ karakteristike su krila koje ovise prije svega o profilu, a zatim i o obliku krila. Za tablične profile postoje podaci o $(C_{m0})_{prof}$ i $(\alpha_0)_{prof}$ (npr. lit. [1]). Ako krilo nije uvijeno i ima isti profil po rasponu, onda je

$$\alpha_{0w} = (\alpha_0)_{prof}$$

Ako je krilo uvijeno a to znači da je napadni kut promjenljiv po rasponu, onda treba odrediti prosječni ekvivalentni napadni kut α_{eq} koji daje istu normalnu silu kao promjenljiv $\alpha(y)$:

$$N_w(\alpha_{eq}) = 2 \int_0^{b/2} dN(\alpha)$$

Taj prosječni napadni kut α_{eq} predstavlja dio postavnog kuta krila. Oblik krila (vitkost i strijela napadnog ruba), mijenja spreg $(C_{m0})_w$ te on nije jednak $(C_{m0})_{prof}$. Utjecaj oblika krila može se procijeniti prema empirijskoj formuli

$$(C_{m0})_w = (C_{m0})_{prof} \frac{A \cos^2 \Lambda_{LE}}{A + 2 \cos \Lambda_{LE}}.$$

Za kombinaciju krilo-tijelo usvojiti ćemo da je $(C_{m0})_{WB} = (C_{m0})_W$, ali se $(C_{m0})_W$ treba izračunati prema gornjoj jednadžbi za krilo s podtrupnim dijelom.

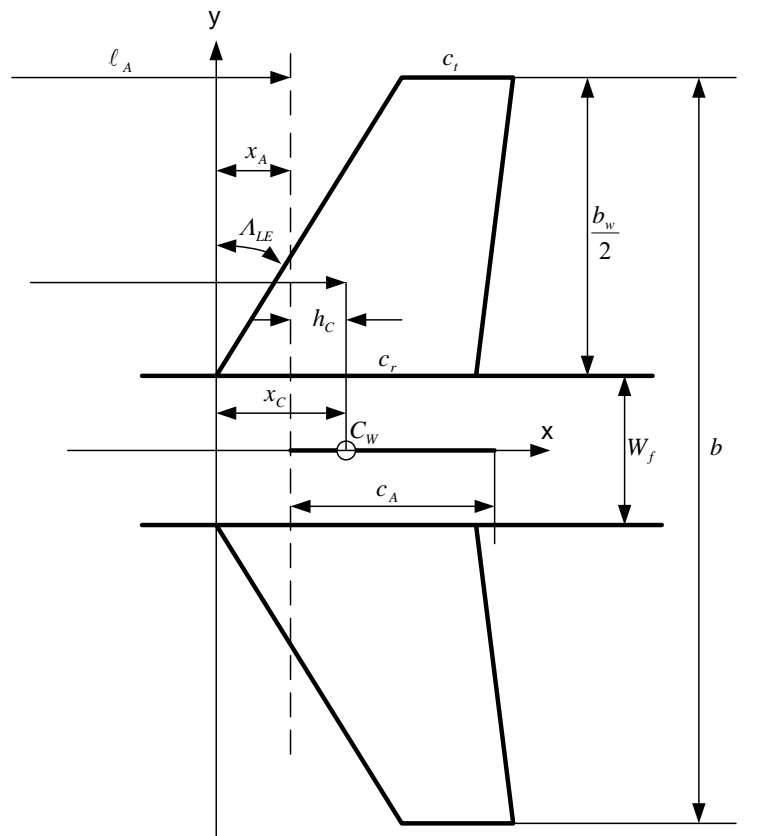
U odjeljku 2.3 vidjeli smo da je ekvivalentni napadni kut krila

$$\alpha_{BW} = K_{BW}\alpha + k_{BWw}(i_w - \alpha_{0W}),$$

što daje normalnu silu kombinacije

$$N_{BW} = \frac{\rho V^2}{2} S_w (C_{N\alpha})_w [K_{BW}\alpha + k_{BW}(i_w - \alpha_{0W})]$$

gdje je S_w površina *samog krila*. Treba napomenuti da krilo stvara još jednu normalnu komponentu u sprezi s tijelom. Naime, krilo ima i aksijalnu silu $A_w = \frac{\rho V^2}{2} S_w (C_A)_w$ u pravcu tetive krila kao na slici 3-14.



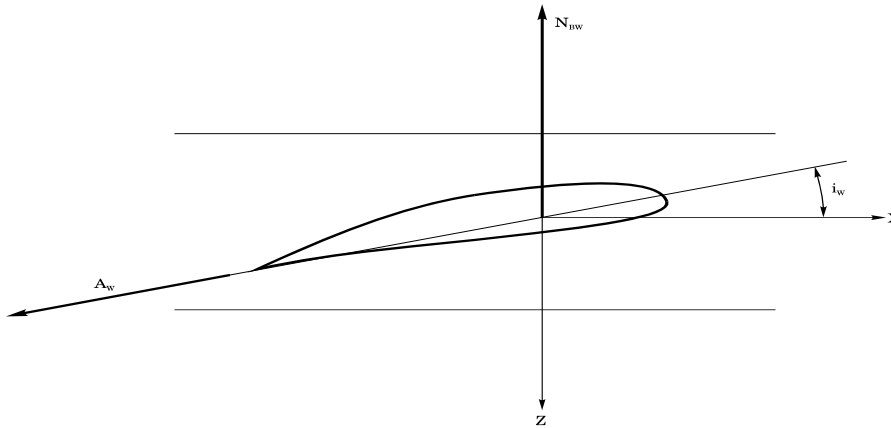
Slika 1. Kombinacija krilo tijelo

Ta sila ima komponentu $A_w \sin i_w \approx A_w i_w$ u pravcu osi tromosti z pa je

$$N_{BW} = \frac{\rho V^2}{2} S_w (C_{N\alpha})_w [K_{BW}\alpha + k_{BW}(i_w - \alpha_{0W})] - \frac{\rho V^2}{2} S_w (C_A)_w i_w$$

Dijeljenjem s referentnom silom $\frac{\rho V^2}{2} S_{ref}$ dobivamo koeficijent normalne sile kombinacije tijelo-krilo:

$$(C_N)_{BW} = \frac{S_w}{S_{ref}} \{ (C_{N\alpha})_w [K_{BW} \alpha + k_{BW} (i_w - \alpha_{0L})] - (C_A)_w i_w \}.$$



Slika 2. Normalna sila kombinacije i aksijalna sila krila

U većini slučajeva opravdano je zanemariti $(C_A)_w$ u odnosu na $(C_{N\alpha})_w$. Zato ćemo se u daljnjem radu koristiti koeficijentom normalne sile kombinacije tijelo-krilo u obliku:

$$(C_N)_{BW} = \frac{S_w}{S_{ref}} (C_{N\alpha})_w [K_{BW} \alpha + k_{BW} (i_w - \alpha_{0W})].$$

Iz ove jednadžbe nalazimo da je nulti član kombinacije krilo-tijelo

$$(C_{N0})_{BW} = \frac{S_w}{S_{ref}} (C_{N\alpha})_w k_{BW} (i_w - \alpha_{0W}),$$

da je gradijent po napadnom kutu

$$(C_{N\alpha})_{BW} = \frac{S_w}{S_{ref}} (C_{N\alpha})_w K_{BW},$$

te konačno da je gradijent normalne sile kombinacije po otklonu kormila visine

$$(C_{N\delta_m})_{BW} = 0$$

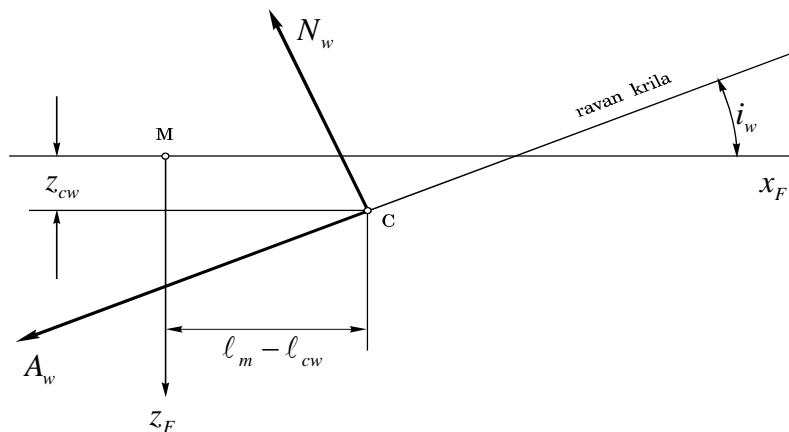
jer normalna sila kombinacije krilo-tijelo ne ovisi o otklonu kormila visine.

Koordinate napadne točke normalne sile krila N_w i aksijalne sile A_w u koordinatnom sustavu zrakoplova su $(\ell_m - \ell_{cw}, 0, z_w)$, te je moment propinjanja tih sila za os y tromosti zrakoplova

$$(N_w \cos i_w - A_w \sin i_w)(\ell_m - \ell_{cw}) - (N_w \sin i_w + A_w \cos i_w)z_w$$

Uočimo da je svejedno mjerimo li udaljenosti od vrha letjelice ili od aerodinamičkog središta jer je razlika udaljenosti ista: $\ell_m - \ell_{cw} = h_m - h_{cw}$. Postavni kut krila i_w uvijek je mali pa je moment ovih sila:

$$\begin{aligned} (N_w - A_w i_w)(\ell_m - \ell_{cw}) - (N_w i_w + A_w)z_w &= \\ &= N_w (\ell_m - \ell_{cw}) \left[1 - \frac{A_w i_w}{N_w} - \frac{i_w z_w}{\ell_m - \ell_{cw}} - \frac{A_w z_w}{N_w (\ell_m - \ell_{cw})} \right] \end{aligned}$$



Slika 3. Položaj normalne i aksijalne sile krila

U većini slučajeva mogu se zanemariti članovi

$$\frac{A_w i_w}{N_w}, \quad \frac{i_w z_w}{\ell_m - \ell_{cw}}, \quad \frac{A_w z_w}{N_w (\ell_m - \ell_{cw})}$$

u odnosu na jedinicu. To se može provjeriti u svakom konkretnom slučaju, te ako uvjet nije ispunjen, mogu se uzeti u obzir svi članovi. Radi jednostavnosti pretpostavit ćemo u daljnjem tekstu da je taj uvjet ispunjen pa je moment propinjanja zrakoplova od aerodinamičkih sila krila za središte mase zrakoplova zbroj sprega propinjanja krila i momenta normalne sile kombinacije tijelo-krilo:

$$M_{BW} = M_{oW} + N_{WB} (\ell_m - \ell_{cw})$$

$$\frac{\rho V^2}{2} S_{ref} c_A (C_m)_{WB} = \frac{\rho V^2}{2} S_{ref} c_A (C_{m0})_{WB} + \frac{\rho V^2}{2} S_w (C_{N\alpha})_w [K_{BW} \alpha + k_{BW} (i_w - \alpha_{0L})] (\ell_m - \ell_{cw}).$$

Dijeljenjem ove jednadžbe s referentnim momentom $\frac{\rho V^2}{2} S_{ref} c_A$ dobivamo koeficijent momenta propinjanja za središte mase od kombinacije tijelo-krilo :

$$(C_m)_{BW} = (C_{m0})_{WB} + \frac{S_w}{S_{ref}} (C_{N\alpha})_w [K_{BW}\alpha + k_{BW}(i_w - \alpha_{0L})](\bar{\ell}_m - \bar{\ell}_{cw})$$

Kada je napadni kut zrakoplova jednak nuli, koeficijent momenta propinjanja je

$$(C_{m0})_{BW} = (C_{m0})_w + \frac{S_w}{S_{ref}} [(C_{N\alpha})_w k_{BW}(i_w - \alpha_{0L})](\bar{\ell}_m - \bar{\ell}_{cw}).$$

Derivacijom po napadnom kutu, dobivamo gradijent koeficijenta momenta propinjanja kombinacije krilo-tijelo:

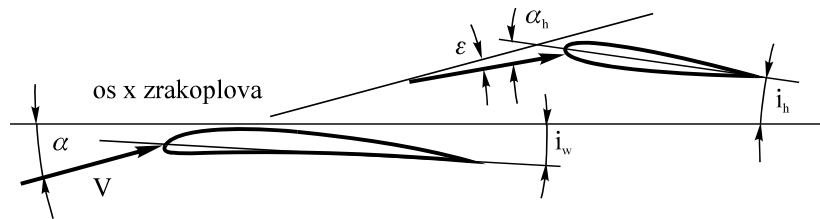
$$(C_{m\alpha})_{BW} = \frac{S_w}{S_{ref}} K_{BW} (C_{N\alpha})_w (\bar{\ell}_m - \bar{\ell}_{cw}).$$

Jasno je da je derivacija $(C_{m\delta_m})_{BW} = 0$, jer normalna sila pa i njen moment kombinacije tijelo-krilo ne ovisi o otklonu kormila visine.

4.2 Normalna sila i moment propinjanja kombinacije hB

Normalna sila horizontalnog repa ima dva dijela. Prvi je uslijed napadnog kuta na kombinaciji horizontalni rep-tijelo α_h , a drugi uslijed otklona upravljačkih površina δ_m . Napadni kut kombinacije horizontalni rep-trup bit će jednak napadnom kutu zrakoplova umanjenom za savijanje struje ε :

$$\alpha - \varepsilon,$$



Slika 4. Napadni kut horizontalnog repa

gdje je $\varepsilon = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} (\alpha + i_w - \alpha_{0w})$. U toj kombinaciji horizontalni rep postavljen je pod kutom i_h

u odnosu na tijelo. Prema tome, ekvivalentni napadni kut na horizontalnom repu je

$$\alpha_{BH} = K_{BH} \left[\alpha - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} (\alpha + i_w - \alpha_{0w}) \right] + k_{BH} i_h.$$

U ovoj jednadžbi nema nultog kuta profila horizontalnog repa zato što horizontalni rep ima obično simetričan profil za koji je $\alpha_{0h} = 0$.

Objekti komponente normalne sile na horizontalnom repu imaju gubitke zbog smanjenog dinamičkog tlaka iza krila. Taj gubitak uzimamo u obzir množenjem dinamičkog tlaka s koeficijentom η_h . Komponenta zbog otklona upravljačke površine δ_m ima još dodatne gubitke kroz zazor između nepokretnog (dio horizontalnog repa) i pokretnog dijela noseće površine (kormilo visine). Te gubitke uzimamo u obzir time što dinamički tlak te komponente smanjujemo množeći ga s još jednim koeficijentom η_{slot} , koji procjenjujemo u subsonici $\eta_{slot} = 0.85$, a u supersonici je znatno manji te se može u prvoj iteraciji zanemariti ($\eta_{slot} = 1$). Tako zaključujemo da je ukupna normalna sila kombinacije horizontalni rep-tijelo:

$$N_{hB} = \eta_h \frac{\rho V^2}{2} S_h (C_{N\alpha})_h \left\{ K_{BH} \left[\alpha - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} (\alpha + i_w - \alpha_{0L}) \right] + k_{BH} i_h \right\} + \eta_h \eta_{slot} \frac{\rho V^2}{2} S_h (C_{N\delta})_h \delta_m$$

Dijeljenjem ove jednadžbe s referentnom silom $\frac{\rho V^2}{2} S_{ref}$ dobivamo koeficijent normalne sile zrakoplova koji stvara kombinacija horizontalni rep-tijelo

$$(C_N)_{hB} = \eta_h \frac{S_h}{S_{ref}} \left\{ (C_{N\alpha})_h \left\{ K_{BH} \left[\alpha - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} (\alpha + i_w - \alpha_0) \right] + k_{BH} i_h \right\} + \eta_{slot} (C_{N\delta})_h \delta_m \right\}$$

U ovoj jednadžbi je $(C_{N\alpha})_h$ određeno u odjeljku 2.2.3, a K_{BH} je određeno za odnos promjera trupa na mjestu horizontalnog repa prema rasponu kombinacije horizontalni rep – trup i k_{BH} u odjeljku 2.3. Kada je trup malog promjera na mjestu horizontalnog repa, onda se obično zanemaruje koeficijent interferencije ($K_{BW} = k_{BW} = 1$) te je tada

$$(C_N)_{hB} = \eta_h \frac{S_h}{S_{ref}} \left\{ (C_{N\alpha})_h \left[\alpha - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} (\alpha + i_w - \alpha_0) + i_h \right] + \eta_{slot} (C_{N\delta})_h \delta_m \right\}.$$

Iz ove jednadžbe dobivamo da je

$$(C_{N0})_{hB} = \eta_h \frac{S_h}{S_{ref}} (C_{N\alpha})_h \left[-\frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} (i_w - \alpha_0) + i_h \right]$$

$$(C_{N\alpha})_{hB} = \eta_h \frac{S_h}{S_{ref}} (C_{N\alpha})_h \left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} \right)$$

$$(C_{N\delta_m})_{hB} = \eta_h \eta_{slot} \frac{S_h}{S_{ref}} (C_{N\delta})_h,$$

pa je konačno koeficijent normalne sile horizontalnog repa (za referentni tlak i referentnu površinu zrakoplova)

$$(C_N)_{hB} = (C_{N0})_{hB} + (C_{N\alpha})_{hB} \alpha + (C_{N\delta_m})_{hB} \delta_m.$$

Budući da ne postoji spreg od horizontalnog repa jer je profil horizontalnog repa obično simetričan, moment propinjanja za središte mase od horizontalnog repa ima također tri dijela, a to su momenti za središte mase ova triju dijelova normalne sile. Prvi i drugi dio normalne sile na repu, $(C_{N0})_{hB}$ i $(C_{N\alpha})_{hB} \alpha$, imaju hvatište u napadnoj točki normalne sile horizontalnog repa na udaljenosti ℓ_{ch} od vrha letjelice ($\bar{\ell}_{ch}$ poslije dijeljenja s referentnom duljinom propinjanja c_A). Zato je prvi dio koeficijent momenta propinjanja za središte mase od prvoga dijela normalne sile na repu

$$(C_{m0})_{hB} = -(C_{N0})_{hB} (\bar{\ell}_{ch} - \bar{\ell}_m)$$

kao i drugi

$$(C_{m\alpha})_{hB} \alpha = -(C_{N\alpha})_{hB} \alpha \cdot (\bar{\ell}_{ch} - \bar{\ell}_m).$$

Komponenta normalne sile na horizontalnom repu uslijed otklona upravljačke površine δ_m ima hvatište na udaljenosti $\ell_{\delta h}$ od vrha letjelice, te je koeficijent njenog momenta propinjanja

$$(C_{m\delta_m})_{hB} \delta_m = -(C_{N\delta_m})_{hB} \delta_m \cdot (\bar{\ell}_{\delta h} - \bar{\ell}_m).$$

Tako zaključujemo da je koeficijent momenta propinjanja za središte mase od horizontalnog repa

$$(C_m)_{hB} = -[(C_{N0})_{hB} + (C_{N\alpha})_{hB} \alpha] \cdot (\bar{\ell}_{ch} - \bar{\ell}_m) - (C_{N\delta})_{hB} \delta_m \cdot (\bar{\ell}_{\delta h} - \bar{\ell}_m)$$

ili

$$(C_m)_{hB} = -\eta_h \frac{S_h}{S_{ref}} \left\{ (C_{N\alpha})_h \left[\alpha - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} (\alpha + i_w - \alpha_{0w}) + i_h \right] (\bar{\ell}_{ch} - \bar{\ell}_m) + \eta_{slot} (C_{N\delta})_h \delta_m (\bar{\ell}_{\delta h} - \bar{\ell}_m) \right\}$$

Taj koeficijent ima tri dijela. Prvi je konstantan

$$(C_{m0})_{hB} = -\eta_h \frac{S_h}{S_{ref}} (C_{N\alpha})_h \left[-\frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} (i_w - \alpha_{0w}) + i_h \right] (\bar{\ell}_{ch} - \bar{\ell}_m)$$

Drugi je proporcionalan napadnom kutu α , a njegov gradijent je

$$(C_{m\alpha})_{hB} = -\eta_h \frac{S_h}{S_{ref}} (C_{N\alpha})_h \left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} \right) (\bar{\ell}_{ch} - \bar{\ell}_m)$$

i treći koji je proporcionalan otklonu kormila visine δ_m , s gradijentom

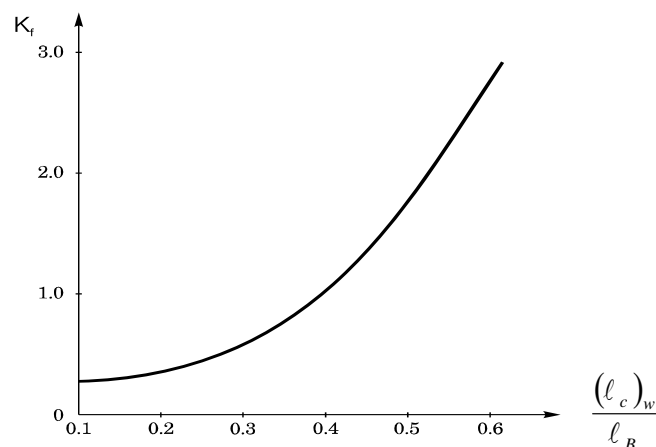
$$(C_{m\delta_m})_{hB} = -\eta_h \eta_{slot} \frac{S_h}{S_{ref}} (C_{N\delta})_h (\bar{\ell}_{\delta h} - \bar{\ell}_m).$$

Gradijent $(C_{N\delta})_h$ horizontalnog repa po otklonu kormila visine odredili smo u odjeljku 2.2.7. U supersonici cijeli horizontalni rep je kormilo visine te je $(C_{N\delta})_h = (C_{N\alpha})_h$ a hvatište $\ell_{\delta h} = \ell_{ch}$.

4.3 Moment propinjanja tijela

Na prednjem divergentnom dijelu tijela javlja se pozitivna normalna sila (sila uzgona), a na zadnjem konvergentnom dijelu javlja se negativna normalna sila (negativan uzgon). Te dvije sile približno su slične, pa je njihova rezultanta zanemariva, ali one čine spreg koji treba uzeti u obzir i koji je proporcionalan napadnom kutu tijela. Taj spreg možemo procijeniti pomoću empirijske formule prema [18]:

$$(C_m)_B = K_f \frac{W_B^2 \ell_B}{c_A S_{ref}} \alpha$$



Slika 5. Koeficijent sprega propinjanja trupa

W_B i ℓ_B su širina i duljina tijela, a K_f je koeficijent koji ovisi o odnosu udaljenosti napadne točke krila od vrha $(\ell_c)_w$, prema ukupnoj duljini tijela ℓ_B .

Ako tijelo nema zadnji konvergentni dio, ili ako je suženje na zadnjem dijelu malo, ova jednadžba ne daje realnu procjenu. U tom slučaju treba upotrijebiti procjene iz lit [27].

4.4 Nulti članovi i gradijenti normalne sile i momenta propinjanja

Sada imamo sve dijelove nultih članova i gradijenata po napadnom kutu i po otklonu kormila visine od koeficijenata normalne sile i momenta propinjanja.

Nulti član normalne sile je zbroj članova normalne sile kombinacije krilo - trup i horizontalni rep - trup:

$$C_{N0} = (C_{N0})_{WB} + (C_{N0})_{hB}$$

$$C_{N0} = \frac{S_w}{S_{ref}} (C_{N\alpha})_w k_{BW} (i_w - \alpha_{0L}) + \eta_h \frac{S_h}{S_{ref}} (C_{N\alpha})_h \left[-K_{hB} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} (i_w - \alpha_0) + k_{hB} i_h \right]$$

Nulti član koeficijenta momenta propinjanja također je zbroj

$$C_{m0} = (C_{m0})_{WB} + (C_{m0})_{hB}$$

$$C_{m0} = \frac{S_w}{S_{ref}} \left[(C_{m0})_w + (C_{N\alpha})_w k_{BW} (i_w - \alpha_{0L}) (\bar{\ell}_m - \bar{\ell}_{cw}) \right] -$$

$$- \eta_h \frac{S_h}{S_{ref}} (C_{N\alpha})_h \left[-K_{hB} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} (i_w - \alpha_{0w}) + k_{hB} i_h \right] (\bar{\ell}_{ch} - \bar{\ell}_m)$$

U gradijentu normalne sile ne sudjeluje tijelo već samo kombinacija krilo-tijelo i kombinacija horizontalan rep-tijelo

$$C_{N\alpha} = (C_{N\alpha})_{WB} + (C_{N\alpha})_{hB}$$

$$C_{N\alpha} = \frac{S_w}{S_{ref}} (C_{N\alpha})_w K_{BW} + \eta_h \frac{S_h}{S_{ref}} (C_{N\alpha})_h K_{hB} \left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} \right)$$

U gradijentu po napadnom kutu momenta propinjanja sudjeluju sva tri dijela:

$$C_{m\alpha} = (C_{m\alpha})_{WB} + (C_{m\alpha})_{hB} + (C_{m\alpha})_B.$$

Taj je zbroj:

$$C_{m\alpha} = \frac{S_w}{S_{ref}} K_{BW} (C_{N\alpha})_w (\bar{\ell}_m - \bar{\ell}_{cw}) - \eta_h \frac{S_h}{S_{ref}} (C_{N\alpha})_h \left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} \right) (\bar{\ell}_{ch} - \bar{\ell}_m) + K_f \frac{W_B^2 \ell_B}{C_A S_{ref}}$$

U gradijentu normalne sile po odklonu kormila visine kao i od momenta propinjanja sudjeluje samo horizontalni rep

$$C_{N\delta_m} = (C_{N\delta_m})_{hB} = \eta_h \eta_{slot} \frac{S_h}{S_{ref}} (C_{N\delta})_h$$

$$C_{m\delta_m} = (C_{m\delta_m})_{hB} = -\eta_h \eta_{slot} \frac{S_h}{S_{ref}} (C_{N\delta})_h (\bar{\ell}_{\delta h} - \bar{\ell}_m)$$

Ove jednadžbe za procjenu derivativa pokazuju nam utjecaj veličine i položaja krila i horizontalnog repa na njihovu veličinu. Točnija procjena derivativa $C_{N\alpha}$, $C_{m\alpha}$, $C_{N\delta_m}$ i $C_{m\delta_m}$ može se naći u lit.[28] i [29].

4.5 Primjer

Kao primjer aerodinamičkog proračuna izvršit ćemo procjenu aerodinamičkih koeficijenata u slučaju jednog malog putničkog zrakoplova. Dimenzije tog “malog zrakoplova” prikazane su na slici 4.7. Taj mali zrakoplov ima pojednostavljeni oblik zrakoplova CHEROKEE 180 PIPER (slika 4.6), da bi aerodinamički proračun bio olakšan. Neki podaci o zrakoplovu PIPER uzeti su iz lit.[14], a neki su dobiveni ljubaznošću tvrtke.

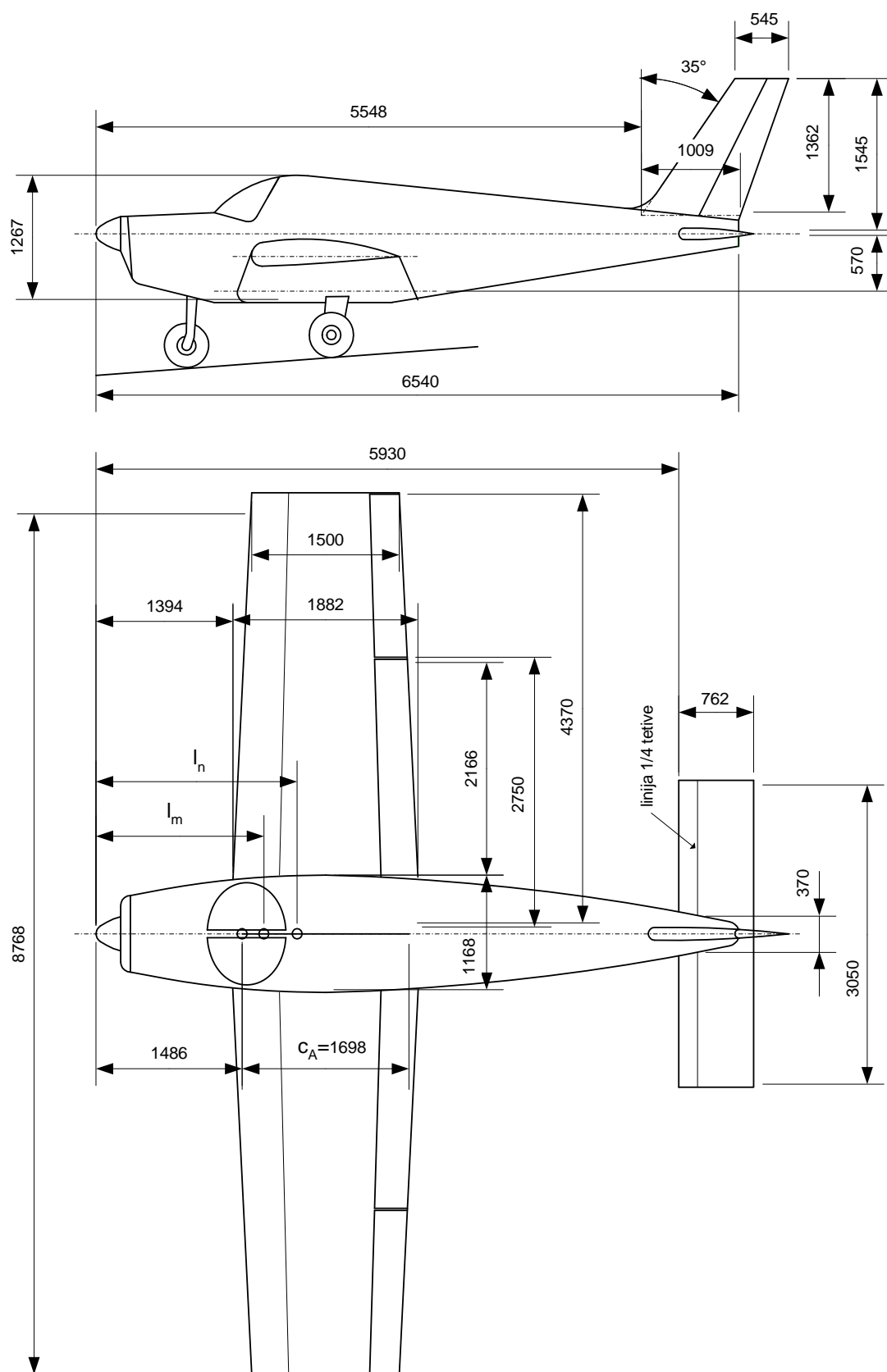


Slika 4-6 CHEROKEE 180 PIPER

4.5.1 Podaci i geometrija

Krilo (dva polukrila)

Korijenska tetiva	$c_r = 1.882 \text{ m}$
Vršna tetiva	$c_t = 1.500 \text{ m}$
Raspon dva polukrila	$b_w = 7.600 \text{ m}$
Strijela prednjeg ruba krila	$\Lambda_m = 0$
Udaljenost krila od ravni elise	$\ell_{0w} = 1.394 \text{ m}$
Maksimalni uzgon krila	$C_{L_{\max}} = 1.45$
profil krila	$NACA 65_2 - 415$
Tetiva krilaca	20% od tetive krila



Slika 4-7. Dimenzije malog zrakoplova

Kut strijele napadnog ruba:

$$\tan \Lambda_{LE} = \frac{c_r - c_t}{b_v} = \frac{1.882 - 1.500}{7.600} = 0.050 \Rightarrow \Lambda_{LE} = 2.88^\circ$$

Kut strijele geometrijskog mjesta točaka 25% tetive krila:

$$\tan \Lambda_{1/4} = \tan \Lambda_{LE} - 0.25 \frac{c_r - c_t}{b_v/2} = 0.0503 - 0.25 \frac{1.882 - 1.500}{3.800} = 0.0252 \Rightarrow \Lambda_{1/4} = 1.44^\circ$$

Kut strijele maksimalne debljine krila:

$$\tan \Lambda_t = \tan \Lambda_{LE} - \bar{x}_t \frac{c_r - c_t}{b_v/2} = 0.0503 - 0.4 \frac{1.882 - 1.500}{3.800} = 0.0101 \Rightarrow \Lambda_t = 0.58^\circ$$

Kut strijele osi otklona krilaca

$$\tan \Lambda_{HL} = \tan \Lambda_{LE} - \bar{x}_t \frac{c_r - c_t}{b_v/2} = 0.0503 - 0.8 \frac{1.882 - 1.500}{3.800} = -0.0301 \Rightarrow \Lambda_{HL} = -1.73^\circ$$

Površina dvaju polu krila

$$S_W = 2 \cdot \frac{c_r + c_t}{2} \frac{b_W}{2} = \frac{1.882 + 1.500}{2} \cdot 7.6000 = 12.85 \text{ m}^2$$

$$AR = \frac{b_W^2}{S_W} = \frac{7.600^2}{12.85} = 4.5$$

Za ishodište u vrhu krila

$$x_A = b_W \frac{1 + 2\lambda}{6(1 + \lambda)} \tan \Lambda_{LE} = 7.600 \cdot \frac{1 + 2 \cdot 0.797}{6(1 + 0.797)} 0.0503 = 0.092 \text{ m}$$

$$c_A = \frac{4}{3} \cdot \frac{S_W}{b_W} \left[1 - \frac{\lambda}{(\lambda + 1)^2} \right] = \frac{4}{3} \frac{12.85}{7.600} \left[1 - \frac{0.797}{(0.797 + 1)^2} \right] = 1.698 \text{ m}$$

$$\ell_A = \ell_{0W} + x_A = 1.394 + 0.092 = 1.486 \text{ m}$$

Za profil *NACA 65₂ - 415* lit [1] (str. 628 i 629), daje geometrijske karakteristike

$$\bar{t} = 0.15$$

$$\bar{x}_t = 0.4$$

i rezultate mjerenja za $Re = 6 \cdot 10^6$

$$c_{d \min} = 0.0042$$

$$c_{t\alpha} = 6.10$$

$$\alpha_{0L} = -2.6^\circ$$

$$c_{m0} = -0.060$$

To znači da ovaj profil ima najmanji koeficijent otpora $c_d = 0.0042$ ako je napadni kut profila u intervalu od -2° do $+4^\circ$. Zato zrakoplov treba u horizontalnom letu imati napadni kut koji odgovara intervalu u kome je ta minimalna vrijednost koeficijenta otpora profila.

Geometrija krilca

$$c_{\delta_t}/c = 0.2$$

$$y_{in} = 2.75$$

$$y_{out} = 4.37$$

Geometrija zakrilca

$$b_f/2 = 2.17$$

$$c_f/c = 0.2$$

Tijelo

Zadani podaci

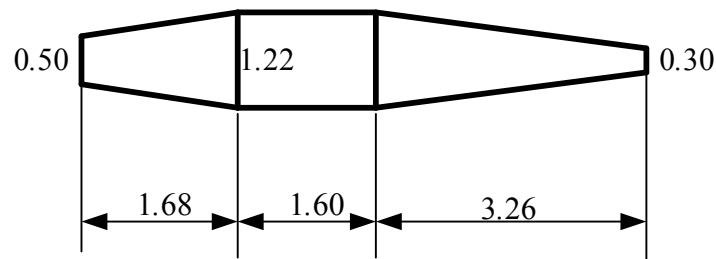
$$L_B = 6.54 \text{ m}$$

$$W_B = 1.17 \text{ m}$$

$$S_{max} = 1.17 \text{ m}^2$$

$$d_e = 2\sqrt{\frac{S_{max}}{\pi}} = 2\sqrt{\frac{1.17}{\pi}} = 1.22 \text{ m}$$

Da bi izračunali opstrujavanu površinu tijela zrakoplova, prednji i zadnji dio tijela zamijenit ćemo sa krnjim stošcem, a srednji s cilindrom, kao na slici 4-8.



Slika 4-8

Tako dobivamo procjenu opstrujavane površine

$$S_B = 4.64 + 6.13 + 7.86 = 18.63 \text{ m}^2$$

Horizontalni rep

Horizontalni rep je 0.304 iznad površine krila:

$$b_h = 3.05 \text{ m}$$

$$\ell_{0h} = 5.930 \text{ m}$$

$$c_r = c_t = 0.762 \text{ m}$$

$$h_{0h} = \ell_{0h} - \ell_A = 5.930 - 1.648 = 4.283 \text{ m}$$

Profil horizontalnog repa je NACA 0009. Za taj simetričan profil su prema lit [1], str 454 i 455, geometrijske karakteristike:

$$\bar{t} = 0.09$$

$$\bar{x}_t = 0.30$$

i rezultati mjerenja za $Re = 3 \cdot 10^6$

$$c_{d\min} = 0.052$$

$$c_{\ell\alpha} = 6.09$$

Na horizontalnom repu nalazi se kormilo visine po cijeloj duljini horizontalnog repa:

$$\frac{c_\delta}{c} = 0.2$$

Korisna površina repa

$$S_h = (b_h - d_h) \cdot c = (3.050 - 0.316) \cdot 0.762 = 2.08 \text{ m}^2$$

Vertikalni rep

$$\begin{array}{ll} c_r = 1.009 & \frac{b_v}{2} = 1.362 \\ c_t = 0.545 & \\ \ell_{0v} = 5.548 & \Lambda_{LE} = 35^\circ \end{array}$$

Suženje vertikalnog repa:

$$\lambda = \frac{c_t}{c_r} = \frac{0.545}{1.009} = 0.54$$

Izložena površina vertikalnog repa je

$$S_v = \frac{c_r + c_t}{2} \frac{b_v}{2} = \frac{1.009 + 0.545}{2} \cdot 1.362 = 1.058 \text{ m}^2$$

Vitkost vertikalnog repa

$$A_v = \frac{\ell^2}{S} = \frac{(2 \cdot 1.362)^2}{2 \cdot 1.058} = 3.50$$

Aerodinamička tetiva vertikalnog repa je

$$c_A = \frac{1}{S_v} \int_0^{b/2} c(y)^2 dy = \frac{1}{1.058} \int_0^{1.362} (1.009 - 0.341y)^2 dy = 0.834 \text{ m}$$

Aerodinamička apscisa vertikalnog repa

$$x_{AV} = b_v \frac{1 + 2\lambda}{6(1 + \lambda)} \tan \Lambda_{LE} = 2.724 \cdot \frac{1 + 2 \cdot 0.540}{6(1 + 0.540)} \cdot 0.700 = 0.429 \text{ m}$$

Profil vertikalnog repa je isti kao horizontalnog repa. Strijela najveće debljine vertikalnog repa je

$$A_t = \arctg\left(\tan A_{LE} - \bar{x}_t \frac{c_r - c_t}{b_v/2}\right) = \arctg\left(\operatorname{tg}35^\circ - 0.3 \frac{1.009 - 0.545}{1.362}\right) = 30.9^\circ$$

Strijela srednje crte vertikalnog repa je

$$\Lambda_m = \arctg\left(\tan \Lambda_{LE} - 0.5 \frac{c_r - c_t}{b_v/2}\right) = \arctg\left(\operatorname{tg}35^\circ - 0.5 \frac{1.009 - 0.545}{1.362}\right) = 27.9^\circ$$

Zrakoplov

$$b = 8.768 \quad \ell_m = 1.72 \text{ m}$$

$$c_0 = 1.941 \text{ m}$$

$$\ell_0 = 1.365 \text{ m}$$

Površina krila sa pod trupnim dijelom

$$S_{ref} = 2 \cdot \frac{c_0 + c_t}{2} \frac{b}{2} = \frac{1.941 + 1.500}{2} \cdot 8.768 = 15.09 \text{ m}^2$$

Za ishodište u vrhu krila

$$x_A = b \frac{1 + 2\lambda}{6(1 + \lambda)} \tan A_{LE} = 8.768 \cdot \frac{1 + 2 \cdot 0.773}{6(1 + 0.773)} \cdot 0.0503 = 0.106 \text{ m}$$

$$c_A = \frac{4}{3} \cdot \frac{S_{ref}}{b} \left[1 - \frac{\lambda}{(\lambda + 1)^2}\right] = \frac{4}{3} \frac{15.09}{8.768} \left[1 - \frac{0.773}{(0.773 + 1)^2}\right] = 1.730 \text{ m}$$

Postavit ćemo ishodište u početak aerodinamičke tetive krila sa pod trupnim dijelom. Prema podacima, to ishodište je udaljeno od vrha letjelice:

$$\ell_A = \ell_0 + x_A = 1.365 + 0.106 = 1.471 \text{ m}$$

$$h_m = \ell_m - \ell_A = 1.708 - 1.471 = 0.237 \text{ m}$$

$$\bar{h}_m = \frac{h_m}{c_A} = \frac{0.237}{1.730} = 0.137$$

Brzina leta $V = 45 \text{ m/s}$.

Vitkost krila s podtrupnim dijelom:

$$AR = \frac{b^2}{S_{ref}} = \frac{8.768^2}{15.09} = 5.09$$

Oswaldov koeficijent inducirano otpora je $e = 0.60$. Njemu odgovara

$$K = \frac{1}{e\pi AR} = \frac{1}{0.60 \cdot \pi \cdot 5.09} = 0.104.$$

4.5.2 Otpor

Krilo

Koeficijent trenja na ploči ovisi o mjestu tranzicije $\bar{\ell}_t$ i o Reynoldsovu broju

$$(c_t)_{ploce} = \frac{1.3}{\sqrt{Re}} \sqrt{\bar{\ell}_t} + \frac{3.91}{(\ln Re)^{2.58}} (1 - \bar{\ell}_t^{0.8})$$

Reynoldsov broj jest

$$Re = \frac{Vc_A}{\nu} = \frac{45 \cdot 1.73}{1.46 \cdot 10^{-5}} = 5.2 \cdot 10^6$$

Sobzirom da je Reynoldsov broj veći od 10^6 smatraćemo da je granični sloj na krilu turbulentan.

$$(c_f)_{ploce} = \frac{3.91}{(\ln 5.2 \cdot 10^6)^{2.58}} = 0.0033$$

Korekcija zbog relativne debljine:

$$F_F = \left(1 + \frac{0.6 \cdot \bar{t}}{\bar{x}_m} + 100 \cdot \bar{t}^4 \right) = \left(1 + \frac{0.6 \cdot 0.15}{0.4} + 100 \cdot 0.15^4 \right) = 1.27$$

Za male vrijednosti Machova broja nije potrebna korekcija za stlačivost ($F_{Ma} = 1$). U tom slučaju je koeficijent otpora profila:

$$c_d(\bar{\ell}_t) = F_F F_{Ma} 2(c_f)_{ploce} = 1.27 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 0.0033 = 0.0084.$$

Odnos koeficijent otpora krila prema koeficijentu otpora profila određen je koeficijentom

$$F_S = (\cos \Lambda_{0.4})^{0.28} = (\cos 0.58^\circ)^{0.28} \approx 1.$$

Konačno dobivamo koeficijent otpora krila za referentnu površinu $S_{ref} = 15.1 \text{ m}^2$:

$$(C_{Df})_W = \frac{S_W}{S_{ref}} \cdot c_d \cdot F_S = \frac{12.85}{15.1} \cdot 0.0084 \cdot 1.0 = 0.0071$$

Tijelo

Reynoldsov broj određujemo za duljinu tijela:

$$Re = \frac{V\ell_B}{\nu} = \frac{45 \cdot 6.54}{1.46 \cdot 10^{-5}} = 20.2 \cdot 10^6$$

Zbog elise pretpostavljamo da je cijeli granični sloj na tijelu turbulentan, te je koeficijent trenja

$$(c_f)_{ploce} = \frac{3.91}{[\ln(Re)]^{2.58}} = \frac{3.91}{[\ln(20.2 \cdot 10^6)]^{2.58}} = 0.00269$$

Ekvivalentni promjer kruga površine maksimalnog presjeka tijela je $d = 1.22 \text{ m}$ pa je vitkost tijela $f = 6.54/1.22 = 5.36$. Toj vitkosti odgovara koeficijent korekcije zbog oblika tijela

$$F_F = 1 + \frac{60}{f^3} + \frac{f}{400} = 1 + \frac{60}{5.36^3} + \frac{5.36}{400} = 1.40$$

Ovaj koeficijent oblika odgovara pravilnom rotacijskom tijelu. Kabina se uglavnom uklapa u oblik, pa treba malo povećati taj koeficijent zbog kabine za 10%, ali zbog oblika poprečnog presjeka koji nije kružan treba povećati taj koeficijent oblika za 30%.

$$F_F = 1.40 \cdot 1.10 \cdot 1.30 = 2.00$$

Kao i za krilo, i ovdje je koeficijent korekcije zbog stlačivosti $F_{Ma} = 1$. Procjena je opstrujavane površine tijela zrakoplova (vidi podatke u prilogu)

$$S_B = 18,63 \text{ m}^2$$

Kao i za krilo, i za tijelo je $Q_B = 1$, pa je otpor trenja tijela:

$$(C_{Df})_B = \frac{S_B}{S_{ref}} (c_f)_{ploca} F_F F_{Ma} = \frac{18.6}{15.1} \cdot 0.0027 \cdot 2.00 \cdot 1 = 0.0066$$

Čelna površina vjetrobrana je $S_{front} = 0.3$. Vjetrobran je dobro uklopljen u tijelo pa je $k = 0.07$. Dodatni valni otpor zbog vjetrobrana procjenjujemo na

$$(C_V)_B = k \frac{S_{front}}{S_{ref}} = 0.07 \frac{0.3}{15.1} = 0.0014$$

Koeficijent tlaka neposredno iza zrakoplova je

$$C_p = 0.139 + 0.419(Ma - 0.161)^2 = 0.139 + 0.419(0.132 - 0.161)^2 = 0.139$$

Površina baze je $S_{base} = \frac{0.3^2 \pi}{4} = 0.071$ pa je koeficijent otpora baze

$$(C_D)_{base} = C_p \frac{S_{base}}{S_{ref}} = 0.139 \frac{0.071}{15.1} = 0.0007$$

Tako procjenjujemo otpor tijela

$$(C_D)_B = (C_f)_B + (C_V)_B + (C_b)_B = 0.0066 + 0.0014 + 0.0007 = 0.0087$$

Horizontalni rep

Profil horizontalnog repa je NACA 0009. Podaci su u prilogu. Reynoldsov je broj na horizontalnom repu:

$$Re = \frac{\sqrt{\eta_h} V c_A}{\nu} = \frac{\sqrt{0.95} \cdot 45 \cdot 0.762}{1.46 \cdot 10^{-5}} = 2,29 \cdot 10^6$$

Pretpostavljamo da je horizontalni rep u cijelosti u turbulentnoj struji jer je njegov Reynoldsov broj veći od 10^6 .

$$(c_f)_{ploce} = \frac{3.91}{(\ln Re)^{2.58}} = \frac{3.91}{[\ln(2.29 \cdot 10^6)]^{2.58}} = 0.0038$$

Korekcija F_F zbog relativne debljine $\bar{t} = 0.09$ na mjestu $\bar{x}_t = 0.30$ je

$$F_F = 1.10 \cdot \left(1 + \frac{0.6 \cdot \bar{t}}{\bar{x}_t} + 100 \cdot \bar{t}^4 \right) = 1.10 \cdot \left(1 + \frac{0.6 \cdot 0.09}{0.30} + 100 \cdot 0.09^4 \right) = 1.30$$

a korekcija zbog stlačivosti također je $F_{Ma} = 1$, te je koeficijent otpora profila horizontalnog repa

$$c_d = 2(c_f)_{ploce} F_{Ma} F_W = 2 \cdot 0.0038 \cdot 1.30 \cdot 1 = 0.0099$$

Odnos koeficijenta otpora horizontalnog repa prema koeficijentu otpora profila je

$$F_S = (\cos A_t)^{0.28} = (\cos 0)^{0.28} = 1.$$

Izložena površina horizontalnog repa je $S_h = 2.08 \text{ m}^2$ te je komponenta otpora horizontalnog repa za referentnu površinu $S_{ref} = 15.1$

$$(C_{Df})_h = \frac{S_h}{S_{ref}} c_d F_S = \frac{2.08}{15.1} 0.0099 \cdot 1 = 0.0014$$

Vertikalni rep

Reynoldsov broj za vertikalni rep je

$$Re = \frac{V c_A}{\nu} = \frac{45 \cdot 0.834}{1.46 \cdot 10^{-5}} = 2.6 \cdot 10^6$$

Vertikalni rep nalazi se u vrtložnoj struji elise, pa je njegov granični sloj turbulentan, a karakteristike profila vertikalnog repa iste su kao za horizontalni rep, pa je koeficijent otpora profila vertikalnog repa isti kao i koeficijent otpora profila horizontalnog repa:

$$c_d = 0.0099$$

Za vertikalni rep je $A_t = 30.9$, pa je odnos koeficijenta otpora vertikalnog repa prema koeficijentu otpora profila vertikalnog repa:

$$F_V = (\cos A_t)^{0.28} = (\cos 30.9)^{0.28} = 0.96$$

$$(C_{Df})_V = \frac{S_V}{S_{ref}} \cdot c_d \cdot F_V = \frac{1.06}{15.1} \cdot 0.0099 \cdot 0.96 = 0.0007$$

Otpor podvoza

Čelna površina jednog kotača je $S_{front} = 0.60 \cdot 0.10 = 0.060 \text{ m}^2$, ali se vidi samo pola čelne površine, a druga polovica je zaklonjena blatobranom čija je čelna površina približno dva puta veća. Zato je $S_{front} = 0.030 + 2 \cdot 0.030 = 0.090 \text{ m}^2$. Čelna površina jedne noge kotača $S_{front=} = 0.30 \cdot 0.05 = 0.015 \text{ m}^2$. U letu su tri noge s kotačima. Zato je otpor podvoza:

$$(C_D)_{kotačo} = 3 \left(k_{kotačo} \frac{S_{front}}{S_{ref}} + k_{noge} \frac{S_{noge}}{S_{ref}} \right) = 3 \cdot \left(0.25 \frac{0.090}{15.1} + 1.2 \frac{0.015}{15.1} \right) = 0.0080$$

Od podvoza uzimamo u obzir samo ovaj valni otpor

Otpor zrakoplova

Konačno zbroj parcijalnih otpora daje multi otpor (bez uzgona) zrakoplova:

$$\begin{aligned} C_{DO} &= (C_D)_W + (C_D)_B + (C_D)_h + (C_D)_V + (C_D)_{podvprz} \\ &= 0.0071 + 0.0087 + 0.0014 + 0.0007 + 0.0080 \\ &= 0.0259 \end{aligned}$$

4.5.3 Normalna sila i momenta propinjanja

Postavit ćemo ishodište na početak aerodinamičke tetive krila.

Krilo

Za izračun gradijenta krila potrebni su nam koeficijent stlačivosti β i koeficijent iskorištenja profila. Pri brzini leta $V = 45 \text{ m/s}$, Machov broj je

$$Ma = \frac{V}{a} = \frac{45}{340} = 0.132$$

te je koeficijent stlačivosti

$$\beta = \sqrt{1 - Ma^2} = \sqrt{1 - 0.132^2} = 0.991$$

Gradijent profila NACA 65₂ - 415 je $c_{t\alpha} = 6.10$, te je za vitkost krila $A = 4.5$. i strijelu

$A_{c/2} = 0$ gradijent uzgona normalne sile krila

$$(C_{L\alpha})_W = \frac{2\pi A}{2 + \sqrt{4 + \left(\frac{2\pi A}{c_{l\alpha}}\right)^2 \left(1 + \frac{\text{tg}^2 \Lambda_{c/2}}{\beta^2}\right)}} = \frac{2\pi \cdot 4.5}{2 + \sqrt{4 + \left(\frac{2\pi \cdot 4.50}{6.10}\right)^2 \left(1 + \frac{0}{0.991^2}\right)}} = 4.01$$

Za određivanje položaja hvatišta sile $(C_{L\alpha})_W \alpha$ trebaju nam parametri

$$\lambda = 0.80$$

$$A\beta = -4.5 \cdot 0.991 = -4.5$$

$$A \cdot \text{tg} \Lambda_m = 4.5 \cdot 0 = 0$$

Prema dijagramu na slici 2-8

$$\bar{h}_c = 0.24$$

Normalna sila kombinacije krilo-tijelo

$$(C_N)_{WB} = (C_{N\alpha})_W \frac{S_W}{S_{ref}} [K_{BW} \alpha + k_{WB} (i_W - \alpha_{0L})]$$

Za odnos

$$\bar{d} = \frac{d_e}{b} = \frac{1.22}{8.77} = 0.139$$

vrijednost koeficijenta interferencije određujemo jednadžbama:

$$K_{BW} = 1 + 3\bar{d} - \lambda\bar{d} \cdot (1 - \bar{d}) = 1 + 3 \cdot 0.139 - 0.80 \cdot 0.139 \cdot (1 - 0.139) = 1.32$$

$$k_{WB} = \left(\frac{1 + 0.41\bar{d}}{1 + \bar{d}}\right)^2 K_{BW} = \left(\frac{1 + 0.41 \cdot 0.139}{1 + 0.139}\right)^2 1.32 = 1.14$$

Kut nultog uzgona profila NACA 65₂ - 415 je $\alpha_{0L} = -3^\circ$. S ovim vrijednostima je ekvivalentni napadni kut krila:

$$\alpha_{ef} = K_{BW} \alpha + k_{WB} (i_W - \alpha_{0L}) = 1.32 \cdot \alpha + 1.14 \cdot \left(i_W - \frac{-3}{57.3}\right)$$

$$\alpha_{ef} = 1.32\alpha + 1.14i_W + 0.060$$

te je konačno koeficijent normalne sile kombinacije krilo-tijelo

$$(C_N)_{WB} = (C_{N\alpha})_W \frac{S_W}{S_{ref}} \alpha_{ef} = 4.01 \cdot \frac{12.85}{15.1} \cdot (1.32 \cdot \alpha + 1.14i_W + 0.060)$$

$$(C_N)_{WB} = 4.50 \cdot \alpha + 3.89i_W + 0.205$$

Spreg profila NACA 65₂ - 415 je $c_{m0} = -0.070$, te je spreg krila sveden na referentnu površinu

$$(C_{m0})_W = (c_{m0})_{pr} \frac{A_W \cos \Lambda_m}{A_W + 2 \cos \Lambda_m} \cdot \frac{S_W}{S_{ref}} = -0.070 \frac{4.5 \cdot 1}{4.5 + 2 \cdot 1} \cdot \frac{12.85}{15.2} = -0.041$$

Koeficijent momenta propinjanja kombinacije krilo-tijelo za središte mase koje je udaljeno \bar{h}_m od aerodinamičkog ishodišta bit će:

$$(C_m)_{BW} = (C_{m0})_W - (C_N)_{BW} (\bar{h}_{CW} - \bar{h}_m) = -0.041 - (4.50\alpha + 3.89 i_w + 0.205) \cdot (0.24 - \bar{h}_m)$$

$$(C_m)_{BW} = -(1.08 - 4.50\bar{h}_m)\alpha - (0.934 - 3.89\bar{h}_m) i_w - 0.090 + 0.205\bar{h}_m$$

Tijelo

Oblik tijela je takav da možemo zanemariti rezultirajuću normalnu silu, ali moramo uzeti u obzir spreg od normalne sile prednjeg i zadnjeg dijela, koji procjenjujemo prema jednadžbi

$$(C_m)_B = \frac{K_f W_f^2 L_f}{c_A S_{ref}} \alpha$$

Za relativni položaj krila na tijelu

$$\frac{\ell_{CW}}{L_f} = \frac{\ell_{0W} + c_A \bar{h}_c}{6.54} = \frac{1.394 + 1.698 \cdot 0.24}{6.54} = 0.28$$

s dijagrama na slici 4-18 dobivamo $K_f = 0.56$, pa je

$$(C_m)_B = \frac{0.56 \cdot 1.17^2 \cdot 6.54}{1.698 \cdot 15.1} \alpha = 0.196 \alpha$$

Savijanje struje

Iza kombinacije rila povijanje struje izračunavamo pomoću jednadžbe

$$\frac{d\varepsilon}{d\alpha} = 4.44 (K_A K_\lambda K_H \sqrt{\cos \Lambda_{1/4}})^{1.19}$$

gdje je

$$K_A = \frac{1}{A} - \frac{1}{1 + A^{1.7}} = \frac{1}{5.09} - \frac{1}{1 + 5.09^{1.7}} = 0.137$$

$$K_\lambda = \frac{10 - 3\lambda}{7} = \frac{10 - 3 \cdot 0.80}{7} = 1.086$$

$$\ell_{ch} - \ell_{cw} = \ell_{0h} + \frac{c_h}{4} - \left(\ell_A + \frac{c_A}{4} \right) = 5.930 + \frac{0.762}{4} - \left(1.486 + \frac{1.698}{4} \right) = 4.210$$

$$K_H = \frac{1 - \frac{h}{b}}{\sqrt[3]{\frac{\ell_{ch} - \ell_{cw}}{b/2}}} = \frac{1 - \frac{0.57}{8.77}}{\sqrt[3]{\frac{4.21}{4.38}}} = 0.947$$

$$\tan \Lambda_{1/4} = \tan \Lambda_{LE} - 0.25 \cdot \frac{c_r - c_t}{b_v/2} = 0.0503 - 0.25 \cdot \frac{1.882 - 1.500}{3.800} = 0.0252$$

$$\Lambda_{1/4} = 1.44^\circ$$

te je

$$\frac{d\varepsilon}{d\alpha} = 4.44 \cdot \left(0.137 \cdot 1.086 \cdot 0.947 \cdot \sqrt{\cos 1.44^\circ} \right)^{1.19} = 0.431$$

Horizontalni rep

Napadni kut na horizontalnom repu je

$$\alpha_h = \alpha - \frac{d\varepsilon}{d\alpha} \alpha_{ef}$$

$$\alpha_h = \alpha - 0.431 (1.32\alpha + 1.14i_w + 0.060)$$

$$\alpha_h = 0.431 \alpha - 0.491 i_w - 0.026$$

Za proračun gradijenta normalne sile po napadnom kutu trebat će nam veličine β :

$$\beta = \sqrt{1 - \eta_h Ma^2} = \sqrt{1 - 0.98 \cdot 0.132^2} = 0.991$$

Za profil NACA 0009 za koji je $c_{l\alpha} = 6.09$, $b_h = 2.68 \text{ m}$, $S_h = 2.04 \text{ m}^2$, $A_h = 3.5$ i $A_{c/2} = 0$

bit će gradijent koeficijenta normalne

$$(C_{N\alpha})_h = \frac{2\pi A_h}{2 + \sqrt{4 + \left(\frac{2\pi A_h}{c_{l\alpha}}\right)^2 \left(1 + \frac{tg^2 \Lambda_{c/2}}{\beta^2}\right)}} = \frac{2\pi \cdot 3.49}{2 + \sqrt{4 + \left(\frac{2\pi \cdot 3.50}{06.09}\right)^2 (1+0)}} = 3.60$$

Hvatište komponente $(C_{N\alpha})_h \alpha$ normalne sile nalazi se na udaljenosti od aerodinamičkog središta

$$h_{c\alpha} = h_{0h} + 0.23 \cdot c_{Ah} = 5.930 - 1.486 + 0.23 \cdot 0.762 = 4.619 \text{ m}$$

$$\bar{h}_{c\alpha} = \frac{h_{ch}}{c_A} = \frac{4.619}{1.698} = 2.720$$

Normalna sila na horizontalnom repu

$$(C_N)_{hB} = \eta_h \eta_{slot} \frac{S_h}{S_{ref}} \left[(C_{N\alpha})_h (K_{BH} \alpha_h + k_{BH} i_h) + (C_{N\delta})_h \delta_m \right]$$

Koeficijenti interferencije za kombinaciju horizontalni rep-tijelo ovisno o odnosu promjera tijela prema rasponu horizontalnog repa dobivamo iz jednadžbi

$$\bar{d} = \frac{d_e}{b} = \frac{0.37}{3.05} = 0.121$$

$$K_{Bh} = 1 + 3\bar{d} - \lambda\bar{d} \cdot (1 - \bar{d}) = 1 + 3 \cdot 0.121 - 1.00 \cdot 0.121 \cdot (1 - 0.121) = 1.26$$

$$k_{WB} = \left(\frac{1 + 0.41\bar{d}}{1 + \bar{d}} \right)^2 K_{BW} = \left(\frac{1 + 0.41 \cdot 0.121}{1 + 0.121} \right)^2 1.26 = 1.10$$

Gradijent normalne sile na horizontalnom repu zbog otklona kormila visine određujemo pomoću jednadžbe

$$(C_{N\delta})_h = 0.9 \cdot \frac{S_\delta}{S_h} \left(\frac{C_{N\alpha}}{c_{\ell\alpha}} \right)_h (C_{\ell\delta})_{prof} \cos \Lambda_{HL} \cdot K_f$$

U subsonici kad je upravljačka površina po cijelom rasponu noseće površine, onda je $\frac{S_\delta}{S_h} = 1$.

Za $\frac{c_\delta}{c} = 0.2$ i $\frac{t}{c} = 0.09$ sa slike 2-14 očitavamo $(C_{\ell\delta})_{prof} = 3.60$, te je

$$(C_{N\delta})_h = 0.9 \cdot 1.0 \cdot \frac{3.60}{6.09} \cdot 3.60 \cdot \cos 0 \cdot K_f = 1.92 \cdot K_f$$

S ovim vrijednostima bit će koeficijent normalne sile kombinacije horizontalni rep - tijelo

$$(C_N)_{hB} = 0.98 \cdot 0.85 \cdot \frac{2.04}{15.1} \{ 3.60 [1.26 (0.431\alpha - 0.491i_w - 0.026) + 1.10i_h] + 1.92 K_f \delta_m \}$$

Sređivanjem dobivamo

$$(C_N)_{hB} = 0.220\alpha - 0.250i_w + 0.446i_h - 0.013 + 0.216 K_f \delta_m$$

Ova sila ima dva dijela. Prvi $0.220\alpha - 0.250i_w + 0.446i_h - 0.013$ od horizontalnog repa bez otklona kormila visine i drugi $0.216 K_f \delta_m$ od otklona kormila visine. Prvi dio ima hvatište u napadnoj točki normalne sile horizontalnog repa $\bar{h}_{c\alpha} = 2.720$. Drugi dio zbog otklona kormila visine, koji nazivamo upravljačka sila, ima napadnu točku na udaljenosti x_δ udaljenost napadne točke od aerodinamičke apscise horizontalnog repa. Budući da je srednja aerodinamička apscisa horizontalnog repa jednaka nuli, udaljenost x_δ je istodobno udaljenost od napadnog ruba horizontalnog repa. Udaljenost $h_{c\delta}$ napadne točke upravljačke sile od aerodinamičkog ishodišta zrakoplova bit će zbroj h_{0h} udaljenosti napadnog ruba horizontalnog repa od aerodinamičkog ishodišta zrakoplova i x_δ udaljenost napadne točke od napadnog ruba horizontalnog repa. Sa slike 3-17 za $\frac{c_\delta}{c} = 0.2$ očitavamo $\frac{x_\delta}{c} = 0.45$. Tako dobivamo hvatište upravljačke sile na udaljenosti od aerodinamičkog ishodišta zrakoplova:

$$\bar{h}_{c\delta} = \frac{h_{0h} + c_h \frac{x_\delta}{c}}{c_A} = \frac{5.930 - 1.486 + 0.762 \cdot 0.450}{1.698} = 2.819$$

Koeficijent moment propinjanja horizontalnog repa za središte mase na udaljenosti h_m od aerodinamičkog središta letjelice ima

$$(C_m)_{hB} = -(0.220 \alpha - 0.250 i_w + 0.446 i_h - 0.013)(2.720 - \bar{h}_m) - 0.216 K_f \delta_m (2.819 - \bar{h}_m).$$

Sređivanjem dobivamo

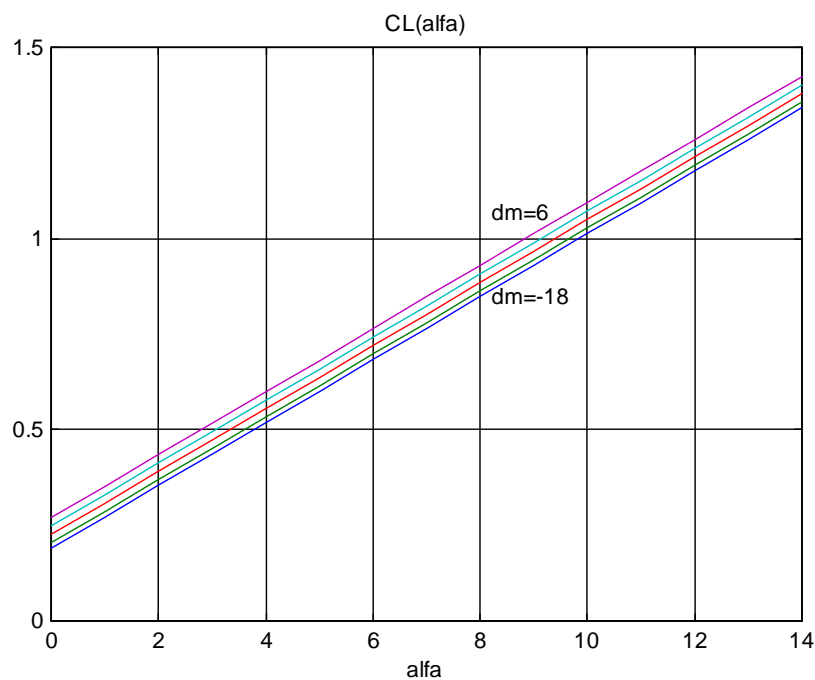
$$(C_m)_{hB} = -(0.598 - 0.220 \bar{h}_m) \alpha - (0.609 - 0.216 \bar{h}_m) K_f \delta_m - \\ + (0.680 - 0.250 \bar{h}_m) i_w - (1.212 - 0.446 \bar{h}_m) i_h + (0.035 - 0.013 \bar{h}_m)$$

Stacionarni koeficijent normalne sile zrakoplova

$$C_N = (C_N)_{WB} + (C_N)_{hB}$$

$$C_N = (4.50 \alpha + 3.89 i_w + 0.205) + (0.220 \alpha - 0.250 i_w + 0.446 i_h - 0.013 + 0.216 K_f \delta_m)$$

$$C_N = 4.72 \alpha + 0.216 K_f \delta_m + 3.64 i_w + 0.446 i_h + 0.192$$



Slika 4-9. $C_L(\alpha, \delta_m)$ za slučaj $i_w = 1^0$ i $i_h = -1^0$

Na disketu u direktoriju *Aerodinamika* nalazi se program pod imenom *CLalfa.m* u MATLAB-u koji crta funkciju $C_L(\alpha, \delta_m)$ za slučaj $i_w = 1^0$ i $i_h = -1^0$ kao na slici 4-9.

Stacionarni koeficijent momenta propinjanja zrakoplova

$$C_m = (C_m)_{WB} + (C_m)_B + (C_m)_{hB}$$

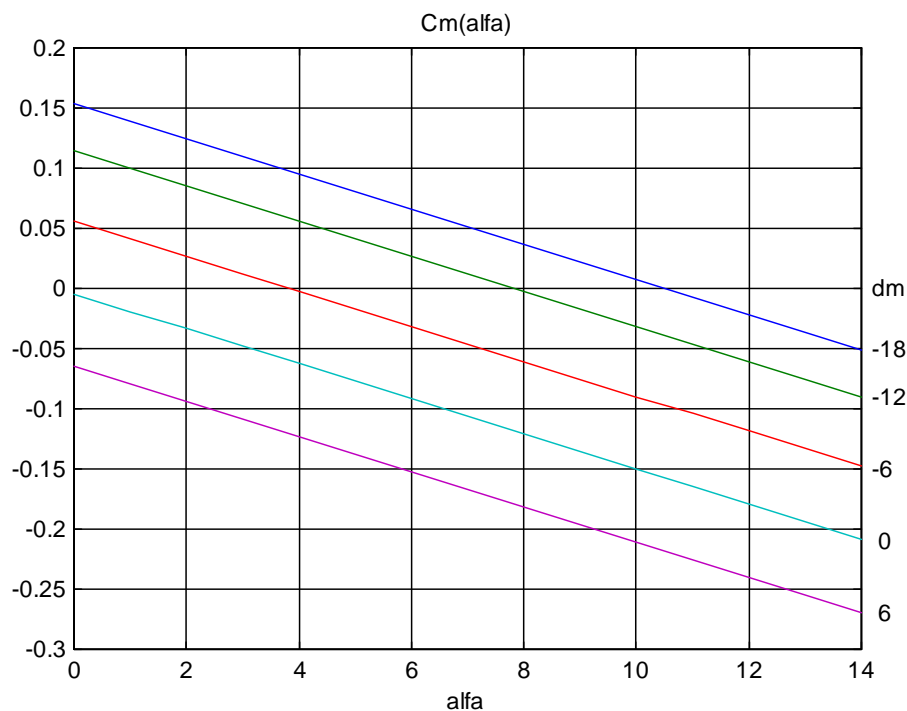
$$C_m = -(1.080 - 4.50 \bar{h}_m) \alpha - (0.934 - 3.89 \bar{h}_m) i_w - 0.090 + 0.205 \bar{h}_m + 0.196 \alpha -$$

$$-(0.598 - 0.220 \bar{h}_m) \alpha - (0.607 - 0.216 \bar{h}_m) K_f \delta_m -$$

$$+ (0.680 - 0.250 \bar{h}_m) i_w - (1.212 - 0.446 \bar{h}_m) i_h + (0.035 - 0.013 \bar{h}_m)$$

$$C_m = -(1.482 - 4.72 \bar{h}_m) \cdot \alpha - (0.607 - 0.216 \bar{h}_m) \cdot K_f \delta_m -$$

$$-(0.254 - 3.640 \bar{h}_m) \cdot i_w - (1.212 - 0.446 \bar{h}_m) \cdot i_h - 0.055 + 0.192 \bar{h}_m$$



Slika 4-10 Ovisnost momenta propinjanja o napadnom kutu i otklonu kormila visine za slučaj

$$\bar{h}_m = 0.137, \text{ te } i_w = 1^0 \text{ i } i_h = -1^0$$

Na disketu u direktoriju *Aerodinamika* nalazi se program koji se zove *Cmalfadelta.m* u MATLAB-u koji crta funkciju $C_m(\alpha, \delta_m)$ za slučaj $\bar{h}_m = 0.137$, $i_w = 1^0$ i $i_h = -1^0$ kao na slici 4-10.

5 POGONSKA SILA I POGONSKI MOMENT

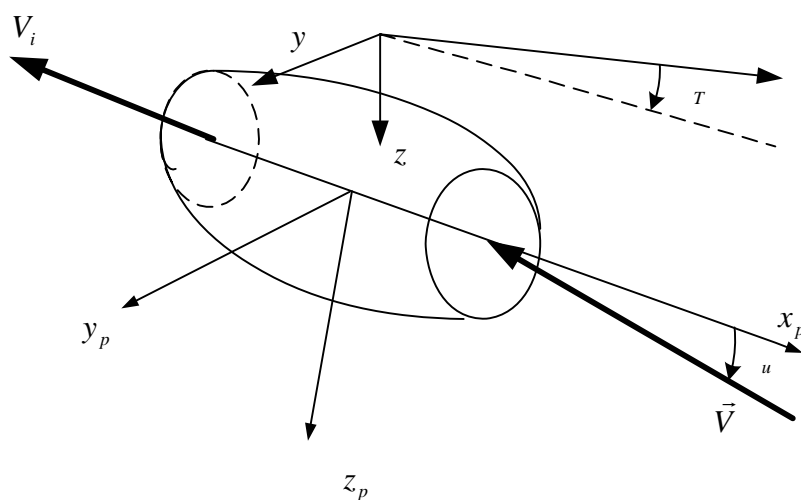
5.1 Pogonska sila i moment mlaznog motora

Za određivanje pogonske sile i pogonskog momenta mlaznog motora koristit ćemo teoriju gibanja tijela promjenjive mase prema Gantmaheru (lit 3 i 7).

Vanjska površina kućišta motora, na kojoj se nalazi ulazna površina usisnika S_u i izlazna površina mlaznice motora S_i , čini *kontrolnu površinu*. Neka je $x_p y_p z_p$ k.s. motora i neka je njegova y_p os paralelna sa y os zrakoplova. Drugim riječima k.s. motora $x_p y_p z_p$ okrenut je za kut α_r oko osi y u odnosu na k.s. zrakoplova (vidi sliku 1). Ulazna površina S_u okomita je na brzinu ulaza \vec{V}_u , a izlazna površina S_i okomita na os x motora, duž koje je izlazna brzina \vec{V}_i .

5.1.1 Napadni kut i kut klizanja motora

Za analizu pogonske sile i pogonskog momenta potreban je kut α_u dolazeće struje u odnosu na koordinatni sustav motora $x_p y_p z_p$. Bočno savijanje struje je malo. Osim toga, bočno savijanje struje na lijevoj strani suprotno je od savijanja na desnoj strani u odnosu na ravninu simetrije letjelice, te se efekti poništavaju. Zato obično zanemarujemo bočno savijanje struje i uzimamo da je $\beta_u = \beta$.



Slika 1

Napadni kut aerodinamičke brzine na ulazu u mlazni motor α_u umanjen je za savijanje struje zraka ε_u i još za kut zakretanja motora α_T :

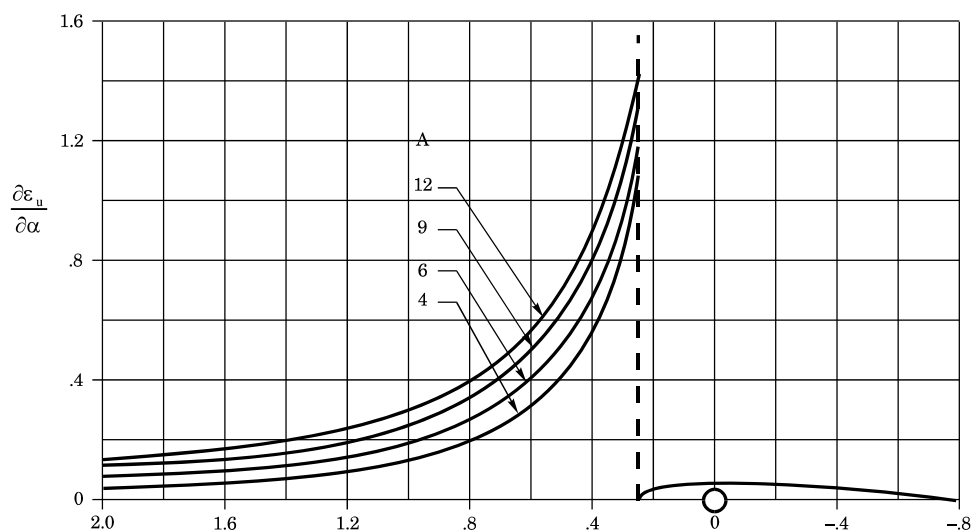
$$\alpha_u = \alpha - \varepsilon_u - \alpha_T$$

Koliko je to savijanje ε_u u ravnini simetrije, mnogo ovisi o konfiguraciji zrakoplova. Ako je to zrakoplov koji ima pogon na prednjem dijelu trupa, onda nema savijanja zračne struje ($\varepsilon_u = 0$). Obrnuto ako su motori postavljeni na krilu, savijanje ispred krila ε_u ne treba zanemariti. Uzimamo da je savijanje proporcionalno napadnom kutu struje:

$$\varepsilon_u = \frac{\partial \varepsilon_u}{\partial \alpha} \alpha$$

Uz tu pretpostavku dobivamo kut dolazeće struje:

$$\alpha_u = \alpha - \varepsilon_u - \alpha_T = \left(1 - \frac{\partial \varepsilon_u}{\partial \alpha}\right) \alpha - \alpha_T$$



Slika 2.

Na slici 2 prikazan je dijagram koji omogućuje procjenu gradijenta savijanja struje u slučaju motora postavljenog na krilima, za razne vitkosti krila A u ovisnosti o udaljenosti u tetivama ulazne površine od točke na prvoj četvrtini tetive.

5.1.2 Komponente pogonske sile

Prema teoriji mehanike tijela promjenljive mase (lit.3 ili 7) pogonska sila motora je

$$\vec{F}_p = -\vec{k}_r - \frac{d_r \vec{Q}_r}{dt} - 2\vec{\Omega}_F \times (\vec{V}_C)_r m,$$

gdje je

$$\vec{k}_r = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{Q}_{ri} - \Delta \vec{Q}_{ru}}{\Delta t}.$$

Primijenit ćemo ih na mlazni motor zrakoplova. Ako je rad motora stacionaran, onda je derivacija količine relativnog gibanja u motoru jednaka nuli:

$$\frac{d_r \vec{Q}_r}{dt} = 0$$

Relativna brzina promjene položaja središta mase letjelice $(\vec{V}_C)_r$ mala je pa je zanemarujemo:

$$(\vec{V}_C)_r \approx 0$$

U tom slučaju gornja opća formula u slučaju koji nas zanima daje jednadžbu pogonske sile:

$$\vec{F}_p = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{Q}_{ru} - \Delta \vec{Q}_{ri}}{\Delta t} \quad 5.1$$

Kroz dio kontrolne površine S_u , tijekom vremena Δt ulazi masa $(\vec{V}_u \Delta t \vec{S}_u \rho_u)$. Ta masa je uvijek pozitivna pa treba uzeti apsolutnu vrijednost ovog skalarnog produkta.

Relativna količina gibanja zraka bit će $\Delta \vec{Q}_{ru} = \vec{V}_u |\vec{V}_u \Delta t \vec{S}_u \rho_u|$.

U istom vremenu Δt kroz izlaznu površinu S_i motora izlazi masa $\vec{V}_i \Delta t \vec{S}_i \rho_i$ koja je također uvijek pozitivna, pa treba i tu uzeti apsolutnu vrijednost. Količina gibanja produkta izgaranja bit će $\Delta \vec{Q}_{ri} = \vec{V}_i |\vec{V}_i \Delta t \vec{S}_i \rho_i|$, gdje je ρ_i specifična masa produkta izgaranja na izlazu iz motora. U tim uvjetima lako se nalaze limesi u jednadžbi:

$$\vec{F}_p = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{Q}_{ru} - \Delta \vec{Q}_{ri}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{V}_u |\vec{V}_u \cdot \vec{S}_u| \rho_u \Delta t}{\Delta t} - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{V}_i |\vec{V}_i \cdot \vec{S}_i| \rho_i \Delta t}{\Delta t},$$

pa je pogonska sila mlaznog motora:

$$\vec{F}_p = \vec{V}_u |\vec{V}_u \cdot \vec{S}_u| \rho_u - \vec{V}_i |\vec{V}_i \cdot \vec{S}_i| \rho_i.$$

Brzina zraka na usisniku \vec{V}_u ima komponente u koordinatnom sustavu pogona $x_p y_p z_p$:

$$\mathbf{V}_u^p = [-V \cos \alpha_u \quad 0 \quad -V \sin \alpha_u]^T,$$

Kako je kut α_u uvijek mali,

$$\mathbf{V}_u^p = [-V \quad 0 \quad -V \alpha_u]^T.$$

Vektor \vec{S}_u je okomit na osi x_p i usmjeren prema van. Zato je

$$\mathbf{S}_u^p = [S_u \quad 0 \quad 0]^T.$$

S tim vrijednostima u koordinatnom sustavu x_p, y_p, z_p nalazimo da je skalarni produkt:

$$|\vec{V}_u \cdot \vec{S}_u| = |\mathbf{V}_u^p \cdot \mathbf{S}_u^p| = VS_u$$

Brzina istjecanja produkta izgaranja \vec{V}_i ima intenzitet U u pravcu osi mlaznice motora (okomito na izlaznu površinu), te je

$$\mathbf{V}_i^p = [-U \quad 0 \quad 0]^T,$$

jer je smjer istjecanja suprotan smjeru osi x_p . Isto tako vektor izlazne površine \vec{S}_i je u pravcu osi x_p , ali suprotnog smjera $\mathbf{S}_i^p = [-S_i \quad 0 \quad 0]^T$. Tako je skalarni produkt:

$$|\vec{V}_i \cdot \vec{S}_i| = |\mathbf{V}_i^p \mathbf{S}_i^p| = US_i$$

S tim skalarnim produktima bit će vektorska jednadžba pogonske sile:

$$\vec{F}_p = \vec{V}_u (VS_u) \rho_u - \vec{V}_i (US_i) \rho_i,$$

ili njen matricni oblik

$$\mathbf{F}^p = \mathbf{V}_u^p (VS_u \rho_u) - \mathbf{V}_i^p (US_i \rho_i).$$

Komponente pogonske sile u koordinatnom sustavu mlaznog motora x_p, y_p, z_p lako nalazimo jer su nam sve veličine poznate:

$$\begin{bmatrix} F_X^p \\ F_Y^p \\ F_Z^p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -V \\ 0 \\ -V\alpha_u \end{bmatrix} (VS_u \rho_u) - \begin{bmatrix} -U \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (US_i \rho_i) = \begin{bmatrix} -V^2 S_u \rho_u + U^2 S_i \rho_i \\ 0 \\ -V^2 S_u \rho_u \alpha_u \end{bmatrix}.$$

Uvedimo oznake:

$$F_{pi} = U^2 S_i \rho_i$$

$$F_{pu} = V^2 S_u \rho_u$$

Uz te oznake bit će komponente pogonske sile duž osi pogonske grupe:

$$F_X = F_{pi} - F_{pu}$$

$$F_Y = 0$$

$$F_Z = -F_{pu} \alpha_u$$

Komponenta duž ose motora F_X predstavlja pogonsku silu motora. Ona se obično označava sa T .

$$T = U^2 S_i \rho_i - V^2 S_u \rho_u.$$

Pored te aksijalne sile pojavljuje se i normalna komponenta u ravni simetrije okomitoj na ulaz u motor koja je proporcionalna ulaznom kutu

$$F_Z \approx -F_{pu} \alpha_u$$

U koordinatnom sustavu letjelice vektor pogonske sile bio bi

$$R^F = \mathbf{L}_y(\alpha_T) \begin{bmatrix} T \\ 0 \\ -F_{pu} \alpha_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T \cos \alpha_T + F_{pu} \alpha_u \sin \alpha_T \\ 0 \\ T \sin \alpha_T - F_{pu} \alpha_u \cos \alpha_T \end{bmatrix}.$$

5.1.3 Komponente pogonskog momenta

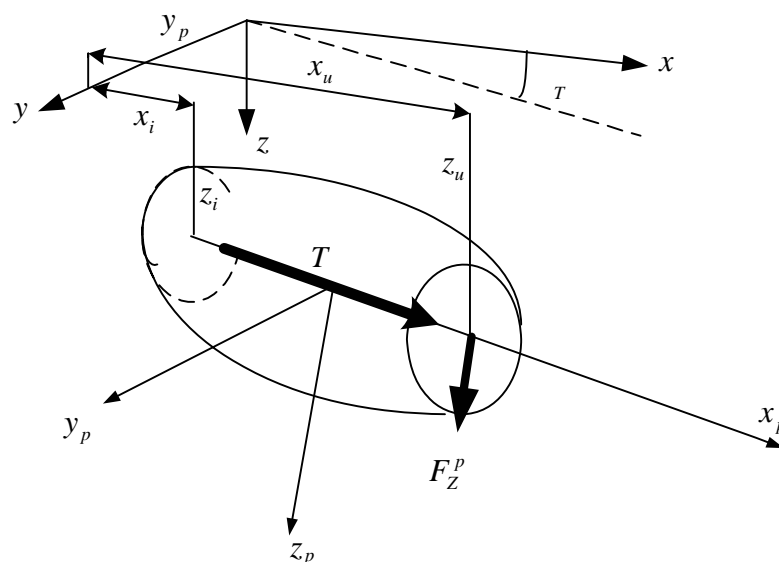
Hvatište komponente sile $F_{pu} \alpha_u$ uzimamo u središtu ulaza

$$\mathbf{r}_u = [x_u \quad y_u \quad z_u]^T,$$

a hvatište aksijalne sile određujemo kao hvatište rezultate od dviju komponenata aksijalne sile:

$$U^2 S_i \rho_i \text{ s hvatištem u središtu izlaza } \mathbf{r}_i = [x_i \quad y_i \quad z_i]^T \text{ i}$$

$$V^2 S_i \rho_i \text{ s hvatištem u središtu ulaza } \mathbf{r}_u = [x_u \quad y_u \quad z_u]^T.$$



Slika 5-3

pa su koordinate hvatišta pogonske komponente T

$$x_T = \frac{x_i \cdot U^2 S_i \rho_i - x_u \cdot V^2 S_u \rho_u}{U^2 S_i \rho_i - V^2 S_u \rho_u}$$

$$y_T = \frac{y_i \cdot U^2 S_i \rho_i - y_u \cdot V^2 S_u \rho_u}{U^2 S_i \rho_i - V^2 S_u \rho_u}$$

$$z_T = \frac{z_i \cdot U^2 S_i \rho_i - z_u \cdot V^2 S_u \rho_u}{U^2 S_i \rho_i - V^2 S_u \rho_u}.$$

U k.s. letjelice vektor položaja hvatišta aksijalne sile označavamo sa:

$$\mathbf{r}_T = [x_T \quad y_T \quad z_T]^T.$$

Uz te oznake bit će komponente momenta pogonske sile u k.s. letjelice

$$\mathbf{M}_C^F = \tilde{\mathbf{r}}_T \mathbf{L}_{FP} \begin{bmatrix} T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \tilde{\mathbf{r}}_u \mathbf{L}_{FP} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -F_{pu} \alpha_u \end{bmatrix}.$$

Velika je razlika u intenzitetu aksijalne komponente T i bočne komponente $\alpha_u F_{pu}$, te ovu drugu možemo smatrati malom veličinom u odnosu na aksijalnu komponentu. Postavni kut motora α_T obično je isto mali kut, pa je opravdano izjednačiti bočnu komponentu u k.s. motora i letjelice.

$$\mathbf{L}_{FP} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -F_{pu} \alpha_u \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -F_{pu} \alpha_u \end{bmatrix}$$

pa gornja jednadžba 6.78 ima oblik:

$$\mathbf{M}_C^F = \tilde{\mathbf{r}}_T \mathbf{L}_{FP} \begin{bmatrix} T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \tilde{\mathbf{r}}_u \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -F_{pu} \alpha_u \end{bmatrix}$$

Kako je $\mathbf{L}_{FP} = \mathbf{L}_y(\alpha_T)$ bit će komponente pogonskog momenta jednog motora u k.s. letjelice:

$$\begin{bmatrix} L^F \\ M^F \\ N^F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -z_T & y_T \\ z_T & 0 & -x_T \\ -y_T & x_T & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \alpha_T & 0 & -\sin \alpha_T \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha_T & 0 & \cos \alpha_T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -z_u & y_u \\ z_u & 0 & -x_u \\ -y_u & x_u & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -F_{pu} \alpha_u \end{bmatrix}$$

Množenjem dobivamo:

$$\mathbf{M}_C^F = \begin{bmatrix} L^F \\ M^F \\ N^F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_T T \sin \alpha_T \\ z_T T \cos \alpha_T - x_T T \sin \alpha_T \\ -y_T T \cos \alpha_T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -y_u F_{pu} \alpha_u \\ (\ell_m - \ell_u) F_{pu} \alpha_u \\ 0 \end{bmatrix}.$$

U ovim jednadžbama treba uočiti nekoliko činjenica.

- Prvo, normalna komponenta pogonske sile $\alpha_u F_{pu}$ znatno je manja od aksijalne komponente pogonske sile T , pa su i momenti koje ona stvara isto tako znatno manji od momenata aksijalne sile.
- Drugo, ako postoji jedan središnji motor, onda je za njega $y_T = y_u = 0$. Tada postoji samo komponenta M^F pogonskog momenta :

$$\begin{bmatrix} L^F \\ M^F \\ N^F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ z_T T \cos \alpha_T - x_T T \sin \alpha_T \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ x_u F_{pu} \alpha_u \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- Treće, u slučaju više motora, uvijek za par motora članovi koji sadrže y_T i y_u se krate, jer je za jedan motor pozitivno, a za drugi negativno. To znači da kao u slučaju za jedan centralni motor postojat će samo komponenta M^F . S obzirom da je pogonska sila T svakog motora ista a i koordinate x_T, z_T su također iste bit će za N motora ($N=2$ ili 4)

$$\begin{aligned} M^F &= N \cdot (z_T T \cos \alpha_T - x_T T \sin \alpha_T + x_u F_{pu} \alpha_u) \\ &= z_T (N \cdot T) \cos \alpha_T - x_T (N \cdot T) \sin \alpha_T + x_u (N \cdot F_{pu}) \alpha_u \end{aligned}$$

NT je ukupna pogonska sila. Drugim riječima pogonski moment propinjanja je isti kao za jedan centralni motor koji ima pogonsku silu zbroj svih motora.

- Četvrto, ako je u paru otkazao jedan motor, onda postoji komponenta oko osi z

$$N^F = -y_T T \cos \alpha_T$$

- Peto, pogonski moment propinjanja M^F

$$M^F = z_T T \cos \alpha_T - x_T T \sin \alpha_T + x_u F_{pu} \alpha_u$$

linearna je funkcija po napadnom kutu, jer je ulazni kut

$$\alpha_u = \alpha - \varepsilon_u - \alpha_T = \left(1 - \frac{\partial \varepsilon_u}{\partial \alpha}\right) \alpha - \alpha_T,$$

pa je

$$M^F = z_T T \cos \alpha_T - x_T T \sin \alpha_T + x_u F_{pu} \left[\left(1 - \frac{\partial \varepsilon_u}{\partial \alpha}\right) \alpha - \alpha_T \right],$$

što znači da je

$$M^F = M_0^F + M_\alpha^F \alpha$$

gdje su:

$$M_0^F = z_T T \cos \alpha_T - x_T T \sin \alpha_T - x_u F_{pu} \alpha_T$$

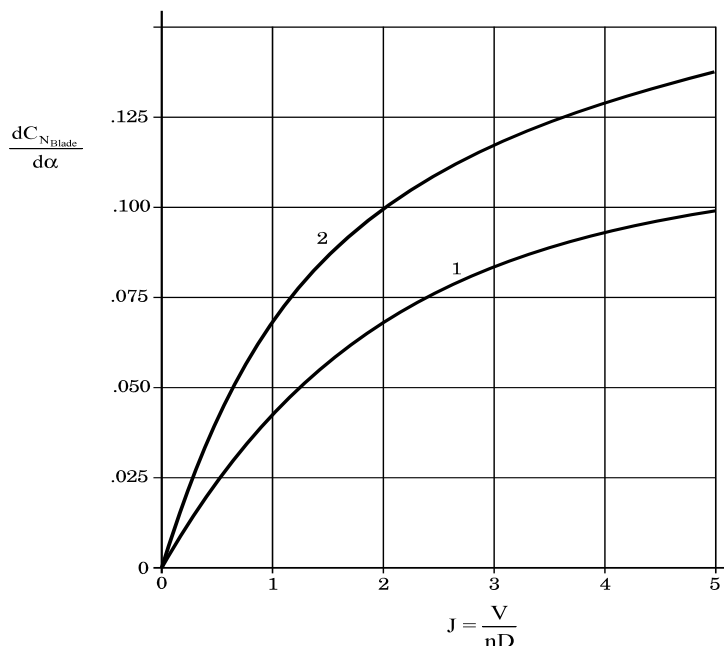
$$M_\alpha^F = x_u F_{pu} \left(1 - \frac{\partial \varepsilon_u}{\partial \alpha} \right).$$

5.2 Pogonska sila i moment elisnog motora

5.2.1 Komponenta pogonske sile u ravnini diska elise

Kad pogonsku silu u pravcu T realiziramo u pravcu ose rotacije elise, postoji i komponenta sile u ravnini diska elise $F_{p\sigma}$, koja je proporcionalna kutu σ između dolazeće zračne struje i osi rotacije elise. Taj koeficijent proporcionalnosti $F_{p\sigma}$ može se teoretski odrediti pomoću teorije vrtloga a može se procijeniti na temelju eksperimentalnih mjerenja:

$$F_{p\sigma} = \frac{\rho V^2}{2} N_B S_p \frac{\partial C_{N \text{ blade}}}{\partial \alpha} f(T),$$



Slika 5-4 Krivulja 1 za obične elise, krivulja 2 za široke elise tipa *turbomlazni*

gdje su:

S_p površina diska elise,

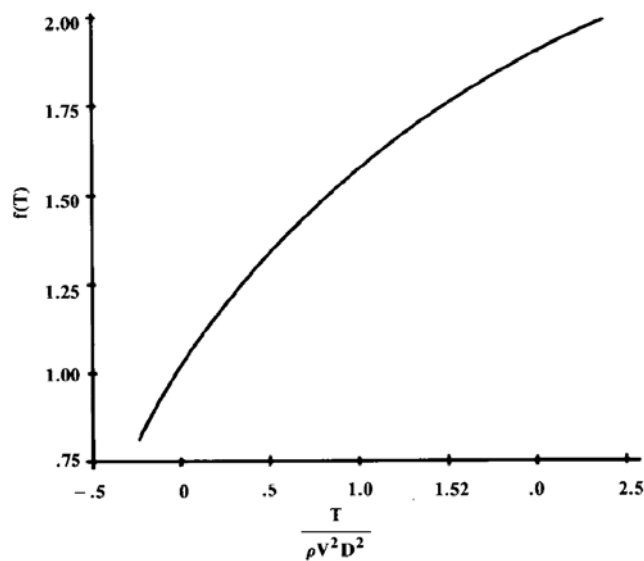
N_B broj ploštica u elisi,

$\frac{\partial C_{N blade}}{\partial \alpha}$ gradijent ploštice elise prema dijagramu na slici 5-4, na kome je bezdimenzijski korak $J = \frac{V}{nD}$; n broj okretaja elise u sekundi, a D promjer diska elise, a $f(T)$ funkcija pogonske sile elise prema dijagramu na slici 5-5.

Ako aerodinamička brzina na ulazu u disk elise ima napadni kut α_p , a osa rotacije elise je pod kutom α_T u odnosu na os letjelice, i postojati i povijanje struje ispred elise (npr. u slučaju potisne elise), u tom je slučaju kut struje u odnosu na osu rotacije elise:

$$\alpha_p = \alpha - \varepsilon_u - \alpha_T .$$

Ovaj kut stvara silu okomitu na os rotacije elise, tj. u ravnini diska koja je u presjeku ravni simetrije letjelice i diska elise: $-F_{p\sigma} \alpha_p$.



Slika 5-5

Prema tome, komponente pogonske sile u slučaju elisnog motora duž osi tromosti zrakoplova jesu :

$$R^F = \mathbf{L}_y(\alpha_T) \begin{bmatrix} T \\ 0 \\ -F_{p\sigma} \alpha_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T \cos \alpha_T + F_{p\sigma} \alpha_p \sin \alpha_T \\ 0 \\ T \sin \alpha_T - F_{p\sigma} \alpha_p \cos \alpha_T \end{bmatrix} .$$

Uočimo da je to potpuno isti oblik jednadžba kao i kod mlaznog motora. Razlika je što je kod mlaznog motora $F_{pu} = V^2 S_u \rho_u$, a ovdje je $F_{p\sigma}$ određeno gornjom jednadžbom. S obzirom na

malu veličinu te sile u odnosu na T , uz uobičajeno mali postavni kut motora α_T uzimamo da je duž osi z letjelice:

$$F_z = -F_{p\sigma}\alpha_p$$

5.2.2 Komponente pogonskog momenta elise

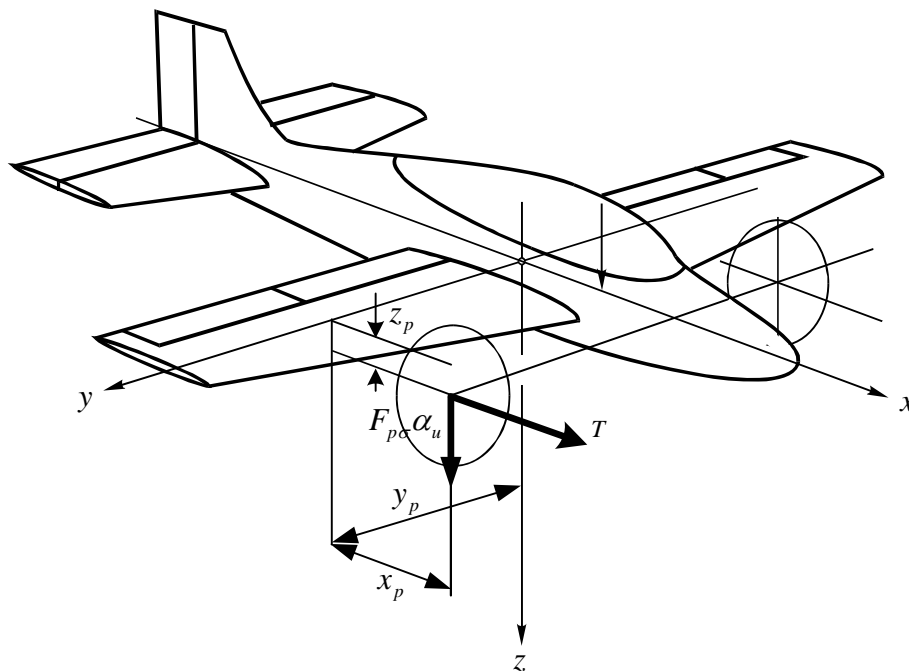
Kako uslijed nesimetričnog optjecanja elise pod napadnim kutom dolazi do pojave normalne sile $F_{p\sigma}\alpha_p$ tako dolazi i do pojave momenta skretanja. Taj moment skretanja je negativan (za desno rotirajuće elise – za propelere kojima je vektor kutna brzina rotacije usmjeren u pozitivnom smjeru osi x) i proporcionalan je napadnom kutu α_p . Izračun iznosa te komponente momenta moguć je primjenom teorije elementarnog kraka ili teorije vrloga no to predstavlja analizu koja nije predmet ovog teksta. Pretpostavit ćemo iznos momenta skretanja elise oblika $-M_{p\sigma}\alpha_p$. Adekvatno tome, s pojavom kuta klizanja β_p na propeleru pored bočne sile $-F_{p\sigma}\beta_p$ nastaje i moment propinjanja koji je negativan i proporcionalan kutu klizanja $-M_{p\sigma}\beta_p$. Za rotaciju elise potreban je okretni moment Q (pozitivan moment oko osi x) kojeg generira motor, a motor opterećuje konstrukciju letjelice sa istim momentom suprotnog smjera (negativan moment). Za simetrično optjecanje elise, odnosno za $\beta_p = \beta = 0$, ukupni moment od elise i motora na letjelicu, u koordinatnom sustavu vezanom za elisu bio:

$$-\begin{bmatrix} Q \\ M_{p\sigma}\beta_p \\ M_{p\sigma}\alpha_p \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} Q \\ 0 \\ M_{p\sigma}\alpha_p \end{bmatrix}.$$

Te komponente pogonske sile stvaraju momente oko središta mase. Neka su, kao na slici 6,

$$x_T \quad y_T \quad z_T$$

koordinate središta diska elise u k.s. letjelice koje čine vektor položaja \mathbf{r}_T .



Slika 6. Koordinate elisnog pogona

Komponente pogonske sile u k.s. letjelice dobivamo poslije transformacije zbog zaokrenutog koordinatnog sustava pogona za kut α_T

$$\mathbf{M}_C^F = \tilde{\mathbf{r}}_T \mathbf{L}_{FP} \begin{bmatrix} T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \tilde{\mathbf{r}}_T \mathbf{L}_{FP} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -F_{p\sigma} \alpha_u \end{bmatrix} - \mathbf{L}_{FP} \begin{bmatrix} Q \\ 0 \\ M_{p\sigma} \alpha_p \end{bmatrix}.$$

Kao i u slučaju mlaznih motora poprečna komponenta $\alpha_u F_{pu}$ je mala u odnosu na aksijalnu komponentu T , te je smatramo malom veličinom u odnosu na T . Postavni kut motora α_T isto je mala veličina, pa zanemarujući male veličine drugog reda bit će:

$$\mathbf{M}_C^F = \tilde{\mathbf{r}}_T \mathbf{L}_{FP} \begin{bmatrix} T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \tilde{\mathbf{r}}_T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -F_{p\sigma} \alpha_p \end{bmatrix} - \mathbf{L}_{FP} \begin{bmatrix} Q \\ 0 \\ M_{p\sigma} \alpha_p \end{bmatrix}.$$

odakle je

$$\begin{bmatrix} L^F \\ M^F \\ N^F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_T T \sin \alpha_T \\ z_T T \cos \alpha_T - x_T T \sin \alpha_T \\ -y_T T \cos \alpha_T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -y_T F_{p\sigma} \alpha_p \\ x_T F_{p\sigma} \alpha_p \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Q \cos \alpha_T - M_{p\sigma} \alpha_p \sin \alpha_T \\ 0 \\ Q \sin \alpha_T + M_{p\sigma} \alpha_p \cos \alpha_T \end{bmatrix}$$

Kao i u slučaju mlaznog motora i ovdje imamo iste važne napomene:

- Ako postoji samo jedna središnja elisa, onda je $y_T = 0$, pa nestaju članovi sa y_T , a ako je više elisa, onda treba zbrojiti komponente svih elisa. Tada će se članovi sa y_T skratiti jer elisi s desne strane odgovara ista s lijeve strane:

$$M^F = z_T T \cos \alpha_T - x_T (T \sin \alpha_T - F_{p\sigma} \alpha_p)$$

- U slučaju otkaza jednog motora pojavljuje se komponenta N^F koja je vrlo snažna:

$$N^F = -y_T T \cos \alpha_T.$$

- Moment propinjanja je linearna funkcija napadnog kuta

$$M^F = M_0^F + M_\alpha^F \alpha,$$

gdje je

$$M_0^F = z_T T \cos \alpha_T - x_T (T \sin \alpha_T + F_{p\sigma} \alpha_T)$$

$$M_\alpha^F = x_T F_{p\sigma} \left(1 - \frac{\partial \varepsilon_u}{\partial \alpha} \right).$$

jer je $\alpha_p = \alpha - \varepsilon_u - \alpha_T$.

5.2.3 Primjer

Za mali putnički zrakoplov iz odjeljka 5 odrediti normalnu komponentu i moment propinjanja pogonske sile, ako je $\alpha_T = 4.5^\circ$. Brzina leta je 45 m/s na visini 2000m.

Za korak elise

$$J = \frac{V}{nD} = \frac{45}{40 \cdot 1.88} = 0.60$$

gradijent ploščice elise je

$$\frac{\partial C_{N \text{ blade}}}{\partial \alpha} = 0.030$$

a za bezdimenzijsku pogonsku silu koja je jednaka otporu zrakoplova

$$T^* = \frac{T}{\rho V^2 D^2} = \frac{1}{2} \frac{S_{ref} (C_{D0} + K C_L^2)}{D^2} = \frac{15.1 \cdot (0.0259 + 0.104 \cdot 0.694^2)}{2 \cdot 1.88^2} = 0.162$$

Pri tome je u horizontalnom letu sila uzgona jednaka težini letjelice te je koeficijent sile uzgona

$$C_L = \frac{2mg}{\rho V^2 S} = \frac{2 \cdot 1088 \cdot 9.81}{1.0066 \cdot 45^2 \cdot 15.1} = 0.694.$$

S tim vrijednostima je gradijent normalne sile

$$\frac{F_{p\sigma}}{q_\infty S_{ref}} = N_B \frac{S_p}{S_{ref}} \frac{\partial C_{N \text{ blade}}}{\partial \alpha} f(T^*) = 2 \frac{(1.88/2)^2 \pi}{15.1} \cdot 0.030 \cdot 1.15 = 0.0127$$

Ispred elise nema savijanja struje ($\alpha_p = \alpha - \alpha_T$) te je s ovim gradijentom normalna komponenta pogonske sile:

$$-\frac{F_{p\sigma}\alpha_p}{q_\infty S_{ref}} = -\frac{F_{p\sigma}}{q_\infty S_{ref}}(\alpha - \alpha_T) = -0.0127 \cdot (\alpha - 0.0785) = 0.0010 - 0.0127 \cdot \alpha$$

Moment propinjanja od elise bit će:

$$M^F = z_p T \cos \alpha_T - (\ell_m - \ell_p)(T \sin \alpha_T - F_{p\sigma} \alpha_p).$$

Os motora prolazi kroz središte mase te je $z_p = 0$, pa će komponenta propinjanja pogonskog momenta biti:

$$M^F = -(\ell_m - \ell_p)[T \sin \alpha_T - F_{p\sigma}(\alpha - \alpha_T)].$$

ili

$$\begin{aligned} \frac{M^F}{q_\infty S_{ref} c_A} &= \frac{(\ell_m - \ell_p)}{c_A} \left[-(C_{D0} + K \cdot C_L^2) \cdot \sin \alpha_T + \frac{F_{p\sigma}}{q_\infty S_{ref}} (\alpha - \alpha_T) \right] \\ \frac{M^F}{q_\infty S_{ref} c_A} &= \frac{(\ell_A + h_m - \ell_p)}{c_A} \left[-(0.0259 + 0.104 \cdot 0.694^2) \cdot 0.0785 + 0.0127 \cdot (\alpha - 0.0785) \right] \\ \frac{M^F}{q_\infty S_{ref} c_A} &= \left(\frac{1.471}{1.73} + \bar{h}_m - 0 \right) [0.0127\alpha - 0.0068] = \\ &= (0.0108 + 0.0127\bar{h}_m) \cdot \alpha - (0.0059 + 0.0070\bar{h}_m) \end{aligned}$$

6 RAVNOTEŽNI LET

Zrakoplovi imaju tzv. polarno upravljanje. Trebaju li u nekoj ravnini učiniti zaokret, a to znači promijeniti pravac brzine u toj ravnini, oni to ostvaruju vektorskom razlikom sile uzgona i težine, tj. jedan dio sile uzgona služi za kompenzaciju težine, a drugi za promjenu pravca vektora brzine. Zato se zrakoplovi moraju zavaljati da bi postavili silu uzgona tamo gdje treba, a istodobno povećali silu uzgona koliko treba. Odatle slijedi da je problem *upravljivosti* pitanje veličine sile uzgona koju zrakoplov može ostvariti. Kao mjera upravljivosti može se upotrebljavati ili maksimalna sila uzgona ili prirast sile uzgona za jedinični prirast otklona kormila visine.

6.1 Definicija ravnotežnog leta

Ravnotežni let (ili istrimana letjelica, kako se često govori), znači da su momenti koji djeluju oko središta mase letjelice u ravnoteži, tj. da je rezultirajući moment jednak nuli. U tom slučaju letjelica se neće okretati, ili ako ima neku kutnu brzinu neće je mijenjati, jer moment za središte mase mijenja kutnu brzinu. U većini slučajeva let transportnih zrakoplova odvija se u ovim uvjetima ili vrlo blisko njima. Prema tome, možemo reći da u ravnotežnom letu, ukupni moment propinjanja koji je jednak zbroju aerodinamičkog i pogonskog momenta propinjanja, taj zbroj mora biti jednak nuli.

$$M = 0$$

6.2 Ravnotežni napadni kut

Kad nema bočnog vjetrova na zrakoplov u letu djeluje ukupni moment propinjanja i ukupna sila uzgona. Oba vektora lineariziramo po napadnom kutu i otklonu kormila visine

$$L = L^A + L^F = L_0 + L_\alpha \alpha + L_\delta \delta_m$$

$$M = M^A + M^F = M_0 + M_\alpha \alpha + M_{\delta_m} \delta_m$$

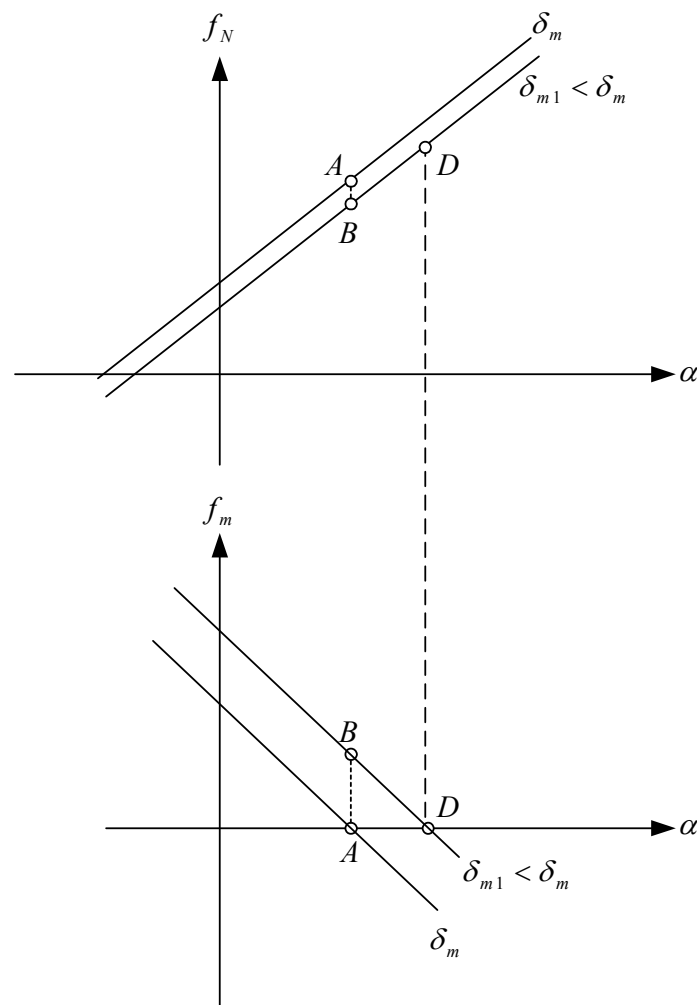
To su dvije familije krivulja, koje su prikazane na slici 1. Na toj slici položaji krivulja odgovaraju normalnoj shemi zrakoplova. Ovisnost sile uzgona $L = f_L(\alpha, \delta_m)$ o napadnom kutu obično je funkcija bliska pravcu, a njihova međusobna udaljenost za različite otklone δ_m ovisi o veličini upravljačkih površina. U slučaju subsoničnih zrakoplova, kada su kormila visine samo dio horizontalnog repa, ti pravci vrlo bliski te se često zamjenjuju jednim pravcem. Nasuprot tomu, krivulje momenta propinjanja $M = f_m(\alpha, \delta_m)$ za različite otklone

kormila visine δ_m uvijek su razmaknute. Za normalne zrakoplovne sheme te krivulje su približno linearne, a za konfiguracije tipa *canard* vrlo su nelinearne po napadnom kutu.

Pretpostavimo da letimo s otklonom δ_m u ravnotežnom letu. Na donjem dijagramu slike 7-1 točka A predstavlja stanje u letu jer po definiciji u ravnotežnom letu moment propinjanja M_A je nula, a točka A se nalazi na krivulji $M = f_m(\alpha, \delta_m)$ za zadano δ_m . Iz te jednadžbe

$$M_A = M_0 + M_\alpha \alpha_{rav} + M_\delta \delta_m = 0$$

dobivamo ravnotežni napadni kut za postavljeni otklon kormila visine. Kada je moment propinjanja jednak nuli, onda je napadni kut jednak *ravnatežnom napadnom kutu* α_{rav} . To znači da zadanom otklonu kormila visine δ_m , u ravnotežnom letu, odgovara ravnotežni napadni kut:



Slika 1. Prijelaz iz jednoga u drugi ravnotežni let

$$\alpha_{rav} = \frac{M_0 + M_\delta \delta_m}{-M_\alpha}$$

U ravnatežnom letu sila uzgona predstavljena je odgovarajućom točkom A u gornjemu dijelu dijagrama na slici 1:

$$L_{rav} = L_0 + L_\alpha \alpha_{rav} + L_\delta \delta_m,$$

Iz toga zaključujemo da u ravnatežnom letu sila uzgona ovisi isključivo o veličini otklona kormila visine δ_m .

Vidjeli smo da napadni kut u ravnatežnom letu ovisi o otklonu kormila visine. Tu ovisnost označavamo s $\alpha_{rav}(\delta_m)$. Iz gornje jednadžbe za ravnatežni napadni kut slijedi također da on ima dva dijela.

$$\alpha_{rav} = \alpha_{rav0} + K \cdot \delta_m$$

Prvi dio $\alpha_{rav0} = M_0 / -M_\alpha$ ne ovisi o otklonu kormila visine δ_m i to je vrijednost napadnog kuta u ravnatežnom stanju kad je otklon kormila visine nula. Drugi dio je proporcionalan otklonu kormila visine. Taj koeficijent proporcionalnosti

$$K = -\frac{M_\delta}{M_\alpha}$$

nazivamo aerodinamičko pojačanje (zajedno s njegovim predznakom). Predznak aerodinamičkog pojačanja može biti i pozitivan i negativan, što ovisi o aerodinamičkoj shemi. Za *canard* konfiguracije je $M_\delta > 0$, $M_\alpha < 0$, pa je aerodinamičko pojačanje tih shema uvijek pozitivno. Nasuprot tomu, normalna konfiguracija zrakoplova ima $M_\delta < 0$, a M_α može biti negativno ili pozitivno, pa i aerodinamičko pojačanje može biti pozitivno i negativno.

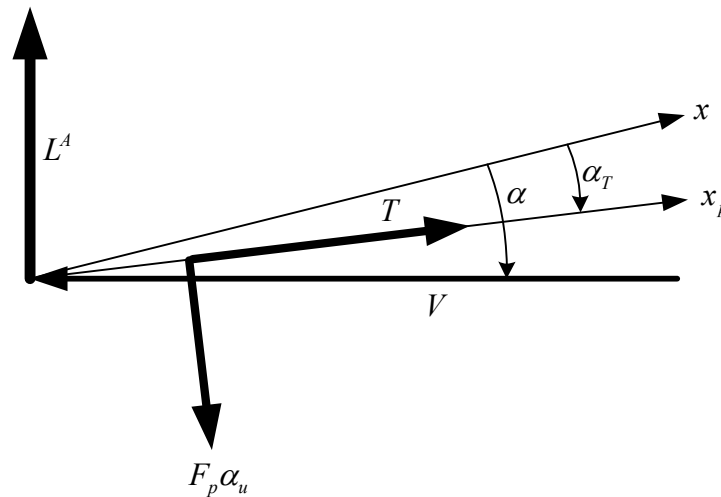
6.3 Primjer

Odredimo koliki su gradijenti ukupne sile uzgona i momenta propinjanja za slučaj malog putničkog zrakoplova sa centralom elisom. Položaj osi rotacije elise x_p , osi x letjelice i brzine leta V prikazan je na slici 2. Prema toj slici bit će ukupna sila uzgona

$$L = T \sin(\alpha - \alpha_T) - F_p \alpha_u \cos(\alpha - \alpha_T) + L^A$$

Kako je savijanje zračne struje za centralnu elisu praktično jednako nuli bit će $\alpha_u = \alpha - \alpha_T$, pa je

$$L = T \sin(\alpha - \alpha_T) - F_p (\alpha - \alpha_T) \cos(\alpha - \alpha_T) + L^A$$



Slika 2

Uz pretpostavku malog kuta $(\alpha - \alpha_T)$, dobivamo

$$L = (T - F_p) \cdot (\alpha - \alpha_T) + L^A$$

$$L = \underbrace{\frac{\rho V^2}{2} S_{ref} C_{L0}}_{L_0} - \underbrace{(T - F_p) \alpha_T}_{L_\alpha} + \underbrace{\left(\frac{\rho V^2}{2} S_{ref} C_{L\alpha} + T - F_p \right) \alpha}_{L_\alpha} + \underbrace{\frac{\rho V^2}{2} S_{ref} C_{L\delta_m} \delta_m}_{L_{\delta_m}}$$

Ukupni moment propinjanja je zbroj aerodinamičkog momenta propinjanja i momenta propinjanja od poprečne pogonske sile.

$$M = M^F + \frac{\rho V^2}{2} S_{ref} c_A C_m$$

Kako je prema poglavlju 5.2.2

$$M^F = z_T T \cos \alpha_T - x_T (T \sin \alpha_T + F_{p\sigma} \alpha_T) + x_T F_{p\sigma} \left(1 - \frac{\partial \varepsilon_u}{\partial \alpha} \right) \cdot \alpha.$$

bit će

$$M = \underbrace{z_T T \cos \alpha_T - x_T (T \sin \alpha_T + F_{p\sigma} \alpha_T) + \frac{\rho V^2}{2} S_{ref} c_A C_{m0}}_{M_0} + \underbrace{\left[x_T F_{p\sigma} \left(1 - \frac{\partial \varepsilon_u}{\partial \alpha} \right) + \frac{\rho V^2}{2} S_{ref} c_A C_{m\alpha} \right]}_{M_\alpha} \cdot \alpha + \underbrace{\frac{\rho V^2}{2} S_{ref} c_A C_{m\delta} \delta_m}_{M_\delta}$$

6.4 Normalno opterećenje

Budući da proučavamo zrakoplove koji su aerodinamički upravljivi, bitna je veličina sile uzgona i sposobnost zrakoplova da je mijenja jer se pomoću te sile upravlja zrakoplovom. Zato se odnos intenziteta sile uzgona prema težini zrakoplova naziva *normalno opterećenje* (*load factor*) i označava se sa skalarom n bez indeksa:

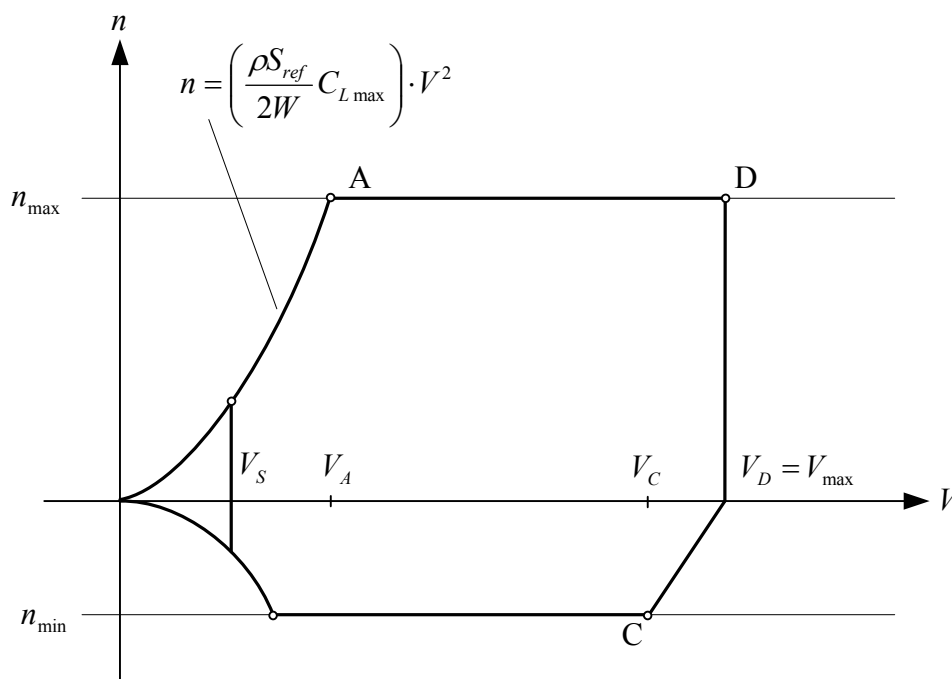
$$n = \frac{L}{W}$$

Drugim riječima to znači da je faktor opterećenja veličina uzgona izražena u težinama letjelice. Ako normalno opterećenje napišemo u obliku

$$n = \frac{\rho S_{ref}}{2W} V^2 C_L,$$

uočavamo vrlo važnu činjenicu da faktor opterećenja ovisi o kvadratu brzine (preko dinamičkog tlaka u sili uzgona) i od aerodinamičkog koeficijenta uzgona.

Jasno je da zbog čvrstoće konstrukcije normalno opterećenje n ne može biti neograničeno. Za svaki tip zrakoplova propisano je maksimalno opterećenje (pozitivno i negativno). Međutim ne treba zaboraviti da koeficijent uzgona ne može biti veći od $C_{L\max}$ pa je za male brzine normalno opterećenje ograničeno parabolom. Preko te vrijednosti nastaje slom uzgona.



Slika 3 Oblik dijagrama n - V za transportni zrakoplov

Sila uzgona $L = nW$ stvara jedno normalno ubrzanje zrakoplova $L/(W/g)$, to isto ubrzanje osjeća bilo koja mala masu m u zrakoplovu na koju onda djeluje inercijalna sila (suprotna pravcu uzgona zrakoplova) jednaku produktu te male mase i tog ubrzanja, tj ta inercijalna sila koja djeluje na tu malu masu je veličine:

$$L/(W/g) \cdot m = mg \cdot n$$

Ona je proporcionalna n -u. Zato se za n upotrebljava riječ opterećenje.

6.5 Primjer

Odrediti opterećenje malog zrakoplova za najveći otklon kormila visine, ako je za taj otklon koeficijent sile uzgona 75% od maksimalne vrijednosti $C_{L \max} = 1.45$, pri zemlji i brzini leta $V = 50 [m/s]$

$$n = \frac{L}{W} = \frac{\frac{\rho V^2}{2} S_{ref} C_L}{mg}$$

Za maksimalni otklon kormila visine je $C_L = 0.75 \cdot 1.45 = 1.09$ pri zemlji i brzinom leta $V = 50 [m/s]$

$$n_{\max} = \frac{\frac{1.225 \cdot 50^2}{2} 15.1 \cdot 1.09}{1088 \cdot 9.81} = 2.36$$

6.6 Stabilnost ravnotežnog leta

Ravnotežni let bit će stabilan ako se opet uspostaviti ravnotežni let kakav je bio, kad neki vanjski poremećaj leta naruši tu ravnotežu (npr. udar uzdužnog vjetra, ulazak u oblak gdje je povećana gustoća i dr.). Postoje dvije stabilnosti ravnotežnog leta: uzdužna stabilnost i bočna stabilnost.

Zrakoplov je uzdužno *stabilan* ako poremećaj napadnog kuta $\Delta\alpha$ (zbog vanjskih uzroka) stvara promjena momenta propinjanja koja nastoji poništiti taj poremećaj napadnog kuta.

Vidjeli smo da točka A na slici 1 predstavlja stanje letjelice, tj. njen napadni kut za zadani kut otklona kormila visine. Prvo, u ravnotežnom letu potreban je pozitivan napadni kut α_{rav} , a zatim taj ravnotežni kut treba biti stabilan.

Zrakoplov treba za svaku vrijednost otklona kormila visine δ_m imati određeni napadni kut α_{rav} za koji je moment propinjanja jednak nuli:

$$0 = M_0 + M_\delta \delta_m + M_\alpha \alpha_{rav}$$

To znači da postoji ravnoteža između dva momenta $M_0 + M_\delta \delta_m$ i $M_\alpha \alpha_{rav}$. Kad letjelica leti s tim kutom α_{rav} , onda je ukupni moment propinjanja jednak nuli, tj. nema momenta propinjanja, letjelica se ne okreće oko osi y , napadni kut α_{rav} se ne mijenja. Kaže se da je letjelica u ravnotežnom letu (*istrimana letjelica*).

Postavlja se pitanje je li letjelica u letu s napadnim kutom α_{rav} stabilna. Drugim riječima ako iz bilo kojih razloga nastane poremećaj napadnog kuta $\Delta\alpha$, pa napadni kut ima novu vrijednost $\alpha = \alpha_{rav} + \Delta\alpha$, što će se zbiti? Zbog tog poremećaja $\Delta\alpha$ narušena je ravnoteža između dva momenta $M_0 + M_\delta \delta_m$ i $M_\alpha \alpha$. Rezultirajući moment propinjanja nije jednak nuli. Za poremećeni napadni kut $\alpha_{rav} + \Delta\alpha$ bit će taj rezultirajući moment propinjanja

$$M = M_0 + M_\delta \delta_m + M_\alpha (\alpha_{rav} + \Delta\alpha).$$

Međutim, kako je $M_0 + M_\delta \delta_m + M_\alpha \alpha_{rav} = 0$, bit će novi moment propinjanja

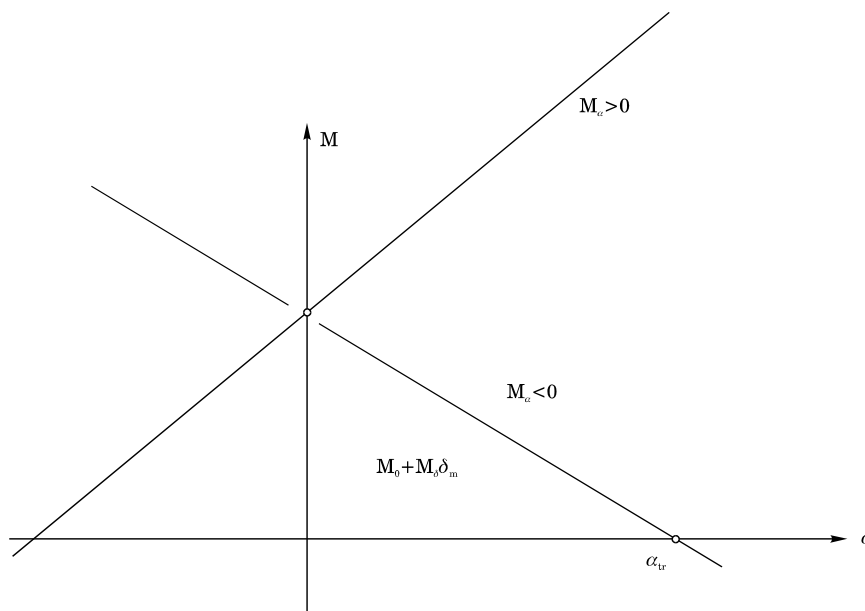
$$M = M_\alpha \Delta\alpha$$

Sve ovisi o predznaku derivativa M_α . Ako je $M_\alpha < 0$, onda novi moment propinjanja M ima suprotan predznak od $\Delta\alpha$. Tako će novi moment propinjanja $M = M_\alpha \Delta\alpha$, koji je nastao zbog poremećaja napadnog kuta, biti negativan u slučaju povećanja napadnog kuta, a to znači da će smanjivati napadni kut, tj. težiti da se letjelica vrati u prvobitni položaj α_{rav} . Ili, ako je poremećaj napadnog kuta bio negativan, moment propinjanja $M = M_\alpha \Delta\alpha$ bit će pozitivan pa će povećavati napadni kut, tj. opet će težiti da vrati letjelicu u prvobitni položaj α_{rav} . To znači da letjelica sa $M_\alpha < 0$ ima stabilan let s napadnim kutom α_{rav} . U tom slučaju kada je $M_\alpha < 0$, da bi ravnotežni napadni kut

$$\alpha_{rav} = \frac{M_0 + M_\delta \delta_m}{-M_\alpha}$$

bio pozitivan, mora biti $M_0 + M_\delta \delta_m$ pozitivno. Tako dobivamo dva uvjeta za stabilan ravnotežni napadni kut:

$$\begin{aligned} M_\alpha &< 0 \\ M_0 + M_\delta \delta_m &> 0. \end{aligned}$$



Slika 4. Statička stabilnost i nestabilnost

Ovakvu stabilnost u ravnotežnom letu zovemo *statička stabilnost leta*, tj. to su dva uvjeta statičke stabilnosti leta. Međutim to nisu jedini mogući uvjeti stabilnosti u ravnotežnom letu.

Do sada smo smatrali da je otklon upravljačke površine δ_m proporcionalan otklonu samo otklonu pilotske palice, tj. da je izravno pod kontrolom pilota. Ako letjelica nema statičku stabilnost, ona može biti stabilizirana pomoću povratne veze. Povratna veza je dodani otklon $\Delta\delta_m$ koji se zbraja s otklonom δ_m , tako da je otklon upravljačke površine $\delta_m + \Delta\delta_m$, zbroj otklona δ_m izravno od pilota, i dodanog otklona $\Delta\delta_m$ iz povratne veze. U tom je slučaju moment propinjanja

$$M = M_0 + M_\delta(\delta_m + \Delta\delta_m) + M_\alpha(\alpha_{rav} + \Delta\alpha) = M_\delta\Delta\delta_m + M_\alpha\Delta\alpha,$$

jer i dalje vrijedi jednadžba ravnotežne letjelice $0 = M_0 + M_\delta\delta_m + M_\alpha\alpha_{rav}$. Taj dodani otklon iz povratne veze $\Delta\delta_m$ može osigurati da ovaj rezultirajući moment M bude suprotnog predznaka od poremećaja $\Delta\alpha$, a to znači da statički nestabilna letjelica s povratnom vezom može biti stabilna. Takvu stabilnost nazivamo *sintetična stabilnost*.

Da bismo povećali napadni kut zrakoplova, trebamo negativan otklon kormila visine. Kada smo promijenili otklon kormila visine $\delta_{m1} < \delta_m$, normalna sila predstavljena je točkom B na gornjemu dijagramu slike 7-1, a pojavio se moment propinjanja $M_B = f_m(\alpha_A, \delta_{m1})$ određen ordinatom točke B u donjemu dijagramu iste slike. Taj moment okreće letjelicu i

povećava napadni kut od vrijednosti α_A do vrijednosti α_D . Kako je letjelica stabilna ($M_\alpha < 0$), povećanje napadnog kuta $\Delta\alpha = \alpha_D - \alpha_A$ stvara dodatni negativni aerodinamički moment $\Delta M = M_\alpha \Delta\alpha < 0$ propinjanja, tako da letjelica postiže novi ravnotežni položaj predstavljen točkom D u kojoj je $M_D = f_m(\alpha_D, \delta_{m1}) = 0$. U točki D moment propinjanja je opet nula i letjelica je opet u ravnotežnom stanju, ali sada je normalna sila veća, kao što se vidi u točki D u gornjemu dijelu slike. Prelazak iz točke A u točku D predstavlja *prijelazni proces*. On nije predmet analize ove knjige.

Statički stabilna letjelice na svaki zauzeti otklon upravljačkih površina poslije prijelaznog procesa zauzima novi ravnotežni položaj u kome je moment za središte mase jednak nuli. Kada promatramo let transportnih zrakoplova, tada nema velike i nagle promjene otklona kormila visine, kao što je slučaj s borbenim lovcima ili akrobatskim zrakoplovima. Za transportne zrakoplove u prvoj iteraciji možemo usvojiti da su oni za vrijeme leta stalno u ravnotežnom stanju, a to znači da je $M = 0$, odnosno da je napadni kut uvijek ovisan samo o otklonu kormila visine.

6.7 Neutralna točka

Gradijent po napadnom kutu ukupnog momenta propinjanja zbroj je dvaju gradijenata

$$M_\alpha = M_\alpha^F + M_\alpha^A.$$

Prema uvjetu stabilnosti taj zbroj mora biti manji od nule,

$$M_\alpha^A < -M_\alpha^F$$

što znači da negativan gradijent aerodinamičkog koeficijenta momenta propinjanja za središte mase $C_{m\alpha}^A < 0$ nije dovoljan da bi osigurao prvi uvjet stabilnosti $M_\alpha < 0$. U ovom odjeljku želimo razmotriti kako utječe položaj središta mase na ovaj uvjet stabilnosti zrakoplova. Zato trebamo eksplicitno utjecaj položaju središta mase na oba gradijenta.

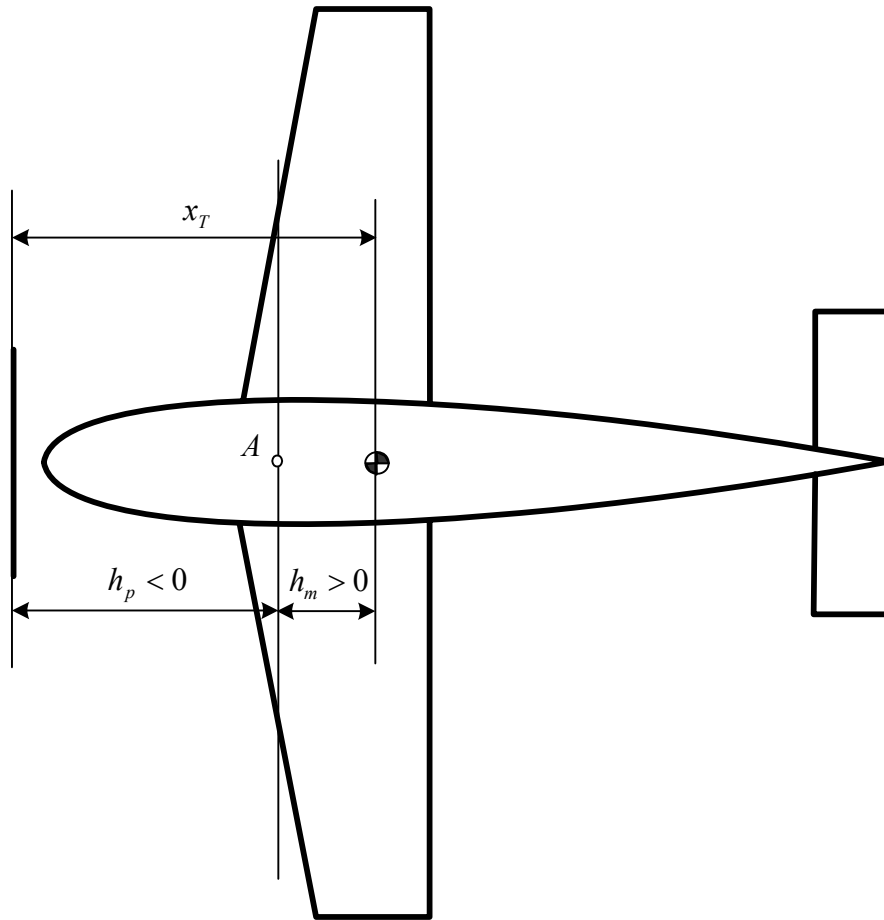
U poglavlju 5.2.2. vidjeli smo da je

$$M_\alpha^F = x_T F_{p\sigma} \left(1 - \frac{\partial \varepsilon_u}{\partial \alpha} \right).$$

Kako je $x_T = h_m - h_p$, gradijent uslijed pogonske sile određen je jednadžbom :

$$M_\alpha^F = F_p (h_m - h_p) (1 - \varepsilon_{u\alpha})$$

U većini slučajeva ovaj je pozitivan i to utoliko više što je središte mase više pomjereno u nazad kao na slici 4.



Slika 5

Kao što smo vidjeli u poglavlju 4, gradijent aerodinamičkog momenta propinjanja M_α^A ima tri dijela:

- od normalne sile kombinacije krilo tijelo $K_{WB} N_{W\alpha} \cdot (h_m - h_{cw})$,
- od normalne sile horizontalnog repa $-N_{H\alpha} (h_{ch} - h_m)(1 - \varepsilon_\alpha)$ i
- od tijela $M_{B\alpha}$.

Da bi dobili ukupni gradijent njima treba pridodati još gradijent pogonskog momenta

$$M_\alpha^F = F_p (h_m - h_p)(1 - \varepsilon_{u\alpha})$$

Tako dobivamo ukupni gradijent moment propinjanja

$$M_\alpha = F_p (1 - \varepsilon_{u\alpha}) \cdot (h_m - h_p) + K_{WB} N_{W\alpha} \cdot (h_m - h_{cw}) - N_{H\alpha} (h_{ch} - h_m) + N_{H\alpha} (h_{ch} - h_m) \cdot \varepsilon_\alpha + M_{B\alpha}$$

ili

$$M_\alpha = [F_p (1 - \varepsilon_{u\alpha}) + K_{WB} N_{W\alpha} + N_{H\alpha} - N_{H\alpha} \varepsilon_\alpha] \cdot h_m - F_p (1 - \varepsilon_{u\alpha}) h_p - K_{WB} N_{W\alpha} h_{cw} - N_{H\alpha} h_{ch} + N_{H\alpha} h_{ch} \varepsilon_\alpha + M_{B\alpha}$$

Kako je gradijent ukupne normalne sile

$$N_\alpha = F_p(1 - \varepsilon_{u\alpha}) + K_{WB}N_{W\alpha} + N_{H\alpha} - N_{H\alpha} \cdot \varepsilon_\alpha$$

možemo gornju jednadžbu napisati u obliku

$$M_\alpha = N_\alpha \cdot h_m - F_p(1 - \varepsilon_{u\alpha})h_p - K_{WB}N_{W\alpha}h_{cw} - N_{H\alpha}h_{ch} + N_{H\alpha}h_{ch}\varepsilon_\alpha + M_{B\alpha}$$

ili

$$M_\alpha = N_\alpha \cdot \left(h_m - \frac{F_p(1 - \varepsilon_{u\alpha})h_p + K_{WB}N_{W\alpha}h_{cw} + N_{H\alpha}h_{ch} - N_{H\alpha}h_{ch}\varepsilon_\alpha - M_{B\alpha}}{N_\alpha} \right)$$

Iz ove jednadžbe se vidi da udaljenost središta mase mora biti manja od vrijednosti

$$h_n = \frac{F_p(1 - \varepsilon_{u\alpha})h_p + K_{WB}N_{W\alpha}h_{cw} + N_{H\alpha}h_{ch} - N_{H\alpha}h_{ch}\varepsilon_\alpha - M_{B\alpha}}{N_\alpha}$$

Točka koja se nalazi na ovoj udaljenosti od referentne točke A naziva se *neutralna tačka*.

Pomoću udaljenosti neutralne točke h_n možemo napisati da je gradijent momenta propinjanja

$$M_\alpha = N_\alpha(h_m - h_n)$$

Sad se jasno vidi da će prvi uvjet statičke stabilnosti $M_\alpha < 0$ biti ispunjen ako je

$$\bar{h}_m < \bar{h}_n$$

tj. ako je središte mase ispred neutralne točke. Što je više središte mase ispred neutralne točke, bit će bolje zadovoljen uvjet statičke stabilnosti da je $M_\alpha < 0$.

6.8 Primjer

Odredit ćemo neutralnu točku malog putničkog zrakoplova (odjeljak 5).

Udaljenost neutralne točke od vrha letjelice s elisnim pogonom dobivamo iz uvjeta da je za neutralnu točku zbroj gradijenata pogonskog momenta i aerodinamičkog momenta propinjanja jedna k nuli.

$$M_\alpha^F + M_\alpha = 0$$

ili

$$\frac{M_\alpha^F}{qS_{ref}c_A} + C_{m\alpha} = 0$$

U primjeru iz odjeljka 6.5.3 izračunali smo koeficijent propinjanja pogonskog momenta za mali putnički zrakoplov

$$\frac{M_\alpha^F}{q_\infty S_{ref} c_A} = \frac{F_{p\sigma}}{q_\infty S_{ref}} (\alpha - \alpha_T) (\bar{h}_m - \bar{h}_p)$$

Njegov gradijent bit će ($h_p = -1.471 \rightarrow \bar{h}_p = \frac{-1.471}{1.73} = -0.850$)

$$\frac{M_\alpha^F}{q_\infty S_{ref} c_A} = \frac{F_{p\sigma}}{q_\infty S_{ref}} (\bar{h}_m - \bar{h}_p) = 0.0127 \cdot (\bar{h}_m + 0.850)$$

Aerodinamički moment propinjanja izračunan je u odjeljku 5.3.6

$$C_m^A = -(1.482 - 4.72 \bar{h}_m) \cdot \alpha - (0.607 - 0.216 \bar{h}_m) \cdot K_f \delta_m - \\ - (0.254 - 3.640 \bar{h}_m) \cdot i_w - (1.212 - 0.446 \bar{h}_m) \cdot i_h - 0.055 + 0.192 \bar{h}_m$$

Bez obzira na to koliki su postavni kutovi i_w i i_h , bit će gradijent aerodinamičkog momenta propinjanja

$$C_{m\alpha}^A = -(1.482 - 4.72 \bar{h}_m)$$

Ukupni gradijent momenta propinjanja

$$\frac{M_\alpha^F}{q_\infty S_{ref} c_A} + C_{m\alpha}^A = 0.0127 \cdot (\bar{h}_m + 0.850) - (1.482 - 4.72 \bar{h}_m)$$

Kada je središte mase u neutralnoj točki gradijent momenta propinjanja mora biti jednak nuli:

$$0.0127 (\bar{h}_n + 0.850) - (1.482 - 4.72 \bar{h}_n) = 0$$

Iz ove jednadžbe dobivamo

$$(4.72 + 0.0127) \bar{h}_n = 1.482 - 0.0108$$

$$\bar{h}_n = 0.31$$

To znači da je neutralna točka udaljena od točke A

$$h_n = \bar{h}_n c_A = 0.31 \cdot 1.730 = 0.536 \text{ m}$$

Ako se središte mase na udaljenosti od vrha letjelice $\ell_m = 1.719 \text{ m}$, odnosno od točke A

$h_m = 0.248 \text{ m}$ onda je

$$\bar{h}_n - \bar{h}_m = \frac{0.536 - 0.248}{1.730} = 0.17$$

Uočimo iz ovog primjera da postavni kutovi krila i horizontalnog repa nemaju utjecaja na položaj neutralne točke.

6.9 Upravljivost u ravnotežnom letu

Sila uzgona mijenja pravac brzine te ona predstavlja upravljačku silu:

$$L = (F_{N0} + qSC_{N0}) + (F_{N\alpha} + qSC_{N\alpha} - qSC_A) \alpha + qSC_{L\delta} \delta_m$$

Ima tri komponente:

- prva je konstantna

$$L_0 = F_{Y0}^p + \frac{\rho V^2}{2} S_{ref} C_{N0}$$

- druga je proporcionalna napadnom kutu i ona je najvažnija

$$L_\alpha \alpha = \left(F_{Y\alpha}^p + \frac{\rho V^2}{2} S_{ref} (C_{N\alpha} - C_A) \right) \alpha$$

- treća je proporcionalna otklonu upravljačkih površina

$$L_{\delta_m} \delta_m = \frac{\rho V^2}{2} S_{ref} C_{N\delta} \delta_m.$$

U ravnotežnom letu, kada je $M = 0$, kod aerodinamičke sheme canard treća je komponenta u istom smjeru kao i druga, a kod normalne sheme u suprotnom je smjeru. Zato je uzgon sheme canard veći od uzgona normalne sheme. To je jedan od razloga što zrakoplovi koji trebaju imati velike manevarske mogućnosti imaju canard konfiguracije.

Sila uzgona u ravnotežnom stanju ovisi samo o otklonu kormila visine jer ravnotežni napadni kut ovisi o otklonu kormila visine.

$$\alpha_{rav} = \frac{M_0 + M_\delta \delta_m}{-M_\alpha}$$

Uvrstimo li ovu vrijednost za ravnotežni napadni kut u jednadžbu za silu uzgona, dobivamo:

$$L_{rav} = L_0 + L_\alpha \alpha_{rav} + L_\delta \delta_m = L_0 + L_\alpha \frac{M_0 + M_\delta \delta_m}{-M_\alpha} + L_\delta \delta_m$$

$$L_{rav} = L_0 + L_\alpha \frac{M_0}{-M_\alpha} + \left(L_\alpha \frac{M_\delta}{-M_\alpha} + L_\delta \right) \delta_m$$

Apsolutna vrijednost derivacije sile uzgona po otklonu kormila visine

$$\frac{dL_{rav}}{d\delta_m} = L_\alpha \frac{M_\delta}{-M_\alpha} + L_\delta$$

mjera je upravljivosti, jer pokazuje za koliko se promijeni upravljačka sila kad se promijeni otklon kormila visine, bez obzira na koju stranu. Da bismo vidjeli utjecaj položaja središta mase na upravljivost, podsjetimo se jednadžbe za gradijent momenta propinjanja ovisno o položaju neutralne točke i središta mase:

$$\frac{M_\alpha}{q S_{ref} c_A} = -\frac{N_\alpha}{q S_{ref}} (\bar{h}_n - \bar{h}_m)$$

Iz te jednadžbe dobivamo vezu ($N_\alpha = L_\alpha$)

$$\frac{M_\alpha}{N_\alpha} = -c_A (\bar{h}_n - \bar{h}_m)$$

Zamjenom u gornju jednadžbu 40, dobivamo ovisnost upravljivosti o položaju središta mase i normalne točke:

$$\frac{dL_{rav}}{d\delta_m} = \frac{M_{\delta_m}}{c_A (\bar{h}_n - \bar{h}_m)} + L_{\delta_m}$$

gdje su, podsjetimo se, $C_{m\delta_m}$ i $C_{L\delta_m}$ određeni u odjeljku 4.4. U ovoj jednadžbi pojavljuje se totalna i parcijalna derivacija uzgona. Totalna derivacija koeficijenta uzgona (ili koeficijenta normalne sile) po otklonu kormila visine, moguća je s obzirom na zavisnost napadnog kuta α od otklona kormila visine δ_m prema jednadžbi 38 koja postoji u ravnotežnom let. Drugim riječima pojam upravljivosti vezan je za ravnotežni let.

Jednadžba pokazuje utjecaj $\bar{h}_n - \bar{h}_m$ na upravljivost i jasno ukazuje da upravljivost opada s povećanjem razlike $(\bar{h}_n - \bar{h}_m)$. Tako dolazimo do spoznaje da središte mase ne treba ići suviše prema naprijed, kako smo to željeli zbog statičke stabilnosti, jer se time smanjuje upravljivost letjelice. To znači da su uvjet statičke stabilnosti i uvjet upravljivosti oprečni. To je jedan od razloga što se za zrakoplove koji trebaju velike manevarske mogućnosti, pitanje stabilnosti rješava pomoću povratne veze (sintetična stabilnost) i canard konfiguracija.

Za transportne zrakoplove koji ne trebaju velike manevarske mogućnosti primjenjuje se normalna shema. Položaj krila i dimenzije horizontalnog repa određuju se tako da neutralna točka bude na udaljenosti od središta mase 2% do 5% aerodinamičke tetive, tj.

$$0.02 > \bar{h}_n - \bar{h}_m > 0.05$$

Maksimalnu silu uzgona postizemo pri maksimalnom napadnom kutu. Taj napadni kut treba se ostvariti s najvećim otklonom kormila visine, no u određenim granicama, jer u suprotnom dolazi do odvajanja struje i pada učinkovitost kormila. Isto tako maksimalni napadni kut ne smije biti veći od neke granične vrijednost α_{max} , jer u suprotnome naglo pada uzgon zrakoplova (*stall*). Tom maksimalnom otklonu kormila visine $\delta_{m\max}$ odgovara u ravnotežnom letu najveći dopušteni napadni kut zrakoplova, a on je 25% manji od najvećeg napadnog kuta pri kome nastaje *stall*. Znači da maksimalnom otklonu kormila visine $\delta_{m\max}$ treba odgovarati ravnotežni kut $0.75 \cdot \alpha_{max}$. Iz jednadžbe za ravnotežni napadni kut

$$0.75 \cdot \alpha_{max\ rav} = \frac{M_0 + M_\delta \delta_{m\max}}{-M_\alpha}$$

možemo odrediti koliko je potrebno aerodinamičko pojačanje (odnos M_δ/M_α) letjelice.

* * *

U prethodnoj točki vidjeli smo da središte mase može ići u nazad do neutralne točke a da zrakoplov ostane statički stabilan. Promatrajmo sad drugi ekstremni slučaj. Pomjerimo središte mase u naprijed. Maksimalnim otklonom kormila visine ograničen je krajnji prednji položaj središta mase do kojeg sila na horizontalnom stabilizatoru može uravnotežiti letjelicu.

6.10 Primjer

Odrediti postavni kut horizontalnog repa malog putničkog zrakoplova tako da je za maksimalni otklon kormila visine $\delta_m = 18^\circ$ sila uzgona 75% od maksimalne kritične vrijednosti $C_L = 1.45$, ako je postavni kut krila $i_w = +1^\circ$, a udaljenost središta mase od aerodinamičkog ishodišta $\bar{h}_m = 0.137$.

Jednadžbe koje daju koeficijente aerodinamičke sile uzgona i momenta propinjanja izračunane su u odjeljku 5.3.5 i 5.3.6:

$$C_L^A = 4.72\alpha + 0.216 K_f \delta_m + 3.64i_w + 0.446i_h + 0.192$$

$$C_m^A = -(1.482 - 4.72\bar{h}_m) \cdot \alpha - (0.607 - 0.216\bar{h}_m) \cdot K_f \delta_m - \\ - (0.254 - 3.640\bar{h}_m) \cdot i_w - (1.212 - 0.446\bar{h}_m) \cdot i_h - 0.055 + 0.192\bar{h}_m$$

Za $\bar{h}_m = 0.137$ i postavni kut krila $i_w = 1^\circ$ ove jednadžbe daju vrijednosti:

$$C_L^A = 4.72\alpha + 0.216 \cdot K_f \delta_m + 0.446 \cdot i_h + 0.256$$

$$C_m^A = -0.835 \cdot \alpha - 0.577 \cdot K_f \delta_m - 1.151 \cdot i_h - 0.024$$

Tim koeficijentima trebamo dodati i odgovarajuće koeficijente od pogonske sile i pogonskog momenta koje smo odredili u šestom poglavlju i konkretno izračunali u primjeru 6.5.3

$$C_Z^F = \frac{F_Z}{q_\infty S_{ref}} = 0.0010 - 0.0127 \cdot \alpha$$

$$C_m^F = \frac{M^F}{q_\infty S_{ref} c_A} = 0.0125 \cdot \alpha - 0.0069$$

Tako dobivene koeficijente zbrajamo s aerodinamičkim. Pri tome vodimo računa da je

$$C_Z^F = -C_N^F :$$

$$C_L = 4.73\alpha + 0.216 \cdot K_f \delta_m + 0.446 \cdot i_h + 0.255$$

$$C_m = -0.823 \cdot \alpha - 0.577 \cdot K_f \delta_m - 1.151 \cdot i_h - 0.031$$

Iz uvjeta da pri odklonu kormila visine $\delta_m = -18^0 = -0.314$ (za taj odklon je $K_f = 0.87$) imamo 75% od maksimalne sile uzgona, dobivamo dvije jednačbe s dvije nepoznanice:

$$0.75 \cdot 1.45 = 4.73\alpha_{rav} + 0.216 \cdot 0.87 \cdot (-0.314) + 0.446i_h + 0.255$$

$$-0.823\alpha_{rav} - 0.577 \cdot 0.87 \cdot (-0.314) - 1.151 \cdot i_h = 0.031$$

Kad se urede te jednačbe imaju oblik

$$4.73 \cdot \alpha_{rav} + 0.446 \cdot i_h = 0.891$$

$$-0.823\alpha_{rav} - 1.151 \cdot i_h = -0.126$$

Iz tih dviju jednačbi trebamo odrediti i_h i α_{rav} . Njihovo rješenje je

$$\alpha_{\max} = 0.1909 = 10.9^0$$

$$i_h = -0.0270 = -1.5^0$$

S dobivenim postavnim kutom horizontalnog repa, jednačbe ukupnog koeficijenta sile uzgona i ukupnog momenta propinjanja imaju oblik:

$$C_L = 4.73\alpha + 0.216 \cdot K_f \delta_m + 0.244$$

$$C_m = -0.823 \cdot \alpha - 0.577 \cdot K_f \delta_m - 0.0012$$

U horizontalnom letu uzgon je jednak težini te ako je pri najvećoj masi malog zrakoplova $m = 1088 \text{ kg}$ brzinu leta $V = 54.4 \text{ m/s}$, za visinu leta od 2000 m, treba biti:

$$C_L = \frac{mg}{\frac{\rho V^2}{2} S_{ref}} = \frac{1088 \cdot 9.81}{\frac{1.007 \cdot 54.4^2}{2} \cdot 15.1} = 0.474$$

To znači da će u horizontalnom letu trebati odkloniti kormilo visine za veličinu koju određujemo iz jednačbi

$$0.474 = 4.73\alpha + 0.216 \cdot K_f \delta_m + 0.244$$

$$0 = -0.823 \cdot \alpha - 0.577 \cdot K_f \delta_m - 0.0012$$

ili

$$4.73\alpha + 0.216 \cdot K_f \delta_m = 0.230$$

$$0.823 \cdot \alpha + 0.577 \cdot K_f \delta_m = -0.0012$$

Rješenje ovih jednačbi je

$$\alpha_{rav} = 0.0521 = 3.0^\circ$$

$$K_f \delta_m = -0.0764 = -4.4^\circ$$

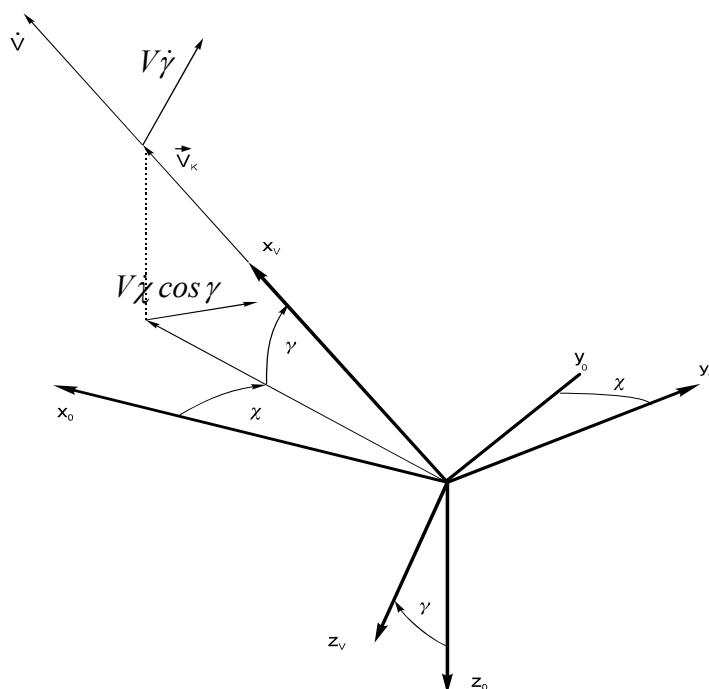
Za otklone upravljačkih površina manje od 10° je $K_f = 1$.

6.11 Jednadžbe gibanja ravnotežnog leta

Želimo promatrati gibanje središta mase. Polazimo stoga od vektorske jednadžbe gibanja središta mase

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{W} + \vec{R}^A$$

Zanemarit ćemo zakrivljenost Zemljine površine i rotaciju Zemlje. Pretpostavit ćemo da nema vjetra, pa su brzina leta i aerodinamička brzina jednake $V_K = V$.



Slika 6. Ubrzanja duž osi brzinskog koordinatnog sustava

Osim toga, i kutovi aerodinamičke brzine i brzine leta također su isti: $\chi = \chi_A$ i $\gamma = \gamma_A$. Kad pretpostavimo da nema vjetra, onda je logično da nema ni kuta klizanja, a to znači da ne postoji bočna komponenta K aerodinamičke sile. Projicirat ćemo jednadžbu gibanja središta mase na osi brzinskog koordinatnog sustava.

6.11.1 Komponente ubrzanja

Komponente brzine u brzinskom koordinatnom sustavu su $\mathbf{V} = [V \ 0 \ 0]^T$, a kutna brzina brzinskog koordinatnog sustava je $\mathbf{\Omega}_v = [-\dot{\chi} \sin \gamma \ \dot{\gamma} \ \dot{\chi} \cos \gamma]^T$ pa su komponente ubrzanja u brzinskom koordinatnom sustavu:

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{V}} + \tilde{\mathbf{\Omega}}_v \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \dot{V} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\chi} \cos \gamma & \dot{\gamma} \\ \dot{\chi} \cos \gamma & 0 & \dot{\chi} \sin \gamma \\ -\dot{\gamma} & -\dot{\chi} \sin \gamma & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{V} \\ V\dot{\chi} \cos \gamma \\ -V\dot{\gamma} \end{bmatrix}^T$$

6.11.2 Komponente sila

Pogonska sila \vec{F} ima komponente u koordinatnom sustavu letjelice:

$$\mathbf{F} = [T \cos \alpha_T \ 0 \ T \sin \alpha_T]^T$$

Težina letjelice ima komponente u nošenom koordinatnom sustavu:

$$\mathbf{W}^o = [0 \ 0 \ W]^T$$

Aerodinamička sila u aerodinamičkom koordinatnom sustavu ima komponente:

$$\mathbf{R}^A = [-D \ 0 \ -L]^T$$

Projekcije vektorske jednadžbe gibanja bit će na osi brzinskog koordinatnog sustava:

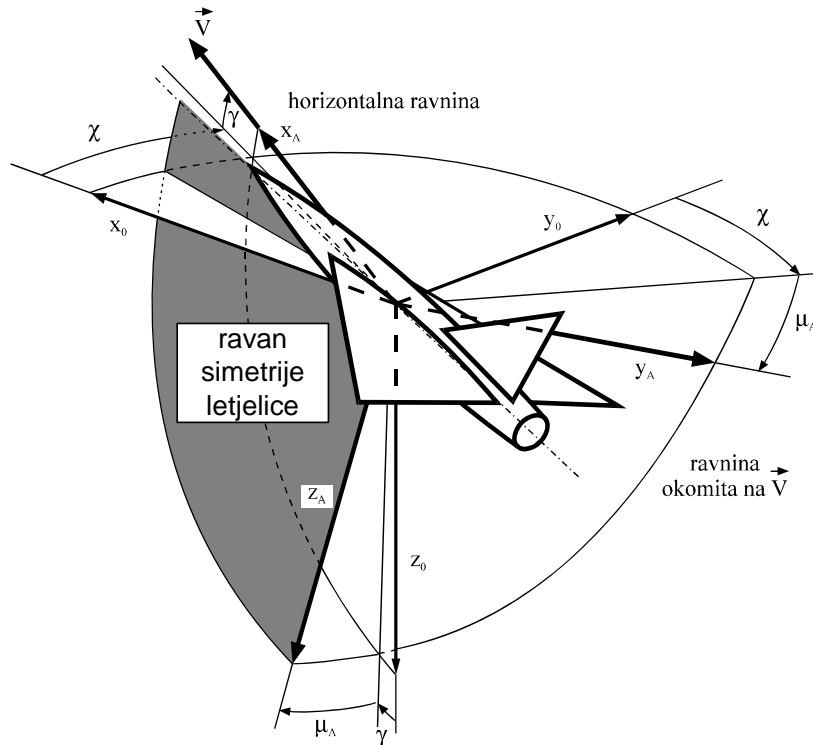
$$m \begin{bmatrix} \dot{V} \\ V \cos \gamma \dot{\chi} \\ -V\dot{\gamma} \end{bmatrix} = \mathbf{L}_{VF} \begin{bmatrix} T \cos \alpha_T \\ 0 \\ T \sin \alpha_T \end{bmatrix} + \mathbf{L}_{VO} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ W \end{bmatrix} + \mathbf{L}_{VA} \begin{bmatrix} -D \\ 0 \\ -L \end{bmatrix}$$

Podsjetimo još jednom na to da su brzina leta i aerodinamička brzina jednake zato što nema vjetra, te je os x aerodinamičkog i brzinskog koordinatnog sustava zajednička. Os z_A nalazi se u ravnini simetrije zrakoplova, a os z_v u vertikalnoj ravnini. One čine kut μ_A u ravnini okomitoj na brzinu, koji mjerimo od brzinske osi z_v do aerodinamičke osi z_A . Prema tome, u brzinski iz aerodinamičkog koordinatnog sustava dolazi se rotacijom oko x za kut $-\mu_A$.

$$\mathbf{L}_{VA} = \mathbf{L}_x(-\mu_A)$$

Matricu transformacije u brzinski iz koordinatnog sustav letjelice dobit ćemo posredno preko aerodinamičkog koordinatnog sustava:

$$\mathbf{L}_{VF} = \mathbf{L}_{VA} \mathbf{L}_{AF}$$



Slika 7. Ravan simetrije zrakoplova i vertikalna ravan kroz brzinu
 U aerodinamički iz koordinatnog sustava letjelice dolazi se poslije dvije rotacije. Prva je oko osi y za kut $-\alpha$, a zatim oko osi z za kut β . S obzirom da tražimo jednadžbe gibanja u atmosferi bez vjetrova, usvajamo da je kut klizanja $\beta = 0$, te je

$$\mathbf{L}_{AF} = \mathbf{L}_Y(-\alpha).$$

Zato je konačno:

$$\mathbf{L}_{VF} = \mathbf{L}_{VA}\mathbf{L}_{AF} = \mathbf{L}_X(-\mu_A)\mathbf{L}_Y(-\alpha)$$

Matrica transformacije u brzinski iz nošenoga koordinatnog sustava:

$$\mathbf{L}_{VO} = \mathbf{L}_Y(\gamma)\mathbf{L}_Z(\chi)$$

Pomoću tih matricama dobit ćemo konačno jednadžbu gibanja središta mase letjelice:

$$m \begin{bmatrix} \dot{V} \\ V \cos \gamma \dot{\chi} \\ -V \dot{\gamma} \end{bmatrix} = \mathbf{L}_X(-\mu_A)\mathbf{L}_Y(-\alpha) \begin{bmatrix} T \cos \alpha_T \\ 0 \\ T \sin \alpha_T \end{bmatrix} + \mathbf{L}_Y(\gamma)\mathbf{L}_Z(\chi) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ W \end{bmatrix} + \mathbf{L}_X(-\mu_A) \begin{bmatrix} -D \\ 0 \\ -L \end{bmatrix}$$

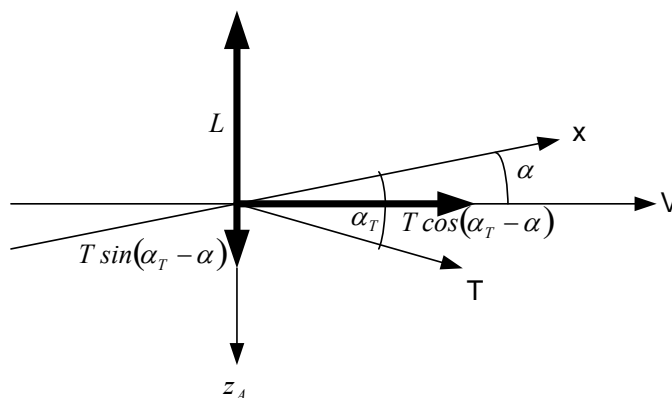
Množenjem matrica dobivamo skalarne jednadžbe:

$$\begin{aligned} m\dot{V} &= T \cos \alpha_T \cos \alpha + T \sin \alpha_T \sin \alpha - W \sin \gamma - D \\ mV \cos \gamma \dot{\chi} &= T \cos \alpha_T \sin \alpha \sin \mu_A - T \sin \alpha_T \cos \alpha \sin \mu_A + L \sin \mu_a \\ -mV \dot{\gamma} &= -T \cos \alpha_T \sin \alpha \cos \mu_A + T \sin \alpha_T \cos \alpha \cos \mu_A + W \cos \gamma - L \cos \mu_a \end{aligned}$$

Na osnovu toga dobivamo polazne jednadžbe za izučavanje performansi zrakoplova u atmosferi bez vjetra:

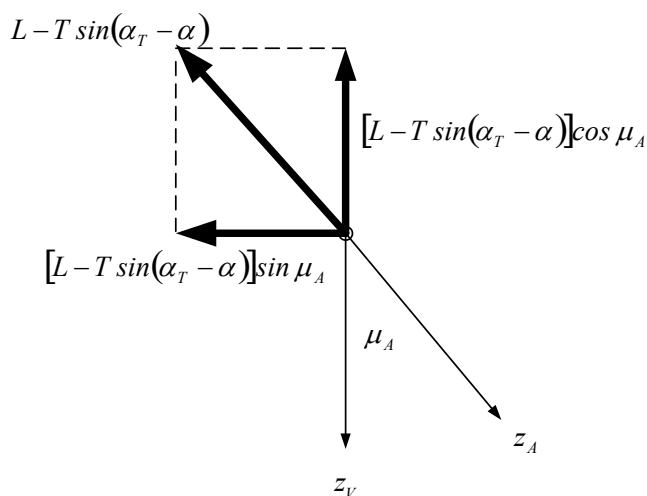
$$\begin{aligned} m\dot{V} &= T \cos(\alpha_T - \alpha) - W \sin \gamma - D \\ mV \cos \gamma \dot{\chi} &= [L - T \sin(\alpha_T - \alpha)] \sin \mu_a \\ mV \dot{\gamma} &= [L - T \sin(\alpha_T - \alpha)] \cos \mu_a - W \cos \gamma \end{aligned}$$

Te smo jednadžbe mogli i izravno ispisati. Promatrajmo sliku 7-6 u ravnini simetrije letjelice.



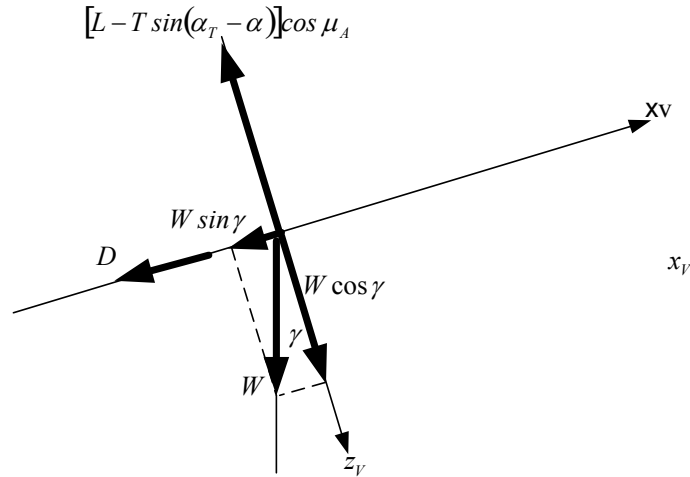
Slika 8. Uzgon i pogon u ravnini simetrije zrakoplova

S obzirom na to što nema kuta klizanja, brzina je u ravnini simetrije letjelice, pa pogonska sila koja je također u ravnini simetrije letjelice ima komponentu $T \cos(\alpha_T - \alpha)$ duž brzine i $T \sin(\alpha_T - \alpha)$ okomito na brzinu duž osi z_V , kao na slici 6. Tako se duž osi z_A , u ravnini okomitoj na brzinu (slika 7-7) nalazi sila $L - T \sin(\alpha_T - \alpha)$, a ta se sila razlaže na dvije komponente: na komponentu u vertikalnoj ravnini $[L - T \sin(\alpha_T - \alpha)] \cos \mu_A$ i na horizontalnu komponentu $[L - T \sin(\alpha_T - \alpha)] \sin \mu_A$.



Slika 9. Projektiranje u ravnini okomitoj na brzinu

U vertikalnoj ravnini komponenta $[L - T \sin(\alpha_T - \alpha)] \cos \mu_A$ okomita je na brzinu. U toj ravnini djeluje i težina W koja se razlaže, kao na slici 8, na komponente $W \sin \gamma$ na pravac brzine ali suprotnoga smjera i $W \cos \gamma$ okomito na brzinu duž osi z_V .



Slika 10. Vertikalna ravnina kroz brzinu

Sila otpora D u pravcu je, ali suprotnoga smjera od brzine. Kada zbrojimo to razlaganje sila, dobivamo iste jednadžbe koje smo dobili pomoću matrica transformacija.

6.11.3 Model gibanja središta mase

Model gibanja središta mase određen je jednadžbama:

$$\begin{aligned} m\dot{V} &= T \cos(\alpha_T - \alpha) - W \sin \gamma - D \\ mV \cos \gamma \dot{\chi} &= [L - T \sin(\alpha_T - \alpha)] \sin \mu_a \\ mV \dot{\gamma} &= [L - T \sin(\alpha_T - \alpha)] \cos \mu_a - W \cos \gamma \end{aligned}$$

Budući da je i u ekstremnim uvjetima razlika $\phi - \mu_A$ mala, obično se u jednadžbama zamjenjuje kut valjanja aerodinamičkog koordinatnog sustava μ_A s kutom valjanja letjelica ϕ . U tom slučaju su polazne jednadžbe za razmatranje performansi zrakoplova:

$$\begin{aligned} m\dot{V} &= T \cos(\alpha_T - \alpha) - W \sin \gamma - D \\ mV \cos \gamma \dot{\chi} &= [L - T \sin(\alpha_T - \alpha)] \sin \phi \\ mV \dot{\gamma} &= [L - T \sin(\alpha_T - \alpha)] \cos \phi - W \cos \gamma \end{aligned}$$

Drugo pojednostavljenje proizlazi iz činjenice što se konstrukcijom zrakoplova α_T bira tako da u horizontalnom letu bude pogonska sila u pravcu brzine leta, a to znači da je $\alpha_T = \alpha_{rav}$.

Gornje jednadžbe onda imaju jednostavniji oblik:

$$m \frac{dV}{dt} = T - D - W \sin \gamma$$

$$mV \frac{d\gamma}{dt} = L \cos \phi - W \cos \gamma$$

$$mV \cos \gamma \frac{d\chi}{dt} = L \sin \phi$$

Kada određujemo performanse zrakoplova, obično se služimo ovim modelom. U tom modelu usvajamo da je zrakoplov u ravnotežnom letu, što znači da je ukupni moment propinjanja jednak nuli, odakle je

$$\alpha_{rav} = \frac{M_0}{-M_\alpha} + \frac{M_\delta \delta_m}{-M_\alpha},$$

te je sila uzgona ovisna samo o kormilu visine:

$$L = L_0 + L_\alpha \alpha_{rav} + L_\delta \delta_m$$

6.11.4 Program gibanja zrakoplova u ravnotežnom letu

Blok-shema programa za izračunavanje putanje središta mase zrakoplova u ravnotežnom letu prikazana je na slici 10. Za konkretan zrakoplov treba prije svega napraviti model motora, tj odrediti ovisnost raspoložive pogonske sile T_a o brzini leta i parametrima okolne atmosfere (gustoće ρ i temperature zraka T^o), a pogonska sile bit će ovisna o veličini parametra (položaja ručice pogona) δ_p i o toj raspoloživoj sili T_a .

U ovom modelu zanemarujemo bočne koponenate pogonske sile, pa su komponente pogonske sile duž osi zrakoplova:

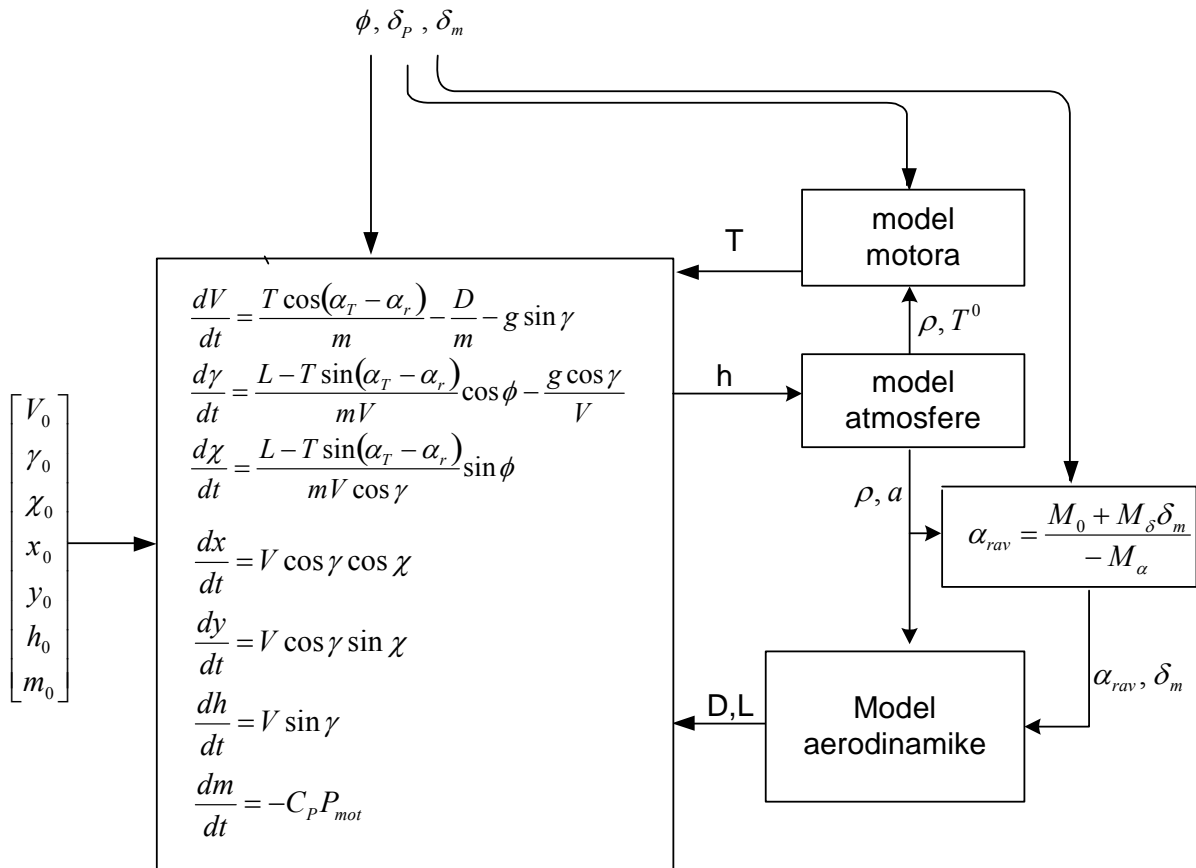
$$\mathbf{F} = [T \cos \alpha_T \quad 0 \quad T \sin \alpha_T]^T,$$

a komponente pogonskog momenta su nule jer je $z_p = 0$. Jedan takav model motora za male zrakoplove s elisom nalazi se u prilogu C, a model atmosfere nalazi se u prilogu B.

U ovoj shemi koristi se jednostavan model aerodinamike:

$$D = \frac{\rho V^2}{2} S_{ref} (C_{D0} + K C_L^2)$$

$$L = \frac{\rho V^2}{2} S_{ref} C_L$$



Slika 11. Blok-shema zrakoplova kao materijalna točka

u kome je koeficijent sile uzgona ovisi samo o odklonu kormila visine

$$C_L = C_{L0} + C_{L\alpha} \frac{C_{m0}}{-C_{m\alpha}} + \left(C_{L\delta_m} + C_{L\alpha} \frac{C_{m\delta}}{-C_{m\alpha}} \right) \delta_m$$

Koeficijenti $C_{D0}, K, C_{L0}, C_{L\alpha}, C_{L\delta_m}, C_{m0}, C_{m\alpha}$ i $C_{m\delta}$ mogu biti funkcije Machova broja: $Ma = V/a$. Kut valjanja ϕ i odklon kormila visine δ_m kao i parametar motora δ_p dolaze u program kao vanjski parametri upravljanja.

7 Horizontalni let

7.1 Režim leta

Ako zrakoplov leti u atmosferi bez vjetrova, horizontalno ($\gamma = 0$) i pravocrtno ($\dot{\chi} = 0$), onda iz jednadžbi gibanja

$$\begin{aligned} m \frac{dV}{dt} &= T - D - W \sin \gamma \\ mV \frac{d\gamma}{dt} &= L \cos \phi - W \cos \gamma \\ mV \cos \gamma \frac{d\chi}{dt} &= L \sin \phi \end{aligned}$$

slijedi da mora biti:

$$\begin{aligned} L \sin \phi &= 0 \\ L \cos \phi &= W \end{aligned}$$

Iz njih zaključujemo da za horizontalni pravocrtni let kut valjanja ϕ zrakoplova mora biti jednak nuli, a normalno opterećenje (*load factor*) mora biti jednako jedinici:

$$\begin{aligned} \phi &= 0 \\ n &= 1 \end{aligned}$$

Kako je

$$L = \frac{\rho V^2}{2} S C_L = W,$$

slijedi da u horizontalnom letu mora biti

$$V^2 C_L = \frac{2W}{\rho S}.$$

Svaka kombinacija moguće brzine i mogućeg napadnog kuta koja ispunjava ovaj uvjet horizontalnog leta naziva se *režim horizontalnog leta*, a iz tog uvjeta za horizontalni let slijedi da je brzina leta ovisna o izabranom koeficijentu uzgona:

$$V = \sqrt{\frac{2W}{\rho S C_L}},$$

ili obrnuto, da za izabranu brzinu leta slijedi odgovarajući koeficijent sile uzgona. Međutim, treba uzeti u obzir da zrakoplov ne smije letjeti brzinom manjom od

$$V_{stall} = \sqrt{\frac{2W}{\rho S_{ref} C_{Lmax}}},$$

kojoj odgovara najveći mogući koeficijent uzgona, koji zrakoplov postiže pri najvećem dopuštenom napadnom kutu. Za manje brzine bi napadni kut trebao biti još veći, no tada nastaje pad koeficijenta uzgona. Prema tome, mogući su režimi leta brzinom $V > V_{stall}$

7.2 Potrebna sila ili potrebna snaga

Ako želimo dodatno da horizontalan pravocrtan let bude i stacionaran, tj. da brzina leta bude konstantna, onda treba biti ispunjen i treći uvjet da pogonska sila bude jednaka otporu:

$$T = D$$

Tu potrebnu pogonsku silu, za izabrani režim leta, označavamo sa T_r (*Thrust required*). Potrebna sila pomnožena s brzinom leta daje potrebnu snagu. Pri određivanju performansi zrakoplova služiti ćemo se jednostavnom polarom zrakoplova te će potrebna sila biti određena jednadžbom

$$T_r = D = \frac{\rho V^2}{2} S (C_{D0} + K C_L^2)$$

U tim jednadžbama, za potrebnu silu ili potrebnu snagu, imamo i koeficijent uzgona C_L i kvadrat brzine leta V (odnosno kub ako je u pitanju potrebna snaga).. Da bismo dobili potrebnu pogonsku silu, odnosno potrebnu snagu, ovisno samo o brzini leta eliminirat ćemo koeficijent uzgona iz uvjeta da je u horizontalnom letu $C_L = \frac{2W}{\rho V^2 S}$:

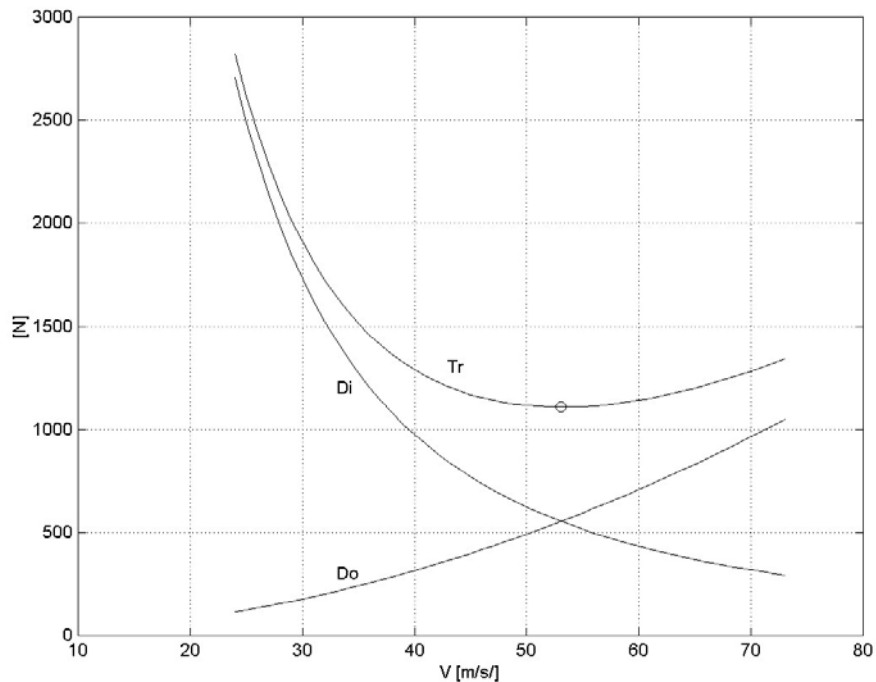
$$T_r = D = \frac{\rho S}{2} C_{D0} V^2 + 2 \frac{KW^2}{\rho S} \frac{1}{V^2}$$

Kako je otpor zraka D u horizontalnom letu ovisan samo o brzini leta V , možemo odrediti režim leta pri kome je potrebna pogonska sila T_r minimalna. Taj problem se može matematički formulirati tako da se traži minimum funkcije $T_r(V)$ u ovisnosti o brzini leta V . Izjednačavanjem s nulom derivacije jednadžbe 8.8 po brzini V , dobivamo:

$$\frac{\rho S}{2} C_{D0} 2V - 4 \frac{KW^2}{\rho S} \frac{1}{V^3} = 0$$

Uz pomoć drugog uvjeta za horizontalni let $W = L$ i poslije sređivanja dobivamo:

$$K C_L^2 = C_{D0},$$



Slika 7-1. Potrebna pogonska sila T_r , nulti otpor D_0 i inducirani otpor D_i

što znači da je u režimu za minimalnu silu inducirani otpor jednak otporu pri nultom uzgonu.

Kada iz ove jednadžbe odredimo koeficijent uzgona

$$C_L = \sqrt{\frac{C_{D0}}{K}},$$

jednadžba za horizontalni let daje nam brzinu leta u tom režimu. Važno je uočiti da je potrebna sila ili potrebna snaga karakteristika letjelice, što je neka vrsta aerodinamičke kvalitete letjelice. Aerodinamički je bolja ona letjelica koja ima manju potrebnu snagu ili manju potrebnu silu.

Potrebna snaga P_r (*Power required*) bit će određena jednadžbom

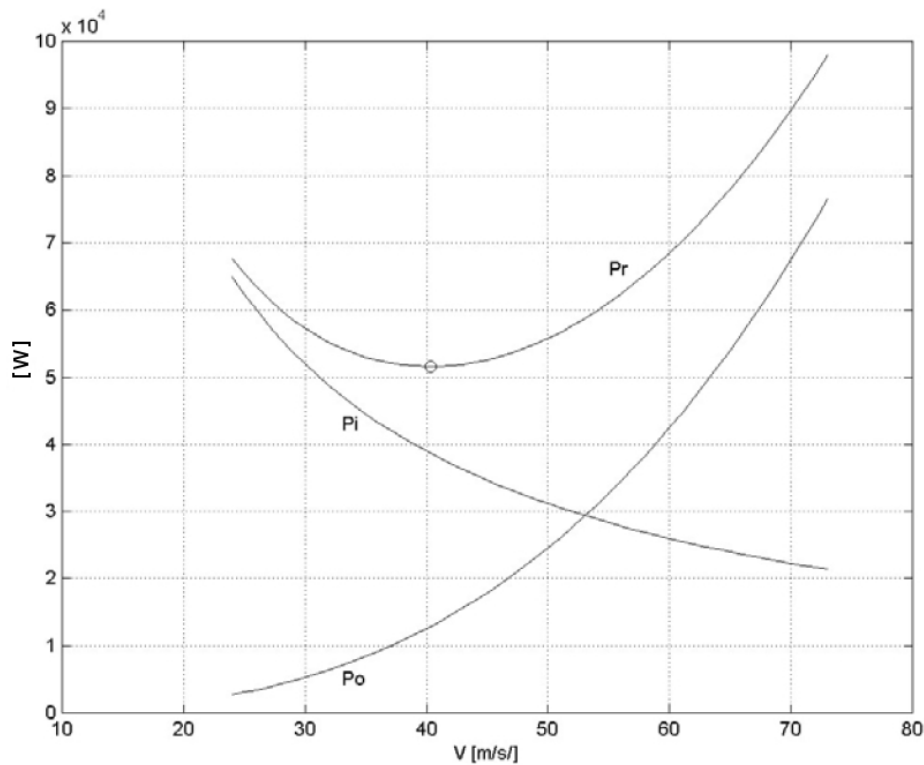
$$P_r = VD = \frac{\rho S}{2} V^3 (C_{D0} + K C_L^2)$$

koja također predstavlja zbroj snage koji je potreban da se svlada parazitski otpor i snage da se svlada inducirani otpor. Kao i za potrebnu silu, postoji režim leta kada je potrebna snaga P_r u minimumu. Eliminacijom koeficijenta uzgona iz uvjeta za horizontalni let:

$$V^2 C_L = \frac{2W}{\rho S}$$

dobivamo ovisnost potrebne snage samo o brzini:

$$P_r = DV = \frac{\rho S}{2} C_{D0} V^3 + 2 \frac{KW^2}{\rho S} \frac{1}{V}$$



Slika 7-2. Potrebna snaga $P_r = DV$, snaga VD_0 i VD_i za "mali" zrakoplov

Derivacijom po brzini leta potrebne snage dobivamo:

$$\frac{d(DV)}{dV} = \frac{\rho S}{2} C_{D0} 3V^2 - 2 \frac{KW^2}{\rho S} \frac{1}{V^2}$$

Uočimo da je prvi član na desnoj strani $3D_0$, a drugi točno D_i . Izjednačavanjem ove derivacije s nulom i korištenjem drugoga uvjeta za horizontalni let $L = W$ dobivamo:

$$3 \frac{\rho V^2}{2} S C_{D0} = \frac{KL^2}{\frac{\rho V^2}{2} S},$$

ili

$$KC_L^2 = 3C_{D0}.$$

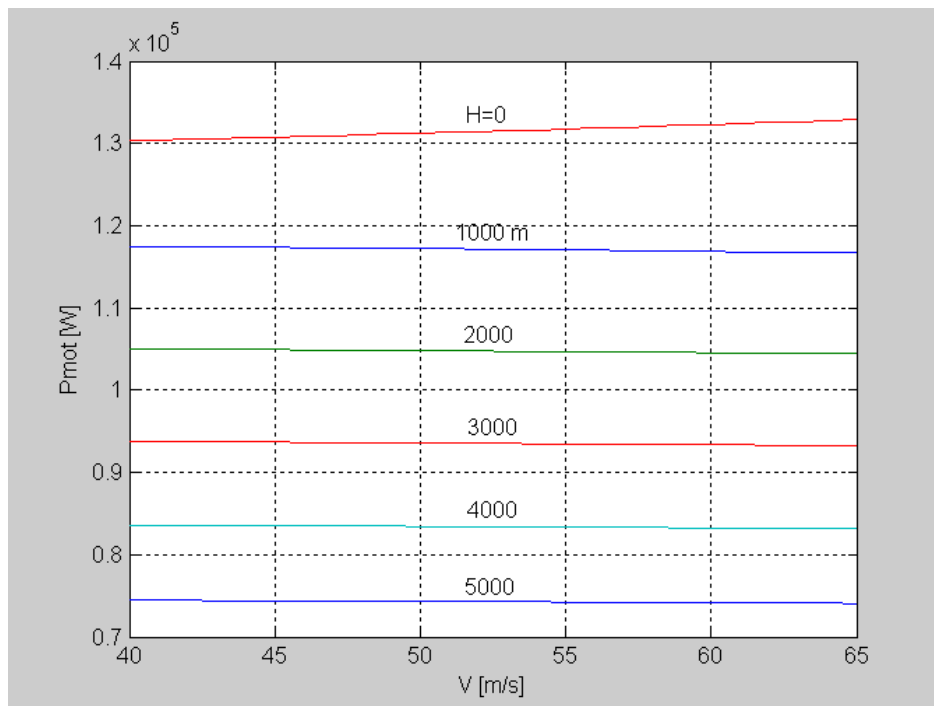
To znači da je u režimu leta za minimalnu potrebnu snagu inducirani otpor jednak trostrukoj vrijednosti otpora pri nultom uzgonu. Kada smo odredili koeficijent uzgona C_{LP} koji odgovara ovom režimu leta,

$$C_L = \sqrt{\frac{3C_{D0}}{K}}.$$

Brzinu leta nalazimo iz uvjeta $L = W$ za horizontalni let:

$$V = \sqrt{\frac{2gm}{\rho S} \frac{I}{C_L}}$$

Tijekom leta smanjuje se masa zrakoplova zbog potrošnje goriva, pa će i brzina potrebna za horizontalan let opadati. Međutim ta promjena mase nije velika. Obično je krajnja masa oko 80% od početne, pa je krajnja brzina oko 0.9 od početne. Za tako mali pad brzine leta ne mijenja se C_{D0} kao ni koeficijent K , pa koeficijent uzgona C_L ostaje konstantan.



Slika 7-3. Snaga motora P_{mot} ovisno o brzini leta za razne visine leta.

7.3 Raspoloživa sila ili snaga

S druge strane, imamo pogon i njegove karakteristike. Ako je pogon zrakoplova pomoću elise, onda motor daje neku snagu elisi P_{mot} . Na slici 3 prikazana je snaga motora LYCOMING O-360-A (180 HP).

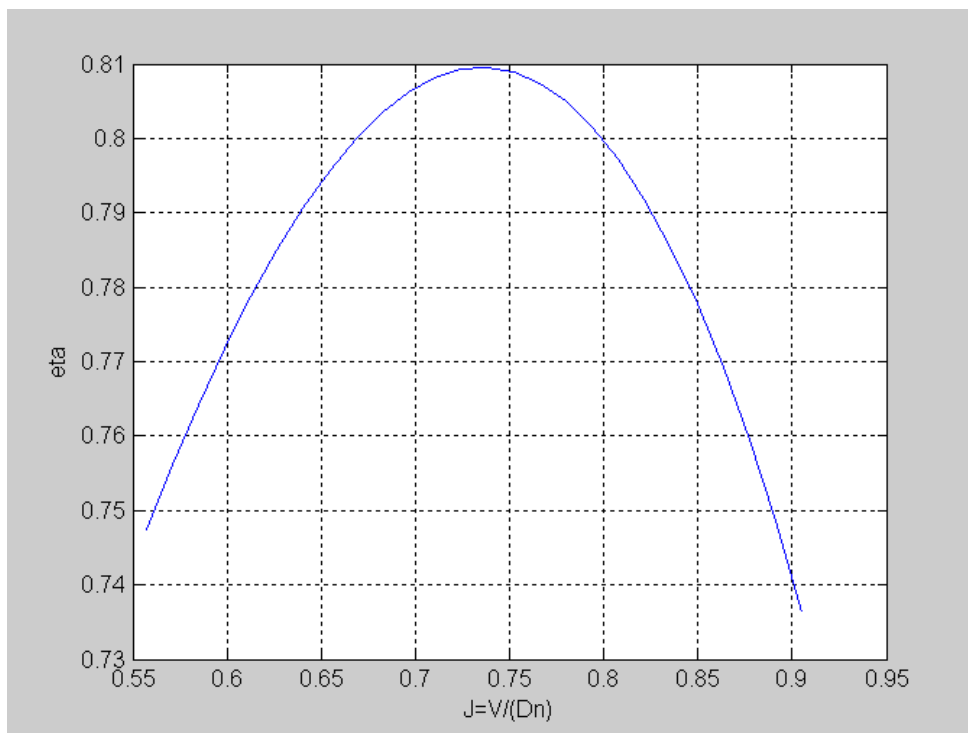
Raspoloživa pogonska snaga P_a (*Power available*) na elisi bit će

$$P_a = \eta_p \cdot P_{mot}$$

Tako i od elise ovisi kakve će biti raspoloživa snaga. Npr. dvokraka elisa konstantnog napadnog kuta zrakoplova Piper Cherokee PA-28, ima koeficijent učinkovitosti η_p koji ovisi o parametru $J = V/(nD)$.

$$\eta_{elise} = -1.6923J^3 + 1.4815J^2 + 0.5670J + 0.2644$$

D je promjer diska elise, a n je broj okretaja elise u sekundi. Ova funkcija $\eta_{elise}(J)$ prikazana je na dijagramu slika 4.



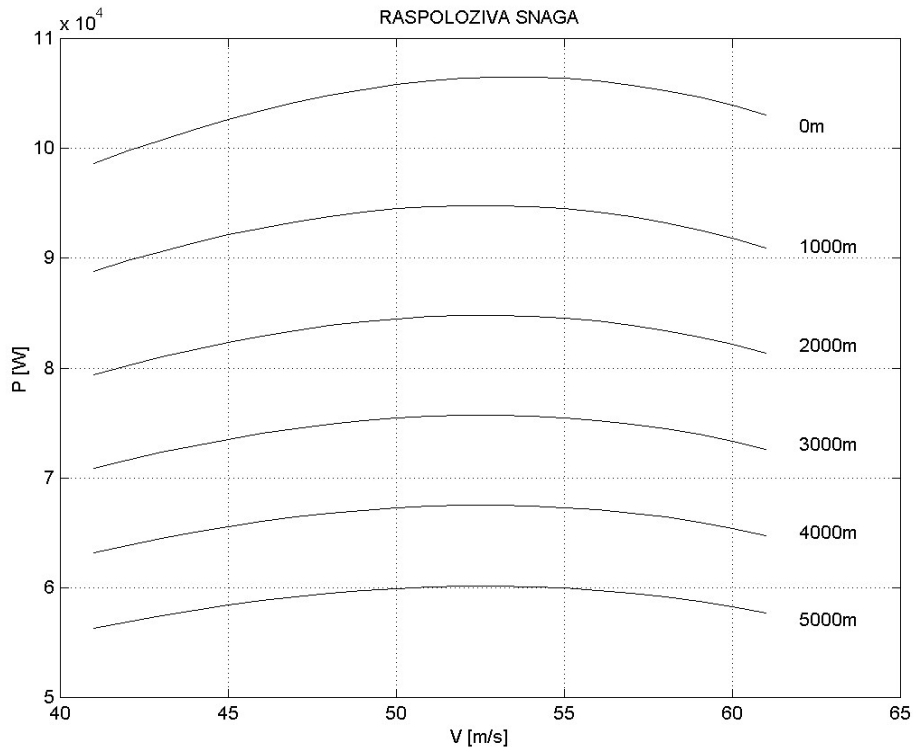
Slika 7-4. Koeficijent učinkovitosti dvokrake elise konstantnog napadnog kuta

Konačno na slici 5 prikazan je ovisnost raspoložive snage motora i elise

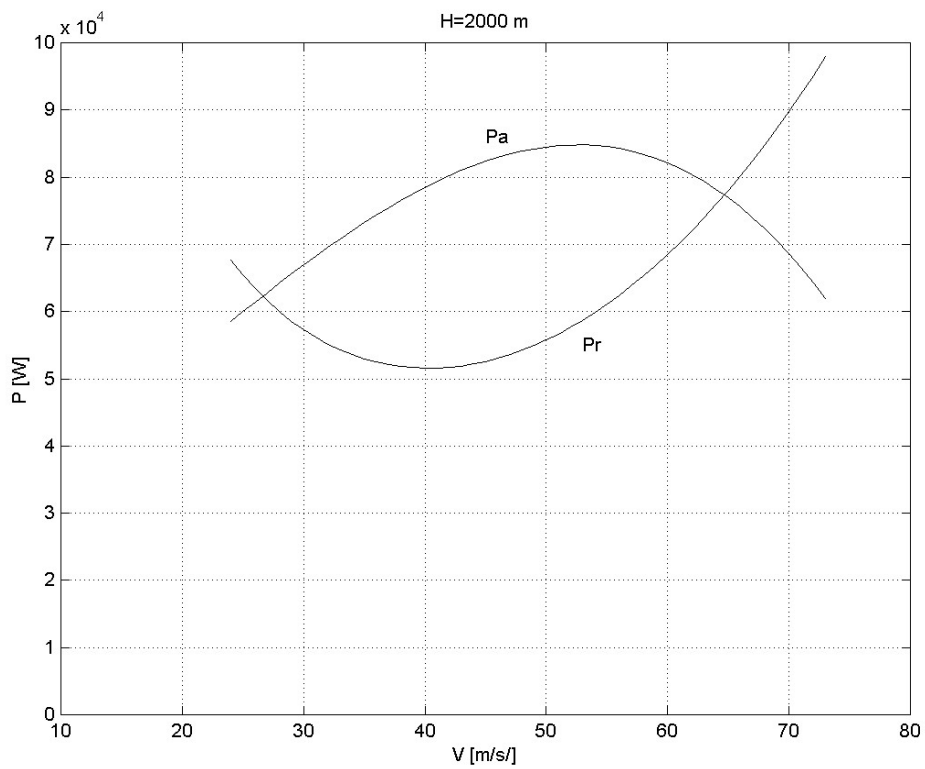
$$P_a = \eta_{elise} \cdot P_{mot}$$

ovisno o brzini leta a za razne visine.

Na nekoj odabranoj visini tu raspoloživu snagu $P_a(V)$ ovisno o brzini, možemo je usporediti s potrebnom $P_r(V)$, kao na slici 6. Iz te usporedbe dobivamo interval mogućih brzina leta od V_{min} do V_{max} s obzirom na pogon u kojem je $P_a > P_r$.

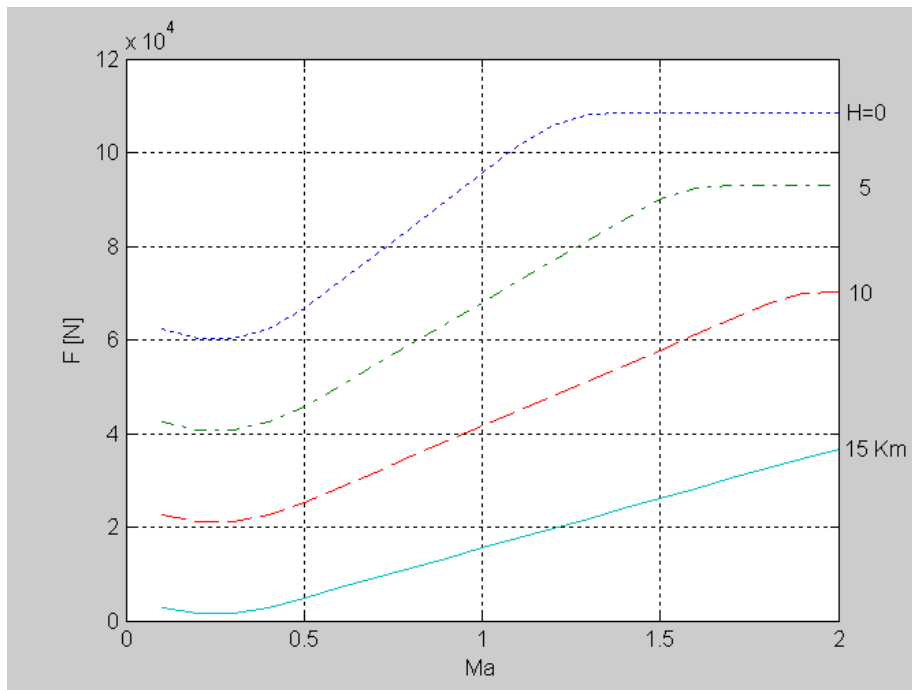


Slika 7-5. Raspoloživa snaga na elisi

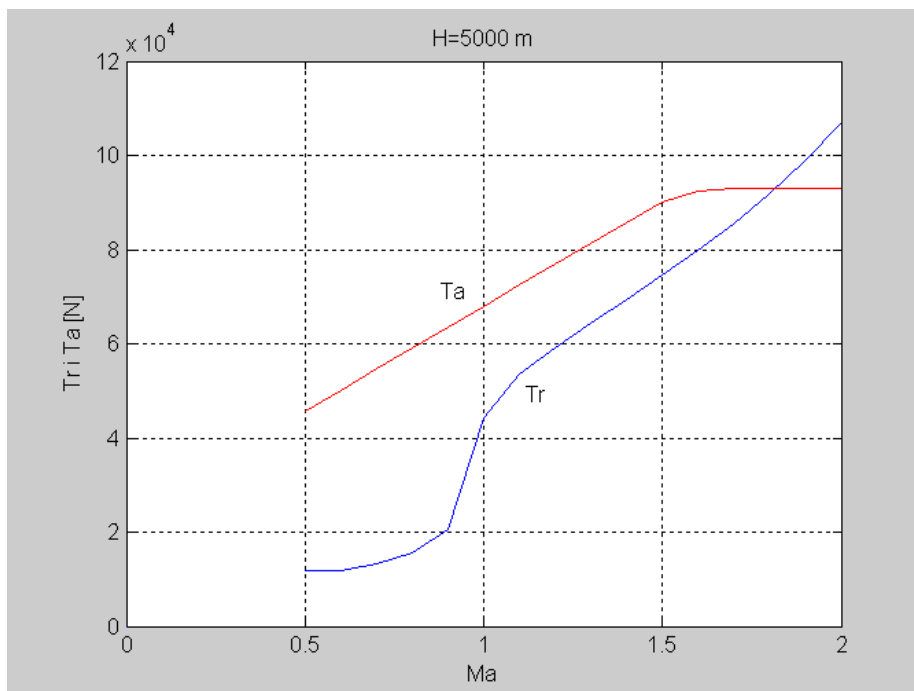


Slika 7-6. Minimalna i maksimalna brzina leta.

Ako zrakoplov ima mlazni pogon, onda je promatramo raspoloživu silu motora $T_a(V)$ u odnosu na potrebnu silu $T_r(V)$, kao što smo kod elisnih motora promatrali raspoloživu snagu u odnosu na potrebnu snagu.



Slika 7-7. Raspoloživa sila jednog mlaznog motora (lovac).



Slika 7-8. Raspoloživa i potrebna sila za lovac na visini 5000 m.

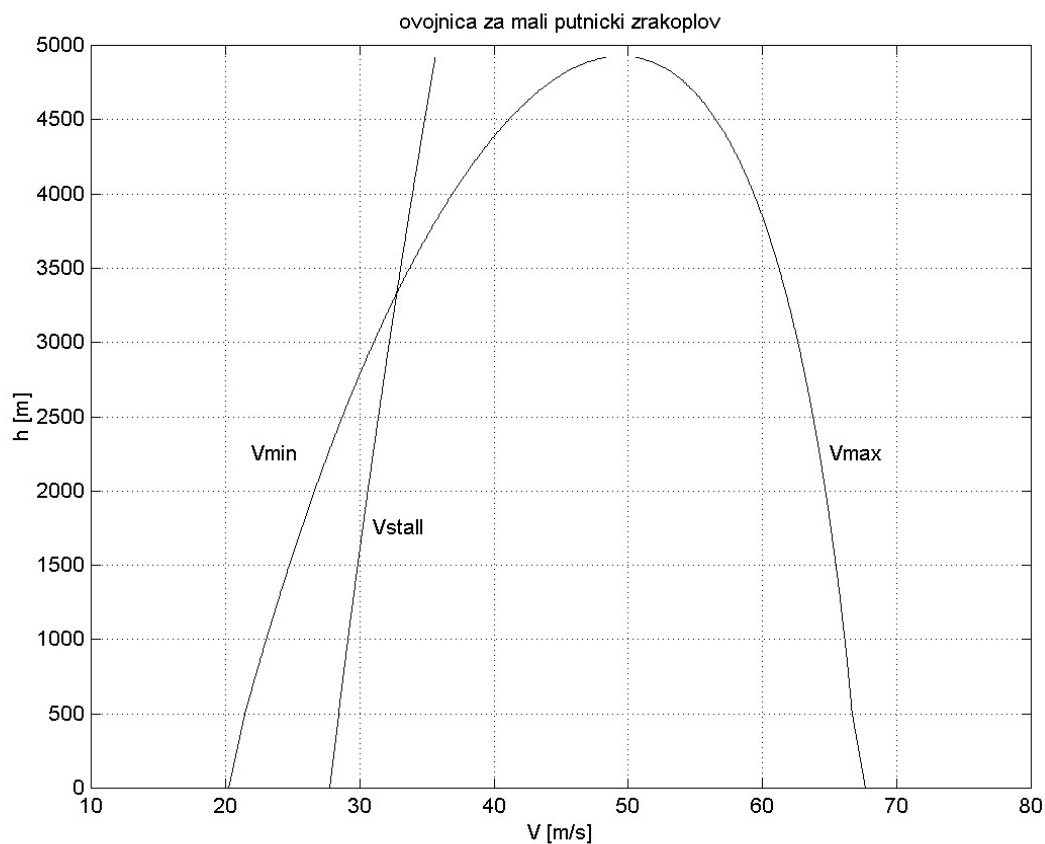
Na slici 7 prikazane su krivulje raspoložive pogonske sile za jedan lovac. Na slici 8 uspoređena je ta raspoloživa sila tog lovca na visini od 5000 m sa potrebnom silom na istoj visini. Vidimo da s tim motorom lovac može letjeti do brzine $Ma = 1.8$ na toj visini.

7.3.1 Ovojnice

Horizontalni let moguć je samo kada je

$$T_a \geq T_r = D \quad \text{ili} \quad P_a \geq P_r = DV$$

Da bi se odredila najmanja i najveća moguća brzinu leta iz ove jednadžbe, promatrat ćemo najveću raspoloživu snagu motora pri maksimalnom broju okretaja motora. Ta snaga prema dijagramu C-2 (prilog C) ovisi o tlaku okolnog zraka i pada kada taj tlak pada. Isto tako otpor ovisi o gustoći okolnog zraka. Prema tome najmanja i najveća moguća brzina bit će različite za razne visini leta jer su tlak i gustoća različiti. Dijagram koji nam daje V_{\min} i V_{\max} ovisno o visini za standardnu atmosferu predstavlja karakteristiku zrakoplova. Svakako se na taj dijagram moraju unijeti i druga ograničenja, kao npr. V_{stall} , koje je iz istih razloga različito na raznim visinama.



Slika 7-9. Ovojnica za "mali" zrakoplov

Izjednačavanjem raspoložive potrebne sile T_r i raspoložive sile T_a u uvjetima standardne atmosfere, dobivamo jednadžbu iz koje možemo izračunati V_{\min} i V_{\max} ovisno o visini leta H :

$$\eta(J) \frac{P_{mot}(H, V)}{V} = \frac{\rho S}{2} C_{D0} V^2 + 2 \frac{KW^2}{\rho S} \frac{1}{V^2}$$

Isto se tako iz jednadžbe $L = W$, za najveći mogući koeficijent uzgona $C_{L \max}$, izračunava V_{stall} ovisno o visini, jer gustoća zraka ovisi o visini:

$$V_{stall} = \sqrt{\frac{2W}{\rho S_{ref} C_{L \max}}}$$

Za "mali" zrakoplov nacrtane su krivulje $V_{\min}(h)$, $V_{\max}(h)$ i $V_{stall}(h)$ na slici 9. Jasno je da zrakoplov ne smije letjeti s brzinom koja je manja od $V_{\min}(h)$ ili $V_{stall}(h)$, niti može letjeti s brzinom koja je veća od $V_{\max}(h)$. Zato ove krivulje predstavljaju teoretske ovojnice područja režima leta zrakoplova.

7.3.2 Primjer

Nacrtati dijagram ovojnica za "mali" zrakoplov (slika 5), ako klipni motor, prema prilogu C, ima kutnu brzinu $\omega = 240 \text{ rad/s}$, a elisa ima koeficijent učinkovitosti

$$\eta(J) = -1.6923J^3 + 1.4815J^2 + 0.5670J + 0.2644,$$

gdje je $J = \frac{V}{nD}$ parametar rada elise, n broj okretaja u sekundi, D promjer diska elise.

Najmanja i najveća brzina dobivaju se iz jednadžbe

$$P_a = P_r$$

u kojoj je raspoloživa snaga

$$P_a = \eta(J) \cdot P_{mot}(\omega, V, p, T),$$

jer je za najveću snagu motora tlak punjenja $p_s = p$, a potrebna snaga

$$P_r = V \cdot \left(\frac{\rho V^2}{2} S C_{D0} + \frac{KW^2}{\frac{\rho V^2}{2} S} \right)$$

Krivulje $V_{\min}(H)$ i $V_{\max}(H)$ na slici 5 nacrtane su pomoću programa *Ovojnica.m*, koji se nalazi na disketu u direktoriju *Performanse\Horizontalni let*.

7.4 Horizontalni let s konstantnim koeficijentom otpora i uzgona

Da bi takav zrakoplov letio horizontalno s konstantnim koeficijentom uzgona njegova brzina mora se mijenjati ovisno o promjeni mase.

$$V = \sqrt{\frac{2g}{\rho S} \frac{m}{C_L}}$$

Najveća brzina V_i bit će za početnu masu m_i , a najmanja V_k za krajnju masu m_k . Odnos krajnjeg prema početnom Machovom broju za konstantni koeficijent uzgona tijekom leta je

$$\frac{Ma_k}{Ma_i} = \sqrt{\frac{m_k}{m_i}}$$

jer je brzina zvuka u horizontalnom letu konstantna. U tom intervalu Machovog broja za mnoge zrakoplove su aerodinamički koeficijenti konstantni ili praktično konstantni, pa je koeficijent uzgona funkcija samo napadnog kuta. Ako je napadni kut konstantan bit će i koeficijent totalnog otpora konstantan $C_D = C_{D0} + KC_L^2$, zato što je koeficijent nultog otpora konstantan C_{D0} , a zato što je za konstantan napadni kut konstantan je i koeficijent uzgona. U tom slučaju zrakoplov tijekom leta ima konstantan koeficijent totalnog otpora i s konstantan koeficijentom uzgona.

U ovim uvjetima koristimo Breguetovu jednadžbu, određujemo trajanje leta, razmatramo problem maskimalnog doleta i maksimalnog trajanja leta.

7.4.1 Dolet zrakoplova

Dolet zrakoplova jest najveća teoretska daljina do koje zrakoplov može letjeti s ukupnom količinom goriva na određenoj visini. Praktično to nije ostvarljivo, jer zrakoplov treba neku količinu goriva da poleti, zatim da dostigne željenu visinu, te da se spusti, i konačno u praksi mora ostati neka rezerva kad je sletio.

Želimo odrediti koliki put može preći zrakoplov u horizontalnom letu ako potroši masu goriva m_f . Za vrijeme leta masa zrakoplova m umanjuje se za potrošeno gorivo. Neka je dm promjena mase u vremenskom intervalu dt . Ta promjena mase dm jednaka je produktu vremena dt i derivacije mase po vremenu \dot{m} . Ako sa dR označimo element puta, za vrijeme promjene mase dm , onda je duž tog elementarnog puta

$$\frac{dR}{dm} = \frac{Vdt}{\dot{m}dt} = \frac{V}{\dot{m}}$$

Jasno je da je ta promjena mase pad mase, tj. da je $\dot{m} < 0$. Masa zrakoplova je zbroj promjenljive mase goriva \dot{m}_f (*fuel*) i konstantnog dijela mase m_c .

$$m = m_c + m_f$$

To znači da je $\dot{m} = \dot{m}_f$, a to je masena potrošnja goriva u jedinici vremena.

Za zrakoplove s elisom potrošnja goriva \dot{m}_f praktički je proporcionalna razvijenoj snazi motora. Zato je $\dot{m} = -C_P P_{mot}$. Koeficijent C_P nazivamo specifična masena potrošnja motora. On ima dimenziju masenog protoka po jedinici snage [$kg/s/W$]. Raspoloživa snaga motora P_{mot} pomnožena s koeficijentom elise η_p predstavlja raspoloživu pogonsku snagu na elisi $T_a V$, koja je u horizontalnom letu s konstantnom brzinom jednaka potrebnoj snazi za let:

$$\eta_p P_{mot} = VD.$$

Kako je $\dot{m} = -C_P P_{mot}$ bit će:

$$\dot{m} = -C_P \frac{VD}{\eta_p},$$

pa je gornja jednadžba za derivaciju puta po masi:

$$\frac{dR}{dm} = \frac{V}{\dot{m}} = \frac{V}{-C_P} \frac{\eta_p}{VD} = -\frac{\eta_p}{C_P} \frac{L}{D} \frac{1}{gm}.$$

Ovu jednadžbu možemo integrirati od neke inicijalne mase m_i do neke krajnje m_k . Razlika $m_i - m_k$ je količina goriva koja je potrošena na prijeđenom putu.

$$R = \frac{\eta_p}{gC_P} \int_{m_i}^{m_k} \frac{C_L}{C_D} \frac{dm}{m}$$

Pri tome pretpostavljamo da je tijekom leta bio konstantan odnos $\frac{C_L}{C_D} = \frac{C_L}{C_{D0} + KC_L^2}$, a da

brzina udovoljava uvjet horizontalnog leta:

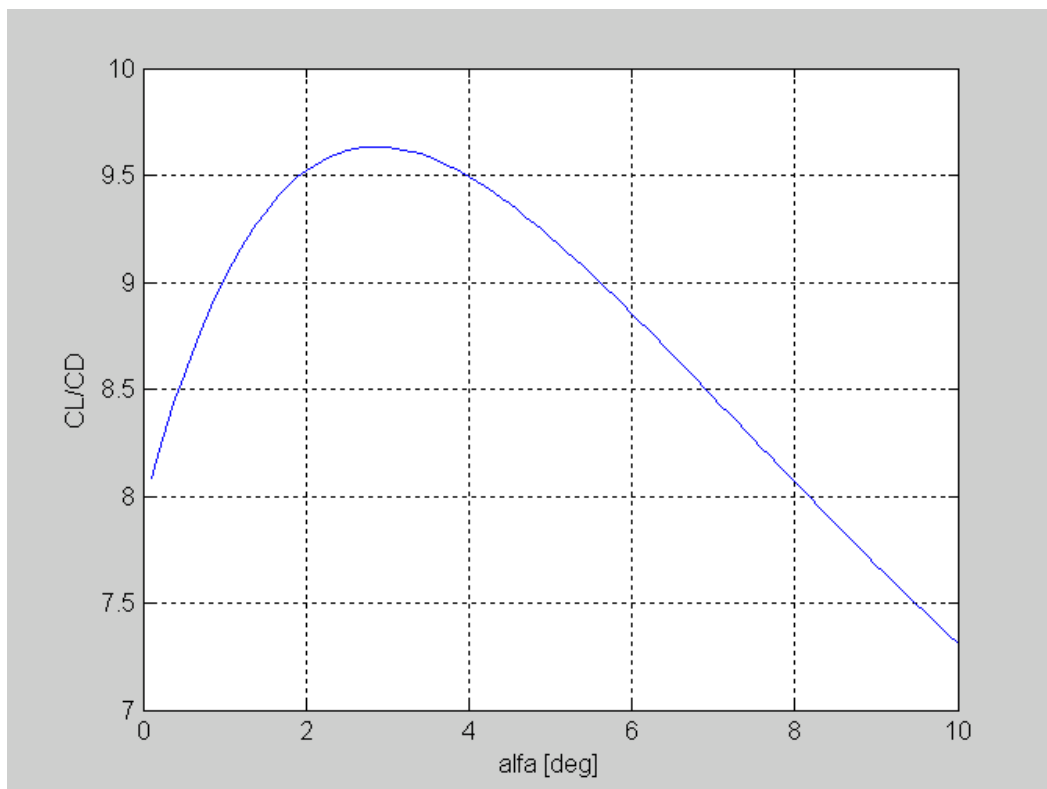
$$V = \sqrt{\frac{2W}{\rho S C_L}}$$

Integriranjem od početnog stanja i do krajnjeg stanja k dobivamo:

$$R = \frac{\eta_p}{gC_P} \frac{C_L}{C_D} \ln\left(\frac{m_i}{m_k}\right)$$

Ovo je poznata jednadžba prijeđenog puta koja se često u literaturi naziva *Bréguetova jednadžba doleta* i ako je ovu jednadžbu prvi postavio Devillers 1918, zatim Coffin 1919, pa

tek Breguet 1921. Kao što vidimo put je proporcionalan odnosu C_L/C_D . Koliki će biti pređeni put to ovisi koji smo odabrali koeficijent uzgona, odnosno koliki je bio napadni kut tijekom leta. Tom napadnom kutu odgovara koeficijent uzgona $C_L = C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha$, a njemu koeficijent otpora $C_D = C_{D0} + K \cdot C_L^2$, pa za taj izabrani napadni kut odgovara i određeni odnos C_L/C_D . Pri tome brzina se mijenja tako da ude udovoljen uvjet horizontalnog leta za spomenuti koeficijent uzgona.



Slika 7-10. Odnos C_L/C_D ovisno o napadnom kutu za mali putnički zrakoplov.

Na slici 10 prikazan je odnos C_L/C_D za mali putnički zrakoplov ovisno o napadnom kutu. Jasno se vidi sa slike da C_L/C_D ima maksimalnu vrijednost za neki napadni kut. Za taj napadni kut bit će najveći pređeni put koga nazivamo dolet zrakoplova ako je on izračunat za cjelokupnu masu goriva m_f . Napadnom kutu odgovara koeficijenta uzgona C_L , pa možemo namjesto ovisnosti C_L/C_D o napadnom kutu promatrati ovisnost odnosa C_L/C_D o koeficijentu uzgona :

$$\frac{C_L}{C_D} = \frac{C_L}{C_{D0} + KC_L^2} = f(C_L)$$

Maksimum ove funkcije nalazimo izjednačavanjem s nulom njene derivacije po koeficijentu uzgona:

$$\frac{df}{dC_L} = \frac{1 \cdot (C_{D0} + KC_L^2) - C_L \cdot 2KC_L}{(C_{D0} + KC_L^2)^2} = 0$$

Odatle dobivamo:

$$KC_L^2 = C_{D0}$$

ili

$$C_L = \sqrt{\frac{C_{D0}}{K}}$$

Drugim riječima dolet zrakoplova dobivamo kad je inducirani otpor jednak parazitskom otporu. Uočimo da je u tom horizontalnom letu s konstantnom brzinom

$$L = W$$

$$T_r = D$$

pa je

$$T_r = W \frac{D}{L} = \frac{W}{C_L/C_D}$$

Iz ove jednadžbe vidimo da najvećim odnosom C_L/C_D dogovara najmanja potrebna pogonska sila, a sad smo vidjeli da u tim uvjetima imamo najveći pređeni put = dolet.

7.4.2 Primjeri

Primjer 1

Odrediti za mali putnički zrakoplov otklone kormila visine za režim leta za najveći dolet.

U režimu leta za maksimalni dolet inducirani otpor jednak je parazitskom otporu

$$C_L = \sqrt{\frac{C_{D0}}{K}} = \sqrt{\frac{0.0259}{0.104}} = 0.499$$

Kut otklona kormila visine dobivamo iz uvjeta da je koeficijent sile uzgona u ravnotežnom letu $C_L = 0.499$ i da je u ravnotežnom letu ($C_m = 0$)

$$\begin{aligned} C_L &= C_{L0} + C_{L\alpha} \alpha_R + C_{L\delta} \delta_m \\ 0 &= C_{m0} + C_{m\alpha} \alpha_R + C_{m\delta} \delta_m \end{aligned}$$

ili

$$0.499 = 0.249 + 4.73 \alpha + 0.216 \cdot K_f \delta_m$$

$$0 = -0.002 - 0.822 \cdot \alpha - 0.577 \cdot K_f \delta_m$$

$$K_f \delta_m = -0.0842 = -4.8^\circ$$

$$\alpha_r = 0.567 = 3.2^\circ$$

S obzirom da je otklon kormila visine mali $K_f = 1$

Primjer 2

Određiti najveći dolet ako motor radi s 75% snage, na visini 2000 m za potrošenih 48 US galon = 48 · 3.785 lit = 181.7 lit goriva.

U režimu za najveći dolet inducirani otpor jednak je nultom otporu, pa je prema prethodnom primjeru

$$C_L = 0.499$$

$$C_D = 2 \cdot C_{D0} = 2 \cdot 0.0259 = 0.0518$$

Na početku leta masa $m_i = m_L + m_g = 1088$. Tom koeficijentu uzgona i toj masi odgovara brzina horizontalnog leta:

$$V_i = \sqrt{\frac{2 m_i g}{\rho S C_L}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1089 \cdot 9.81}{1.006 \cdot 15.1 \cdot 0.499}} = 53.1 \text{ m/s},$$

Specifična masa goriva je 0.720 kg/lit, pa je potrošeno $m_f = 181.7 \cdot 0.720 = 130 \text{ kg}$. Poslije toga masa zrakoplova $m_k = 1089 - 144 = 959 \text{ kg}$. Na kraju leta bit će brzina leta:

$$V_k = \sqrt{\frac{m_k}{m_i}} V_i = \sqrt{\frac{959}{1089}} \cdot 53.1 = 49.8 \text{ m/s}.$$

Prema dijagramu C-5 u prilogu, specifična potrošnja je $0.850 \cdot 10^{-7}$, a u intervalu od $V_k = 49.8$ do $V_i = 53.1$ možemo uzeti da je prosječni koeficijent učinkovitosti elise, prema jednadžbi u primjeru 1, $\eta_{elisa} = 0.81$. Tako dobivamo dolet u tom režimu:

$$R = \frac{\eta_{elisa} C_L}{g C_P C_D} \ln\left(\frac{m_i}{m_k}\right) = \frac{0.81}{9.81 \cdot 0.850 \cdot 10^{-7}} \cdot \frac{0.499}{0.0518} \cdot \ln\left(\frac{1089}{959}\right) = 1190 \text{ km}.$$

Za mlazne motore je specifična masena potrošnja goriva proporcionalna pogonskoj sili $\dot{m} = -C_T T$. Taj koeficijent masene potrošnje goriva C_T ima dimenziju masenog protoka po jedinici sile [kg/s/N]. U horizontalnom ravnotežnom letu konstantnom brzinom, potrebna pogonska sila T_r jednaka je otporu D , a uzgon L jednak je težini mg , te se polazna jednadžba transformira u oblik:

$$\frac{dR}{dm} = \frac{V}{\dot{m}} = \frac{V}{-C_T T} = -\frac{V}{C_T} \frac{L}{D} \frac{1}{gm}$$

Normalno u horizontalnom letu koeficijent masene potrošnje mlaznog motora C_T konstantan, pa se integriranjem te jednadžbe od početka leta do kraja dobiva:

$$R = -\frac{1}{gC_T} \int_{m_i}^{m_k} V \frac{C_L}{C_D} \frac{dm}{m};$$

m_i je početna masa zrakoplova, a m_k krajnja masa. Pretpostavili smo da letimo s konstantnim koeficijentom uzgona a da se tijekom leta brzina mijenja tako da je zadovoljen uvjet horizontalnog leta.

$$V = \sqrt{\frac{2W}{\rho S C_L}}.$$

Dolet će onda biti

$$R = -\frac{1}{gC_T} \int_{m_i}^{m_k} \sqrt{\frac{2gm}{\rho S C_L}} \frac{C_L}{C_D} \frac{dm}{m} = -\frac{1}{C_T} \sqrt{\frac{2}{g\rho S}} \int_{m_i}^{m_k} \frac{\sqrt{C_L}}{C_D} \frac{dm}{\sqrt{m}}$$

Prema usvojenim uvjetima tijekom leta konstantan je koeficijent uzgona jer se ne mijenja napadni kut i konstantan je i koeficijent totalnog otpora jer je $C_D = C_{D0} + K \cdot C_L^2$, te možemo aerodinamičke koeficijente izvući ispred integrala. Tako dobivamo

$$R = -\frac{1}{C_T C_D} \sqrt{\frac{2}{g\rho S}} C_L \int_{m_i}^{m_k} \frac{dm}{\sqrt{m}}$$

Integriranjem od m_i do m_k dobivamo dolet leta za zrakoplove s mlaznim motorima

$$R = \frac{2}{C_T C_D} \sqrt{\frac{2}{g\rho S}} C_L (\sqrt{m_i} - \sqrt{m_k}),$$

ili

$$R = \frac{2}{gC_T} \frac{C_L}{C_D} (V_i - V_k).$$

To je *Breguetovu jednadžbu doleta* za zrakoplove s mlaznim motorima. Zapamtimo da je ta jednadžba za zrakoplove s mlaznim motorima izvedena uz iste pretpostavke kao za elisni pogon, tj. za konstantan napadni kut (konstantan koeficijent uzgona) i za brzinu koja udovoljava horizontalni let.

Breguetova jednadžba za dolet leta može se staviti u oblik:

$$R = \frac{2}{C_T} \sqrt{\frac{2}{g\rho S}} (\sqrt{m_i} - \sqrt{m_f}) \cdot \frac{\sqrt{C_L}}{C_D}$$

Vidimo da dolet ovisi o izabranom napadnom kutu tj. usvojenom koeficijentu uzgona. Dolet mlaznog zrakoplova bit će najveći ako je izabran napadni kut koji daje najveći odnos $\sqrt{C_L}/C_D$. Potražimo maksimum te ovisnosti. Dolet leta bit će najveći kada je funkcija

$$f(C_L) = \frac{\sqrt{C_L}}{C_{D0} + KC_L^2}$$

u maksimumu po C_L :

$$\frac{df}{dC_L} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{C_L}}(C_{D0} + KC_L^2) - \sqrt{C_L} \cdot 2KC_L}{(C_{D0} + KC_L^2)^2} = 0$$

Odatle dobivamo da je

$$KC_L^2 = \frac{1}{3} C_{D0}.$$

tj. inducirani otpor jednak je trećini parazitskog otpora. To znači da će dolet zrakoplova s mlaznim pogonom biti najveći ako letimo s napadnim kutom za koji je:

$$C_L = \sqrt{\frac{1}{3} \frac{C_{D0}}{K}},$$

a brzina leta je određena iz uvjeta za horizontalni let, što znači da će ona opadati jer masa zrakoplova opada zbog potrošnje goriva.

7.4.3 Maksimalno trajanje leta (Endurance)

Ponekad nam je potrebno što dulje boraviti u zraku. To je slučaj kada ne možemo sletjeti iz bilo kojih razloga te moramo čekati da se stvore uvjeti za slijetanje. Takvo čekanje treba ostvariti s režimom leta u kome je najveće vrijeme trajanja leta za određenu količinu goriva. Sa E označavamo vrijeme trajanja letenja (*endurance*). Ono je jednako vremenu da se masa zrakoplova smanji za masu goriva, jer let traje dok ima goriva:

$$E = \int_i^k dt = \int_i^k \frac{dm}{\dot{m}}$$

I u ovom slučaju treba odrediti optimalne režime leta zrakoplova s elisom i zrakoplova s mlaznim pogonom.

Zrakoplov s elisom ima masenu potrošnju $\dot{m} = -C_P P_{mot}$, gdje je P_{mot} snaga motora. Ta snaga motora pomnožena s koeficijentom elise η_P daje potrebnu snagu koja je jednaka produktu VD . Zato je trajanje leta zrakoplova s elisim pogonom:

$$E = \int_i^k \frac{dm}{\dot{m}} = \int_i^k \frac{dm}{-C_P VD/\eta_P} = \frac{\eta_P}{C_P} \int_i^k \frac{1}{V} \frac{L}{D} \frac{dm}{gm} = \frac{\eta_P}{gC_P} \int_i^k \frac{1}{V} \frac{C_L}{C_D} \frac{dm}{m}$$

Za uvjete s konstatnim napadnim kutom i odgovarajućom brzinom za horizontalni let ova jednadžba dobiva oblik

$$E = \frac{\eta_P}{gC_P} \sqrt{\frac{\rho S}{2g}} \frac{C_L^{3/2}}{C_D} \int_i^k m^{-3/2} dm$$

a poslije integracije

$$E = \frac{2\eta_P}{gC_P} \sqrt{\frac{\rho S}{2g}} \frac{C_L^{3/2}}{C_D} \left(\frac{1}{\sqrt{m_k}} - \frac{1}{\sqrt{m_i}} \right)$$

ili

$$E = \frac{2\eta_P}{gC_P} \frac{C_L}{C_D} \left(\frac{1}{V_k} - \frac{1}{V_i} \right).$$

Da bi E bilo što veće, trebamo napadni kut odabrati tako da funkcija koeficijenta uzgona

$$f(C_L) = \frac{C_L^{3/2}}{C_D} = \frac{C_L^{3/2}}{C_{D0} + KC_L^2}$$

bude u maksimumu.

$$\frac{df}{dC_L} = \frac{\frac{3}{2} \sqrt{C_L} (C_{D0} + KC_L^2) - C_L \sqrt{C_L} 2KC_L}{(C_{D0} + KC_L^2)^2} = 0,$$

odakle je

$$KC_L^2 = 3C_{D0},$$

a to znači da je inducirani otpor trostruko veći od parazitskog otpora a to je uvjet da potrebna snaga bude u minimumu.

Za zrakoplov s mlaznim motorom izraz za trajanje letenja bit će:

$$E = \int_i^k \frac{dm}{\dot{m}} = \int_i^k \frac{dm}{-C_T T} = -\frac{1}{C_T} \int_i^k \frac{L}{D} \frac{dm}{gm} = -\frac{1}{C_T} \int_i^k \frac{C_L}{C_D} \frac{dm}{gm}$$

Za uvjete s početka ovog poglavlja bit će

$$E = \frac{1}{gC_T} \frac{C_L}{C_D} \ln \left(\frac{m_i}{m_k} \right)$$

Da bi se postigao maksimum trajanja leta, treba letjeti s napadnim kutom koji će odnos C_L/C_D učiniti maksimalnim. Vidjeli smo da je taj odnos najveći ako je inducirani otpor jednak parazitskom otporu

$$KC_L^2 = C_{D0},$$

a to je slučaj najmanjeg otpora u horizontalnom letu.

7.5 Trajanje leta i dolet električnog zrakoplova

Za električni zrakoplov raspoloživa snaga kojom se savladava potrebna snaga jednaka produktu sile otpora i brzine dolazi od baterije. Kapacitet baterije tipično se izražava u amper satima ili miliamper satima. Peukertova jednadžba povezuje kapacitet baterije C u amper satima (ukupna količina električnog naboja koja može biti pohranjena u bateriji), i jakost struje u amperima sa vremenom pražnjenja u satima

$$t = \frac{C}{i^n} .$$

Značajka pražnjenja baterije n ovisna je o tipu baterije i temperaturi te se mijenja sa starenjem baterije. Za lithium-polymer baterije vrijedi $n=1.3$. Ta jednadžba nije prikladna za promjenjive brzine pražnjenja te je prihvatljiva modifikacija

$$t = \frac{Rt}{i^n} \left(\frac{C}{Rt} \right)^n ,$$

gdje je Rt vrijeme pražnjenja baterije u satima. Snaga baterije može se procijeniti temeljem električnog napona U i jakosti struje i

$$P_B = U i ,$$

odnosno za jakost struje i iz relacije za vrijeme pražnjenja

$$P_B = U \frac{C}{Rt} \left(\frac{Rt}{t} \right)^{1/n} .$$

Ta snaga bit će umanjena za gubitke motora, kontrolera i propelera što se može zajednički označiti sa η_{tot} . Tako bi se ukupna raspoloživa snaga pogona

$$P_a = \eta_{tot} U \frac{C}{Rt} \left(\frac{Rt}{t} \right)^{1/n} ,$$

izjednačila s potrebnom snagom

$$P_r = DV = \frac{\rho S}{2} C_{D0} V^3 + 2 \frac{KW^2}{\rho S} \frac{1}{V}.$$

Izjednačavanjem potrebne i raspoložive snage može se odrediti t vrijeme praznjenja, odnosno istrajnost leta

$$t = E = (Rt)^{1-n} \left[\frac{\eta_{tot} U C}{P_r} \right]^n$$

$$E = (Rt)^{1-n} \left[\frac{\eta_{tot} U C}{\frac{\rho S}{2} C_{D0} V^3 + 2 \frac{KW^2}{\rho S} \frac{1}{V}} \right]^n.$$

Temeljem navedenih jednadžbi jasno je da će se najveći dolet električnog zrakoplova ostvariti u režimu minimalne potrebne snage, odnosno kada je

$$C_L = \sqrt{\frac{3C_{D0}}{K}}$$

Dolet električnog zrakoplova za let s konstantnom brzinom V_{range} može se odrediti kao

$$R = EV_{range}.$$

Za maksimalni dolet prikladan je režim minimalne potrebne sile, odnosno

$$C_L = \sqrt{\frac{C_{D0}}{K}},$$

a tada je određena brzina leta koja će osigurati maksimalan dolet

$$V_{range} = \sqrt{\frac{2W}{\rho S} \frac{1}{C_L}} = \sqrt{\frac{2W}{\rho S} \sqrt{\frac{K}{C_{D0}}}}.$$

7.6 Praktični aspekti optimalnih režima za putničke zrakoplove

Komercijalni putnički zrakoplovi imaju veliki dolet i često je potrebna praktična relacija za određivanje doleta s raspoloživim gorivom. Pri tome od interesa je i problematika „nošenja

goriva“ (engl. fuel-tankering) koja razmatra isplativost nošenja veće količine goriva s praktične, operativne strane niza kraćih letova uz isplativost nadolijevanja na lokacijama s povoljnijim cijenama goriva.

U operativni aktivnostima pripreme leta koristi se pojam specifičnog doleta (engl. specific range)

$$SAR = \frac{dR}{dm} = \frac{dR/dt}{dm/dt} = \frac{V}{\dot{m}}.$$

Primjenom podatka za SAR moguće je lako izračunati inkrement doleta ostvariv s raspoloživom masom goriva

$$\Delta R = SAR \cdot \Delta m.$$

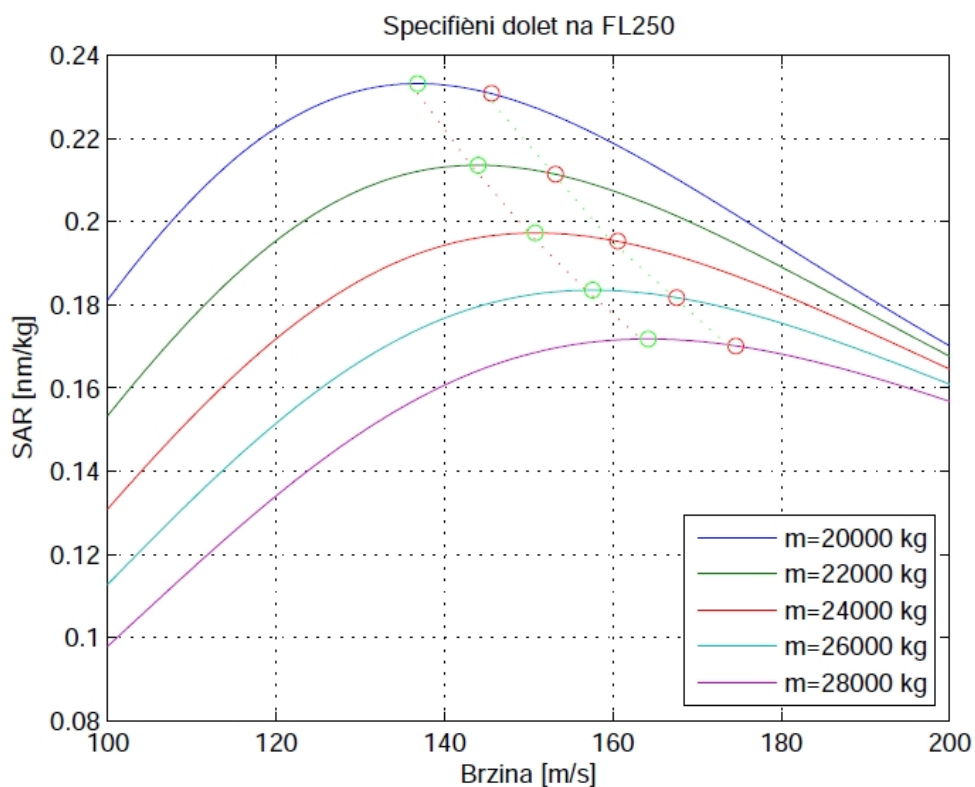
U praksi operateri komercijalnih zrakoplova koriste dva optimalna režima po pitanju doleta:

- Režim maksimalnog doleta, MRC (eng. Maximum range cruise),
- Režim ekonomskog doleta, LRC (engl. Long range cruise).

MRC režim predstavlja ranije opisan režim najvećeg doleta i za njega će SAR imati maksimalnu vrijednost u danim uvjetima.

LRC režim je režim leta s nešto većom brzinom leta od brzine za MRC te sa smanjenjem SAR za 1% od maksimalne vrijednosti. Operater na taj način leti nešto većom brzinom krstarenja što smanjuje vrijeme leta, a time povećava zadovoljstvo putnika. To ide na štetu potrošnje, ali smanjenja od svega 0.01 od maksimalne vrijednosti SAR.

To se može slikovito prikazati na primjeru regionalnog, dvomotornog, turbo-propelerskog zrakoplova za različite mase letjelice na odabranoj visini leta (FL250, engl. flight level, 25000ft = 7620 m). Dijagram prikazuje promjenu SAR određenog prema ranije navedenoj relaciji u ovisnosti o brzini leta. Zeleni kružići označavaju MRC režime, a crveni kružići LRC režime.



Slika 7-11. Ovisnost SAR o brzini leta i masi letjelice (dvomotorni turboprop putnički zrakoplov) za odabranu visinu leta $h=7620$ m: zeleni kružići MRC režimi; crveni kružići LRC režimi

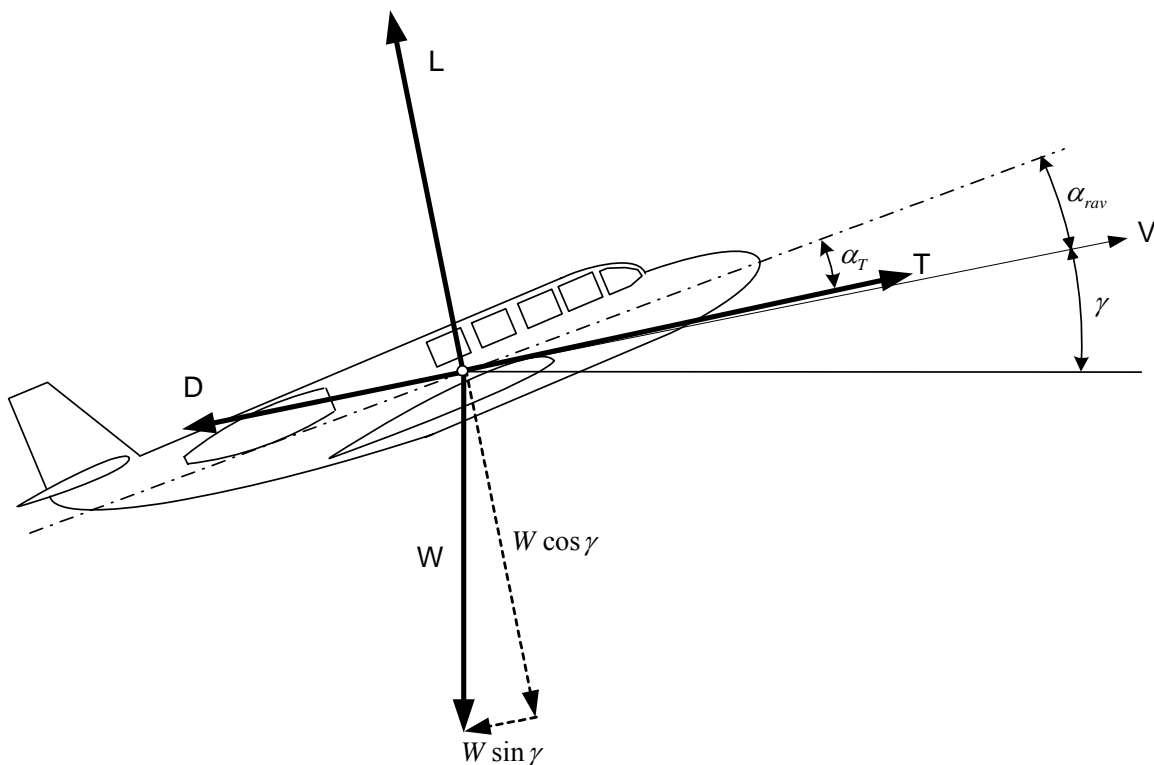
8 Penjanje i spuštanje zrakoplova

Promatramo stacionarno penjanje ili spuštanje zrakoplova u vertikalnoj ravnini. Jednadžbe ravnotežnog gibanja središta mase zrakoplova izveli smo na kraju prethodnog poglavlja:

$$m \frac{dV}{dt} = T - D - W \sin \gamma$$

$$mV \frac{d\gamma}{dt} = L \cos \phi - W \cos \gamma$$

$$mV \cos \gamma \frac{d\chi}{dt} = L \sin \phi$$



Slika 8-1. Zrakoplov u penjanju

Za gibanje u vertikalnoj ravnini kut skretanja χ je konstantan, te iz treće jednadžbe proizlazi da tada nema ni kuta valjanja $\phi = 0$. Tako dobivamo jednadžbe ravnotežnog gibanja u vertikalnoj ravnini koje smo mogli izvesti direktno sa slike 1 :

$$m \frac{dV}{dt} = T - D - W \sin \gamma$$

$$mV \frac{d\gamma}{dt} = L - W \cos \gamma$$

Za pravocrtno ($\gamma = const$) i stacionarno ($V = const$) penjanje ili spuštanje bit će

$$T = D + W \sin \gamma$$

$$L = W \cos \gamma$$

8.1 Penjanje

Iz prve jednadžbe su kut penjanja γ i brzina penjanja V_v :

$$\sin \gamma = \frac{T - D}{W}$$

$$V_v = V \sin \gamma = V \frac{T - D}{W}$$

Brzina penjanja V_v označava se u zrakoplovnoj praksi sa R/C (Rate of Climb), a tangens kuta γ označava se sa G i naziva se gradijent penjanja (Climb Gradient).

Iz jednakosti $L = W \cos \gamma$, koja je potrebna za penjanje (ili spuštanje), nameće se uvjet za penjanje na nekoj određenoj visini:

$$\frac{V^2 C_L}{\cos \gamma} = \frac{2W}{\rho S}$$

S kojom brzinom leta V , s kojim koeficijentom uzgona C_L , te s kojim kutom γ zrakoplov se treba penjati, nije apriorni određeno. Ovdje je problem optimizacije teži od onoga koji je bio u horizontalnom letu. Koriste se dvije mogućnosti optimizacije:

- najveći kut penjanja γ_{\max} (Best Angle of Climb)
- najveća brzina penjanja $V_{v \max}$ (Best Rate of Climb)

8.1.1 Najveći kut penjanja (najkraći put penjanja)

U stacionarnom penjanju pod kutom γ potrebna je pogonska sila

$$T_r = D + W \sin \gamma$$

Najprije valja uočiti da više nemamo jednakost otpora i potrebne pogonske sile. Potrebna pogonska sila treba svladati ne samo otpor, već i komponentu težine. Taj otpor u penjanju

$$D = qS(C_{D0} + KC_L^2) = qSC_{D0} + K \frac{L^2}{qS}$$

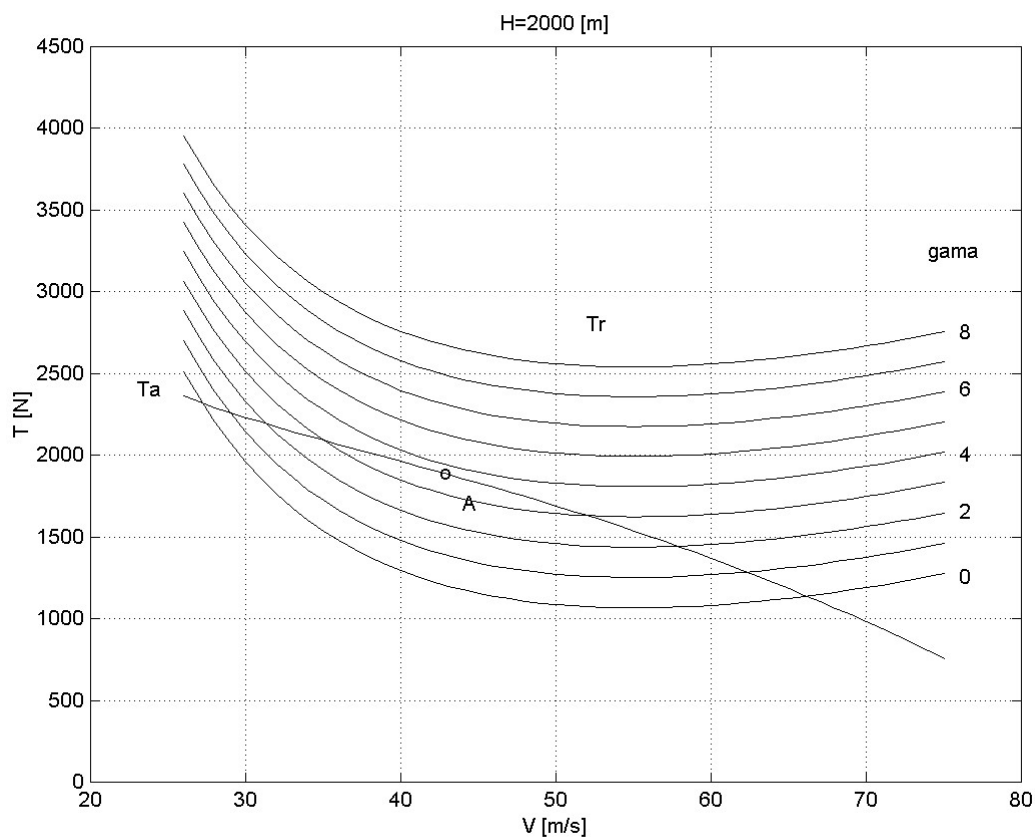
ne može se izraziti samo kao funkcija brzine, jer inducirani otpor ovisi o uzgonu a on ovisi on ovisi i o kutu penjanja $L = W \cos \gamma$.

$$D = qSC_{D0} + \frac{K W^2 \cos^2 \gamma}{q S},$$

Tako je potrebna sila u penjanju :

$$T_r = \frac{\rho S C_{D0}}{2} V^2 + \frac{2KW^2}{\rho S} \frac{1}{V^2} \cos^2 \gamma + W \sin \gamma .$$

Potrebna sila ovisi o tri parametra. Prvo, o kutu penjanja γ , zatim o brzini leta V i konačno o gustoći zraka. To znači da će na određenoj visini, gdje je gustoća zraka neka određena vrijednost, potrebna sila ovisiti o brzini leta i o izabranom kutu penjanja $T_r(V, \gamma)$. Ako se pretpostavi da je visina konstantna, može se promatrati dijagram kao na slici 2 na komu su ucrtane krivulje potrebne sile $T_r(V, \gamma)$ za konstantne kutove penjanja (od 0° do 9°).



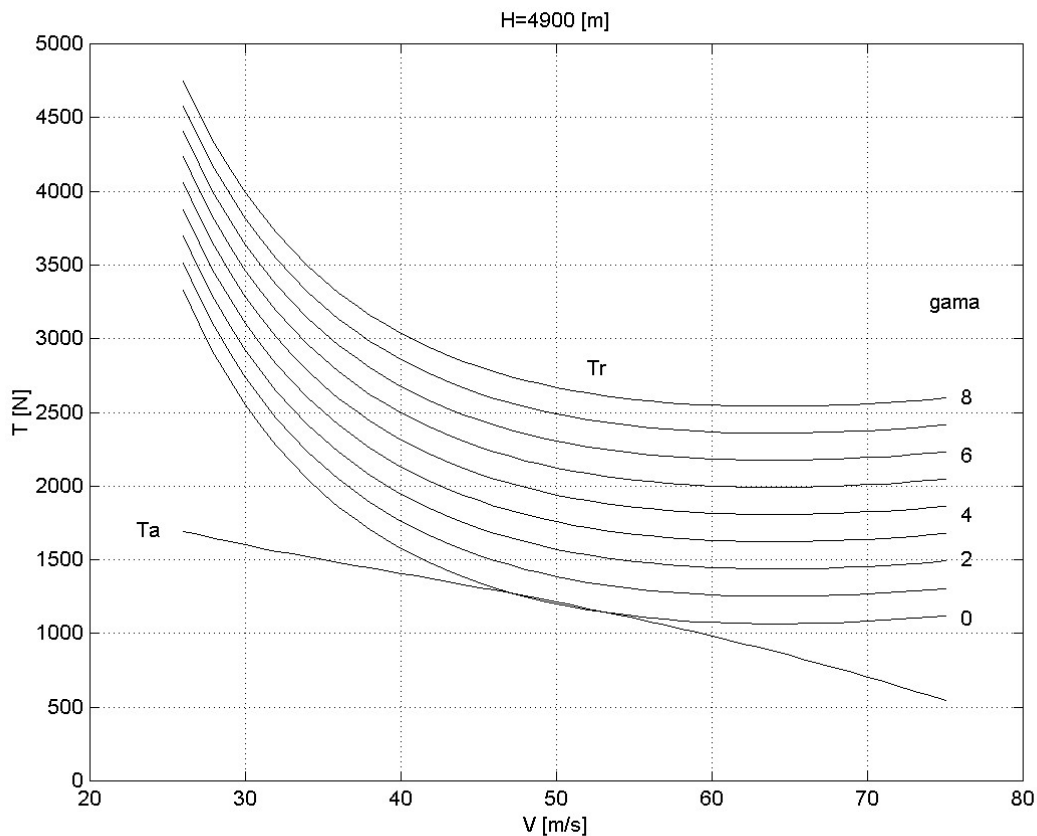
Slika 8-2. Potrebna sila ovisno o brzini leta i kutu penjanja za mali putnički zrakoplov.

S druge strane imamo raspoloživu silu (ili snagu pogona). Raspoloživa pogonska sila ovisi također o brzini $T_a(V)$ ali ne o kutu penjanja. Za neki određeni kut penjanja, u presjeku krivulja $T_r(V, \gamma) = T_a(V)$ dobivamo V_{\min} i V_{\max} , granice intervala mogućih brzina s kojima se može zrakoplov penjati pod tim kutom. Povećavanjem kuta penjanja, kao što se to vidi sa slike 2 taj se interval smanjuje, da bi se za neki određeni kut penjanja te dvije krivulje $T_a(V)$ i $T_r(V, \gamma)$ tangirale u točki A. Kut penjanja ne može biti veći od te vrijednosti, jer pogon ne

raspoláže dovoljnom silom, da bi se taj zrakoplov mogao penjati pod većim kutom. Dakle, krivulja $T_r(V, \gamma)$, na kojoj je točka A, određuje najveći kut penjanja, s kojim se taj zrakoplov s tim pogonom može penjati. Označimo taj kut sa BAC (*Best angle of climb*). Istodobno na apscis točke A očitavamo kojom brzinom treba letjeti V_{BAC} . Koeficijent uzgona, za taj najveći kut penjanja, nalazimo iz uvjeta da je $L = W \cos \gamma$:

$$C_L = \frac{2W \cos \gamma}{\rho S V^2}$$

To rješenje $BAC, V_{BAC}, C_{L BAC}$ dobili smo za određenu visinu, što znači da će za drugu visinu imati neke druge tri vrijednosti. Tako zaključujemo da najveći mogući kut penjanja BAC i njemu odgovarajuća brzina leta V_{BAC} i koeficijent uzgoan $C_{L BAC}$ nisu konstante već se mijenjaju s visinom.



Slika 8-3. BAC za "mali" zrakoplov na visini 4900m

Povećavanjem visine smanjivat će se BAC . Konačno za neku visinu kut će biti jednak nuli, jer tada krivulja $T_a(V)$ tangira krivulju $T_r(V)$ za $\gamma = 0$. To je točno točka koja odgovara vrhu ovojnice (vidi sliku 7-9). Tim istim postupkom za isti zrakoplov, ali za visinu

$h = 4900 \text{ m}$ nacrtana slika 3, prema kojoj je dobiven krajnji slučaj mogućega leta i to za $\gamma = 0$, tj. s tim motorom na tom zrakoplovu više se nije moguće penjati.

Na temelju ove analize vidimo da svakoj visini odgovara neki najveći kut $\gamma_{\max}(h)$ koji se smanjuje s visinom da bi na vrhuncu bio jednak nuli. Isto tako, na svakoj visini imamo odgovarajuću brzinu leta V_{BAC} i odgovarajući koeficijent uzgona $C_{L_{Bac}}$ s kojim treb letjeti. To je režim leta s najvećim mogućim kutom penjanja.

Ova analiza ima jednu teoretsku malu pogrešku. Pošli smo od jednadžba za pravocrtan stacionaran let, a zaključili smo da se kut γ_{BAC} kao i V_{BAC} mijenjaju tijekom leta, što znači da taj let nije ni pravocrtan ni stacionaran. Ipak, te promjene su spore, te su derivacije $\dot{\gamma}$ i \dot{V} male veličine te se mogu zanemariti, što znači da su polazne jednadžbe zadovoljavajuće točne.

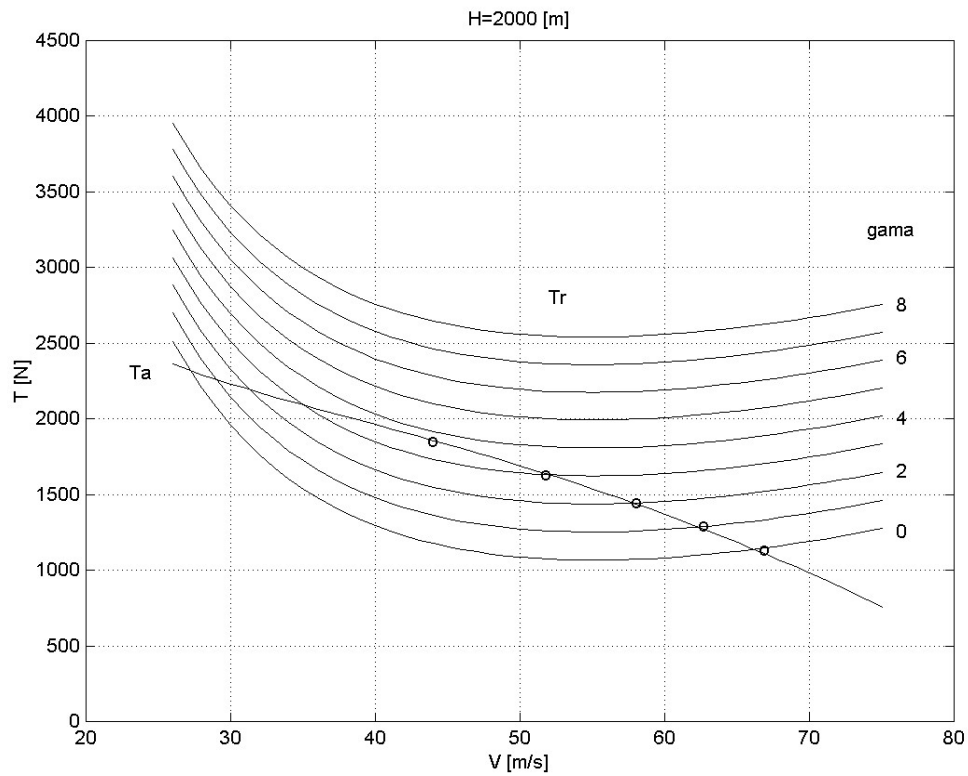
U slučaju zrakoplova s elisom dobivene vrijednosti brzine leta za najveći kut penjanja ili su manje od onih koje su propisane kao minimalne za pravilan i siguran rad elise, ili su tako male da neki drugi efekti dominiraju u penjanju, kao npr. povećani otpor zbog odvajanja struje od elise, pa se zato elisni zrakoplovi obično penju ili spuštaju u režimu najveće brzine penjanja.

8.1.2 Najveća brzina penjanja (najmanje vrijeme penjanja)

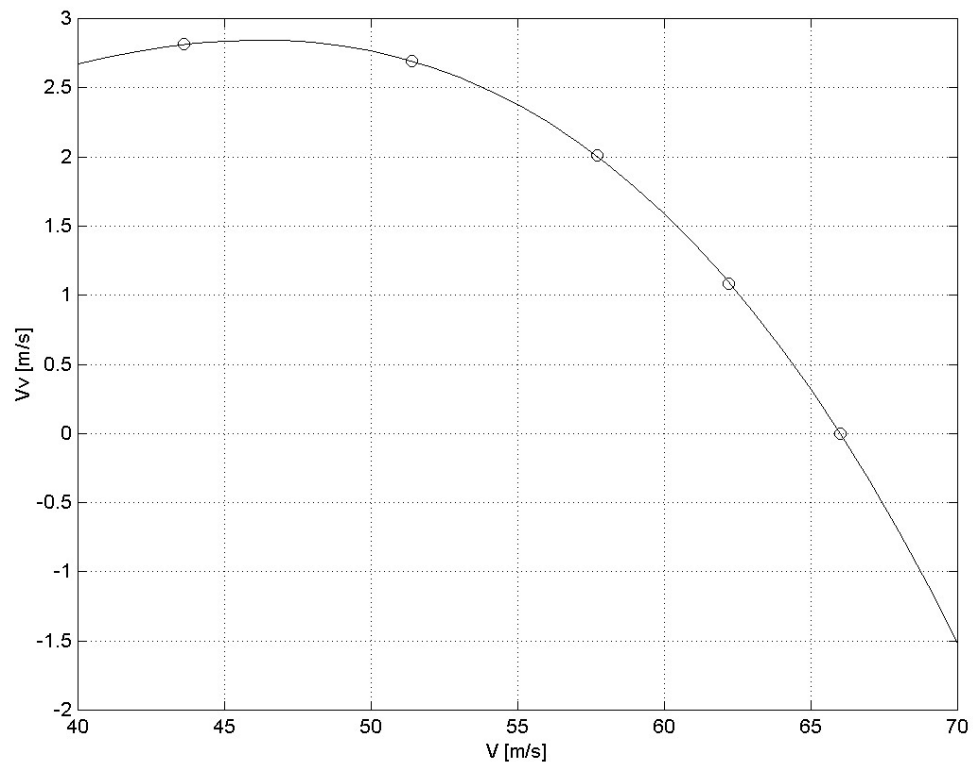
Za lovce presretače vrlo je važno da u što kraćem vremenu budu na određenoj visini H . To znači da trebaju imati što veću brzinu penjanja V_v :

$$\frac{dH}{dt} = V_v = V \sin \gamma.$$

Brzina penjanja označava se u zrakoplovnoj praksi sa RC (*rate of climb*), a najveću sa BRC (*best rate of climb*). Neka su na slici 4 nacrtane krivulje potrebne pogonske sile $T_r(V, \gamma)$ i raspoložive pogonske sile $T_a(V)$, za neku određenu visinu za koju je nacrtana slika. Označimo sa $V_{\max}(\gamma)$ apscisu točke desnog presjeka krivulje $T_a(V)$ sa krivuljama $T_r(V, \gamma)$. Svaka točka presjeka odgovara nekom kutu penjanja i predstavlja maksimalnu brzinu V_{\max} koju može postići zrakoplov s tim motorom na tom kutu penjanja. Drugim riječima za svaki mogući kut penjanja dobivamo par vrijednosti V_{\max} i γ . Pomoću tih parova možemo nacrtati novi dijagram koji na apscisi ima najveću brzinu leta V_{\max} , a na ordinati najveću brzinu penjanja $V_v = V_{\max} \sin \gamma$.



Slika 8-4. Potrebna sila $T_r(V, \gamma)$ i raspoloživa sila $T_a(V)$, za određenu visinu



Slika 8-5. Brzina penjanja $V_v(V)$ za određenu visinu,

Taj dijagram na slici 5 urađen je za onu istu visinu za koju smo nacrtali polazne krivulje na slici 4. Krivulja na slici 5, pokazuje koje će biti brzine penjanja V_V ako se zrakoplov penje s najvećom brzinom leta na tom kutu penjanja. Drugim riječima ta krivulja je geometrijsko mjesto točaka koje imaju na apscisi $V_{\max}(\gamma)$ a na ordinati $V_V(\gamma) = V_{\max}(\gamma) \cdot \sin \gamma$. Na njenom tjemenu nalazi se točka C koja predstavlja najveću moguću brzinu penjanja. U toj točki C određujemo brzinu leta V i kut γ koji osiguravaju najveću brzinu penjanja $V_V = V \sin \gamma$ na visini h za koju smo konstruirali dijagrame 4 i 5. Koeficijent uzgona određen je jednadžbom $C_L = \frac{2W \cos \gamma}{\rho S V^2}$. Te vrijednosti V_{BRC} , γ_{BRC} i C_{LBRC} određuju režim leta BRC za visinu H . Za neku drugu H visinu dobili bi druge vrijednosti za BRC . Drugim riječima V_{BRC} , γ_{BRC} i C_{LBRC} su funkcije visine H koje predstavljaju performanse zrakoplova.

8.1.3 Primjer

Za mali putnički zrakoplov na visini $H = 2000 \text{ m}$, odrediti režim leta za najveću brzinu penjanja.

Rješenje grafičkom metodom nalazi se u direktoriju *Performanse\Penjanje* pod imenom *BRC1.m* s kojim je nacrtana slika 8.4, a zatim očitane točke nacrtane su pomoću programa *BRC2.m*. S tim programom dobiva se vrijednost $\gamma_{\max} = 3.5^\circ$ za brzinu leta $V_{BAC} = 46.2 \text{ m/s}$ na zadanoj visini.

8.1.4 Vrijeme penjanja i potrošnja goriva u penjanju

Nakon analiza, iz prethodnog odjeljka, o režimu penjanja u mogućnosti smo izračunati vrijeme penjanja od visine H_1 do visine H_2 :

$$t = \int_{H_1}^{H_2} \frac{dH}{V_V}$$

Ako se penjemo u režimu BRC onda ćemo imati najmanje vrijeme penjanja:

$$t_{\min} = \int_{H_1}^{H_2} \frac{dH}{V_{VBRC}}$$

U prethodnom odjeljku odredili smo funkciju $V_{VBRC}(H)$. S tom funkcijom trebamo izračunati ovaj integral.

Potrošnju goriva u penjanja zrakoplova određujemo polazeći od jednadžbe

$$\frac{dm}{dh} = -\frac{\dot{m}}{V_v}$$

u kojoj je za elisne zrakoplove

$$\dot{m} = \dot{m}_g = -C_p P_{mot} = -\frac{C_p T_r V}{\eta_{elisa}},$$

a za mlazne

$$\dot{m} = \dot{m}_g = -C_T T_r.$$

U ovim jednažbama potrebna pogonska sila u penjanju određena je jednažbom

$$T_r = D + W \sin \gamma = \frac{\rho V^2}{2} (C_{D0} + KC_L^2) + W \sin \gamma$$

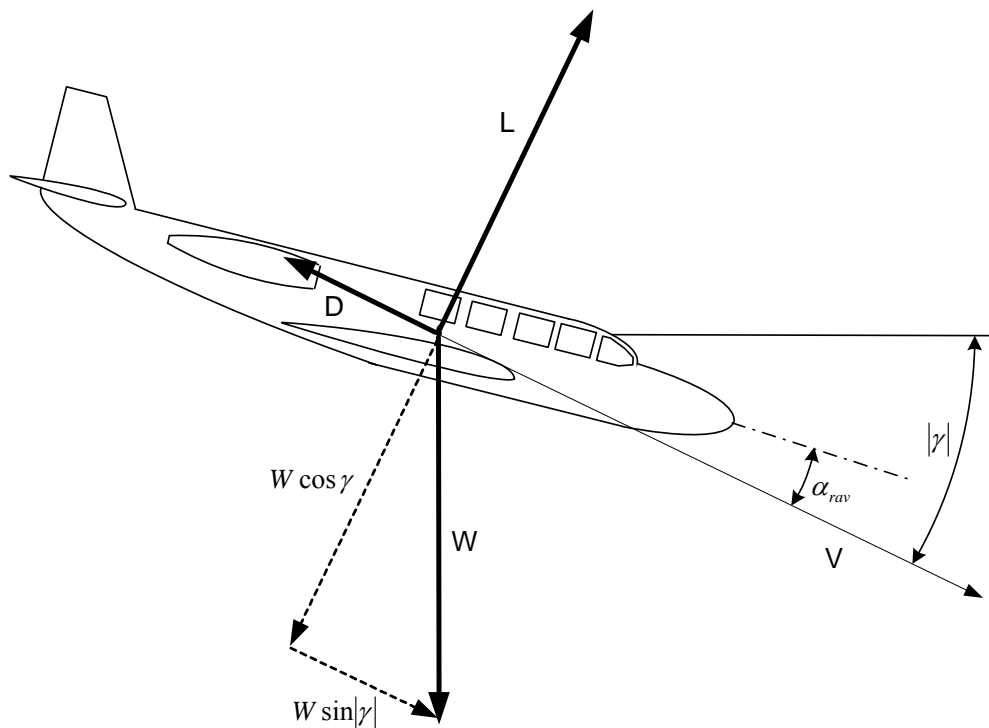
u kojoj su $V(H)$, $\gamma(H)$ i $C_L(H)$ određene u prethodnom poglavlju.

8.2 Spuštanje

Da bi spuštanje bez pogonske sile bilo pravocrtno i s konstantnom brzinom, prema jednažbama za gibanje u vertikalnoj ravnini, mora biti

$$0 = -D - W \sin|\gamma|$$

$$0 = L - W \cos \gamma$$



Slika 8-6

Te jednadžbe smo mogli i direktno napisati prema slici 6, jer tada sile D , L i W prema d'Alembertovom principu moraju biti u ravnoteži. Dijeljenjem ovih dviju jednadžbi dobivamo

$$\tan \gamma = -\frac{D}{L} = -\frac{C_D}{C_L}$$

ili

$$\tan|\gamma| = \frac{C_D}{C_L} = \frac{C_{D0} + KC_L^2}{C_L}$$

To znači da za svako izabrano C_L imamo jedan kut spuštanja γ pri kome je gibanje pravocrtno s konstantnom brzinom. Tom kutu odgovara daljina spuštanja

$$x = \frac{H}{\tan|\gamma|}$$

Brzinu leta u spuštanju odredit ćemo iz jednadžbe:

$$W = \sqrt{L^2 + D^2} = \frac{\rho S_{ref}}{2} V^2 \sqrt{C_D^2 + C_L^2}$$

$$V^2 = \frac{2W}{\rho S_{ref} \sqrt{C_D^2 + C_L^2}}$$

S obzirom da sve ovisi o izabranom koeficijentu uzgona postavlja se pitanje koji koeficijent uzgona izabrati?

Pri običnom slijetanju transportnih zrakoplova želimo spustiti s najmanjom brzinom i s najvećim kutom $|\gamma|$. Prvi uvjet da brzina bude što manje znači da bude s najveć

$$C_D^2 + C_L^2 = (C_{D0} + KC_L^2)^2 + C_L^2$$

a drugi uvjet da bude najveći kutom $|\gamma|$ treba nam što veće $\frac{C_D}{C_L}$ tj što manja vrijednost odnosa

$$\frac{C_D}{C_L} = \frac{C_{D0} + KC_L^2}{C_L} = f(C_L)$$

Ta odnos ima maksimum za $KC_L^2 = C_{D0}$, a najmanju vrijednost za C_{Lmax} , koja istodobno daje i najmanju brzinu slijetanja. To znači da sliječemo najbolje sa C_{Lmax}

Suprotno tomu, u slučaju jedrilica želimo što više ostati u zraku, a to znači što veću daljinu spuštanja, tj. što manje $\tan|\gamma|$ odnosno što veće $\frac{C_L}{C_D}$. Znamo da ta funkcija $f(C_L)$ ima maksimum kad je $KC_L^2 = C_{D0}$ tj. kad je

$$C_L = \sqrt{\frac{C_{D0}}{K}}.$$

9 Horizontalni zaokret

Ako zrakoplov leti

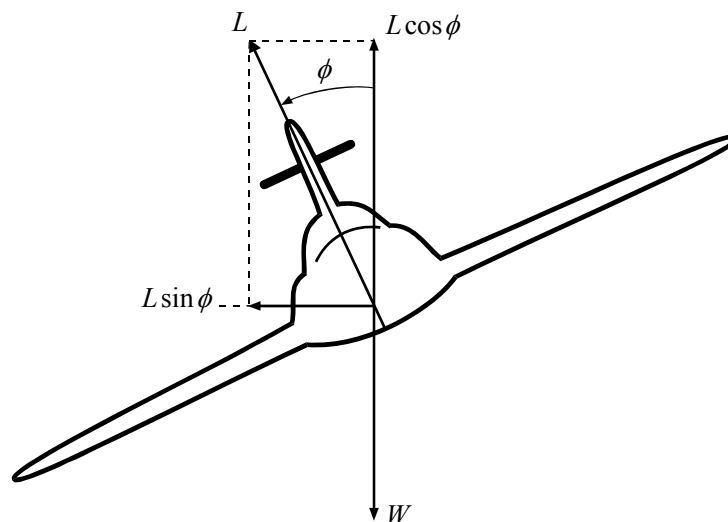
- konstantnom brzinom
- u horizontalnoj ravnini $\gamma = 0$,
- bez kuta klizanja $\beta = 0$, te
- ako je $\alpha_T \approx \alpha_{rav}$ i $\mu_A \approx \phi$,

jednadžbe gibanja centa mase zrakoplova dobivaju oblik:

$$0 = T - D$$

$$mV \frac{d\chi}{dt} = L \sin \phi$$

$$0 = L \cos \phi - W.$$



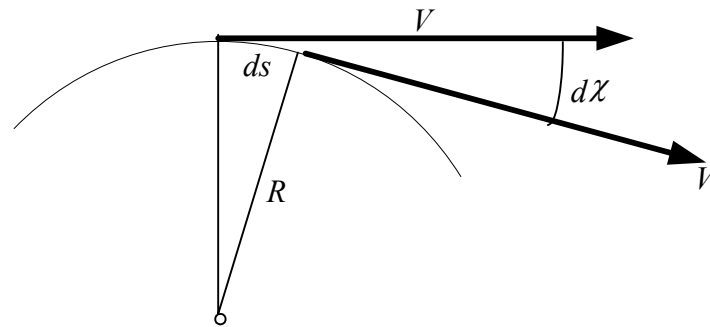
Slika 1. Zrakoplov u horizontalnom zaokretu

Do tih jednadžbi može se doći neposredno promatrajući sile koje djeluju na zrakoplov u zaokretu, kao na slici 8-1. Da bi zrakoplov letio u horizontalnoj ravnini, mora biti vertikalna komponenta uzgona jednaka težini:

$$L \cos \phi = W$$

a horizontalna komponenta stvara centripetalno ubrzanje koje je okomito na brzinu leta:

$$m \frac{V^2}{R} = L \sin \phi,$$



Slika 2

gdje je R polumjer zakrivljenosti putanje središta mase zrakoplova u horizontalnoj ravnini kao na slici 8-2. Podsjetimo se iz mehanike da je kutna brzina vektora brzine

$$\dot{\chi} = \frac{d\chi}{dt} \cdot \frac{ds}{ds} = \frac{d\chi}{ds} \cdot V = \frac{V}{R},$$

jer je polumjer zakrivljenosti:

$$R = \frac{ds}{d\chi}$$

9.1 Jednadžbe zaokreta

Prethodne jednadžbe mogu se s normalnim opterećenjem n napisati u obliku:

$$\dot{\chi} = \frac{ng}{V} \sin \phi$$

$$n = \frac{1}{\cos \phi}$$

Iz ovih jednadžbi eliminacijom kuta valjanja ϕ dobivamo najčešće korištene veze koje nam daju opterećenja u ovisnosti o kutnoj brzini zaokreta, ili obrnuto, kutnu brzinu zaokreta u ovisnosti o opterećenju:

$$\dot{\chi} = \frac{g\sqrt{n^2 - 1}}{V},$$

ili što je isto

$$n = \sqrt{\left(\frac{\dot{\chi}V}{g}\right)^2 + 1}.$$

Osim ovih veličina, u praksi je potreban i polumjer zaokreta R . Znajući iz klasične mehanike da je

$$R = \frac{ds}{d\chi} = \frac{V}{\dot{\chi}},$$

bit će polumjer u horizontalnom zaokretu ovisan o opterećenju:

$$R = \frac{V^2}{g\sqrt{n^2 - 1}},$$

ili obrnuto, opterećenje bit će ovisno o polumjeru zakrivljenosti:

$$n = \sqrt{\left(\frac{V^2}{gR}\right)^2 + 1}$$

9.2 Ograničenja kutne brzine

Opterećenje ne smije biti veće od onog što može izdržati konstrukcija $n < n_s$. Maksimalno opterećenje koje može izdržati konstrukcija poznata je vrijednost, te kutna brzina ne smije biti veća od:

$$\dot{\chi}_s(V) = \frac{g\sqrt{n_s^2 - 1}}{V} = \frac{const}{V}$$

Ta jednadžba u dijagramu $V, \dot{\chi}$ ograničava sa gornje strane područje mogućih kutnih brzina u ovisnosti od brzine leta.

Isto tako, koeficijent uzgona ne smije biti veći od maksimalne vrijednosti $C_L \leq C_{L_{max}}(Ma)$. Ako u jednadžbi za kutnu brzinu, izrazimo opterećenje odnosom $n = L/W$, dobivamo utjecaj koeficijenta uzgona na kutnu brzinu:

$$\dot{\chi}(V) = \frac{g}{V} \sqrt{\left(\frac{\rho V^2 SC_L}{2W}\right)^2 - 1}$$

u koju, kada unesemo najveći koeficijent uzgona, dobivamo najveće dopušteno opterećenje s obzirom na *stall*, ovisno o brzini leta:

$$\dot{\chi}_L(V) = g \sqrt{\left(\frac{\rho SC_{L_{max}}}{2W}\right)^2 V^2 - \frac{1}{V^2}} = g \sqrt{const \cdot V^2 - \frac{1}{V^2}}$$

Ta krivulja također ograničava s gornje strane moguće kutne brzine s obzirom na najveći koeficijent uzgona. Taj maksimalni koeficijent uzgona $C_{L_{max}}$ može biti također ovisan o Mahovu broju.

Vidimo da je najveća moguća kutna brzina ovisno o brzini leta ograničena s gornje strane krivuljama $\dot{\chi}_S(V)$ i $\dot{\chi}_L(V)$. S obzirom na oblik ovih krivulja (krivulja $\dot{\chi}_L(V)$ raste, a krivulja $\dot{\chi}_S(V)$ opada) u njihovom presjeku bit će najveća moguća kutna brzina koja zadovoljava oba ograničenja. Ta kutna brzina se naziva *corner speed*, a brzina leta pri kojoj se ona ostvaruje označava se sa V_C , kao i odgovarajući Machov broj sa M_C . U presjeku brzinu leta dobivamo izjednačavanjem kutnih brzina:

$$\dot{\chi}_L(V) = \dot{\chi}_S(V)$$

Iz te jednadžbe dobivamo

$$V_C = \sqrt{\frac{2n_S W}{\rho S C_{L \max}}}$$

a toj brzini leta odgovara kutna brzina *corner speed*

$$\dot{\chi}_{\text{corner speed}} = g \sqrt{\frac{\rho S C_{L \max}}{2W} \left(n_S - \frac{1}{n_S} \right)}$$

9.3 Najmanji polumjer zaokreta

Iz jednadžbi horizontalnog zaokreta:

$$n = \sqrt{\left(\frac{V^2}{gR} \right)^2 + 1}$$

$$\frac{\rho V^2}{2} S C_L = nW,$$

eliminacijom brzine dobivamo ovisnost polumjera zaokreta o opterećenju n :

$$R = \frac{2W}{g \rho S C_L} \frac{n}{\sqrt{n^2 - 1}}$$

Polumjer zaokreta ovisi o koeficijentu uzgona i o opterećenju. Za najmanji zaokret treba najveći koeficijent uzgona i najveće opterećenje. Zato se najmanji polumjer zaokreta ostvaruje u režimu leta za *corner speed*. Za najveći koeficijent sile uzgona $C_{L \max}$ i najveće strukturalno opterećenje n_S dobivamo najmanji polumjer koji odgovara najvećoj kutnoj brzini (*corner speed*):

$$R_C = \frac{2W}{g \rho S C_{L \max}} \frac{n_S}{\sqrt{n_S^2 - 1}}$$

9.4 Koordinirani zaokret

Uočimo da se u zaokretu povećava otpor. Prije zaokreta otpor je bio

$$D = \frac{\rho V^2}{2} S \cdot (C_{D0} + KC_L^2)$$

gdje je koeficijent uzgona bio određen iz uvjeta horizontalnog leta $L = W$. Međutim, u horizontalnom zaokretu taj uvjet se mijenja

$$L = \frac{W}{\cos \phi}$$

Prema tome, u zaokretu je povećan koeficijent uzgona, zbog čega se povećava inducirani otpor. Da ne bi u horizontalnom zaokretu brzina leta opadala, potrebno je povećati pogonsku silu za onoliko koliko se povećao otpor.

U horizontalnom zaokretu polumjera R , brzinom V , vrijednost opterećenja određena je jednadžbom:

$$n = \sqrt{\left(\frac{V^2}{gR}\right)^2 + 1}.$$

Da bi se ostvario takav zaokret, potrebno je:

- otklonom krilaca δ_ℓ zavaljati letjelicu za kut valjanja

$$\phi = \arccos \frac{1}{n};$$

- otklonom kormila visine δ_m postaviti ravnotežni napadni kut α_{rav} za koji je koeficijent uzgona

$$C_L = \frac{nW}{\frac{\rho V^2}{2} S_{ref}};$$

- otklonom ručice pogona δ_p postići novu potrebnu pogonsku silu koja održava konstantnu brzinu leta.

$$T_r = \frac{\rho V^2}{2} S (C_{D0} + KC_L^2)$$

Za takav koordinirani zaokret moraju se uskladiti: otklon krilaca δ_ℓ , kormila visine δ_m i pogonske sile δ_p . Zato se takav zaokret u kome su usklađene ove tri veličine naziva

koordinirani zaokret. U njemu se leti sa zadanom konstantnom brzinom, na zadanoj visini i izvodi zaokret sa zadanim polumjerom R .

Kako su faktor opterećenja n , koeficijent uzgona C_L i pogonska sila T ograničeni, bit će ograničen i horizontalni zaokret zrakoplova. Sve tri veličine imaju svoje maksimalne vrijednosti n_s , $C_{L_{\max}}$ i T_a . Te granice određuju najmanji mogući polumjer zakrivljenosti R , odnosno najveću moguću kutnu brzinu $\dot{\chi}$ u koordiniranom zaokretu za zadanu brzinu leta V na promatranoj visini leta.

9.4.1 Raspoloživo opterećenje u koordiniranom zaokretu

U horizontalnom letu je normalno opterećenje

$$n = \frac{L}{W}$$

bilo jednako jedinici jer je $L = W$. U horizontalnom zaokretu ono se povećava jer je u horizontalnom zaokretu $n = 1/\cos\phi$ i to utoliko više ukoliko je manji polumjer zakrivljenosti

$$n = \sqrt{\left(\frac{V^2}{gR}\right)^2 + 1}$$

Potrebno normalno opterećenje postiže se povećanjem sile uzgona, odnosno povećanjem ravnotežnog napadnog kuta. Međutim, povećana sila uzgona znači i znatno veći inducirani otpor. Da bi u koordiniranom zaokretu brzina leta ostala nepromijenjena, treba povećati pogonsku silu isto toliko koliko je povećan inducirani otpor. Ta potrebna pogonska sila ne može biti veća od raspoložive, pa se postavlja pitanje za koliko je moguće povećavati normalno opterećenje s obzirom na raspoloživu silu (ili snagu) motora. To najveće opterećenje nazivamo *raspoloživo opterećenje*. Ono ovisi o brzini leta $n_{\text{rasp}}(V)$. Da bi zrakoplov letio konstantnom brzinom leta V potrebna je sila

$$T_r = \frac{\rho V^2}{2} S \cdot \left[C_{D0} + K \left(\frac{L}{\frac{\rho V^2}{2} S} \right)^2 \right].$$

Kako je $L = nW$, ta potrebna sila ovisi o normalnom opterećenju

$$T_r = \frac{\rho S C_{D0}}{2} V^2 + \frac{2K(nW)^2}{\rho S} \frac{1}{V^2}$$

Raspoloživa sila T_a mora biti veća od potrebne, ili u najgoremu slučaju jednaka potrebnoj, pa izjednačavanjem potrebne i raspoložive sile dobivamo

$$\frac{\rho S C_{D0}}{2} V^2 + \frac{2K(nW)^2}{\rho S} \frac{1}{V^2} = T_a,$$

ili

$$n_{rasp}^2 = \frac{T_a \rho S}{2KW^2} V^2 - \frac{(\rho S)^2 C_{D0}}{4KW^2} V^4.$$

Ova jednadžba direktno je primjenljiva za mlazne zrakoplove. Za elisne zrakoplove raspoloživa sila ovisno od raspoložive snage određena je jednadžbom:

$$T_a = \frac{P_a}{V} = \frac{\eta_{elisa} P_{mot \max}}{V}$$

Zato raspoloživo opterećenje za elisne zrakoplove određujemo pomoću jednadžbe:

$$n_{rasp}^2 = \frac{\eta_{elisa} P_{mot \max} \rho S}{2KW^2} V - \frac{(\rho S)^2 C_{D0}}{4KW^2} V^4$$

Ovisnost raspoloživog opterećenja o brzini leta bit će različita na različitim visinama zato što ovisi i o gustoći zraka. Ovisnost normalnog opterećenja o brzini leta $n_{rasp}(V)$ ima maksimalnu vrijednost za brzinu leta koju dobivamo derivacijom funkcije $n_{rasp}(V)$.

9.4.2 Najveća kutna brzina u koordiniranom zaokretu

Kutna brzina je određena jednadžbom

$$\dot{\chi} = \frac{g\sqrt{n^2 - 1}}{V}$$

i bit će utoliko veća ukoliko je veće opterećenje, pa zato promatramo kutnu brzinu pri raspoloživom opterećenju.

$$\dot{\chi}_p = \frac{g\sqrt{n_{rasp}^2 - 1}}{V}$$

Ta kutna brzina ovisi o brzini leta direktno i indirektno preko $n_{rasp}(V)$. Da bismo odredili najveću kutnu brzinu ovisno o brzini leta, zamijenimo raspoloživo opterećenje s njegovom funkcijom o brzini leta. Ako je u pitanju mlazni zrakoplov, raspoloživo opterećenje n_{rasp} određeno je jednadžbom u prethodnom poglavlju, te dobivamo ovisnost $\dot{\chi}_p(V)$:

$$\dot{\chi}_p = g \sqrt{\frac{T_a \rho S}{2KW^2} - \frac{(\rho S)^2 C_{D0}}{4KW^2} V^2 - \frac{1}{V^2}} .$$

Za elisne zrakoplov, raspoloživo opterećenje n_{rasp} određeno je u prethodnom poglavlju, što daje ovisnost $\dot{\chi}_p(V)$:

$$\dot{\chi}_p = g \sqrt{\frac{\eta_p T_{mot} \rho S}{2KW^2} \frac{1}{V} - \frac{(\rho S)^2 C_{D0}}{4KW^2} V^2 - \frac{1}{V^2}} .$$

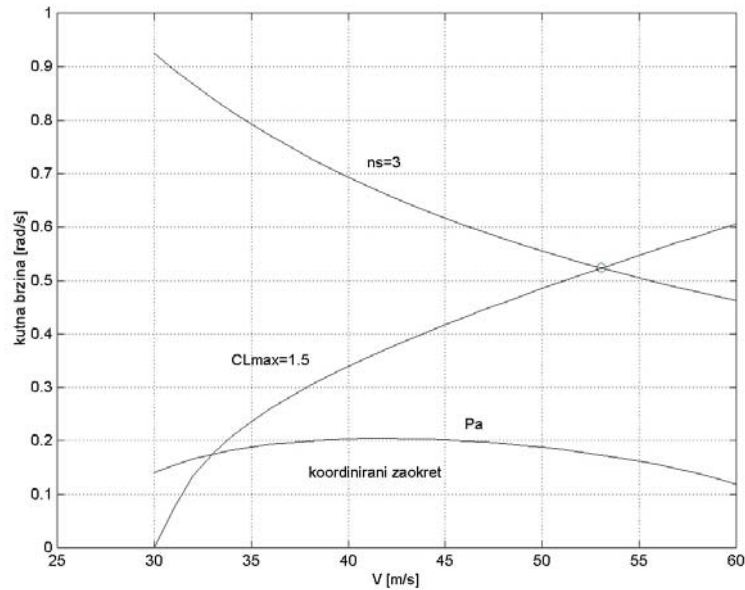
Tu ovisnost $\dot{\chi}_p(V)$ nazivamo ovojnica koordiniranog zaokreta zrakoplova. Ona ima maksimum za brzinu leta $V_{max(\dot{\chi})}$, pri kojoj je najveća moguća kutna brzina leta $\dot{\chi}_{max}$ u koordiniranom zaokretu.

9.5 Primjer

Odrediti za mali zrakoplov koji leti na visi 2000 m kolika je ovisno o brzini leta :

- raspoloživa kutna brzina u koordiniranom zaokretu s obzirom na performanse motora iz priloga C,
- raspoloživa kutna brzina ovisno s obzirom na maksimalni koeficijent uzgona $C_L = 1.5$ i
- raspoloživa kutna s obzirom na maksimalno strukturalno naprežanje $n_s = 3$.

Prema prilogu C napravljen je pod program *Rasp_snaga* koji daje raspoloživu snagu motora ovisno o kutnoj brzini elise, brzine leta, temperaturi i tlaku okolnog zraka. Nominalni broj okretaja motora je $\omega = 240 [rad/s]$.



Slika 3. Ograničenja kutnih brzina malog zrakoplova

Izjednačavanjem potrebne i raspoložive snage $P_r = P_a$ dobivamo:

$$\frac{\rho S C_{D0}}{2} V^2 + \frac{2K(n_{rasp}W)^2}{\rho S} \frac{1}{V^2} = \frac{P_a}{V}.$$

Iz ove je jednadžbe kvadrat raspoloživog opterećenja:

$$n_{rasp}^2 = \frac{\rho S}{2KW^2} \left(P_a V - \frac{\rho S C_{D0}}{2} V^4 \right),$$

S ovim raspoloživim opterećenjem određujemo najveću kutnu brzinu $\dot{\chi}_P$ u koordiniranom zaokretu

$$\dot{\chi}_P = \frac{g \sqrt{n_{rasp}^2 - 1}}{V}$$

Na disketi u direktoriju performanse nalazi se program *Maxkutbr.m* koji crta u MATLABu krivu $\dot{\chi}_P(V)$ kao i dvije krive $\dot{\chi}_L(V)$ i $\dot{\chi}_S(V)$ prema jednadžbama u poglavlju 9.2 u čijem presjeku C se nalazi najveća moguća kutna brzina (*corner speed*). Taj presjek ima koordinate. Na slici 8-3 prikazan je dijagram dobiven tim programom.

10 Vertikalni zaokret

10.1 Jednadžbe

Jednadžbe gibanja središta mase s kojima određujemo performanse zrakoplova:

$$\begin{aligned} m\dot{V} &= T - D - W \sin \gamma \\ mV \cos \gamma \dot{\chi} &= L \sin \phi \\ mV\dot{\gamma} &= L \cos \phi - W \cos \gamma \end{aligned}$$

u slučaju zaokreta u vertikalnoj ravnini $\dot{\chi} = 0$ dobivaju oblik

$$\begin{aligned} m\dot{V} &= T - D - W \sin \gamma \\ 0 &= L \sin \phi \\ mV\dot{\gamma} &= L \cos \phi - W \cos \gamma, \end{aligned}$$

pa iz druge jednadžbe zaključujemo da u slučaju vertikalnog zaokreta mora biti $\phi = 0$, tj. da nema valjanja. Prva i treća jednadžba postaju:

$$\begin{aligned} m \frac{dV}{dt} &= T - D - W \sin \gamma \\ mV \frac{d\gamma}{dt} &= L - W \cos \gamma \end{aligned}$$

Iz druge jednadžbe je

$$\frac{V}{g} \dot{\gamma} = n - \cos \gamma.$$

Kako je $V = R\dot{\gamma}$, ova jednadžba daje vezu između polumjera krivine i normalnog opterećenja

$$n = \frac{V^2}{gR} + \cos \gamma \quad (1)$$

10.2 Najveća kutna brzina

Kao i za horizontalni zaokret, i ovdje je kutna brzina ograničena najvećim konstruktivnim opterećenjem n_s :

$$\dot{\gamma}_s(V) = g \frac{n_s - \cos \gamma}{V}.$$

Zamjenom opterećenja prema definiciji

$$n = \frac{\rho V^2 S C_L}{2W}$$

dobivamo jednadžbu za kutnu brzinu u ovisnosti o koeficijentu uzgona:

$$\dot{\gamma}(V) = g \left(\frac{\rho S C_{L}}{2W} V - \frac{\cos \gamma}{V} \right).$$

Iz toga je očito da je najveća kutna brzina ovisno o maksimalnom koeficijentu uzgona dana jednadžbom:

$$\dot{\gamma}_L(V) = g \left(\frac{\rho S C_{L\max}}{2W} V - \frac{\cos \gamma}{V} \right)$$

U presjeku tih dviju ovisnosti $\dot{\gamma}_S(V)$ i $\dot{\gamma}_L(V)$:

$$g \frac{n_S - \cos \gamma}{V} = g \left(\frac{\rho S C_{L\max}}{2W} V - \frac{\cos \gamma}{V} \right)$$

$$\frac{n_S}{V_C} = \frac{\rho S C_{L\max}}{2W} V_C$$

dobiva se brzina leta V_C :

$$V_C = \sqrt{\frac{2n_S W}{\rho S C_{L\max}}},$$

pri kojoj se može ostvariti najveća kutna brzina u vertikalnoj ravnini. Ta brzina ne ovisi o kutu γ što znači da se bilo u kojemu nagibu putanje može dobiti najveća kutna brzina propinjanja pri ovoj brzini leta. Činjenica je da je to ista brzina pri kojoj se može ostvariti i u horizontalnom zaokretu najveća kutna brzina (*corner speed*). U vertikalnom zaokretu bit će ta najveća kutna brzina (*corner speed*):

$$\dot{\gamma}_{\max} = g \sqrt{\frac{\rho S C_{L\max}}{2W} \frac{n_S - \cos \gamma}{\sqrt{n_S}}}$$

Ta kutna brzina ovisi o kutu penjanja. Zanimljivo je usporediti ovu maksimalnu kutnu brzinu u vertikalnoj ravnini s kutnom brzinom u horizontalnoj ravnini (poglavlje 9.2)

$$\dot{\chi}_{\text{corner speed}} = g \sqrt{\frac{\rho S C_{L\max}}{2W} \left(n_S - \frac{1}{n_S} \right)}$$

Ako zrakoplov leti horizontalno onda je odnos kutnih brzina u vertikalnom zaokretu prema horizontalnom zaokretu:

$$\frac{\dot{\gamma}_{\max}}{\dot{\chi}_{\max}} = \sqrt{\frac{n_S - 1}{n_S + 1}}$$

10.3 Analiza vertikalne petlje

Da bismo pojednostavili analizu vertikalne petlje, pretpostavimo da je u svakom trenutku raspoloživa sila jednaka otporu. Jednadžbe se pojednostavnjuju:

$$\frac{dV}{dt} = -g \sin \gamma$$

$$V \frac{d\gamma}{dt} = gn - g \cos \gamma$$

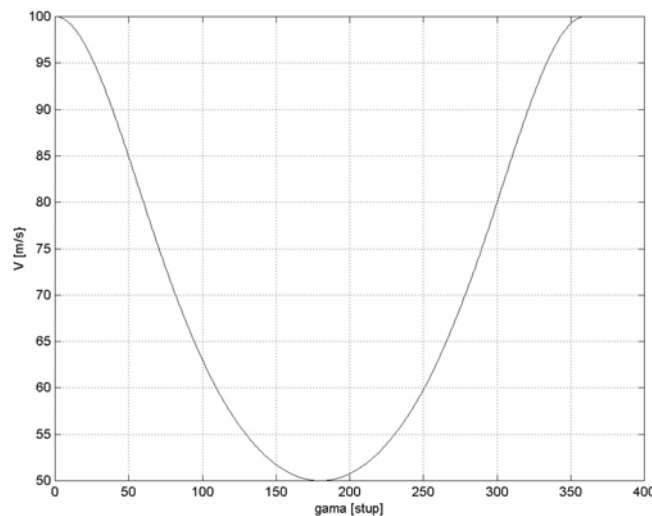
Eliminacijom vremena iz ovih dviju jednadžbi, dobivamo:

$$\frac{dV}{V} = -\frac{\sin \gamma}{n - \cos \gamma} d\gamma$$

Ako zrakoplov sve vrijeme leta u petlji ima isto opterećenje, onda poslije integracije od polazne točke $\gamma = 0$ u kojoj je brzina leta V_0 do bilo koje točke, dobivamo:

$$V = V_0 \frac{n-1}{n-\cos \gamma} \quad (2)$$

Ova ovisnost $V(\gamma)$ prikazana je na slici 1.



Slika 1. Promjena brzine u petlji (za $V_0 = 100$ m/s i $n = 3$)

U ovakvom letu zrakoplov bi imao najmanju brzinu na vrhuncu petlje

$$V_{\min} = V_0 \frac{n-1}{n+1},$$

Jednadžbu (1) možemo napisati u obliku

$$R = \frac{V^2}{g(n - \cos \gamma)}$$

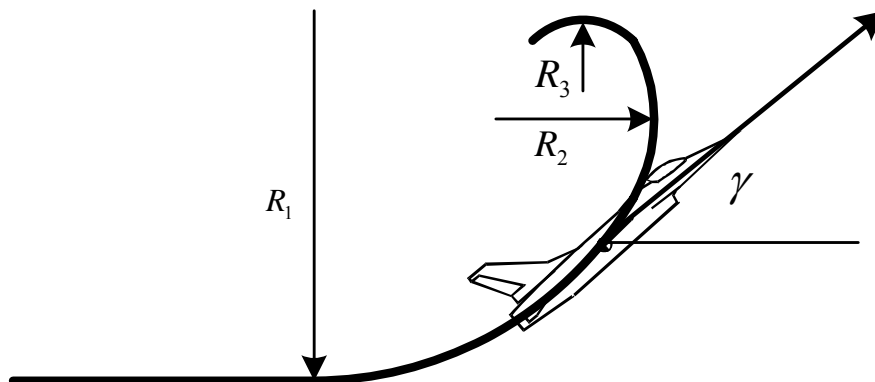
Ona daje veličinu polumjera petlje R ovisno o brzini leta u petlji V i nagibu brzine γ . Zamjenom $V(\gamma)$ prema jednadžbi (2) u jednadžbu (1) dobivamo ovisnost polumjera petlje samo o nagibu tangente.

$$R = \frac{V_0^2}{g} \frac{(n-1)^2}{(n - \cos \gamma)^3}$$

Iz ove jednadžbe možemo za razne položaje odrediti polumjer krivine petlje Tako je u tablici izračunat polumjer krivine za petlju u kojoj je opterećenje $n = 3$, a za tri karakteristična položaja zrakoplova.

$\gamma = 0$	$\gamma = 90^0$	$\gamma = 180^0$
$R = 0.5 \frac{V_0^2}{g}$	$R = 0.148 \frac{V_0^2}{g}$	$R = 0.0625 \frac{V_0^2}{g}$

Na slici 2 prikazan je približan izgled ove petlje.



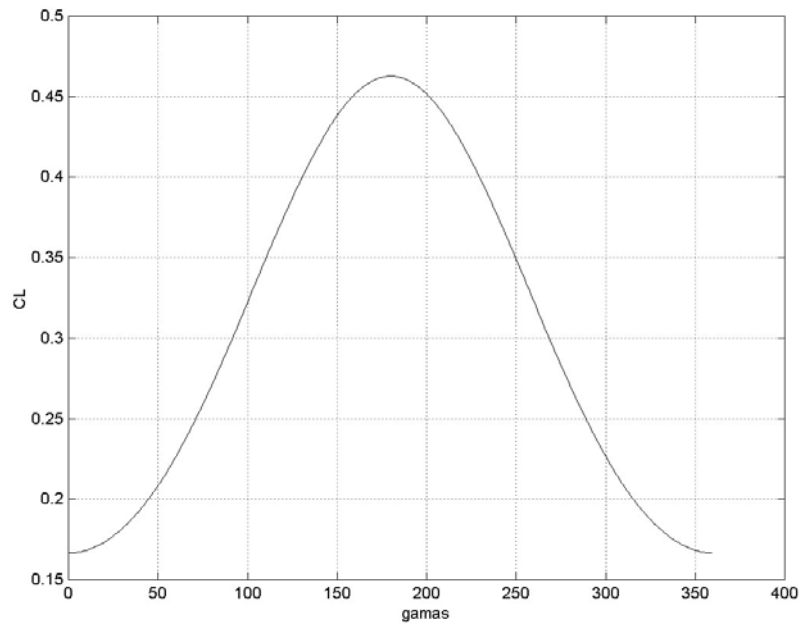
Slika 2. Zrakoplov u vertikalnoj petlji

Da bi zrakoplov sve vrijeme petlje imao konstantno normalno opterećenje u uvjetima promjenljive brzine, on mora mijenjati napadni kut tako da se koeficijent uzgona mijenja ovisno o kutu γ :

$$n = \frac{L}{W} = \frac{\rho S}{2W} C_L V^2$$

$$C_L = \frac{2Wn}{\rho S V_0^2 (n-1)^2} (n - \cos \gamma)^2$$

Ta promjena koeficijenta uzgona prikazana je na primjeru sa slike 3



Slika 3. Primjer promjene koeficijenta sile uzgona u vertikalnom zaokretu

Minimalna vrijednost koeficijenta uzgona je na ulazu u petlju ($\gamma = 0$)

$$C_{L0} = \frac{2Wn}{\rho S V_0^2},$$

a maksimalna na vrhuncu petlje:

$$C_{L1} = \frac{2Wn}{\rho S V_0^2} \left(\frac{n+1}{n-1} \right)^2$$

U vrhuncu petlje centrifugalna sila jednaka je zbroju uzgona i težine zrakoplova,

$$\frac{W}{g} \frac{V^2}{R} = W + L$$

jer je $\gamma = 180^\circ$, pa je polumjer zakrivljenosti $R = \frac{V^2}{g(n+1)}$.

11 UKUPNA ENERGIJA

11.1 Energetska jednadžba

U osmom poglavlju izveli smo jednadžbe gibanja središta mase zrakoplova u ravnotežnom letu. U ovom poglavlju primijenit ćemo zakon o očuvanju ukupne energije na te jednadžbe, u slučaju kad je $\alpha \approx \alpha_T$ i kad nema vjetra:

$$\begin{aligned} m\dot{V} &= T - W \sin \gamma - D \\ mV \cos \gamma \dot{\gamma} &= L \sin \phi \\ mV\dot{\gamma} &= L \cos \phi - W \cos \gamma \end{aligned}$$

Prvoj jednadžbi ovog sustava pridružiti ćemo jednadžbu koja definira brzinu penjanja kao derivaciju visine leta

$$\begin{aligned} \frac{W}{g} \frac{dV}{dt} &= T - D - W \sin \gamma \\ \frac{dh}{dt} &= V \sin \gamma \end{aligned}$$

Eliminacijom kuta γ dobivamo

$$\frac{d}{dt} \left(h + \frac{V^2}{2g} \right) = \frac{VT - VD}{W}.$$

Uvedimo oznaku

$$h_e = h + \frac{V^2}{2g}$$

Zbroj potencijalne i kinetičke energije:

$$E = mgh + \frac{mV^2}{2} = W \cdot h_e$$

predstavlja ukupnu energiju (*energy state*) zrakoplova. To znači da je h_e ukupna energija svedena na jedinicu težine zrakoplova. Nazivamo je *specifična energija* (*specific energy*). Ona predstavlja određenu visinu do koje se zrakoplov može podići, polazeći od stvarne visine i koristeći svoju kinetičku energiju sve dok je posve ne potroši. Zbog toga se ona naziva i energetska visina (*energy high*) i mjeri se u metrima. Za višak snage sveden na jedinicu težine uvodimo oznaku:

$$P_s = \frac{VT - VD}{W}$$

Nazivamo je *višak specifične snage*. Ta funkcija ima dimenziju brzine [m/s]. Konačno se pomoću tih varijabla može energetska jednadžba napisati u obliku

$$\frac{dh_e}{dt} = P_s.$$

Ova jednadžba pokazuje da je derivacija specifične energije jednaka višku specifične snage.

11.2 Specifična snaga zrakoplova

11.2.1 Jednadžba specifičnog viška snage

Otpor je ovisan o brzini leta, o normalnom opterećenju i o svojstvima zraka (prije svega o gustoći):

$$D = qS(C_{D0} + KC_L^2) = qSC_{D0} + \frac{K(nW)^2}{qS}$$

Zamijenimo li tu ovisnosti otpora u specifični višak snage i poslije dijeljenja s težinom, dobivamo

$$P_s = \frac{VT}{W} - \frac{\rho S}{2W} C_{D0} V^3 - 2n^2 \frac{KW}{\rho S} \frac{1}{V}$$

Raspoloživa pogonska sila T , ili raspoloživa pogonska snaga VT , veličine su koje predstavljaju pogonsku grupu zrakoplova. One su poznate zadane funkcije Machova broja Ma ili brzine leta V ($V = a \cdot Ma$) i svojstva zraka.

Da bismo izračunali brojčanu vrijednost specifičnog viška snage trebamo energetske jednadžbi pridružiti aerodinamičke funkcije $C_{D0}(Ma)$ i $K(Ma)$, funkciju raspoloživog pogona $T(Ma, h)$ ili $P(Ma, h)$ i konačno jednadžbe svojstva atmosfere $a(h)$ i $\rho(h)$. Cjelokupan sustav jednadžbi koji definira funkciju $P_s(Ma, h, n)$ ima oblik:

$$P_s = \frac{VT}{W} - \frac{\rho S}{2W} C_{D0} V^3 - 2n^2 \frac{KW}{\rho S} \frac{1}{V}$$

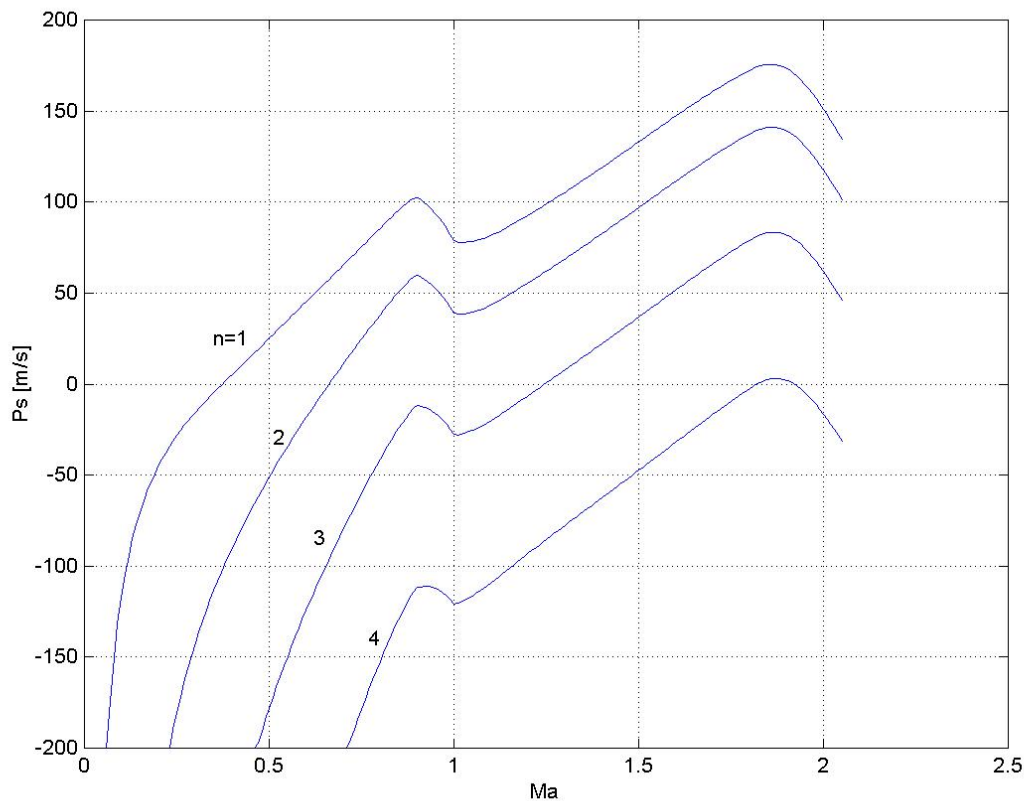
$$C_{D0} = C_{D0}(Ma) \quad \text{i} \quad K = K(Ma)$$

$$T = T(Ma, h) \quad \text{ili} \quad VT = P_a(Ma, h)$$

$$\rho = \rho(h) \quad \text{i} \quad a = a(h)$$

Tako se na desnoj strani energetske jednadžbe pojavljuje određena funkcija o Machovu broju Ma , visine zrakoplova h i opterećenja n . Tu funkciju od te tri varijable Ma , h i n označit ćemo sa $P_s(Ma, h, n)$. Pretpostavimo da smo napravili program u kome su ulazne veličine

Ma , h i n a izlaz je specifičan višak snage P_s . Program za izračunavanje P_s koristi tri podprograma: prvi, za aerodinamičke funkcije $C_{D0} = C_{D0}(Ma)$ i $K = K(Ma)$, drugi za raspoloživu silu (ili snagu) i treći za svojstva zraka ovisno o visini. U programu moramo zadati i dvije konstante masu m ili težinu W i referentnu površinu S . Na slici 10.1 za zrakoplov koji ima karakteristike lovca (vidi primjer) nacrtana je familija krivulja $P_s(Ma)$ za razna opterećenja n , i za jednu visinu.



Slika 11-1. Funkcija $P_s(Ma, n, h)$, $h = 10000 \text{ m}$.

Funkcija $P_s(Ma, h, n)$ lako se računa, ali analitički se ne može riješiti ni po visini h ni po Machovu broju Ma .

11.2.2 Primjer

Zadane su aerodinamičke funkcije lovca $C_{D0}(Ma)$ i $K(Ma)$ u potprogramu *Energija\otpor.m* za referentnu površinu $S = 23,0$. Masa letjelice je $m = 6200 \text{ kg}$, a masa goriva $m_f = 2400 \text{ kg}$. Motor ima maksimalnu pogonsku silu koja u standardnoj atmosferi ovisi o

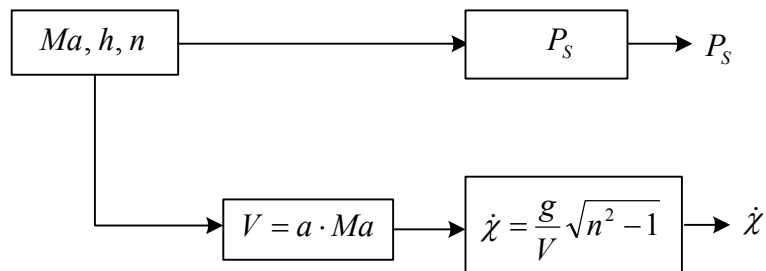
visini i Machovu broju $T(H, Ma)$. Ta ovisnost zadana je potprogramom **motor.m** u istom direktoriju kao i treći potprogram **ISO.m** koji za zadanu visinu vraća temperaturu zraka T , tlak p , gustoću ρ i brzinu zvuka a . Izračunat ćemo i i nacrtati krivulje $P_s(Ma)$ za normalna opterećenja $n = 1, 2, 3, 4, 5$, a za visinu $h = 5000 \text{ m}$. Za izračunavanje krivulja $P_s(Ma)$ napravljen je program **Ps_Ma.m**, u MATLAB-u. Pomoću tog programa nacrtane su krivulje na slici 10-1. I taj program, kao i tri podprograma, nalazi se u direktoriju Energija.

11.3 Usporedba performansi zrakoplova

11.3.1 Specifična snaga u funkciji kutne brzine

Kutna brzina horizontalnog zaokreta važna je performansa borbenih zrakoplova. Bolji je aerodinamički onaj lovac koji može, pri istom višku specifične snage, ostvariti veću kutnu brzinu u horizontalnom zaokretu. Da bismo ocijenili tu performansu lovca trebamo krivulju $P_s(\dot{\chi})$

Za poznati zrakoplov koji leti na visini h s Machovim brojem Ma , možemo izračunati funkciju specifičnog viška snage ovisno o opterećenju n na primjer pomoću programa $P_s(Ma, h, n)$ iz prethodnog poglavlja.

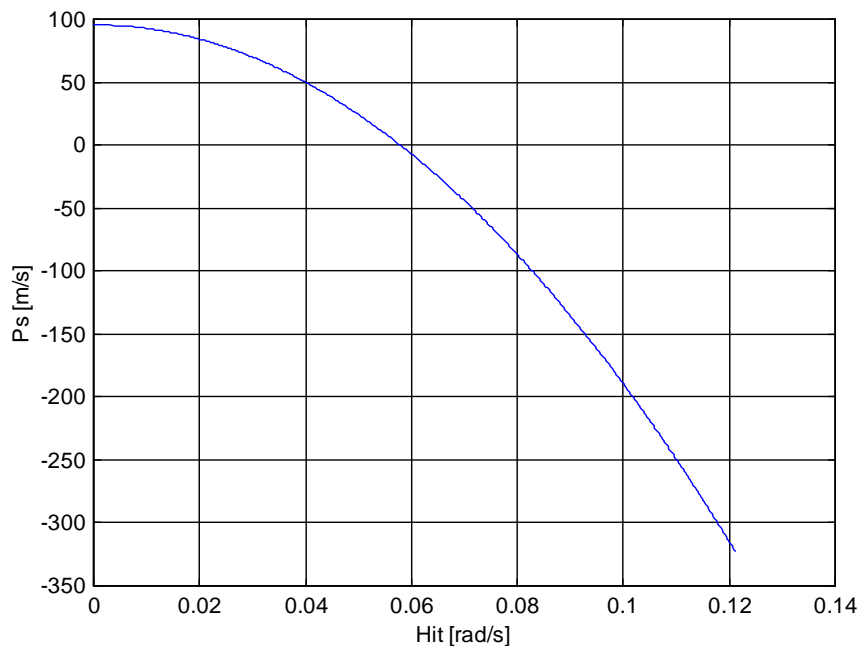


Slika 11-2. Dijagram toka za izračunavanje krivulja $P_s(\dot{\chi})$

Horizontalna kutna brzina za brzinu leta $V = Ma \cdot a(h)$ poznata je funkcija visine h , Machova broja Ma i opterećenja n :

$$\dot{\chi} = \frac{g\sqrt{n^2 - 1}}{V} = \frac{g\sqrt{n^2 - 1}}{Ma \cdot a(h)} = \dot{\chi}(h, Ma, n)$$

Dijagram logičnog toka prikazan je na slici 10-2. Prema tom algoritmu može se napraviti program koji daje parametarske jednadžbe krivulja $\dot{\chi}(P_s)$. Parametar je n , ako su Ma i h zadani. Na slici 10.3 prikazana je krivulja $P_s(\dot{\chi})$ koja je izračunana za borbeni zrakoplov iz primjera u prethodnom poglavlju. Program pod imenom *Ps_Hit.m* nalazi se u istom direktoriju *Energija* jer koristi iste potprograme kao i program *Ps_Ma.m*.



Slika 11-3. Ovisnost viška specifične snage o kutnoj brzini u horizontalnom zaokretu za Machov broj $Ma = 1.2$ i visinu $h = 10000\text{ m}$

Sa slike vidimo da pri $P_s = 0$ ovaj lovac može ostvariti kutnu brzinu

$$\dot{\chi} = 0.057\text{ rad/s} = 3.3\text{ stupnja/s}.$$

Smatra se [20] da je značajno bolji onaj zrakoplov ako pri istoj snazi ima kutnu brzinu veću za 0.035 rad/s (2 stupnja po sekundi)

11.3.2 Krivulje normalnog opterećenja za $P_s=0$

Za relativnu ocjenu performansi borbenih zrakoplova najviše se upotrebljava dijagram na kome su krivulje $n(Ma, h) = \text{const}$ za $P_s = 0$ koje odgovaraju ravnotežnom stanju u letu.

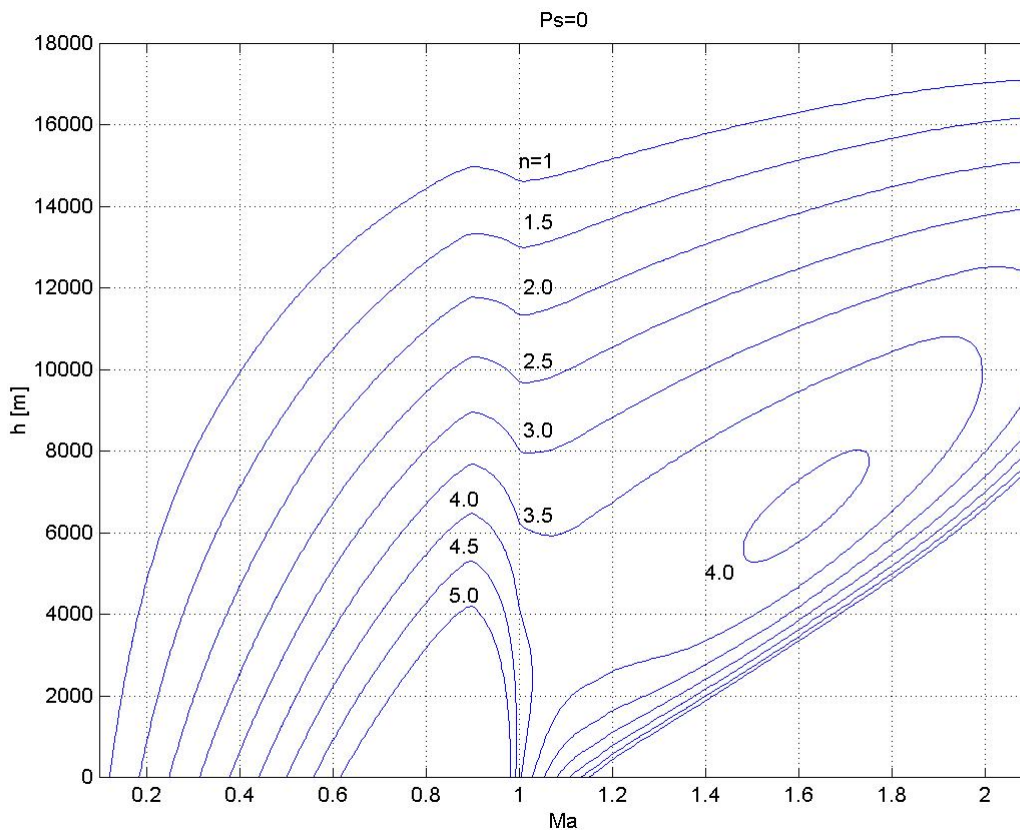
Iz jednadžbe $P_s = 0$ dobivamo

$$\frac{VT}{W} - \frac{\rho V^3 S}{2W} C_{Do}(Ma) - 2n^2 K \frac{W}{\rho V S} = 0$$

Tu jednadžbu rješavamo po normalnom opterećenju:

$$n(h, Ma) = \sqrt{\left[\frac{VT}{W} - \frac{\rho V^3 S}{2W} C_{Do}(Ma) \right] \frac{\rho VS}{2KW}} \quad 11$$

U MATLAB-u postoji naredba *contour* koja nam crta u koordinatnom sustavu Ma na apscisi i h na ordinati krivulje $n(h, Ma) = const$. Pomoću te naredbe napravili smo program *Ps_0.m* kojim smo nacrtali krivulje na slici 10-4 za isti zrakoplov lovac kao u prethodnom poglavlju.



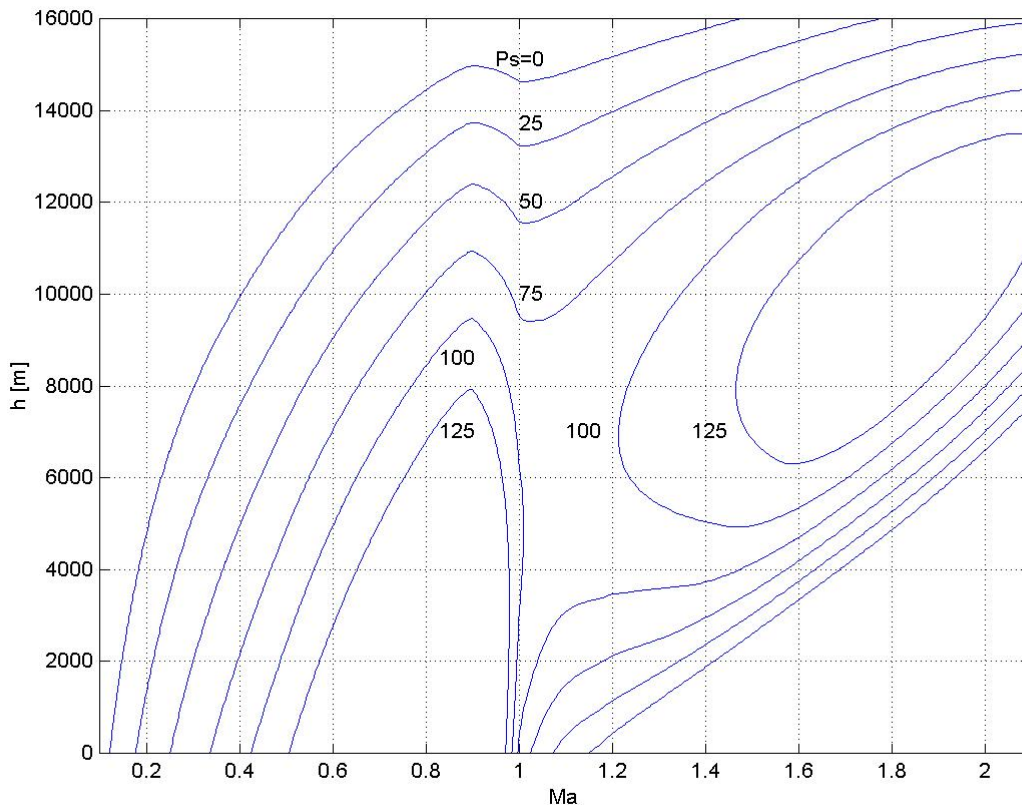
Slika 11-4. Krivulje $n(Ma, h) = const$ za $P_S = 0$

Bolji zrakoplov ima krivulju $n(Ma, h) = const$ koja obuhvaća krivulju njegova suparnika jer može s istim Machovim brojem na istoj visini razviti veće opterećenje, ili na istoj visini pri istom opterećenju može letjeti u većem intervalu Machovih brojeva.

11.4 Područje leta i optimalno penjanje

11.4.1 Krivulje $P_s(Ma, h) = const$ za određeno opterećenje n

Vidjeli smo da se penjanje odvija s konstantnim opterećenjem (blisko jedinici). U koordinatnom sustavu $Ma-h$ (na horizontalnoj osi je Machov broj, a na vertikalnoj osi je visina) možemo nacrtati familiju krivulja s konstantnim opterećenjem n (na primjer za $n = 1$), a za različito $P_s = const$.



Slika 11-5. Krivulje $P_s(Ma, h) = const$, za $n = 1$ za zrakoplov lovac.

Znači da svaka krivulja familije odgovara jednoj vrijednosti $P_s(Ma, h) = const$, a sve krivulje familije imaju isto opterećenje $n = const$:

$$P_s = \frac{VT}{W} - \frac{VqS}{W} C_{D0} - n^2 K \frac{VW}{qS} = const$$

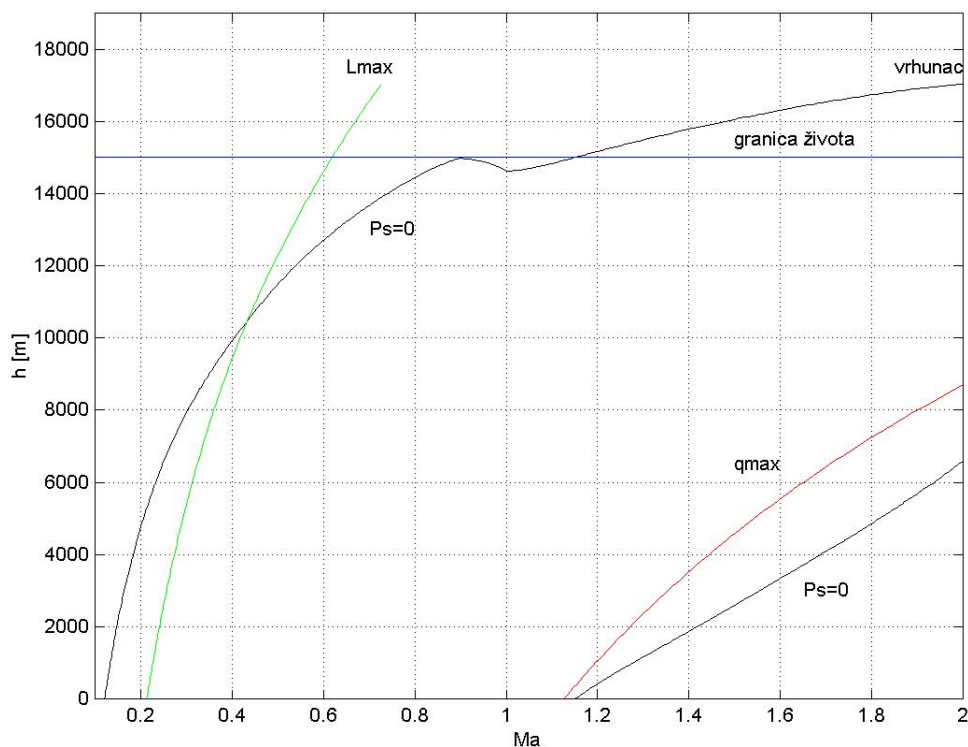
Familija krivulja za $n = 1$ posebno je važna jer je to slučaj horizontalnog leta, a upotrebljava se i za optimalnu putanju penjanja. Oblik ovog dijagrama prikazan je na slici 10-5 za lovac

kao primjer iz prethodnog poglavlja. Program *Ps_const.m* kojim je nacrtan taj dijagram nalazi se u istom direktoriju Energija.

Ti se dijagrami ne upotrebljavaju samostalno. Njihova je uporaba objašnjena u slijedeća dva odjeljka.

11.4.2 Područje uporabe zrakoplova

U prethodnom poglavlju o performansama (odjeljak 8.1.4) vidjeli smo da s obzirom na raspoloživu snagu motora na svakoj visini u horizontalnom letu postoje minimalna i maksimalna brzina leta (ili Machov broj). Te veličine, ovisno o visini, čine ovojnice koje ograničavaju područje mogućih režima horizontalnog leta. U ovom poglavlju imamo krivulje $P_s = 0$, koje ograničavaju područje u kome je snaga motora veća ili jednaka potrebnoj snazi kad je $n = 1$. Npr u horizontalnom letu je $n = 1$, pa nam krivulja $P_s = 0$ određuje područje mogućih horizontalnih letova. Zato bi za isti zrakoplov ovojnice horizontalnog leta iz odjeljaka 8.14 bile iste s krivuljama $P_s = 0$. Na slici 10-6 prikazane su te krivulje $P_s = 0$ za jedan borbeni zrakoplov. Najviša točka te krivulje predstavlja apsolutni vrhunac leta (*absolute ceiling*).



Slika 11-6. Operativne ovojnice

Za neke zrakoplove vrhunac je vrlo velik te se postavlja pitanje preživljavanje pilota u slučaju njegova izbacivanja. Smatra se da je na visinama većim od 15 km (50000 ft) potrebna specijalna oprema koju imaju astronauti da bi čovjek mogao preživjeti. S obzirom da piloti nemaju tu opremu, oni ne mogu biti van kabine zrakoplova iznad 15 km. Ako je apsolutni ili praktični vrhunac iznad te visine, onda se ograničava visina leta do granice preživljavanja pilota izvan kabine.

Dinamički tlak q predstavlja ima neposrednu ulogu u površinskom napreznju konstrukcije, te njegovu maksimalno dopuštenu vrijednost propisuje konstruktor, jer je to vrijednost s kojom je analizirano napreznja konstrukcije. Tako je za borbene zrakoplove ta granica oko 100 kPa . Na slici 10-6 ta krivulja označena je q_{\max} .

Na velikim visinama pojavljuje se problem ponovnog pokretanja motora ako se on ugasi, jer je gustoća zraka mala. Tu gornju granicu propisuje proizvođač motora, jer ona ovisi i o brzini leta zato što se motor lakše pokrene ako je brzina zrakoplova veća. Kako gustoća pada s visinom, tako se ta granica dinamičkog tlaka pomiče prema većim brzinama.

I tlak na ulazu usisnika može imati određeno ograničenje. Pri velikim brzinama leta i u donjim slojevima može biti tlak na ulazu usisnika prevelik.

Konačno, na velikim brzinama i aerodinamičko zagrijavanje može biti ograničenje, što ovisi o materijalu na površini onih dijelova koji su najviše izloženi aerodinamičkom zagrijavanju. Unutar svih tih krivulja nalazi se područje normalne uporabe zrakoplova.

11.4.3 Minimalno vrijeme penjanja

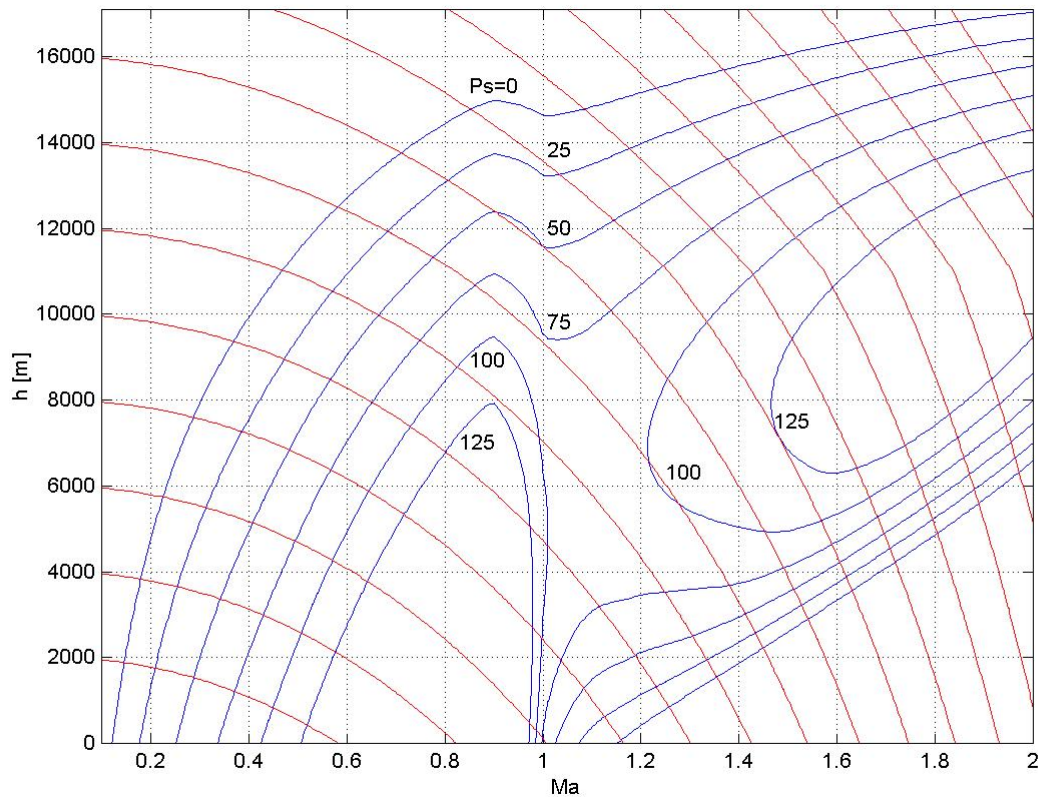
Bez ikakvih problema možemo nacrtati i krivulje $h_e = \text{const}$ u koordinatnom sustavu $Ma-h$ gdje već imamo krivulje $P_s(Ma, h) = \text{const}$ (za $n = \text{const}$ kojim izvodimo penjanje). Jednadžba specifične energije h_e (ukupna energija zrakoplova svedena na jedinicu mase):

$$h_e = h + \frac{V^2}{2g} = \text{const}$$

$$h + \frac{a(h)^2}{2g} Ma^2 = h_e = \text{const}$$

Tako, kroz jednu točku (Ma, h) prolazi jedna krivulja $h_e(Ma, h) = \text{const}$ i jedna krivulja $P_s(Ma, h) = \text{const}$ (za određeno n). To znači da je u toj točki, na visini h pri Machovu broju

Ma , energetska visina $h_e = const$ i specifični višak snage $P_s = const$. Slika 10-7 nacrtana je pomoću programa *Pshe_const.m* koji se nalazi na disketi u direktoriju Energija.



Slika 11-7. Familija krivulja $P_s(Ma, h) = const$ i $h_e(Ma, h) = const$ za zrakoplov lovac kada je $n = 1$

Iz energetske jednadžbe

$$\frac{dh_e}{dt} = P_s$$

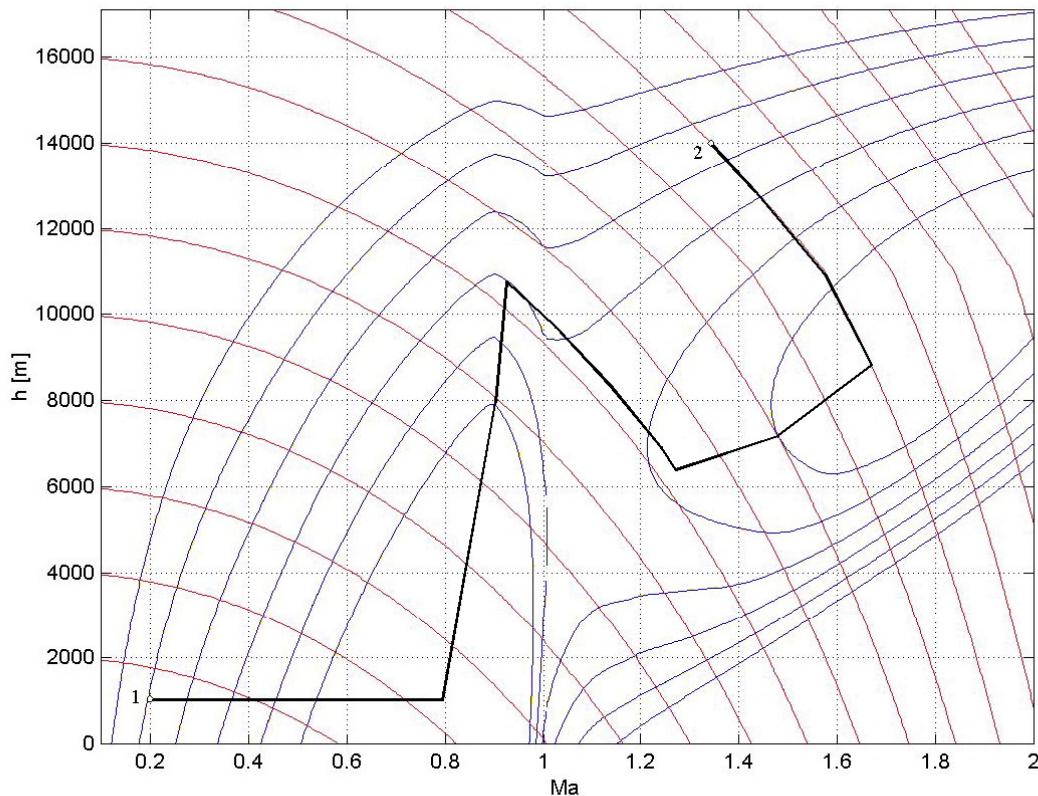
dobivamo

$$dt = \frac{dh_e}{P_s}$$

Vrijeme prelaska iz režima leta h_1, Ma_1 kome odgovara energetska visina h_{e1} , u režim leta h_2, Ma_2 kome odgovara energetska visina h_{e2} , određeno je integralom:

$$t = \int_{h_{e1}}^{h_{e2}} \frac{1}{P_s} dh_e$$

Da bismo izračunali ovaj integral, trebamo znati funkciju $P_s(h_e)$. Ta funkcija je niz točaka kroz koje predstavljaju promjenu režima leta Ma, h od početnog režima leta Ma_1, h_1 koji predstavlja točku 1 u krajnji režim leta Ma_2, h_2 koji predstavlja točku 2. Točke možemo definirati pomoću koordinata Ma, h kao na dijagramu slika 10-8 ili pomoću krivulja koje prolaze kroz tu istu točku h_e, P_s .



Slika 11-8. Prelazak iz stanja $h = 1000; Ma = 0.2$ u stanje $h = 14000; Ma = 1.35$ za minimum vremena

Da bi vrijeme bilo minimalno, treba režim leta mijenjati tako da vrijednosti funkcije $P_s(h_e)$ budu najveće moguće. Režim leta znači određeni Machov broj Ma na zadatoj visini h . Te dvije vrijednosti predstavljaju određenu točku u dijagramu $Ma-h$. Kroz tu točku prolaze dvije krivulje $h_e(Ma, h) = const$ i $P_s(Ma, h) = const$. Ta točka može biti predstavljena krivolinijskim koordinatama h_e, P_s . Zamislimo da mijenjamo tako režim leta da točke na dijagramu sve nalaze na krivulji $h_e(Ma, h) = const$. Vrijednosti P_s od jedne do druge točke će rasti, a

zatim opadati zbog oblika krivulja $P_s(Ma, h) = const$, a bit će najveća u onoj točki u kojoj se krivulje $h_e(Ma, h) = const$ i $P_s(Ma, h) = const$ tangiraju. To znači da iz točke koja predstavlja režim leta 1 treba ići u režim leta koji predstavlja točka 2 kroz kočke u kojima su krivulje h_e i P_s tangentne jedna na drugu. Dok krivulje $h_e = const$ idu pravilno, krivulje $P_s = const$ za vrijednosti Machova broja u transsonici su nepravilne zbog nepravilnog toka funkcija $C_{D0}(Ma)$ i $K(Ma)$. Potrebna snaga raste u transsonici, što ima za posljedicu stvaranja zatvorene krivulje $P_s = const$. Ako prijelaz iz režima leta 1 u režim leta 2 vodi pored te zatvorene krivulje, treba režim leta mijenjati duž $h_e = const$ da bi se opet išlo kroz točke koje imaju zajedničke tangente za krivulje h_e i P_s . Opravdanje za ovakav postupak jest činjenica da kada mijenjamo režim leta po krivulji $h_e = const$, onda je $dh_e = 0$, te se vrijednost integrala ne povećava.

11.4.4 Penjanja s najmanjom potrošnjom goriva

Izbor promjene režima leta u penjanju može se temeljiti i na najmanjoj potrošnji goriva. Da bi se odredila promjena režima leta u penjanju tako da je najmanja potrošnja goriva, trebamo funkciju f_s - prirast specifične energije po jedinici goriva (fuel specific energy)

$$\frac{dh_e}{-dm_f} = f_s$$

Ako zrakoplov ima mlazni motor za koji je potrošnja goriva proporcionalna pogonskoj sili, onda je

$$f_s = \frac{dh_e}{-dm_f} = \frac{P_s dt}{C_T T dt} = \frac{P_s}{C_T T} = f_s(Ma, h, n)$$

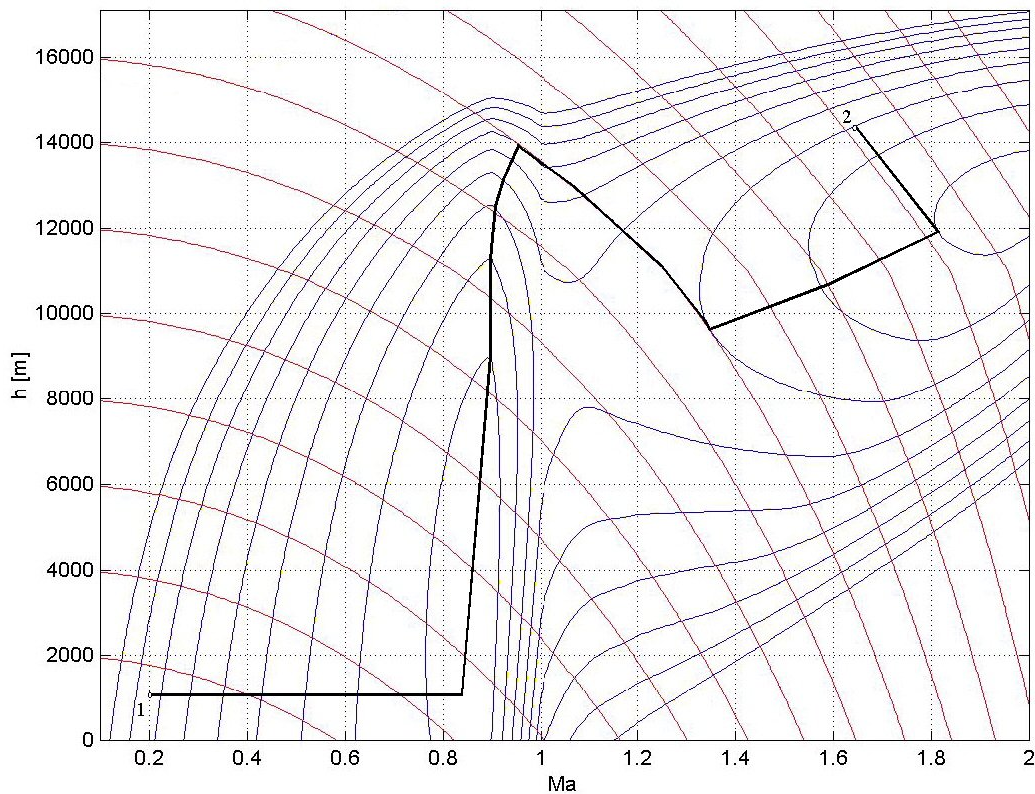
Drugim riječima prirast specifične energije po jedinici gorivi također je funkcija Machova broja, visine i normalnog opterećenja. Za zadano opterećenje n , na desnoj strani je funkcije Machova broja Ma i visine leta h , pa je za određeno opterećenje pri penjanju:

$$f_s = f_s(Ma, h)$$

Na slici 10-9 prikazane su funkcije $f_s(Ma, h) = const$ za normalno opterećenje $n = 1$. Iz definicije za funkciju f_s dobiva se da je količina goriva od režima leta 1 do režima leta 2:

$$-\Delta m_f = m_{f1} - m_{f2} = \int_1^2 \frac{1}{f_s} dh_e$$

Da bi se iz režima leta 1 prešli u režim leta 2 mi prolazi se kroz razne režime leta. Svakom režimu leta odgovara jedna točka, jedna visina h i jedna brzina Ma , ili jedna specifična ukupna energija h_e i jedan *prirast specifične energije po jedinici goriva* f_s . Tako pri prijelazu iz režima leta 1 u režim leta 2 ti parovi vrijednosti h_e, f_s predstavljaju točke puta duž kojega treba izračunati ovaj integral. Da bi na tom putu bila najmanja potrošnja goriva treba režime leta mijenja duž točaka u kojima je f_s u maksimumu. Od svih točaka na krivulji $h_e = const$ bit će f_s u maksimumu u točkama u kojima se krivulje $f_s = f_s(Ma, h)$ i $h_e(Ma, h) = const$ tangiraju. Drugim riječima, od svih točaka s istom ukupnom energijom h_e u tim točkama je funkcija f_s u maksimumu. Te točke vidimo na slici 10-9.



Slika 11-9. Prijelaz iz energetskog stanja 1 u stanje 2 s najmanjom količinom goriva

12 POLIJETANJE I SLIJETANJE

12.1 Polijetanje (*take off*)

Polijetanje i slijetanje su poseban problem mehanike leta, pa i konstrukcije zrakoplova. Taj problem ni u prirodi nije sretno riješen. Neke ptice vrlo teško slijeću, druge teško polijeću. Polijetanje i slijetanje je problematično s obzirom da je aerodinamički oblik letjelice podešen da potrošnja energije bude što manja u letu. Tipičan primjer su kotači, koji su za let uvučeni, a za polijetanje i slijetanje izbačeni. Drugi primjer je brzina, koja u letu treba biti što veća, a pri slijetanju i polijetanju što manja.

Polijetanje promatramo kao ravanski problem, a zrakoplov kao kruto tijelo (ne uzimamo u obzir elastične veze i deformacije podvozja). Ukoliko ima vjetra uzimamo u obzir samo uzdužnu komponentu (duž piste). Označimo taj vjetar duž piste V_w . On je pozitivan ako puše u pravcu zalijetanja zrakoplova (stražnji vjetar), a negativan ako puše u susret zrakoplovu (čeonni vjetar). Drugim riječima vjetar V_w je pozitivan u pravcu i smjeru kao i brzina gibanja V_K i aerodinamička brzina V . Brzina gibanja zrakoplova u odnosu na pistu V_K je zbroj vjetra V_w i aerodinamičke brzine V .

$$V_K = V_w + V$$

Zrakoplovi uvijek polijeću uz vjetar, tj uzdužna komponenta vjetra je uvijek negativna.

$$V_w = -|V_w|$$

Ako je vjetar pozitivan zrakoplov polijeće s drugog kraja piste, tako da na njega u polijetanju uvijek djeluje čeonni vjetar. Uočimo da zbog vjetra postoji aerodinamička brzina V_0 i kad zrakoplov stoji na pisti. To slijedi iz gornje jednadžbe da je brzina u odnosu na pistu V_K jednaka zbroju vjetra i aerodinamičke brzine, pa kad stoji na pisti onda je:

$$0 = V_w + V_0$$

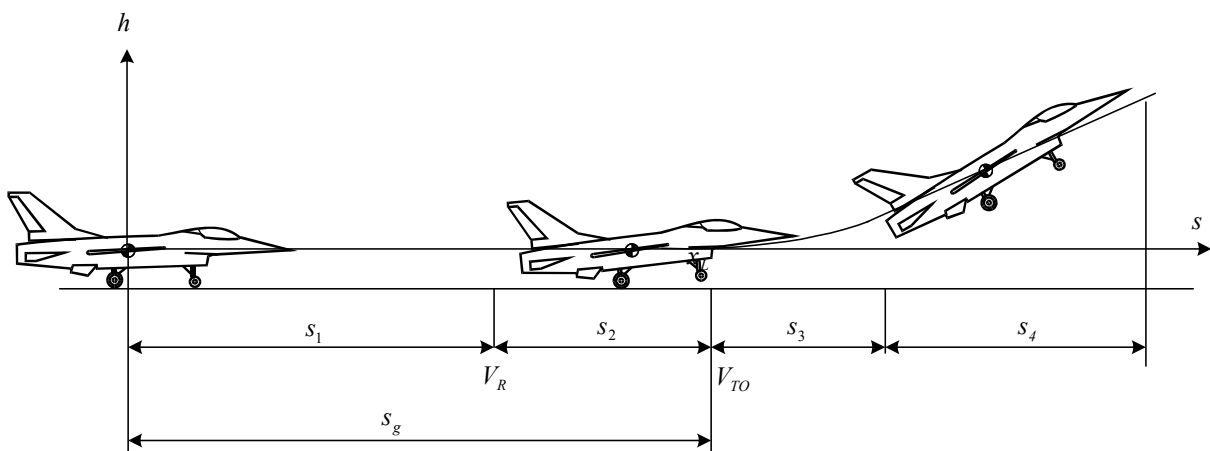
odakle je

$$V_0 = |V_w|.$$

12.1.1 Proces polijetanja

S obzirom na modeliranje polijetanja moramo cijeli proces polijetanja podijeliti na četiri dijela (slika 9-1):

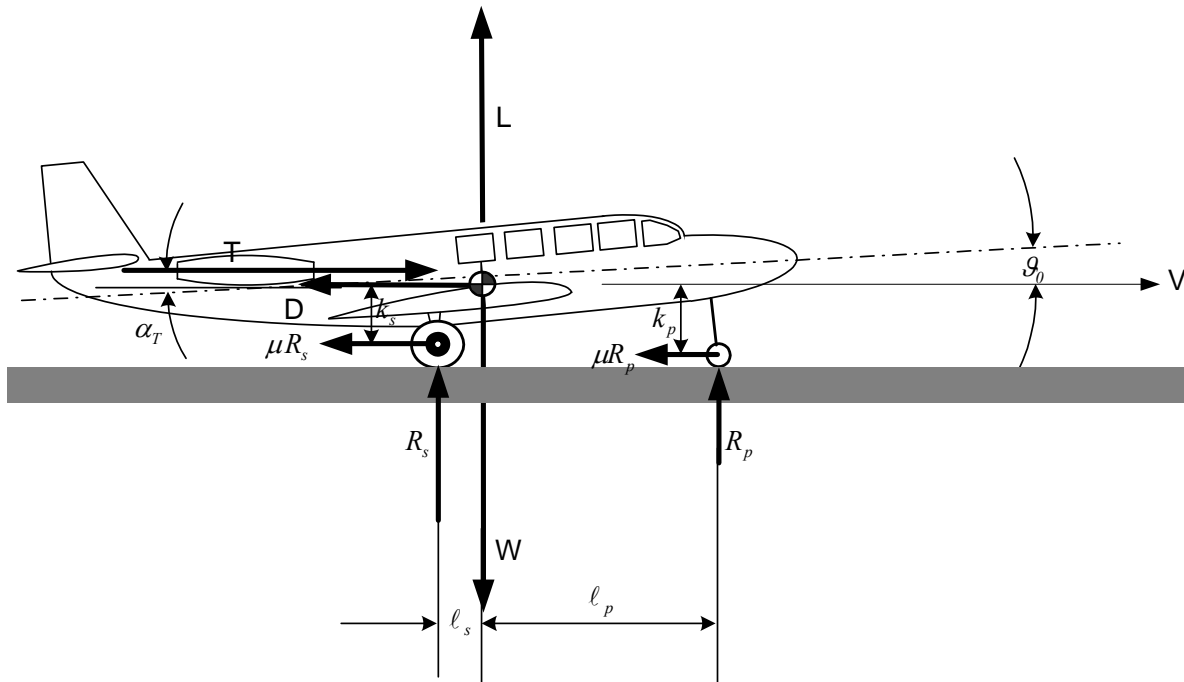
- Zalijetanje po pisti, duljine s_1 od aerodinamičke brzine V_0 na početku do aerodinamičke brzine V_R kad se prednji kotač odvaja od piste,
- Propinjanje letjelice, duljine s_2 od aerodinamičke brzine V_R kad se prednji kotač odvaja od piste do aerodinamičke brzine V_{TO} kad se zadnji kotači odvajaju od piste.
- Vertikalni zaokret, duljine s_3 , od aerodinamičke brzine V_{TO} kad se zadnji kotači odvajaju od piste do postizanja željenog kuta penjanja γ_C .
- Pravocrtno penjanje do propisane visine, duljine s_4 .



Slika 12-1. Dijelovi polijetanja zrakoplova

12.1.2 Određivanje brzine V_R

Rekli smo da je kraj prvog dijela polijetanja kad prednji kotač izgubi kontakt s pistom. U tom trenutku aerodinamička brzina zrakoplova jest V_R , a otpor oslonca prednjeg kotača jednak je nuli ako otklonimo kormilo visine δ_{mTO} . Da bi smo odredili tu brzinu pri kojoj su ispunjeni ti uvjeti napišimo jednadžbe ravnoteže momenata prema d'Alembertovom principu što znači da uzimamo i silu inercije u obzir: *suma momenata za točku rotacije jednaka je nuli.*



Slika 12-2

Tu sumu čine:

- aerodinamički moment za osu kotača koji ima vrijednost $M + L \cdot \ell_s + D \cdot k_s$, zato što su aerodinamičke sile otpor D i uzgon L reducirane na središte mase, a M je aerodinamički moment za središte mase,
- moment sile težine za osu kotača koji je negativan $-W \cdot \ell_s$,
- moment pogonske sile za osu kotača također negativan $-T \cdot k_s$ i konačno
- moment inercijalne sile je pozitivan $ma \cdot k_s$, jer inercijalna sila djeluje u natrag, ima hvatište u središtu mase, a njen je intenzitet:

$$ma = T - D - \mu(W - L).$$

Nemamo moment otpora i kotrljanja zadnjeg kotača jer te sile prolaze kroz os rotacije, kao ni moment otpora i kotrljanja prednjeg kotača jer je u trenutku odvajanja ta sila jednaka nuli.

Tako dobivamo jednadžbu:

$$M + L \cdot \ell_s + D \cdot k_s - T \cdot k_s - W \cdot \ell_s + [T - D - \mu(W - L)] \cdot k_s = 0$$

ili poslije sređivanja

$$M + L \cdot (\ell_s + \mu k_s) - W \cdot (\ell_s + \mu k_s) = 0$$

U ovoj jednadžbi tražena brzina V_R nalazi se u aerodinamičkom momentu i sili uzgona:

$$M = \frac{\rho V_R^2}{2} S_{ref} c_A C_m$$

$$L = \frac{\rho V_R^2}{2} S_{ref} C_L$$

Aerodinamički koeficijenti C_m i C_L su konstante:

$$C_m = C_{m0} + C_{m\alpha} \alpha_0 + C_{m\delta} \delta_{mTO}$$

$$C_L = C_{L0} + C_{L\alpha} \alpha_0 + C_{L\delta} \delta_{mTO}$$

Konačno iz gornje jednakosti momenata dobivamo traženu brzinu u trenutka odvajanja prednjeg kotača od piste:

$$V_R = \sqrt{\frac{2W(\ell_s + \mu k_s)}{\rho S_{ref} [c_A C_m + C_L \cdot (\ell_s + \mu k_s)]}}$$

Kad aerodinamička brzina dostigne ovu vrijednost V_R pilot treba postaviti otklon kormila visine δ_m , kome u ravnotežnom stanju odgovara napadni kut α_{TO} . Uočimo da na brzinu V_R utiče bitno položaj zadnjih kotača u odnosu na središte mase.

12.1.3 Brzina odvajanja V_{TO}

Da bi se zrakoplov odvojio od zemlje, ili da bi spustio na zemlju, u trenutku odvajanja od piste ili dodira s pistom, potreban je uzgon jednak težini:

$$L = W,$$

a to znači potrebna je brzina i koeficijent uzgona čiji produkt mora biti

$$V^2 C_L = \frac{2W}{\rho S_{ref}}$$

Da bi poletjeli ili sletjeli sa što manjom brzinom uzmimo najveći mogući koeficijent sile uzgona $C_{L_{max}}$. Za letnu konfiguraciju zrakoplova (*clear configuration*) dobit ćemo brzinu za odvajanje od zemlje koja zahtijeva dosta dugu pistu za zalijetanje. S tom brzinom u slijetanju pilot bi teško mogao sletjeti na pistu bez udara u nju. Tako se nameće neophodnost da se poveća $C_{L_{max}}$, a to znači promjenu konfiguracije zrakoplova u slijetanju i polijetanju. I bez promjene konfiguracije dolazi do promjene aerodinamike zbog utjecaja blizine piste na optjecanje krila. Drugi utjecaj na aerodinamiku su izbačeni kotači, koji prije svega povećavaju otpor zrakoplova. Da bi postigli znatno veći koeficijent uzgona u polijetanju i slijetanju koristimo izbačena za-krilca i pred-krilca (ako ih zrakoplov ima). To znači da imamo drugu konfiguraciju zrakoplova (izbačeni kotači izbačena zakrilca, izbačena

predkrilca, itd.) koja ima drugu aerodinamiku od one koju zrakoplov ima u letu.. Ta konfiguracija zrakoplova u slijetanju, u anglosaksonskoj literaturi se naziva *full configuration*.

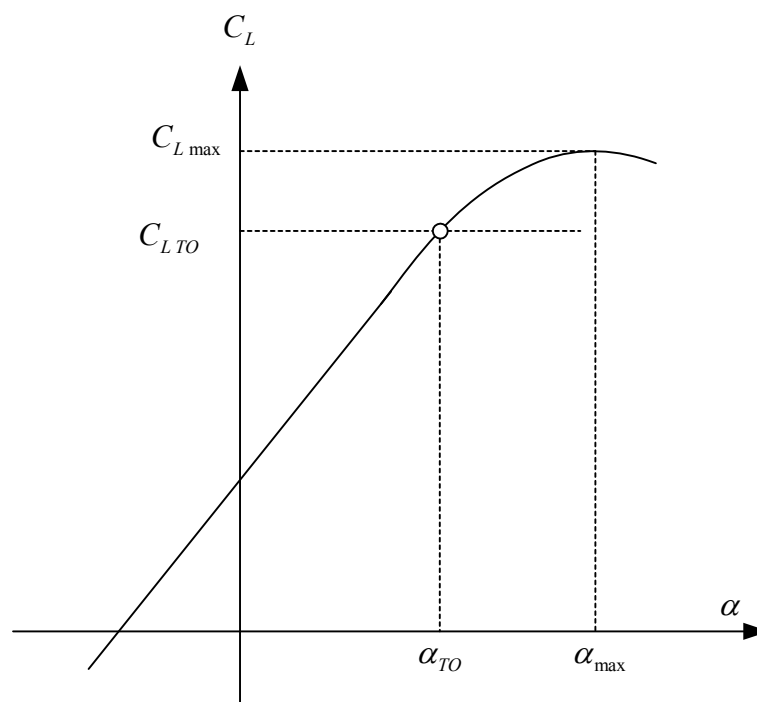
Procjena aerodinamike *full configuration* može se izvršiti pomoću ESDU [21]. Jedan primjer tog proračuna je u [22].

Neka je $C_{L\max}$ maksimalni koeficijent uzgona za konfiguraciju u polijetanju. Sa V_{stall} se označava aerodinamička brzina koja s tim koeficijentom daje uzgon jednak težini letjelice:

$$\frac{\rho V_{stall}^2}{2} S_{ref} C_{L\max} = W$$

Prema tome, V_{stall} je najmanja moguća aerodinamička brzina s kojom bi teoretski mogao zrakoplov poletjeti. U praksi ne smije se koristiti maksimalni koeficijent uzgona zato što bi se moglo dogoditi da neposredno poslije odvajanja, zrakoplov padne natrag na pistu zbog sloma uzgona. Zato se odvajanje, koje označavamo slovima TO (*take off*), vrši sa 10 % većom brzinom (FAR Part 25)

$$V_{TO} = 1.10 \cdot V_{stall}$$



Slika 12-3

S ovom brzinom odvajanja bit će potreban manji koeficijent uzgona od $C_{L\max}$ koji je određen jednadžbom:

$$\frac{\rho V_{TO}^2}{2} S_{ref} C_{LTO} = W$$

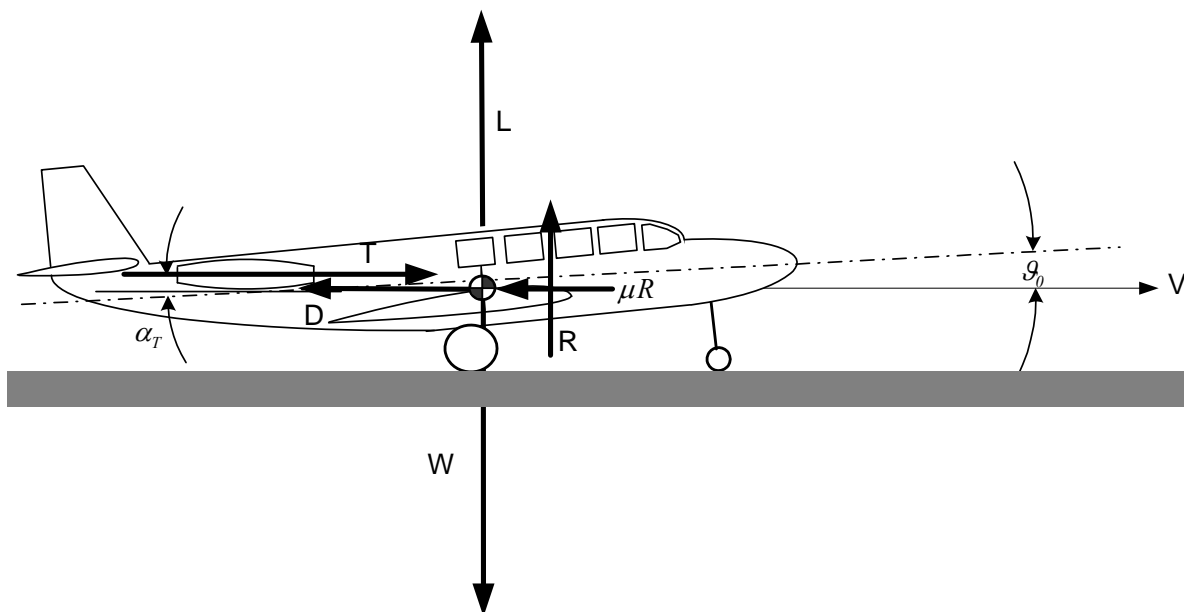
Kad ovu jednadžbu podijelimo s prethodnom jednadžbom (odvajanje sa brzinom V_{stall}) videći račun da je $V_{TO} = 1.10 \cdot V_{stall}$, dobivamo da je

$$C_{LTO} = 0.826 \cdot C_{Lmax}$$

To znači da će se odvajanje zrakoplova od piste vršiti s brzinom V_{TO} i napadnim kutom α_{TO} kome odgovara koeficijent uzgona C_{LTO} .

12.1.4 Zalijetanje - prvi dio

U prvom djelu, tj. tijekom zalijetanja sva tri kotača imaju kontakt s pistom, gibanje zrakoplova je pravocrtno i ubrzano gibanje po pisti od aerodinamičke brzine $V_0 = -V_w = |V_w|$ u startu do aerodinamičke brzine V_R kad započinje odvajanje prednjeg kotača pod djelovanjem otklona kormila visine δ_{mTO} .



Slika 12-4. Sile koje djeluju na zrakoplov u prvom dijelu polijetanja

Tijekom prvog dijela brzina je paralelna pisti $\gamma = 0$, te je konstantni kut nagiba osi zrakoplova jednak napadnom kutu $\vartheta_0 = \alpha_0$. Ta vrijednost određena je geometrijom kotača (tricikla). Zato je u prvom dijelu polijetanja konstantan koeficijent uzgona

$$C_L = C_{L0} + C_{L\alpha} \alpha_0$$

i koeficijent otpora

$$C_D = C_{D0} + KC_L^2.$$

Za vrijeme prvog dijela polijetanja su jednadžbe gibanja središta prema slici 3 :

$$m \frac{dV_K}{dt} = T - D - \mu \cdot R$$

$$L - W + R = 0$$

$$\frac{ds}{dt} = V_K$$

Pogonska sila T je poznat funkcija aerodinamičke brzine, R je otpor oslonca (kotača), a μ je koeficijent kotrljanja kotača po pisti. Ovisno o vrsti podloge na pisti, vrijednosti koeficijenta kotrljanja μ prikazane su tablicom 1.

Vrsta tla	Bez kočenja	Pri kočenju
Suhi asfalt	0.03 - 0.05	0.3 - 0.5
Mokri asfalt	0.05	0.15 - 0.3
Poledica na asfaltu	0.02	0.06 - 0.10
Tvrda zemlja	0.05	0.4
Čvrsto nasuta pista	0.04	0.3
Meka zemlja	0.07	0.2
Vlažna trava	0.08	0.2

Tabela 1. Tablica koeficijenta kotrljanja

Eliminacijom otpora oslonca R dobivamo model zalijetanja zrakoplova po pisti:

$$m \frac{dV_K}{dt} = T - D + \mu L - \mu W$$

$$\frac{ds}{dt} = V_K$$

$$V_K = V - |V_w|$$

Duljina zalijetanja po pisti od početka do trenutka kad se prednji kotač zrakoplova odvoji od piste, može se izračunati točno analitičkim putem. Neka je F rezultujuća sila u pravcu zalijetanja koja ubrzava zrakoplov na pisti. Ona je funkcija aerodinamičke brzine :

$$F = T - \frac{\rho V^2}{2} S(C_D - \mu C_L) - \mu W$$

U problemima polijetanja primjenjuju se tri oblika ove funkcije.

Prvi, koristi se u slučaju turbofan motora kvadratna funkcija pogonska sile o aerodinamičkoj brzini:

$$T = T_0(1 - k_1V + k_2V^2).$$

Na primjer prema [14] za Rolls-Royceov turbofan motor RB211-535E4, ti koeficijenti imaju vrijednosti $k_1 = 2.52 \cdot 10^{-3}$ i $k_2 = 4.34 \cdot 10^{-6}$.

Drugi, koristimo za mlazne motore kad obično usvajamo da je pogonska sila konstantna T_0 . Uočimo da s matematičkog aspekta to je ista funkcija kao u prvom slučaju s tim što su za mlazne motore $k_1 = k_2 = 0$.

Treći, koristimo kad zrakoplov ima elisni pogon s klipnim motorom. Onda je pogonska sila:

$$T = \frac{\eta_{el} P_{mot}}{V}.$$

Snaga motora u zalijetanju P_{mot} je konstantna vrijednost koja odgovara maksimalnom broju obrtaja pri zemlji. Koeficijent učinkovitosti elise ovisi o parametru $J = V/nD$. Međutim $\eta_{el}(0) = 0$, što znači da krivulja $\eta_{el}(J)$ prolazi kroz ishodište. Numeričkim proračunima elise pa raspoložemo sa nizom točaka J_i, η_i . U intervalu od $J_0 = \frac{V_0}{nD}$ do $J_R = \frac{V_R}{nD}$ kroz raspoložive točke i ishodište, provlačimo interpolacioni polinom oblika

$$\eta_{el} = J \cdot f(J)$$

gdje je $f(J) = aJ^2 + bJ + c$ polinom drugog reda. Polinom trećeg reda $J \cdot f(J)$ prolazi sigurno kroz ishodište, a koeficijente polinoma drugog reda a, b i c biramo tako da funkcija prolazi "najbolje" kroz točke u intervalu od J_0 do J_R . S tom funkcijom za koeficijent učinkovitosti elise bit će:

$$T = \frac{\eta_{el} P_{mot}}{V} = J \cdot f(J) \frac{P_{mot}}{V} = \frac{V}{nD} \cdot f(J) \cdot \frac{P_{mot}}{V} = f(J) \cdot \frac{P_{mot}}{nD}.$$

Kako je $f(J) = aJ^2 + bJ + c$ bit će poslije sređivanja

$$T = \frac{P_{mot}c}{nD} \cdot \left(1 + \frac{b}{nDc} \cdot V + \frac{a}{n^2 D^2 c} \cdot V^2 \right)$$

Prema tome slučaj elisnog pogona svodi se na prvi slučaj.

Konačno, u sva tri slučaja pogonska sila je kvadratna funkcija aerodinamičke brzine pa je ubrzanje oblika

$$a(V) = \frac{F(V)}{m} = \frac{T_0(1 - k_1V + k_2V^2)}{m} - \frac{\rho V^2}{2} \frac{S}{m} (C_{D0} + KC_L^2 - \mu C_L) - \mu g$$

ili

$$a(V) = \underbrace{\frac{T_0}{m} - \mu g}_{A} - \underbrace{\frac{T_0 k_1}{m}}_B \cdot V + \underbrace{\left[\frac{T_0 k_2}{m} - \frac{\rho S}{2m} (C_{D0} + KC_L^2 - \mu C_L) \right]}_C \cdot V^2$$

tj. kvadratna funkcija aerodinamičke brzine:

$$a = A + BV + CV^2,$$

Diobom druge diferencijalne jednadžbe s provom

$$\frac{dV_K}{dt} = a$$

$$\frac{ds}{dt} = V_K$$

dobivamo:

$$\frac{ds}{dV_K} = \frac{V_K}{a}$$

Zamjenom brzine leta sa razlikom aerodinamičke brzine i čeonog vjetra $V_K = V - |V_w|$, dobivamo diferencijalnu jednadžbu prijeđenog puta

$$ds = \frac{V_K dV_K}{a} = \frac{(V - |V_w|) \cdot d(-|V_w| + V)}{a} = \frac{V dV}{a(V)} - |V_w| \frac{dV}{a(V)}$$

odakle je integracijom od početne aerodinamičke brzine $V_0 = |V_w|$ do krajnje V_R , dobivamo pređeni put u prvom dijelu:

$$s_1 = \int_{V_0}^{V_R} \frac{V}{a(V)} dV - |V_w| \int_{V_0}^{V_R} \frac{1}{a(V)} dV.$$

Za slučaj mlaznih motora kad je ubrzanje u zalijetanju kvadratna funkcija aerodinamičke brzine

$$a(V) = A + BV + CV^2$$

oba integrala se mogu izračunati analitički. Duljina zalijetanja do aerodinamičke brzine V_R je tada:

$$s_1 = \int_{V_0}^{V_R} \frac{V dV}{A + BV + CV^2} - |V_w| \cdot \int_{V_0}^{V_R} \frac{dV}{A + BV + CV^2}.$$

Prvi integral rastavljamo na dva integrala:

$$\begin{aligned} \int_{V_0}^{V_R} \frac{V dV}{A + BV + CV^2} &= \frac{1}{2C} \int_{V_0}^{V_R} \frac{-B + B + 2CV}{A + BV + CV^2} dV \\ &= -\frac{B}{2C} \int_{V_0}^{V_R} \frac{dV}{A + BV + CV^2} + \frac{1}{2C} \int_{V_0}^{V_R} \frac{B + 2CV}{A + BV + CV^2} dV \end{aligned}$$

Prvi dio prvog integrala zbrojimo s drugim pa je

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{1}{2C} \int_{V_0}^{V_R} \frac{B + 2CV}{A + BV + CV^2} dV - \left(|V_w| + \frac{B}{2C} \right) \int_{V_0}^{V_R} \frac{dV}{A + BV + CV^2} \\ s_1 &= \frac{I}{2C} \ln \frac{A + BV_R + CV_R^2}{A + BV_0 + CV_0^2} - \left(|V_w| + \frac{B}{2C} \right) \cdot I \end{aligned}$$

gdje je:

$$I = \int_{V_0}^{V_R} \frac{dV}{A + BV + CV^2}.$$

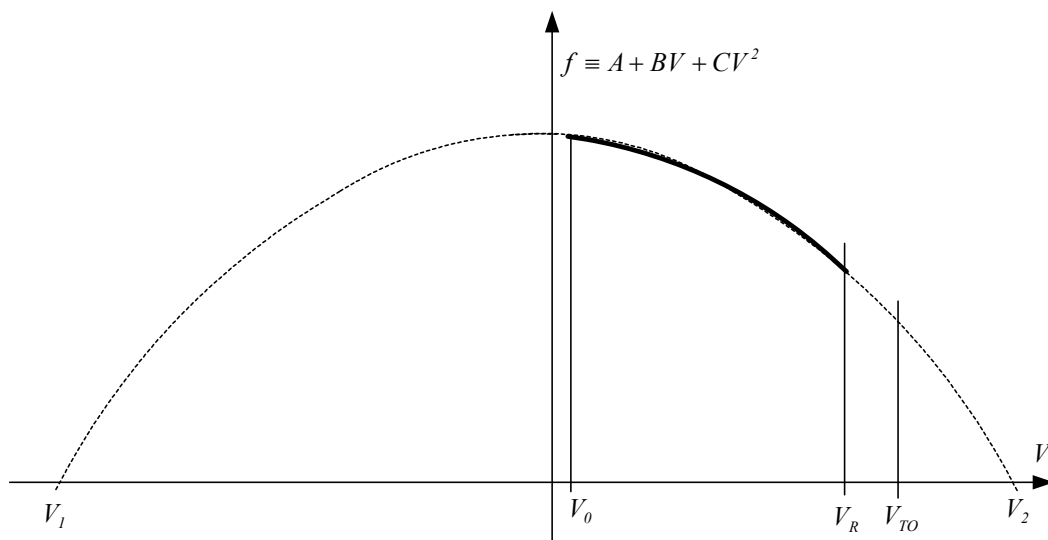
Prvi slučaj

Ako je $B = 0$ (slučaj mlaznih motora)

$$I = \int_{V_0}^{V_R} \frac{dV}{A + CV^2} = \left| \frac{I}{\sqrt{AC}} \arctan \left(V \sqrt{\frac{C}{A}} \right) \right|_{V_0}^{V_R}$$

Drugi slučaj

Rješenje drugog integrala ovisi o korijenima V_1 i V_2 polinoma $A + BV + CV^2 = 0$. Neka su vrijednosti tih korijena



Slika 12-5

$$V_{12} = -\frac{B}{2C} \pm \sqrt{\left(\frac{B}{2C}\right)^2 - \frac{A}{C}}$$

Ako su korijeni V_1 i V_2 , realni, oni ne mogu biti u intervalu integracije V_0, V_R , jer bi to značilo da u tom dijelu postoje trenutci kad je ubrzanje jednako nuli (vrijednost polinoma jednaka je nuli), a zatim i negativno. Kako je

$$A + BV + CV^2 = C(V - V_1)(V - V_2)$$

bit će drugi integral

$$I = \int_{V_0}^{V_R} \frac{dV}{A + BV + CV^2} = \frac{1}{C} \int_{V_0}^{V_R} \frac{dV}{(V - V_1)(V - V_2)}$$

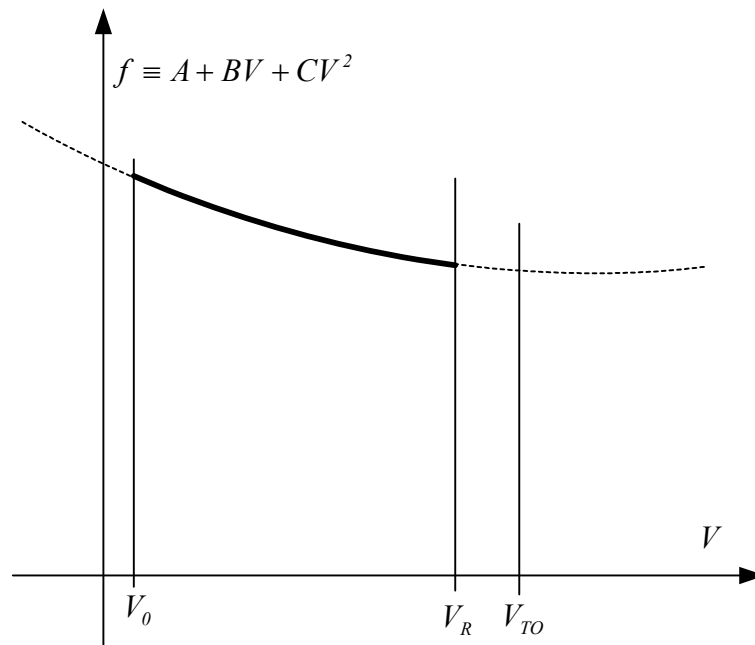
ili s obzirom da je

$$\frac{1}{(V - V_1)(V - V_2)} = \frac{1}{V_1 - V_2} \left(\frac{1}{V - V_1} - \frac{1}{V - V_2} \right)$$

$$I = \frac{1}{C(V_1 - V_2)} \left(\int_{V_0}^{V_R} \frac{dV}{V - V_1} - \int_{V_0}^{V_R} \frac{dV}{V - V_2} \right) = \frac{1}{C(V_1 - V_2)} \left(\ln \frac{V_R - V_1}{V_0 - V_1} - \ln \frac{V_R - V_2}{V_0 - V_2} \right)$$

Treći slučaj

Ako kvadratni polinom nema realne korene (kao na slici 5)



Slika 12-6

onda se on može napisati u obliku

$$A + BV + CV^2 = C \cdot \left[\frac{A}{C} - \left(\frac{B}{2C} \right)^2 + \left(\frac{B}{2C} + V \right)^2 \right] = C \cdot (a^2 + u^2)$$

gdje su

$$a = \sqrt{\frac{A}{C} - \left(\frac{B}{2C} \right)^2}$$

$$u = \frac{B}{2C} + V$$

S tim je smjenama drugi integral:

$$I = \int_{V_i}^{V_R} \frac{dV}{A + BV + CV^2} = \frac{1}{C} \int_{u_i}^{u_R} \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{Ca} \int_{u_i}^{u_R} \frac{d \frac{u}{a}}{1 + \left(\frac{u}{a} \right)^2} = \frac{1}{Ca} \left(\arctg \frac{u_R}{a} - \arctg \frac{u_i}{a} \right).$$

Ukoliko koristimo MATLAB za izračunavanje duljine zalijetanja, ne moramo voditi računa o korijenima kvadratnog polinoma jer se može primijeniti i prvo rješenje (za slučaj realnih korijena) kada su korijeni kompleksni zato što postoji veza između logaritma kompleksnog broja i realnog arkus-tangensa, a tu vezu koristi MATLAB.

12.1.5 Primjer

Aerodinamički koeficijent uzgona i momenta propinjanja malog zrakoplova za konfiguraciju u polijetanju (25/60, djelomice izbačena zakrilca)

$$C_L = 0.825 + 4.72 \alpha + 0.216 \delta_m$$

$$C_m = 0.072 - 0.885 \alpha - 0.566 \delta_m$$

Totalni otpor u polijetanju s utjecajem tla ima vrijednost

$$C_D = 0.0259 + 0.018 C_L^2$$

Maksimalni koeficijent uzgona ove konfiguracije jest $C_{L_{\max}} = 1.69$. Za tu je konfiguraciju

$$C_{L_{TO}} = 0.826 \cdot C_{L_{\max}} = 0.826 \cdot 1.69 = 1.40$$

$$V_{TO} = \sqrt{\frac{2W}{\rho S_{ref} C_{L_{TO}}}} = \sqrt{\frac{2g \cdot 1088}{1.225 \cdot 15.1 \cdot 1.40}} = 28.7 \text{ m/s}$$

Napadni kut α_{TO} i odgovarajući otklon kormila visine $\delta_{m_{TO}}$ za uvjet da $C_L = 1.40$ i $C_m = 0$ određeni su jednadžbama:

$$1.40 = 0.825 + 4.72 \alpha_{TO} + 0.216 \delta_{mTO}$$

$$0 = 0.072 - 0.885 \alpha_{TO} - 0.566 \delta_{mTO}$$

Odavde je $\alpha_{TO} = 0.125 = 7.2^\circ$ za $\delta_m = -0.0681 = -3.9^\circ$.

Izračunajmo pri kojoj brzini treba pilot otkloniti kormilo visine da bi se prednji kotač počeo odvajati od piste. Pretpostavimo da je pilot postavio otklon kormila visine δ_{mTO} u trenutku kad je brzina V_R . U tom trenutku je napadni kut jednak nuli, a otklon kormila visine $\delta_m = -0.068$, pa su aerodinamički koeficijenti :

$$C_L = 0.825 + 4.72 \alpha + 0.216 \delta_m = 0.825 - 0.216 \cdot 0.068 = 0.810$$

$$C_m = 0.072 - 0.885 \alpha - 0.566 \delta_m = 0.072 + 0.566 \cdot 0.068 = 0.110$$

S tim vrijednostima i sa $\ell_s + \mu k_s = 0.10 + 0.04 \cdot 1.00 = 0.14$ odvajanje prednjeg kotača nastat će pri brzini:

$$V_R = \sqrt{\frac{2W(\ell_s + \mu k_s)}{\rho S_{ref} [c_A C_m + C_L \cdot (\ell_s + \mu k_s)]}} = \sqrt{\frac{2g1088 \cdot 0.24}{1.225 \cdot 15.1 [1.73 \cdot 0.110 + 0.810 \cdot 0.24]}} = 26.8 \text{ m/s}$$

To znači da će se zrakoplov početi propinjati kad pilot otkloni kormilo visine na vrijednost $\delta_m = -0.068$ pri brzini 26.8 m/s.

Za vrijeme zalijetanja po pisti mali zrakoplov ima $\mathcal{G}_0 = 0$ pa je $\alpha = 0$, otklon kormila visine $\delta_m = 0$, pa je

$$C_L = 0.825$$

pa je za zalijetanje koeficijent otpora

$$C_D = 0.0259 + K C_L^2 = 0.0259 + 0.018 \cdot 0.825^2 = 0.0382$$

S tim vrijednostima zrakoplov ubrzava sve do brzine V_R .

Pogonska sila u zalijetanju za mali zrakoplov je

$$F = \frac{\eta_{el} P_{mot}}{V} = \frac{\eta_{el} J}{J V} P_{mot} = \frac{\eta_{el} P_{mot}}{J nD}$$

U zalijetanju korak elise ne prelazi vrijednost $J = \frac{V}{nD} = \frac{33}{45.0 \cdot 1.88} \leq 0.4$. Zato smo u intervalu od $J = 0$ do $J = 0.4$ provukli najbolji polinom trećeg reda za funkciju $\eta_{el}(J)$, pa je

$$\frac{\eta_{el}}{J} = (1.2689J - 2.4283)J + 2.3301$$

S tom funkcijom je pogonska sila kvadratni polinom aerodinamičke brzine:

$$F = \left[\left(1.2689 \frac{V}{nD} - 2.4283 \right) \frac{V}{nD} + 2.3301 \right] \frac{P_{mot}}{nD}$$

$$F = 2.3301 \frac{P_{mot}}{nD} \cdot \left(1 - \frac{2.4283}{2.3301 \cdot nD} V + \frac{1.2689}{2.3301 \cdot n^2 D^2} V^2 \right)$$

Za $n = 45.0 \text{ obr/s}$, $D = 1.88 \text{ m}$ i $P_{mot} = 145.8 \text{ KN}$

$$T_0 = 4016$$

$$k_1 = 12.32 \cdot 10^{-3}$$

$$k_2 = 76.09 \cdot 10^{-6}$$

Tijekom zalijetanja po pisti do brzine V_R za određivanje duljine zalijetanja $C_L = 0.825$ i $C_D = 0.0382$. S ovim vrijednostima za pogonsku silu bit će konstante:

$$A = \frac{T_0}{m} - \mu g = \frac{4016}{1088} - 0.04 g = 3.299$$

$$B = -k_1 \frac{T_0}{m} = -12.32 \cdot 10^{-3} \frac{4016}{1088} = -0.04548$$

$$C = k_2 \frac{T_0}{m} - \frac{\rho S_{ref}}{2m} (C_D - \mu C_L)$$

$$= 76.09 \cdot 10^{-6} \frac{4016}{1088} - \frac{1.225 \cdot 15.1}{2 \cdot 1088} (0.0382 - 0.04 \cdot 0.810) = 0.1925 \cdot 10^{-3}$$

Korijeni su: kompleksni jer je

$$B^2 - 4AC = (-0.04548)^2 - 4 \cdot 3.299 \cdot 0.1925 \cdot 10^{-3} = -0.00047 < 0$$

Zato je rješenje dano jednačbom

$$s_1 = \frac{1}{2C} \cdot \ln \frac{A + BV_R + CV_R^2}{A + BV_0 + CV_0^2} - \frac{B}{2C} I$$

Prvi član na desnoj strani ima vrijednost:

$$s' = \frac{1}{2C} \cdot \ln \frac{A + BV_R + CV_R^2}{A + BV_0 + CV_0^2}$$

$$s' = \frac{1}{2 \cdot 0.1925 \cdot 10^{-3}} \cdot \ln \left(\frac{3.299 - 0.04548 \cdot 26.8 + 0.1925 \cdot 10^{-3} \cdot 26.8^2}{3.299} \right) = -1030.7,$$

a drugi :

$$s'' = \frac{B}{2C} I$$

gdje su :

$$I = \frac{1}{aC} \left(\operatorname{arctg} \frac{u_R}{a} - \operatorname{arctg} \frac{u_0}{a} \right)$$

$$a = \sqrt{\frac{A}{C} - \left(\frac{B}{2C} \right)^2} = \sqrt{\frac{3.299}{0.1925 \cdot 10^{-3}} - \left(\frac{0.04548}{2 \cdot 0.1925 \cdot 10^{-3}} \right)^2} = 56.4$$

$$u_0 = \frac{B}{2C} = \frac{-0.04548}{2 \cdot 0.1925 \cdot 10^{-3}} = -118.1$$

$$u_R = \frac{B}{2C} + V_R = -118.1 + 26.8 = -91.3$$

pa je

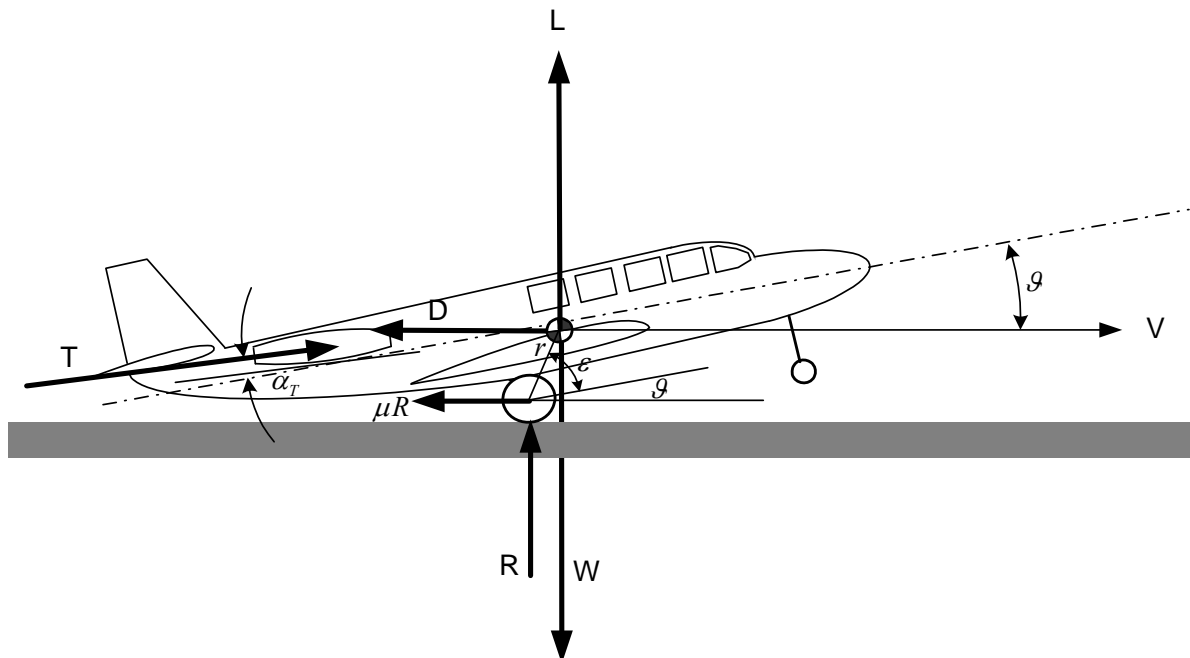
$$I = \frac{1}{0.1925 \cdot 10^{-3} \cdot 56.4} \left(\operatorname{arctg} \frac{-91.3}{56.4} - \operatorname{arctg} \frac{-118.1}{56.4} \right) = 9.926$$

$$s'' = \frac{B}{2C} I = (-118.1) \cdot 9.926 = -1172.3$$

pa je konačno duljina prvog dijela (zalijetanje po pisti do odvajanja prednjeg kotača)

$$s_1 = s' - s'' = -1030.7 - (-1172.3) = 141.6 \text{ m}$$

12.1.6 Propinjanje zrakoplova - drugi dio polijetanja



Slika 12-7

U drugom djelu zrakoplov se okreće također oko osi zadnjih kotača. Ipak ćemo promatrati momentnu jednadžbu oko središta mase jer je tada jednostavniji oblik jednadžbe rotacije. To

smo mogli uraditi i u prethodnom poglavlju ali nije bilo neophodno. Odje je teško izračunati derivaciju kinetičkog momenta zrakoplova za os kotača. Zato izjednačavamo derivaciju kinetičkom momenta za os kroz središte mase i moment za istu os:

$$I_y \frac{dq}{dt} = M^A + M^R$$

$$\frac{d\mathcal{G}}{dt} = q$$

U tom djelu polijetanja imamo samo otpor oslonca zadnjih kotača pa je moment otpora oslonca za središte mase:

$$M^R = -R r \cdot [\cos(\mathcal{G} + \varepsilon) + \mu \sin(\mathcal{G} + \varepsilon)]$$

gdje su r i ε konstruktivne konstante zadnjeg kotača (kao na slici 9-5)

$$r = \sqrt{\ell_s^2 + k_s^2}$$

$$\varepsilon = \arctan \frac{k_s}{\ell_s}$$

Da bi pojednostavili analizu drugog dijela, pretpostavit ćemo da nema vjetera. Zatim ćemo pretpostaviti da se središte mase giba po horizontali i ako se ono diže. Drugim riječima zanemarit ćemo mali porast kuta γ , tj. i dalje ćemo smatrati kut $\gamma \approx 0$, a to znači da je $\alpha = \mathcal{G}$. U tom slučaju otpor oslonca je

$$R = W - L \cos \gamma + D \sin \gamma - T \sin \gamma \approx W - L$$

Jednadžba gibanja duž brzine je

$$\dot{V}_k m = T \cos \alpha - D - \mu R \cos \gamma - (W - R) \sin \gamma \approx T \cos \mathcal{G} - D - \mu R$$

U tim jednadžbama su

$$M = \frac{\rho V^2}{2} S_{ref} c_A C_m$$

$$L = \frac{\rho V^2}{2} S_{ref} C_L$$

a napadni kut u aerodinamičkim koeficijentima je $\alpha = \mathcal{G} - \gamma \approx \mathcal{G}$, pa su aerodinamički koeficijenti C_m i C_L :

$$C_m = C_{m0} + C_{m\alpha} \mathcal{G} + C_{m\delta} \delta_{mTO}$$

$$C_L = C_{L0} + C_{L\alpha} \mathcal{G} + C_{L\delta} \delta_{mTO}$$

Njima ćemo pridodati i diferencijalnu jednadžbu prijednog puta

$$\frac{ds}{dt} = V$$

To znači da u modelu gibanja zrakoplova u ovom dijelu polijetanja, imamo nepoznate funkcije:

$$V, q, \mathcal{G} \text{ i } s$$

koje trebamo odrediti iz diferencijalnih jednadžba:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{T \cos \mathcal{G} - D - \mu R}{m}$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{M + M^R}{I_y}$$

$$\frac{d\mathcal{G}}{dt} = q$$

$$\frac{ds}{dt} = V,$$

i algebarskih jednadžba:

$$R = W - L$$

$$M^R = -R r \cdot [\cos(\mathcal{G} + \varepsilon) + \mu \sin(\mathcal{G} + \varepsilon)].$$

S obzirom da smo zanemarili kut γ drugi dio se završava kad kut propinjanja dostigne vrijednost $\mathcal{G} = \alpha_{TO}$.

Ako usporedimo prvu jednadžbu drugog dijela s odgovarajućom prvog dijela jedina razlika je što u drugom dijelu imamo član $T \cos \mathcal{G}$, a prvog samo T , te da su aerodinamički koeficijent u drugom dijelu:

$$C_m = C_{m0} + C_{m\alpha} \mathcal{G} + C_{m\delta} \delta_{mTO}$$

$$C_L = C_{L0} + C_{L\alpha} \mathcal{G} + C_{L\delta} \delta_{mTO}$$

a u prvom:

$$C_m = C_{m0} + C_{m\alpha} \mathcal{G}_0$$

$$C_L = C_{L0} + C_{L\alpha} \mathcal{G}_0$$

Kut propinjanja zrakoplova \mathcal{G} mijenja se tijekom drugog dijela od 0 do α_{TO} . Na početku drugog dijela $\cos \mathcal{G} = \cos \mathcal{G}_0 \approx 1$, a na kraju $\cos \mathcal{G} = \cos \alpha_{TO}$. Znači nije veliki odstupanje ako i drugom dijelu zamijenimo $T \cos \mathcal{G}$ s T . U tom slučaju prva jednadžba drugog dijela ista je kao jednadžba gibanja prvog dijela. Zato mnogi autori koriste analitičko rješenje do aerodinamičke brzine V_{TO} , koje smo izveli za prvi dio do aerodinamičke brzine V_R .

12.1.7 Primjer

U prvom dijelom dijelu zalijetanja od brzine 0 do $V_R = 26.8$, koeficijent uzgona je bio $C_L = 0.825$ (za $\alpha = 0$ i $\delta_m = 0$). U drugom dijelu zalijetanja od brzine V_R do $V_{TO} = 28.7$ zrakoplov se propinje. Na početku tog dijela ($\alpha = 0$ i $\delta_m = -3.9^\circ$) aerodinamički koeficijent uzgona trenutno padne na vrijednost $C_L = 0.624$ (zbog otklona kormila visine), a zatim raste da bi na kraju ($\alpha_{TO} = 7.2^\circ$ i $\delta_m = -3.9^\circ$) koeficijent uzgona bio $C_L = 1.40$. Za primjenu analitičkog rješenja treba nam konstantan koeficijent uzgona. Da bi koristili analitičko rješenje u drugom dijelu treba uzeti neku srednju vrijednost za koeficijent uzgona koji se mijenja od $C_L = 0.624$ do $C_L = 1.40$. S obzirom da vrijednost koeficijenta uzgona je bliska nekoj srednjoj vrijednosti mnogi koriste taj koeficijent i u drugom dijelu zalijetanja. To znači da s vrijednostima koeficijenata A , B i C izračunatih za prvi dio možemo računati duljinu zalijetanja i za drugi dio ili drugim riječima da možemo odmah računati duljinu zalijetanja od starta $V = 0$ do brzine V_{TO} i ako su koeficijenti izračunati za interval od $V = 0$ do V_R .

Zato mnogi autori, bez objašnjenja, izračunavaju duljinu zalijetanja do odvajanja zrakoplova od piste, s jednadžbom koja je točna samo do odvajanja prednjeg kotača od piste:

$$s_g = s_1 + s_2 = \frac{1}{2C} \cdot \ln \frac{A + BV_{TO} + CV_{TO}^2}{A} - \frac{B}{2C^2(V_1 - V_2)} \cdot \ln \frac{(V_1 - V_{TO}) \cdot V_2}{(V_2 - V_{TO}) \cdot V_1}$$

U slučaju malog zrakoplova s ovom jednadžbom do točke TO s konstantama koje smo odredili za zalijetanje do brzine $V_R = 26.8$, dobivamo duljinu zalijetanja do brzine odvajanja $V_{TO} = 28.7$

$$s_g = 174.7 \text{ m}$$

Točnija metoda (vidi primjer 9.2.4) daje $s_g = 173.9 \text{ m}$.

12.1.8 Treći dio polijetanja

U ovom djelu usvajamo da je zrakoplov u ravnotežnom letu u vertikalnoj ravnini. Gibanje zrakoplova u ovom dijelu polijetanja je ubrzano i krivolinijsko. Jednadžbe tog gibanja dobivamo iz modela za ravnotežni let kad stavimo da je ravnotežni let u vertikalnoj ravnini, a to znači kad je $\chi = const$. Tako dobivamo jednažbe gibanja u trećem dijelu polijetanja:

$$m \frac{dV}{dt} = T - D - W \sin \gamma$$

$$mV \frac{d\gamma}{dt} = L - W \cos \gamma$$

$$\frac{dx}{dt} = V \cos \gamma$$

$$\frac{dz}{dt} = V \sin \gamma$$

Tijekom ovog dijela otklon kormila visine ostaje konstantan δ_{mTO} , brzina leta V i kut brzine leta γ se povećavaju. U tim jednadžbama, za vrijeme zaokreta je koeficijent uzgona $C_L = C_{LTO}$.

Na početku ovog dijela imamo početne uvjete:

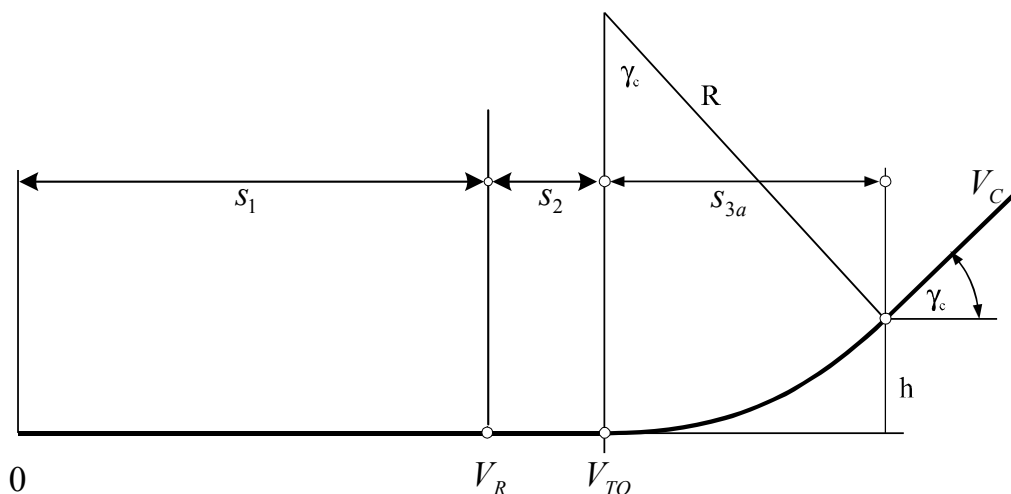
$$V = V_{TO}, \gamma = 0, x = s_g = s_1 + s_2, h = 0.$$

Integraciju vršimo dok kut γ ne dostigne vrijednost γ_c potrebnu za penjanje. U tom trenutku gotov je treći dio polijetanja i započinje četvrti dio.

Može se približno odrediti polumjer vertikalnog zaokreta u ovom dijelu polijetanja:

$$R = \frac{V^2}{g} \cdot \frac{1}{n - \cos \gamma}$$

Procjenu polumjera zakrivljenosti dobit ćemo ako uzmemo prosječne vrijednosti u jednadžbi za polumjer zakrivljenosti, tj. prosječnu brzinu, prosječno normalno opterećenje i $\cos \gamma$.



Slika 12-8

Na ovom dijelu brzina raste od vrijednosti od vrijednosti $V_{TO} = 1.10 \cdot V_{stall}$ do vrijednosti $V_c \approx 1.20 \cdot V_{stall}$, te je vrijednost brzine u zaokretu je $1.15 \cdot V_{stall}$. Toj brzini odgovara prosječno normalno opterećenje:

$$n_m = \frac{\frac{\rho V_m^2}{2} S_{ref} C_{LTO}}{W} = \frac{\frac{\rho (1.15 \cdot V_{stall})^2}{2} S_{ref} 0.826 \cdot C_{Lmax}}{W} = 1.092$$

Ako se uzme u obzir da je sve vrijeme zaokreta kut γ vrlo mali, možemo u prvoj aproksimaciji pretpostaviti da je sve vrijeme vertikalnog zaokreta $\cos \gamma \approx 1$. Tako dobivamo prosječni polumjer u zaokretu

$$R_m = \frac{V_m^2}{g(n_m - \cos \gamma)} = \frac{(1.15 \cdot V_{stall})^2}{g(1.092 - 1)} = 14 \frac{V_{stall}^2}{g}$$

Ukoliko putanju zamijenimo s kružnicom polumjera R_m možemo izračunati visinu na kraju zaokreta, kada je $\gamma = \gamma_C$ (slika 8):

$$h = R(1 - \cos \gamma_C)$$

12.1.9 Četvrti dio polijetanja

Na početku četvrtog dijela pilot mijenja otklon kormila tako da koeficijent uzgona ima vrijednost potrebnu za pravocrtno penjanje s željenim kutom γ_C :

$$C_L = \frac{2W \cos \gamma_C}{\rho S_{ref} V^2}.$$

Time je penjanje pravocrtno, ali za razliku od penjanja koje smo vidjeli u prethodnom poglavlju ovdje je penjanje ubrzano (brzina raste) sve dok zrakoplov ne dostigne brzinu penjanja V_C koja će se dalje mijenjati u ovisnosti od visine. Gibanje na četvrtom dijelu određeno je jednadžbama gibanje za pravocrtno penjanje s ubrzanjem:

$$\begin{aligned} m \frac{dV}{dt} &= T - D - W \sin \gamma_C \\ \frac{dx}{dt} &= V_K \cos \gamma_C \\ \frac{dz}{dt} &= V_K \sin \gamma_C \end{aligned}$$

Zato što brzina stalno raste, tijekom tog leta pilot kontinuirano mijenja otklon kormila visine tako da s porastom brzine smanjuje koeficijent uzgona C_L prema gornjoj jednadžbi. Time osigurava da kut γ ostaje jednak željenoj vrijednosti γ_C .

Četvrti dio se završava kad zrakoplov dostigne visinu $z = h_{obs}$, koju nazivamo *visina nadvisivanja prepreke (obstacle clearance altitude)*. Po civilnim standardima $h_{obs} = 10.7 \text{ m}$ (35 ft), a po vojnim $h_{obs} = 15.2 \text{ m}$ (50 ft).

12.1.10 Ukupna duljina polijetanja

Duljina polijetanja je horizontalna udaljenost od početka piste do točke kad zrakoplov ima visinu $z = h_{obs}$. To znači da je duljina polijetanja zbroj

$$s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = s_g + s_3 + s_4$$

zato što zbroj puta zalijetanja i propinjanja $s_1 + s_2$, put od starta do točke odvajanja označavamo sa $s_g = s_1 + s_2$ od engleske riječi *ground*.

Može se dogoditi za velike zrakoplove da za vrijeme vertikalnog zaokreta u trećem dijelu avion već ima visinu h_{obs} . Duljina polijetanja je

$$s_1 + s_2 + s_3 = s_g + s_3$$

U tom slučaju polijetanje je završeno u trećem dijelu. Bez obzira što je polijetanje završeno zrakoplov će završiti vertikalni zaokret a zatim se penjati s kutom γ_C .

12.1.11 Primjer

Izračunati duljinu polijetanja za mali zrakoplov (primjer iz petog poglavlja) ako je poznato da su za konfiguraciju u polijetanju:

$$C_L = 0.825 + 4.72 \alpha + 0.216 \delta_m$$

$$C_m = 0.072 - 0.885 \alpha - 0.566 \delta_m$$

$$C_D = 0.0259 + 0.018 C_L^2$$

Koeficijent učinkovitosti elise je aproksimiran polinomom

$$\eta_{el} = (((-1.4473 J + 2.4557) J - 2.7437) J + 2.3597) J$$

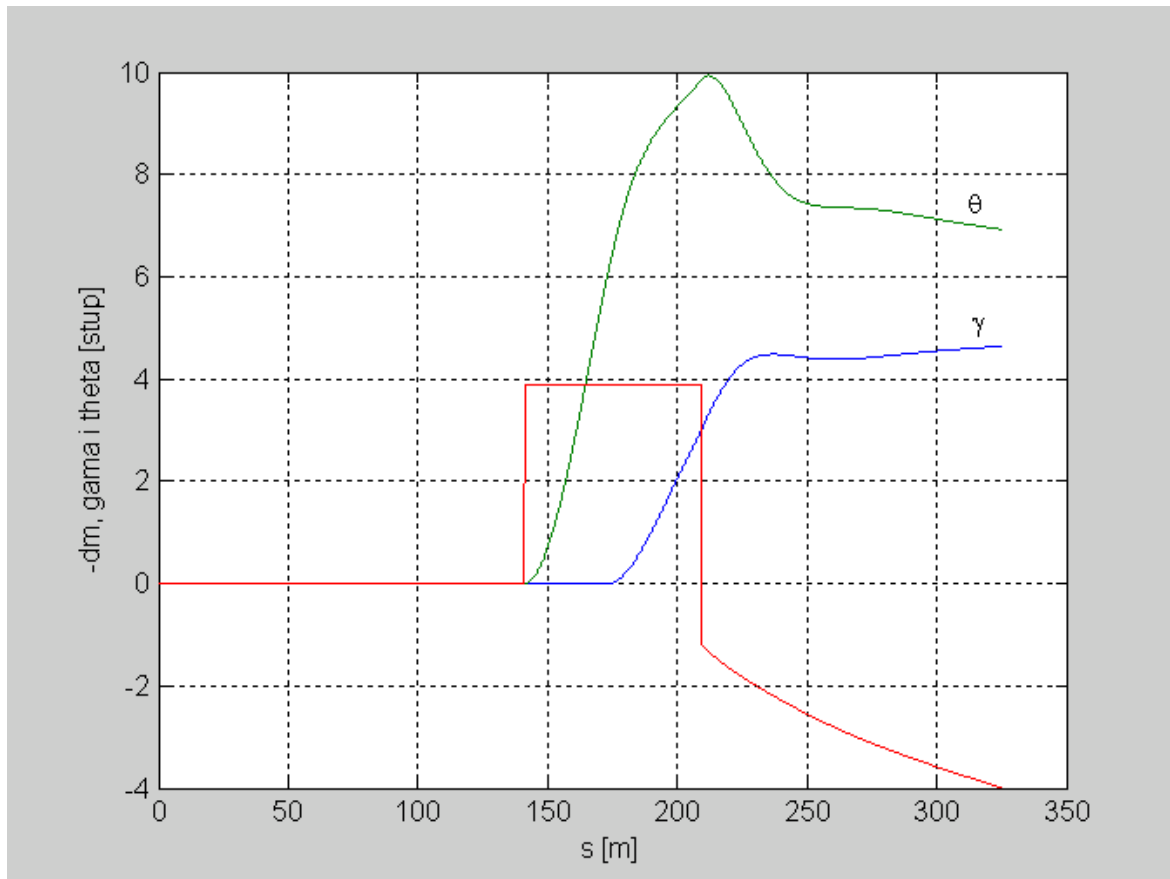
koji važi i za najmanje vrijednosti koraka jer polazi kroz točku $J = 0$, $\eta_{el} = 0$. To nam omogućuje da silu odredimo prema jednadžbi

$$F = \frac{\eta_{el} P_{mot}}{V} = \frac{\eta_{el} J}{J V} P_{mot} = \frac{\eta_{el} P_{mot}}{J nD}$$

u kojoj je

$$\eta_{el} = -1.4473 J^4 + 2.4557 J^3 - 2.7437 J^2 + 2.3597 J$$

Program se nalazi na disketi u direktoriju **performanse\polijetanje\model** zove se **simpol.m**, ima 9 subrutina. S tim programom dobivene su ovisnost kuta propinjanja $\mathcal{A}(s)$ i kuta penjanja $\gamma(s)$ o prijedenom putu kao na slici 7.



Slika 12-9

Dobiveni rezultati su prikazani tabelarno:

	s	v	t	ϑ	γ
odvajanje prednjeg kotača	141.1	26.8	9.88	0	0
odvajanje zadnjih kotača	173.9	29.4	11.05	6.2	0
$h = 10.67 \text{ m}$	325.3	33.6	15.77	6.9	4.6

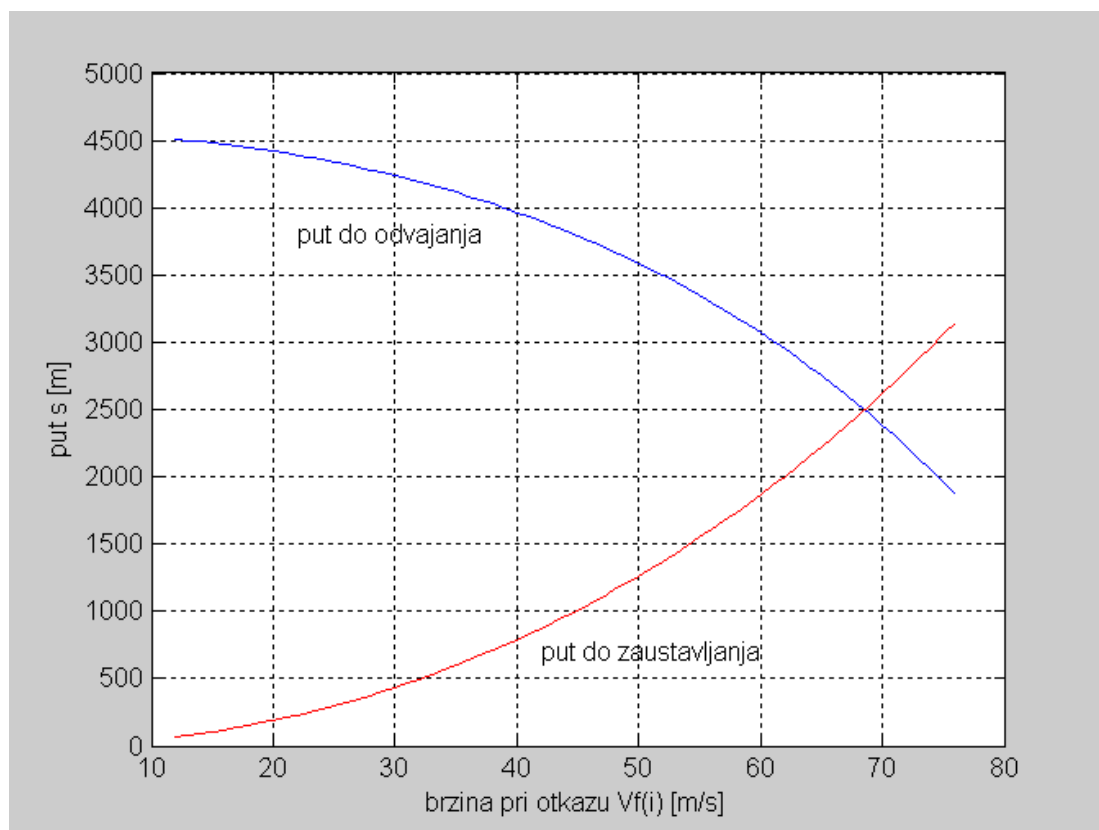
12.1.12 Sigurnost polijetanja

Kada je riječ o zrakoplova s više motora, postoji jedna minimalna aerodinamička brzina pri kojoj je moguće maksimalnim otklonom kormila pravca kompenzirati moment skretanja koji nastaje otkazom jednog bočnog motora. Tu brzinu zovemo V_{mca} (*minimum control speed*). Ta brzina je dosta manja od brzine odvajanja V_{TO} . Ako se otkaz jednog bočnog motora dogodi u

zalijetanju pri brzini V_{fail} koja je manja od $V_{fail} < V_{mca}$ zrakoplov mora kočiti, a ako se otkaz motora dogodi u zalijetanju kad je $V_{fail} > V_{mca}$, postoje dvije mogućnosti:

- kočiti zrakoplov dok ne stane,
- nastaviti polijetanje s jednim motorom jer se zrakoplov može držati u željenom pravcu, a poslije polijetanja sletjeti na pistu.

Jasno je da zrakoplov s jednim motorom ima znatno manje ubrzanje, što zahtijeva duži put zalijetanja od onog koji normalno treba s dva motora te je pitanje da li imamo dovoljno piste za polijetanje.



Slika 12-10. Duljina puta do odvajanja i do zaustavljanja

S druge strane pitanje je također da li imamo dovoljno piste za kočenje. Koje od ove dvije mogućnosti treba realizirati? Da bi odgovorili na to pitanje, promatrimo dijagram na slici 10. Na apscisi je brzina zrakoplova u trenutku otkaza motora V_{fail} . Donja krivulja na apscisi ima "put od starta do zaustavljanja" koji je zbroj dva dijela:

- u prvom dijelu je put zrakoplova do brzine V_{fail} na kome je zrakoplov ubrzavao s dva motora, a

- u drugom djeluje je zrakoplov kočio od brzine V_{fail} do zaustavljanja s jednim motorom.

Gornja krivulja predstavlja isto put koji je zbroj dva dijela:

- prvi dio je isto pređeni put zrakoplova za vrijeme ubrzavanja s dva motora od starta do brzine otkaza V_{fail} , a
- drugi je ubrzavanje s jednim motorom od brzine otkaza V_{fail} do brzine odvajanja V_{TO} .

Gornja krivulja pokazuje da će ukupna duljina biti veća ako je otkaz motora nastao pri manjoj brzini, pa krivulja pada s povećanjem brzine V_{fail} . Dijagrama pokazuje da se te dvije krivulje sijeku za neku brzinu V_1 . Ako je u trenutku otkaza $V_{fail} < V_1$, onda je kraći put do zaustavljanja i pilot treba kočiti. I obrnuto, ako je u trenutku otkaza $V_{fail} > V_1$, pilot treba nastaviti proceduru polijetanja, poletjeti, te onda donijeti odluku što raditi. Ta brzina V_1 se naziva brzina odlučivanja (*decision speed*).

U gornjem dijagramu krajnja točka predstavlja brzinu odvajanja V_{TO} , pa ako je otkaz motora i nastao kad je brzina zrakoplov dostigla tu vrijednost, put do odvajanja isti je kao da nije bilo otkaza. Prema tome očito je da dužina piste za zalijetanje treba biti iz sigurnosnih razloga veća od one koju teoretski određujemo. Ta dužina piste za zalijetanje s_g mora odgovarati dužini piste ako je otkaz nastao pri brzini odlučivanja V_1 , a ta dužina piste dosta je veća od one u normalnom zalijetanju (s_g). Upravo je to jedan od zahtjeva koji mora zadovoljiti dužina piste. Jasno je da ta brzina V_1 mora biti manja od brzini V_R , a veća od V_{cm} .

To znači da je najveća duljina piste potrebna zrakoplovu kome je otkazao jedan motor pri brzini odluke V_1 . Tom istom zrakoplova bit će potrebna i najveća duljina polijetanja kad s jednim motorom postigne visinu $h_{obstacle}$.

12.1.13 Primjer

Neka su

$$S = 511 \text{ m}^2, \quad m = 228.7 \cdot 10^3 \text{ kg}$$

$$T = 705.2 \cdot 10^3 \cdot (1 - 2.94 \cdot 10^{-3}V + 4.97 \cdot 10^{-6}V^2) \text{ N}.$$

Za konfiguraciju u zalijetanju u prisustvu tla:

$$C_{D0} = 0.0364, \quad K = 0.0095, \quad C_L = C_{L0} = 0.654.$$

Sila kočenja pomoću dva motora je $T_{0r} = -352.6 \cdot 10^3 \text{ N}$, a koeficijent kočenja kotačima je $\mu_r = 0.20$

Konfiguracija u polijetanju ima $C_{L\max} = 1.80$,

Za ovaj primjer nacrtati:

- duljinu puta do odvajanja ako je pri brzini V_f otkazao jedan motor, u ovisnosti o toj brzini
- duljinu do zaustavljanja ako je poslije otkaza pri brzini V_f pilot kočio s preostalim jednim motorom i kočnicama na kotačima.

Za rješenje ovog problema služimo se zaključkom iz primjera 9.1.7. Tako je napravljen program koji se nalazi u direktoriju *Performanse\Poletanje* pod imenom *V1decision.m*, a rezultat primjene je prikazan na dijagramu slika 9-8.

12.2 Slijetanje (landing)

12.2.1 Opis slijetanja

Slijetanje se obično vrši s potpuno izbačenom zakrilcima i pretkrilcima (ako postoje). Toj konfiguraciji odgovara neko $C_{L\max}$, a za taj maksimalni koeficijent uzgona odgovara neka brzina V_{stall} prema jednadžbi:

$$\frac{\rho V_{stall}^2}{2} S_{ref} C_{L\max} = W.$$

Brzina leta u trenutku dodira s pistom treba biti $V_{TD} = 1.15 V_{stall}$. S obzirom da tada treba biti $L = W$, znači da je

$$\frac{\rho V_{TD}^2}{2} S_{ref} C_{LTD} = W$$

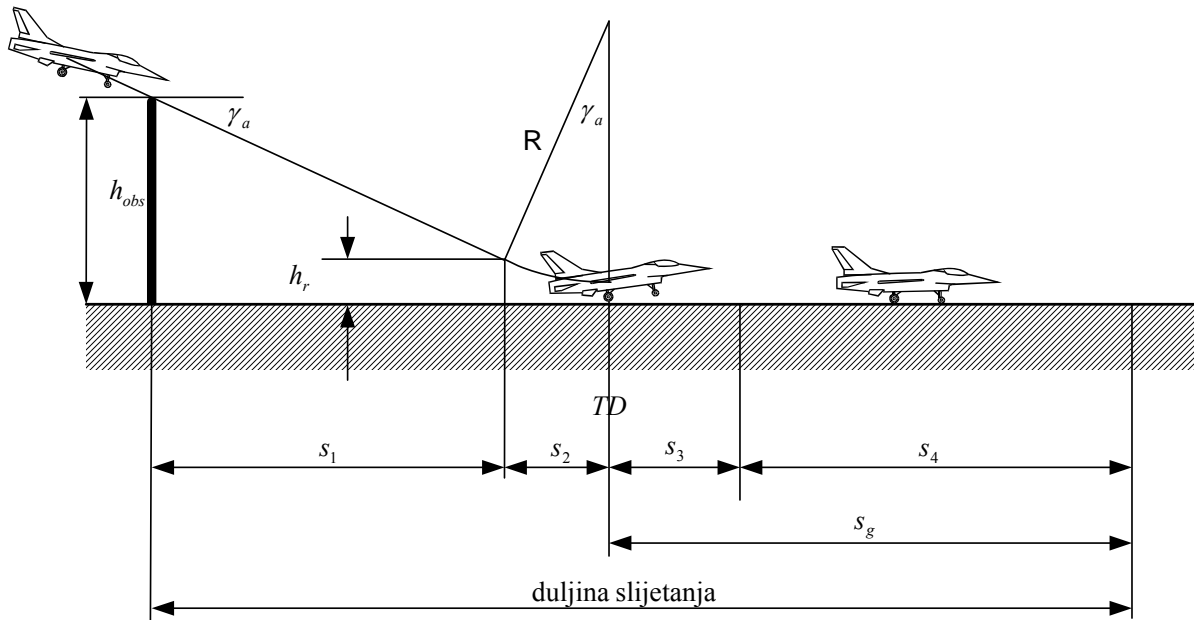
Diobom ove jednadžbe s prethodnom, s obzirom da je $V_{TD} = 1.15 V_{stall}$, dobivamo:

$$C_{LTD} = \left(\frac{V_{stall}}{V_{TD}} \right)^2 C_{Lstall} = 0.756 C_{Lstall}$$

Zrakoplov dolazi na slijetanje bez pogona, s kutom γ_a koji odgovara pravocrtnom gibanju s konstatnom brzinom i s aerodinamičkom brzinom koja prema propisima treba biti malo veća ili jednaka $V_a = 1.3 \cdot V_{stall}$.

Slijetanje ima četiri dijela:

- prvi dio od visine h_{obs} do visine h_r , gdje započinje vertikalni zaokret,
- drugi dio je vertikalni zaokret od visine h_r do dodira zadnjih kotača s pistom,
- treći dio je do dodira prednjeg kotača s pistom i
- četvrti dio je usporavanje na pisti.



Slika 12-11

U prvom dijelu slijetanja zrakoplov nastavlja pravolinijsko spuštanje do visine h_r , koja mu odgovara za vertikalni zaokret da bi na kraju zaokreta tangirao pistu. U zaokretu pilot kontrolira polumjer s promjenom opterećenja n . Prijelaz od kraja zaokreta do dodira s pistom treba se ostvariti bez velike vertikalne brzine (manja od 1 m/s). Usporavanje na pisti ostvaruje se prvo aerodinamičkim kočnicama, zatim motorom ako zrakoplov to omogućuje i na kraju mehaničkim kočnicama na kotačima.

12.2.2 Prvi dio - spuštanje

Kao i za polijetanje, slijetanje se vrši isto uz vjetar. To znači ako imamo vjetar to je čeonu vjetar.

Visina h_{obs} , odakle počinje slijetanje, ista je kao za polijetanje. Na tu visinu zrakoplov treba doći s brzinom većom ili jednakom $1.3 \cdot V_{stall}$, bez pogona s kutom spuštanja:

$$\tan|\gamma_a| = \frac{C_D}{C_L}$$

Onda će se on spuštati pravocrtno s konstantnom brzinom do visine h_r ($h_r \leq h_{obst}$) koja mu odgovara za početak zaokreta u drugom dijelu. Prijedeni put u prvom dijelu od visine h_{obst} do visine h_r ima horizontalnu projekcija

$$x_l = \frac{h_{obst} - h_r}{\tan \gamma_a}$$

Visinu h_r biramo tako da bude

$$h_r = R(1 - \cos \gamma_a)$$

u kojoj je

$$R = \frac{V_{sr}^2}{g} \frac{1}{n_{sr} - \cos \gamma_{sr}}$$

U vertikalnom zaokretu brzina opada. Srednja brzina na ovom dijelu treba biti $1.225V_{stall}$ (srednja vrijednost od $V_r = V_a$ do V_{TD}) pa je srednja vrijednost opterećenja

$$n_{sr} = \frac{\frac{\rho V_{sr}^2}{2} S_{ref} C_{LTD}}{W} = \frac{\frac{\rho (1.225 \cdot V_{stall})^2}{2} S_{ref} 0.756 \cdot C_{Lmax}}{W} = 1.13$$

I ovdje kao i u procjeni polumjera pri polijetanju, uzimamo da je $\cos \gamma_{sr} \approx 1$ Prema tome za ove uvjete bit će polumjer

$$R \approx \frac{(1.225 V_{stall})^2}{g(1.134 - 1)} = 11.1 \frac{V_{stall}^2}{g}$$

12.2.3 Drugi dio - zaokret

Dio leta zrakoplova s visine h_r , gdje ima kut poniranja γ_a , do horizontalnog leta $\gamma = 0$ kad bi zrakoplov trebao imati visinu $h = 0$, je zaokret u vertikalnoj ravnini određen jednadžbama:

$$m \frac{dV}{dt} = -D - W \sin \gamma$$

$$mV \frac{d\gamma}{dt} = L - W \cos \gamma$$

$$\frac{dx}{dt} = V_K \cos \gamma$$

$$\frac{dz}{dt} = V_K \sin \gamma$$

Ako želimo zrakoplov s visine h_r i s kutom poniranja γ_a , spustiti na pistu u vertikalnom zaokretu po kružnici, onda ga treba voditi po kružnici čiji je polumjer

$$R = \frac{h_r}{1 - \cos \gamma_a}.$$

Da bi zrakoplov imao taj R tijekom zaokreta, potrebno je u svakom trenutku opterećenje:

$$n_{potrebno} = \frac{V^2}{gR} + \cos \gamma$$

koje ovisi o brzini i kutu. To potrebno opterećenje postizemo promjenom koeficijenta uzgona prema jednadžbi:

$$n = \frac{\rho V^2 S_{ref} C_L}{2W}.$$

Ako se zrakoplov kretao po kružnici konstantnog polumjera R , onda je duljina drugog dijela slijetanja:

$$s_2 = R \sin \gamma_a.$$

Kad je zrakoplov dodirnuo pistu, gotov je drugi dio slijetanja. Pilot postavlja kormilo visine na nulu, i zrakoplov započinje treći dio slijetanja.

12.2.4 Treći dio - rotacija zrakoplova

U ovom dijelu polijetanja zrakoplov se giba na zadnjim kotačima po pisti i okreće se dok prednji kotač ne dodirne pistu. Za to gibanje koristimo isti model koji smo koristili u drugom dijelu polijetanja, jer je to isto gibanje samo u suprotnom smjeru. Za razliku u polijetanju, u slijetanju nemamo pogonsku silu. Kao i u polijetanju u ovom dijelu nećemo uzeti u obzir utjecaj vjetrova i smatrat ćemo da je kut brzine $\gamma \approx 0$.

Moment otpora oslonca (zadnjih kotača) isti je kao u polijetanju (slika 9-5):

$$M^R = -R r \cdot [\cos(\vartheta + \varepsilon) + \mu \sin(\vartheta + \varepsilon)]$$

a jednadžba otpora oslonca R se pojednostavljuje zato što nema pogonske sile i zato što pretpostavljamo da je $\gamma \approx 0$:

$$R = W - L \cos \gamma + D \sin \gamma - T \sin \gamma \approx W - L,$$

Jednadžba gibanja središta mase ima oblik:

$$\dot{V}_K m = -D - \mu R \cos \gamma - (W - R) \sin \gamma \approx -D - \mu R.$$

Kao i u slučaju propinjanja (drugog dijela) u polijetanju, i ovdje pri slijetanju imamo nepoznate funkcije V , q , \mathcal{G} i s , koje trebamo odrediti iz diferencijalnih jednadžba:

$$m \frac{dV}{dt} = -D - \mu R$$

$$I_y \frac{dq}{dt} = M + M^R$$

$$\frac{d\mathcal{G}}{dt} = q$$

$$\frac{ds}{dt} = V,$$

S obzirom da je $\gamma \approx 0$ bit će $\alpha = \mathcal{G}$. U trenutku dodira s pistom pilot anulira odklon kormila visine pa je u ovom dijelu slijetanja $\delta_m = 0$. Zato su aerodinamički koeficijenti C_m i C_L promjenljivi u funkciji kuta \mathcal{G} :

$$C_m = C_{m0} + C_{m\alpha} \mathcal{G}$$

$$C_L = C_{L0} + C_{L\alpha} \mathcal{G}.$$

Diferencijalnim jednadžbama treba pridružiti i algebarske jednadžbe:

$$R = W - L$$

$$M^R = -R r \cdot [\cos(\mathcal{G} + \varepsilon) + \mu \sin(\mathcal{G} + \varepsilon)].$$

Tijekom trećeg dijela kut propinjanja zrakoplova \mathcal{G} se smanjuje od početne vrijednosti s kojom smo dotakli pistu (na kraju zaokreta) do vrijednost \mathcal{G}_0 koja je određena geometrijom podvoza kada prednji kotač dodiruje pistu.

12.2.5 Četvrti dio - usporavanje

Na kraju rotacije zrakoplova brzina je paralelna pisti. Tada, ako je to moguće, zrakoplov koči aerodinamički i motorom, a na kraju i kočnicama na kotačima. Model gibanja zrakoplova na pisti isti je kao u zalijetanja pri polijetanju, samo što je pogonska sila negativna konstantna vrijednost koja odgovara kočenju motorom ili je nema:

$$m \frac{dV_K}{dt} = T_0 - D - \mu \cdot (W - L) \equiv F$$

$$\frac{dx}{dt} = V_K$$

gdje je sila kočenja motorom $T_0 < 0$ obično konstantna. Za razliku od polijetanja, na početku ovog dijela imamo aerodinamičku brzinu V_R , a na kraju je ona V_0 (ukoliko ima vjetra)

$$s_4 = \int_{V_R}^{V_0} \frac{V dV}{a(V)} - |V_W| \int_{V_R}^{V_0} \frac{dV}{a(V)}$$

$$a = \frac{T_0}{m} - \frac{\rho V^2}{2m} S(C_D - \mu C_L) - \mu g,$$

pa je ubrzanje te sile

$$a = \frac{F}{m} = A - CV^2 < 0,$$

gdje je V aerodinamička brzina, a konstante su:

$$A = \frac{T_0}{m} - \mu g$$

$$C = \frac{\rho S}{2m} (C_{D0} + KC_L^2 - \mu C_L)$$

Napadni kut gotovo je uvijek jednak nuli.

A Matrični zapis vektora

A.1 Baza koordinatnog sustava

Svaki Dekartov koordinatni sustav određen je s tri jedinična vektora njegovih koordinatnih osi:

$$\vec{b}_x \quad \vec{b}_y \quad \vec{b}_z$$

koje zovemo baza koordinatnog sustava. U slučaju desnog koordinatnog sustava (uvijek ćemo se služiti desnim koordinatnim sustavom), prva dva vektora pomnožena vektorski daju treći (drugi pomnožen s trećim daje prvi, a treći s prvim daje drugi). Bilo koji vektor \vec{V} bit će u tom koordinatnom sustavu određen jednažbom:

$$\vec{V} = V_x \vec{b}_x + V_y \vec{b}_y + V_z \vec{b}_z$$

u kojoj su V_x V_y V_z projekcije vektora \vec{V} na osi koordinatnog sustava A. Uvodimo oznaku za matricu od jednog stupca koju čine tri komponente jednog vektora:

$$\mathbf{V}^A = \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix} = [V_x \quad V_y \quad V_z]^T$$

i matricu od jednog stupca koju čine tri jedinična vektora nekog koordinatnog sustava

$$\vec{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} \vec{b}_x \\ \vec{b}_y \\ \vec{b}_z \end{bmatrix} = [\vec{b}_x \quad \vec{b}_y \quad \vec{b}_z]^T$$

Tu matricu od tri jedinična vektora nekog koordinatnog sustava zovemo baza toga koordinatnog sustava. Matrice označavamo *masnim* slovima. Indeks gore označava u kojemu su koordinatnom sustavu zadane komponente vektora i izostavljamo ga ako se podrazumijeva u kojem su koordinatnom sustavu dane komponente. S ovim oznakama bit će:

$$\vec{V} = (\vec{\mathbf{b}})^T \mathbf{V}^A = (\mathbf{V}^A)^T \vec{\mathbf{b}}$$

ili

$$\mathbf{V}^A = \vec{\mathbf{b}} \vec{V}$$

A.2 Vektorski i skalarni produkt vektora

Poznate su nam komponente \mathbf{C} i \mathbf{D} dvaju vektora u koordinatnom sustavu čija je baza $\vec{\mathbf{b}}$

$$\vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{b}}^T \mathbf{C}$$

$$\vec{\mathbf{D}} = \vec{\mathbf{b}}^T \mathbf{D}$$

Želimo matrično izračunati komponente u istom koordinatnom sustavu od skalarnog i vektorskog produkta:

$$S = \vec{\mathbf{C}} \cdot \vec{\mathbf{D}}$$

$$\vec{\mathbf{A}} = \vec{\mathbf{C}} \times \vec{\mathbf{D}}$$

Skalarni produkt lako nalazimo prema definiciji:

$$S = \mathbf{C}^T \vec{\mathbf{b}} \cdot \vec{\mathbf{b}}^T \mathbf{D} = \mathbf{C}^T \mathbf{D},$$

jer je $\vec{\mathbf{b}} \vec{\mathbf{b}}^T$ jedinična matrica.

Da bi smo odredili komponente vektorskog produkta, pomnožimo skalarno jednadžbu vektorskog produkta

$$\vec{\mathbf{b}}^T \mathbf{A} = \vec{\mathbf{C}} \times (\vec{\mathbf{b}}^T \mathbf{D})$$

s bazom $\vec{\mathbf{b}}$. Dobivamo:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \vec{\mathbf{b}} \cdot (\vec{\mathbf{C}} \times \vec{\mathbf{b}}^T \mathbf{D}) \\ &= \vec{\mathbf{b}} \cdot \begin{bmatrix} \vec{\mathbf{C}} \times \vec{b}_x & \vec{\mathbf{C}} \times \vec{b}_y & \vec{\mathbf{C}} \times \vec{b}_z \end{bmatrix} \mathbf{D} \end{aligned}$$

Kako je:

$$\begin{aligned} (\vec{b}_x C_x + \vec{b}_y C_y + \vec{b}_z C_z) \times \vec{b}_x &= -C_y \vec{b}_z + C_z \vec{b}_y \\ (\vec{b}_x C_x + \vec{b}_y C_y + \vec{b}_z C_z) \times \vec{b}_y &= C_x \vec{b}_z - C_z \vec{b}_x \\ (\vec{b}_x C_x + \vec{b}_y C_y + \vec{b}_z C_z) \times \vec{b}_z &= -C_x \vec{b}_y + C_y \vec{b}_x \end{aligned}$$

bit će:

$$\vec{\mathbf{b}} \cdot (\vec{\mathbf{C}} \times \vec{\mathbf{b}}^T) = \begin{bmatrix} \vec{b}_x \\ \vec{b}_y \\ \vec{b}_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -C_y \vec{b}_z + C_z \vec{b}_y & C_x \vec{b}_z - C_z \vec{b}_x & -C_x \vec{b}_y + C_y \vec{b}_x \end{bmatrix}$$

ili

$$\vec{\mathbf{b}} \cdot (\vec{\mathbf{C}} \times \vec{\mathbf{b}}^T) = \begin{bmatrix} 0 & -C_z & C_y \\ C_z & 0 & -C_x \\ -C_y & C_x & 0 \end{bmatrix}$$

Ovu antisimetričnu matricu koja ima nule na glavnoj dijagonali, sastavljenu od komponenti vektora nazivamo kososimetrična matrica. Obično je obilježavamo sa $\tilde{\mathbf{C}}$. Tako konačno dobivamo matricu \mathbf{A} od komponenti vektorskog produkta:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -C_z & C_y \\ C_z & 0 & -C_x \\ -C_y & C_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{D}$$

Zapamtit ćemo da vektorski produkt dvaju vektora, čije su komponente poznate, ima komponente koje se dobivaju matričnim množenjem kososimetrične matrice prvoga vektora s matricom od jednog stupca drugog vektora.

A.3 Derivacija vektora

U dinamici leta vrlo se često susrećemo s problemom koji možemo formulirati ovako: u nekom koordinatnom sustavu B, koji rotira poznatom kutnom brzinom $\vec{\Omega}$ (poznate komponente p, q i r duž osi toga koordinatnog sustava), poznate su nam komponente duž osi toga koordinatnog sustava od vektora \vec{V}

$$\mathbf{V} = [u \quad v \quad w]^T$$

koje su funkcije vremena, a nama su potrebne komponente (duž osi toga istog koordinatnog sustava B) derivacije po vremenu vektora \vec{V} . Obilježimo tu derivaciju sa \vec{a} .

Ako je $\vec{\mathbf{b}}$ baza promatranog koordinatnog sustava, onda je

$$\vec{V} = \vec{\mathbf{b}}^T \mathbf{V}.$$

Po definiciji, tražena derivacija je

$$\vec{\mathbf{a}} = \frac{d}{dt}(\vec{\mathbf{b}}^T \mathbf{V}) = \frac{d\vec{\mathbf{b}}^T}{dt} \mathbf{V} + \vec{\mathbf{b}}^T \frac{d\mathbf{V}}{dt}.$$

Komponente bilo kojeg vektora, tj. matricu komponenata, dobivamo kad dani vektor pomnožimo skalarno ispred s bazom koordinatnog sustava:

$$\mathbf{a} = \vec{\mathbf{b}} \dot{\vec{\mathbf{b}}}^T \mathbf{V} + \dot{\mathbf{V}}$$

Napomenimo najprije da izvod po vremenu komponenata koje obilježavamo sa $\dot{\mathbf{V}} = [\dot{u} \quad \dot{v} \quad \dot{w}]^T$ nije isto što i komponente izvoda koje obilježavamo sa \mathbf{a} . Kao što vidimo, razlika je član $\vec{\mathbf{b}} \dot{\vec{\mathbf{b}}}^T \mathbf{V}$. Razvijmo produkt $\vec{\mathbf{b}} \dot{\vec{\mathbf{b}}}^T$.

Kako je derivacija po vremenu bilo kojeg jediničnog vektora jednaka vektorskom produktu kutne brzine toga jediničnog vektora te samog jediničnog vektora, a sva tri jedinična vektora imaju istu kutnu brzinu koja je jednaka kutnoj brzini koordinatnog sustava B, bit će:

$$\dot{\vec{b}}\vec{b}^T = \vec{b} \vec{\Omega} \times \vec{b}^T,$$

a prema definiciji kososimetrične matrice, na desnoj strani je upravo kososimetrična matrica kutne brzine koordinatnog sustava B, tj.

$$\dot{\vec{b}}\vec{b}^T = \tilde{\Omega}.$$

Kako vidimo, dobiveni rezultat je koso simetrična matrica komponenti trenutne kutne brzine $\Omega = [p \quad q \quad r]^T$ koordinatnog sustava B, te je

$$\mathbf{a} = \tilde{\Omega}\mathbf{V} + \dot{\mathbf{V}}.$$

Prema tomu, zapamtimo, ako vektor \vec{V} ima komponente u v w poznate u koordinatnom sustavu B čija je kutna brzina $\Omega = [p \quad q \quad r]^T$, onda derivacija po vremenu vektora \vec{V} ima komponente (u koordinatnom sustavu B)

$$\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix}$$

Moguće je $\dot{\mathbf{V}} = [\dot{u} \quad \dot{v} \quad \dot{w}]^T$ nazvati relativna derivacija vektora \vec{V} , jer ona ne uzima u obzir rotaciju koordinatnih osi, dok apsolutna derivacija jest zbroj relativne derivacije i člana zbog rotacije koordinatnih osi. U jednadžbi apsolutna derivacija nalazi se na lijevoj strani, a na desnoj strani prvi član je posljedica rotacije koordinatnog sustava B, a drugi član predstavlja relativnu derivaciju.

A.4 Matrice transformacija

Kad izračunavamo složene probleme mehanike leta kao što je let zrakoplova, tada primjenjujemo znanja iz više oblasti. Na primjer, aerodinamičke sile određujemo prema teoriji i praksi aerodinamike, pogonske sile prema konstrukciji motora, a sila Zemljine teže određena je u geofizici. Tako se susrećemo s problemom da je jedna sila poznata u jednom koordinatnom sustavu, druga u drugomu, treća u trećemu, a mi želimo kretanje tijela u

četvrtome koordinatnom sustavu. Ovaj problem nameće potrebu za nekim jednostavnim načinom prijelaza iz jednoga koordinativnog sustava u drugi, što znači ne zadržavati se na problemu određivanja komponenti vektora u nekom koordinatnom sustavu ako su one poznate u drugome. Za rješenje tog problema služiti ćemo se matricama transformacija, jer je matrični račun pogodan za rad na računalu.

A.4.1 Definicija i svojstva matrice transformacije

Ako imamo neki drugi desni koordinatni sustav čija je matrica jediničnih vektora $\vec{\mathbf{b}}$ (baza koordinatnog sustava B), onda je taj isti vektor \vec{V} u tom drugom koordinatnom sustavu:

$$\vec{V} = (\vec{\mathbf{b}})^T \mathbf{V}^B$$

te mora biti:

$$(\vec{\mathbf{a}})^T \mathbf{V}^A = (\vec{\mathbf{b}})^T \mathbf{V}^B$$

Množenjem ove matrice ispred s matricom $\vec{\mathbf{b}}$ dobivamo:

$$\mathbf{V}^B = \vec{\mathbf{b}} \vec{\mathbf{a}}^T \mathbf{V}^A$$

Produkt matrica $\vec{\mathbf{b}} \vec{\mathbf{a}}^T$ nazivamo *matricom transformacije u koordinatni sustav B iz koordinatnog sustava A*, te je označavamo sa \mathbf{L}_{BA} , tj. bit će:

$$\mathbf{L}_{BA} = \vec{\mathbf{b}} \vec{\mathbf{a}}^T = \begin{bmatrix} \vec{b}_x \\ \vec{b}_y \\ \vec{b}_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{b}_x \vec{a}_x & \vec{b}_x \vec{a}_y & \vec{b}_x \vec{a}_z \\ \vec{b}_y \vec{a}_x & \vec{b}_y \vec{a}_y & \vec{b}_y \vec{a}_z \\ \vec{b}_z \vec{a}_x & \vec{b}_z \vec{a}_y & \vec{b}_z \vec{a}_z \end{bmatrix}$$

ili

$$\mathbf{L}_{BA} = \begin{bmatrix} a_x^b & a_y^b & a_z^b \end{bmatrix}.$$

Korisno je znati zapis ove matrice u računalu npr. u FORTRANU ona ima oblik

$$\mathbf{L}_{BA} = \begin{bmatrix} L(1,1) & L(2,1) & L(3,1) \\ L(1,2) & L(2,2) & L(3,2) \\ L(1,3) & L(2,3) & L(3,3) \end{bmatrix}$$

Matrica transformacije ima dimenzije 3x3 (kvadratna trećega reda). Njen član ℓ_{ij} predstavlja kosinus kuta između osi “i koordinatnog sustava B” i osi “j koordinatnog sustava A”.

Prvo svojstvo matrice transformacije dobivamo polazeći od jednakosti:

$$\mathbf{V}^B = \mathbf{L}_{BA} \mathbf{V}^A$$

Množenjem inverznom matricom ispred dobivamo:

$$\mathbf{L}_{BA}^{-1} \mathbf{V}^B = \mathbf{V}^A$$

te je prvo svojstvo matrice transformacije

$$\mathbf{L}_{AB} = \mathbf{L}_{BA}^{-1}.$$

Drugo svojstvo matrice transformacije dobivamo iz jednakosti intenziteta vektora

$$(\mathbf{V}^B)^T \mathbf{V}^B = (\mathbf{V}^A)^T \mathbf{V}^A$$

iz koje slijedi:

$$(\mathbf{V}^B)^T \mathbf{L}_{BA} \mathbf{V}^A = (\mathbf{V}^A)^T \mathbf{V}^A$$

$$(\mathbf{V}^B)^T \mathbf{L}_{BA} = (\mathbf{V}^A)^T$$

$$\mathbf{L}_{BA}^T \mathbf{V}^B = \mathbf{V}^A$$

$$\mathbf{L}_{BA}^T = \mathbf{L}_{AB}.$$

To je vrlo važno svojstvo matrice transformacije jer je mnogo lakše transponirati matricu negoli odrediti njenu inverznu matricu. Iz ove jednadžbe slijedi i zaključak da je determinanta matrice transformacije jednaka jedinici:

$$|\mathbf{L}_{BA}| = 1.$$

Zbroj kvadrata članova jednog stupca ili jednog retka bit će zbroj kvadrata kosinusa kutova koje čini jedna od osi s osima drugoga koordinatnog sustava, te taj zbroj mora biti jednak jedinici.

Ako kososimetričnu matricu treba množiti s matricom transformacije ispred \mathbf{L}_{PE} , onda će se ona transformirati, tj. sve će komponente iz jednog koordinatnog sustava prijeći u komponente drugoga sustava, a matrica transformacije bit će iza novo oblikovane kososimetrične matrice

$$\mathbf{L}_{PE} \tilde{\mathbf{C}}^E = \tilde{\mathbf{C}}^P \mathbf{L}_{PE}.$$

Da bismo dokazali ovo svojstvo, pretpostavimo dva različita koordinatna sustava "E" i "P". Vektorsko množenje možemo obaviti u oba koordinatna sustava:

$$\tilde{\mathbf{A}}^E \mathbf{B}^E = \mathbf{C}^E$$

$$\tilde{\mathbf{A}}^P \mathbf{B}^P = \mathbf{C}^P.$$

Kako je

$$\mathbf{L}_{PE} \mathbf{C}^E = \mathbf{C}^P,$$

mora biti

$$\mathbf{L}_{PE} \tilde{\mathbf{A}}^E \mathbf{B}^E = \tilde{\mathbf{A}}^P \mathbf{B}^P$$

odakle dobivamo:

$$\mathbf{L}_{PE} \tilde{\mathbf{A}}^E = \tilde{\mathbf{A}}^P \mathbf{L}_{PE}.$$

Ova jednadžba pokazuje kako množenjem ispred, kososimetrične matrice sastavljene od komponenata vektora u koordinatni sustav "E" s matricom transformacije, dobivamo kososimetričnu matricu istog vektora, ali sastavljenu od komponenata u koordinatnom sustavu "P" pomnoženu iza s istom matricom transformacije, što ima za posljedicu transformaciju vektorskog produkta u matričnom obliku:

$$\mathbf{L}_{PE} (\tilde{\mathbf{A}}^E \mathbf{B}^E) = \mathbf{L}_{PE} \tilde{\mathbf{A}}^E \mathbf{B}^E = \tilde{\mathbf{A}}^P \mathbf{L}_{PE} \mathbf{B}^E = \tilde{\mathbf{A}}^P \mathbf{B}^P.$$

A.4.2 Određivanje matrice transformacije pomoću kutova

Vrijednosti članova matrice transformacija \mathbf{L}_{BA} ovise o položaju koordinatnog sustava B u odnosu na koordinatni sustav 1. U mehanici postoje tri načina za određivanje položaja jednog koordinatnog sustava u odnosu na drugi koordinatni sustav. To su: Eulerovi kutovi, de Sparreovi kutovi i Hamilton - Rodriguezovi parametri.

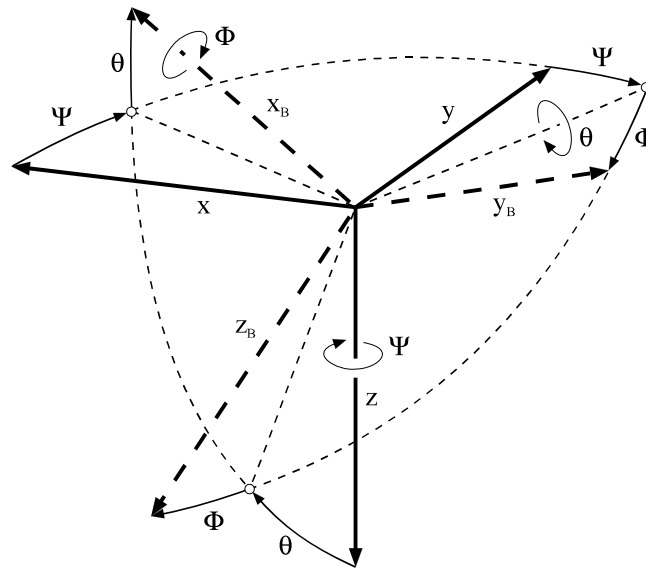
Eulerovi kutovi ne primjenjuju se u mehanici leta, već tzv. de Sparreovi kutovi, te ćemo se i mi koristiti njima. Zadani koordinatni sustav \mathbf{B} zaokrenut je u odnosu na koordinatni sustav \mathbf{A} : za kut ψ oko z osi, za kut ϑ oko novog položaja y osi i konačno za kut ϕ oko najnovijeg položaja x osi. Te kutove ϕ ϑ ψ nazivamo de Sparreovi kutovi (sl.1).

Matricu transformacije odredit ćemo postupno od ta tri kuta. Promatrat ćemo transformaciju \mathbf{L}_{BA} (u B iz A) kao rezultat triju sukcesivnih transformacija:

- 1) za kut ψ oko treće osi $\mathbf{L}_z(\psi)$,
- 2) za kut ϑ oko druge osi $\mathbf{L}_y(\vartheta)$,
- 3) za kut ϕ oko prve osi $\mathbf{L}_x(\phi)$.

Svako od tih transformacija odgovara po jedna matrica transformacije. Rezultat svake sljedeće transformacije jest produkt matrice transformacije ispred vektora. Tako će poslije prve transformacije (rotacija za kut ψ oko treće osi) komponente vektora \vec{V} biti

$$\mathbf{L}_z(\psi) \mathbf{V}^A,$$



Slika 1. De Sparreovi kutovi

poslije druge transformacije (rotacija za kut ϑ oko druge osi) bit će

$$\mathbf{L}_y(\vartheta)\mathbf{L}_z(\psi)\mathbf{V}^A$$

i poslije treće transformacije (rotacija za kut ϕ oko prve osi), bit će

$$\mathbf{L}_x(\phi)\mathbf{L}_y(\vartheta)\mathbf{L}_z(\psi)\mathbf{V}^A.$$

Prema tome vidimo da je matrica transformacija u koordinatni sustav B iz koordinatnog sustava A

$$\mathbf{L}_{BA} = \mathbf{L}_x(\phi)\mathbf{L}_y(\vartheta)\mathbf{L}_z(\psi).$$

Koristeći se definicijom matrice transformacija, dobivamo:

$$\mathbf{L}_x(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}_y(\vartheta) = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & 0 & -\sin \vartheta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \vartheta & 0 & \cos \vartheta \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}_z(\psi) = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Produkt svih triju matrica transformacije daje:

$$\mathbf{L}_{BA} = \begin{bmatrix} c\vartheta c\psi & c\vartheta s\psi & -s\vartheta \\ -c\phi s\psi + s\phi s\vartheta c\psi & c\phi c\psi + s\phi s\vartheta s\psi & s\phi c\vartheta \\ s\phi s\psi + c\phi s\vartheta c\psi & -s\phi c\psi + c\phi s\vartheta s\psi & c\phi c\vartheta \end{bmatrix}$$

Radi kraćeg pisanja označili smo sa “s” sinusnu, a sa “c” kosinusnu funkciju. Općenito, možemo reći kako je matrica transformacija jedna matrična funkciju od tri parametra te je

$$\mathbf{L}_{BA} = \mathbf{L}_X(\varphi) \cdot \mathbf{L}_Y(\vartheta) \cdot \mathbf{L}_Z(\psi) = \mathbf{L}(\varphi, \vartheta, \psi).$$

U korisničkoj biblioteci možemo napraviti potprogram u kojemu su ulazni parametri ta tri kuta (u radijanima) φ , ϑ i ψ , a izlaz je matrica transformacije \mathbf{L}_{BA} , dimenzija 3x3.

A.4.3 Derivacija matrice transformacije

Neka je vektor \vec{r} konstantan u prostoru u kojemu se nalazi koordinatni sustav A koji miruje. Matrica \mathbf{r}^A (koju čine komponente toga vektora u koordinativnom sustavu A) bit će konstantna matrica. Koordinatni sustav B ima kutnu brzinu $\vec{\Omega}_{B/A}$ (u odnosu na koordinatni sustav A), te zato su komponente konstantnog vektora u koordinatnom sustavu B promjenljive veličine, a to znači da su članovi matrice \mathbf{r}^B funkcije vremena. U svakom trenutku postoji matrica transformacija \mathbf{L}_{BA} koja je također funkcija vremena, takva da je

$$\mathbf{r}^B = \mathbf{L}_{BA} \mathbf{r}^A$$

te je

$$\dot{\mathbf{r}}^B = \dot{\mathbf{L}}_{BA} \mathbf{r}^A,$$

jer su članovi matrice \mathbf{r}^A konstante. Sa $\dot{\mathbf{r}}^B$ označili smo matricu koju čine derivacije komponenti vektora \vec{r} u koordinatnom sustavu B. Komponente derivacije bilo kojeg vektora u koordinatnom sustavu B koji rotira kutnom brzinom $\vec{\Omega}_{B/A}$ bit će u koordinatnom sustavu B

$$\tilde{\Omega} \mathbf{r}^B + \dot{\mathbf{r}}^B.$$

Međutim, kako je vektor \vec{r} konstantan, njegova derivacija je nulti vektor, te je

$$\dot{\mathbf{r}}^B = -\tilde{\Omega} \mathbf{r}^B.$$

Zamijenimo li u ovoj jednadžbi $\dot{\mathbf{r}}^B$ sa $\dot{\mathbf{L}}_{BA} \mathbf{r}^A$ i \mathbf{r}^B sa $\mathbf{L}_{BA} \mathbf{r}^A$, dobivamo traženi izvod matrice transformacije

$$\dot{\mathbf{L}}_{BA} = -\tilde{\Omega}_{B/A} \mathbf{L}_{BA}.$$

B ATMOSFERA

B.1 Opće o atmosferi

Prema kemijskom sastavu Zemljinu atmosferu čine: dušik (70 %), kisik (21 %), vodena para ($\cong 3$ %), vodik, ugljik i u veoma malim količinama plemeniti plinovi. Teško je reći dokle se doseže atmosfera, jer gustoća zraka pada s visinom i na kraju je tako mala da se ne može reći od koje visine više nema zraka. Obično se uzima da atmosfera prestaje na visinama od 2000 do 3000 km.

Cjelokupni Zemljin atmosferski omotač zemlje dijelimo na dva dijela:

- homosferu, koju čine tri sloja troposfera, stratosfera i mezosfera. Temeljna značajka homosfere je molekularno stanje plinova. Gornja granica homosfere je na 90 km visine.

- heterosferu, koju čine termosfera i egzosfera. U heterosferi počinju disocijacije molekula plinova pod utjecajem kozmičkih zraka, tj. molekule su razbijene na atome.

Između ovih slojeva postoje prijelazni slojevi od nekoliko stotina metara. Ti prijelazni slojevi imaju imena složena od imena prethodnoga sloja i nastavka "pauza". Tako je primjerice iznad troposfere tropopauza, a iznad stratosfere je stratopauza itd.

Od svih tih slojeva zapravo nas zanima samo troposfera i iznimno i stratosfera. Troposfera nije iste visine na svim geografskim širinama. Na našoj geografskoj širini ona doseže visinu oko 11 km, a u blizini ekvatora i do 16 Km. Ta visina se također mijenja i s godišnjom dobi; ljeti se povećava, a zimi smanjuje. U troposferi se nalazi oko 75 % ukupne mase atmosfere i osnovni dio vodene pare. Bitno obilježje troposfere jest smanjenje temperature ovisno o visini. Zimi i ljeti, poslije vedrih hladnih noći, mogu nastupiti inverzije temperature, kad temperatura u početku raste s visinom, a onda od neke visine počinje opadati. U troposferi mogu nastupiti značajna horizontalna, a rijetko i vertikalna strujanja zračne mase, koja nazivamo vjetrovima. Horizontalni vjetrovi nastaju zbog razlike tlaka na raznim mjestima Zemljine površine, dok su vertikalni vjetrovi posljedice prevelikih razlika temperature ovisno s visini.

Stratosfera, sljedeći sloj, ima donju granicu na 11 km i gornju na približno 50 km. Taj sloj ima konstantnu temperaturu do približno 30 Km. Od te visine do gornje granice sloja temperatura raste. Promjena temperaturnog gradijenta između troposfere i stratosfere zbiva se u uzanom međusloju od nekoliko stotina metara koji nazivamo tropopauza. U tom međusloju javljaju se velika pomicanja zračne mase od zapada prema istoku brzine i do 110 m/s.

Voda u obliku vodene pare nalazi se u atmosferi kao jedna od njenih sastavnica smeše. Nazivamo je vlaga i mjerimo je obično u postocima (najviše do 4 %). Vlaga naglo opada s visinom. Najveći dio cjelokupne vlage nalazi se u donjem graničnom sloju atmosfere. Konkretno, 60 % od ukupne vodene pare na sjevernoj polusferi je do 2 km visine, a 99 % do 10 km. To znači da vlagu postoji zapravo samo u troposferi.

B.2 Ubrzanje Zemljine teže

Zemljina površina ima oblik geoida. U mehanici leta taj se oblik obično zamjenjuje sfernim oblikom. U standardu ISO 5878 dani su polumjeri geoida r u zavisnosti od geografske širine φ . Kada se Zemljin geoid zamijeni sa sferom, onda se uzima polumjer

$$R = 6357 \text{ km} . \quad \text{B.1}$$

Atmosferu izučavamo u odnosu na zemlju. Zato je sila koja djeluje na element mase dm na visini h od razine mora i na geografskoj širini φ , vektorski zbroj gravitacijske sile i sile tromosti uslijed rotacije Zemlje. Gravitacijska sila koja djeluje na elementarnu masu, ako je Zemlja smatramo sfernim oblikom polumjera R , bit će:

$$\frac{\gamma M}{R^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{h}{R}\right)^2} dm \quad \text{B.2}$$

i ona je u pravcu od središta mase dm do središta zemlje, sa smjerom od središta mase dm prema središtu Zemlje.

Sila tromosti posljedica je koordinatnog sustava vezanog za Zemlju u odnosu na koji promatramo atmosferu. Po pravcu okomita je na osu zemlje, po smjeru od Zemljine osi, a njen je intenzitet

$$\Omega^2 (R + h) \cos \varphi \, dm$$

Rezultantu tih dviju sila nazivamo sila Zemljane teže. Jasno je da ubrzanje rezultante tih sila ne prolazi kroz središte Zemljinog geoida, a intenzitet tog ubrzanja složena je funkcija od φ i h . Tu funkciju s dovoljnom točnošću za geografske širine oko 45° zamjenjujemo jednadžbom:

$$g(\varphi, h) = \frac{g_N f(\varphi)}{\left(1 + \frac{h}{R}\right)^2}, \quad \text{B.3}$$

gdje je

$$g_N = 9.80616 \quad \text{B.4}$$

$$f(\varphi) = (1 - 0.0026372 \cos 2\varphi + 0.0000059 \cos^2 2\varphi) \quad \text{B.5}$$

Drugim riječima, za visinu mora ($h=0$) ubrzanje sile Zemljine teže je $g_N f(\varphi)$, a za geografsku širinu $\varphi = 45^\circ$, ubrzanje je $g_N = 9.80616 \text{ m/s}^2$. Za područja bliže ekvatoru ili polovima Zemlje treba pogledati standard ISO 5878. Radi lakšega izučavanja promjena tlaka u atmosferi, uvodi se geopotencijalna visina. Po definiciji geopotencijalne visine H bit će

$$g_N dH = g(h, \varphi) dh$$

Kako je

$$g(\varphi, h) = \frac{g_N f(\varphi)}{\left(1 + \frac{h}{R}\right)^2},$$

bit će diferencijal geopotencijalne visine

$$g_N dH = \frac{g_N f(\varphi)}{\left(1 + \frac{h}{R}\right)^2} dh.$$

Ako je ishodište geopotencijalne visine isto kao i ishodište realne visine (razina mora) postoji veza između realne i geopotencijalne visine:

$$H = \frac{f(\varphi)}{1 + \frac{h}{R}} h \quad \text{B.6}$$

i

$$h = \frac{H}{f(\varphi) - \frac{H}{R}} \quad \text{B.7}$$

B.3 Značajke vlažnog zraka

U mehanici leta potrebne su nam temeljne fizičke značajke zraka - gustoća, brzina zvuka u zraku, temperatura, tlak i vjetar. Sve te značajke zraka izučavaju na razini Međunarodne meteorološke organizacije. Za mjerenje atmosfere postoji niz meteoroloških stanica koje su postavljene na raznim mjestima Zemljine površine. Ispitivanja se obavljaju pomoću složenih meteoroloških uređaja kojima su opremljeni sondažni baloni, specijalni zrakoplovi, sondažne rakete te sateliti. Rezultati mjerenja se prikupljaju s raznih strana svijeta, obrađuju i objavljuju u obliku međunarodnih meteoroloških standarda

Navest ćemo bitne značajke tih ispitivanja koja nas posebno zanimaju u mehanici leta

Zrak je smjesa: dušika, kisika, vodika, ugljičnogdioksida, vodene pare i plemenitih plinova. Isključimo li problem onečišćenja zraka u gradovima i industrijskim središtima, svi sastojci zraka, osim vodene pare (pa i ugljinogdioksida i sumporovodika), u stalnom su međusobnom omjeru i čine suhi zrak. Ta činjenica da je suhi zrak uvijek istoga sastava omogućava nam da ga smatramo kao jednu sastavnicu vlažnog zraka, a druga je vodena para. Utvrđeno je da se suhi zrak ponaša kao idealni plin čija je plinska konstanta

$$R = 287.053 J / (K^0 kg). \quad B.8$$

Odnos J/kg ima dimenziju brzine na kvadrat, te možemo također napisati da je dimenzija plinske konstante $J/(K^0 kg) = [m^2 / (s^2 \cdot K)]$. Zato u anglosaksonskim jedinicama plinska konstanta ima dimenziju brzine na kvadrat po stupnju temperature:

$$R = 1716 ft^2 / (s^2 \cdot R) \quad B.9$$

Isto tako i vodena para se može promatrati kao idealni plin čija je plinska konstanta

$$R_v = \frac{8}{5} R. \quad B.10$$

U zraku oko nas pomiješani su suhi zrak i vodena para. Taj omjer vodene pare prema suhom zraku je vrlo promjenljiv. Zato vlažan zrak promatramo kao smjesu koja je okarakterizirana omjerom vlage prema suhom zraku.

Na vlažan zrak možemo primijeniti d'Alambertov zakon o parcijalnim tlakovima. Neka je na temperaturi T u volumenu V smjesa plinova $m_a + m_v$ (m_a je masa suhog zraka, a m_v masa vodene pare). Totalnim tlakom nazivamo tlak p na kome se nalazi smjesa u volumenu V i na temperaturi T . Ako je masa jedne komponente plinske smjese sama u toj istom volumenu smjese i na toj istoj temperaturi smjese T , onda će ona biti na parcijalnom tlaku. Po d'Alambertovu zakonu, zbroj parcijalnih tlakova jednak je ukupnom tlaku. S p_a označimo parcijalni tlak suhog zraka, a s e' parcijalni tlak vodene pare:

$$p = p_a + e'$$

Jednadžbe stanja komponenata suhog zraka i vodene pare kao idealnih plinova uzete u istom volumenu V i na istoj temperaturi T , kao i smjesa $m_a + m_v$, jesu

$$p_a V = m_a R T$$

$$e' V = m_v R_v T$$

Budući da je $R_v = \frac{8}{5} R$ druga jednadžba može se transformirati u oblik

$$\frac{5}{8}e'V = m_v RT .$$

Zbrajanjem prve i druge transformirane jednadžbe te imaju na umu da je

$$p_a = p - e'$$

$$\rho = \frac{m_a + m_v}{V} ,$$

dobivamo

$$\rho = \frac{p}{R \frac{3e'}{8p} T} . \quad \text{B.11}$$

Iz ove jednadžbe zaključujemo da, vlažan zrak možemo promatrati kao idealan plin

$$\rho = \frac{p}{R_s T} \quad \text{B.12}$$

samo što vlažan zrak ima plinsku konstantu R_s koja ovisi o odnosu parcijalnog tlaka vodene pare prema totalnom tlaku smjese e'/p :

$$R_s = \frac{R}{1 - \frac{3e'}{8p}} \quad \text{B.13}$$

To znači da i brzinu zvuka možemo odrediti pomoću jednadžbe za idealne plinove samo što treba uvest plinsku konstantu vlažnog zraka

$$a = \sqrt{kR_s T} ; \quad \text{B.14}$$

k je odnos specifične topline pri konstantnom tlaku i konstantnom volumenu:

$$k = c_p / c_v = 1.4 \quad \text{B.15}$$

Gustoća ili specifična masa zraka ρ kao i brzina zvuka a veličine su koje nam trebaju u dinamici leta. One se ne mjere, već računaju na osnovi izmjerenih vrijednosti u atmosferi: temperature T , totalnog tlaka p i relativne vlažnosti e'/p . Izmjerenu temperaturu T pomoću izmjerene relativne vlažnosti e'/p pretvorit ćemo u fiktivnu temperaturu τ i s njom ćemo računati tražene vrijednosti koristeći plinsku konstantu suhoga zraka

Za vlažan zrak kaže se da je zasićen pri danoj temperaturi i tlaku ako u zraku ima toliko vlage da voda ne može više isparavati na toj temperaturi i pri tom tlaku, tj. vodena para u vlažnom zraku i voda su u relativnoj ravnoteži. U intervalu od -20^0 do $+30^0$ C možemo koristiti empirijsku formulu za parcijalni tlak vodene pare u zasićenom vlažnom zraku izražen u milibarima ($10^{-5} Pa$).

$$e'_w = 6.107 \exp\left(\frac{AT - B}{T - C}\right), \quad \text{B.16}$$

gdje su

T	<273	>273
A	21.87	17.27
B	5972.	4714.
C	7.50	35.7

Dobiveni broj Pa parcijalnog tlaka vlage u zasićenom zraku možemo preračunati u anglosaksonske jedinice koristeći relaciju $3386 Pa = 1 in.Hg$. U meteorološkoj praksi, najčešće se koristi relativna vlažnost U koja predstavlja postotak parcijalnog tlaka vodene pare e' u odnosu na e'_w parcijalni tlak vlage u zasićenom vlažnom zraku (pri istoj temperaturi i tlaku vlažnoga zraka):

$$U = 100 \frac{e'}{e'_w} \quad \text{B.17}$$

B.4 Vertikalna ravnoteža

Ovisnost tlaka o visini zasniva se na hipotezi o vertikalnoj ravnoteži atmosfere. Prema toj hipotezi, težina horizontalnog sloja zraka elementarne debljine dh i proizvoljne površine A uravnotežava se razlikom sila tlaka s donje Ap i gornje strane $A(p + dp)$ na istu površinu A .

$$g\rho A dh = Ap - A(p + dp)$$

ili

$$dp = -g\rho dh.$$

U ovoj jednadžbi promjenljiva je s visinom ne samo gustoća zraka ρ već i ubrzanje sile Zemljišne teže g . Zato uvodimo na mjesto realne visine h geopotencijalnu visinu H . Prema definiciji o geopotencijalnoj visini, $gdh = g_N dH$, te je diferencijalna promjena tlaka obzirom na geopotencijalnu visinu

$$dp = -g_N \rho dH.$$

Uzima se da je $g_N = 9.80665 m/s^2$ ili u anglosaksonskim jedinicama $g_N = 32.174 ft/s^2$.

Gustoću možemo izraziti pomoću jednadžbe stanja vlažnog zraka

$$\rho = \frac{p}{R_s T},$$

u kojoj je

$$R_s = \frac{R}{1 - \frac{3e'}{8p}}$$

Oznaka R_s treba nas podsjetiti na to da je riječ o plinskoj konstanti smjese koju čini suhi zrak i vodena para, a e'/p odnos parcijalnog tlaka vlage prema totalnom tlaku vlažnog zraka. Tako dobivamo promjenu tlaka ovisno o visini:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g_n}{R_s T} dH \quad \text{B.18}$$

Integracijom od visine H_0 na kojoj je tlak p_0 do visine H na kojoj je tlak $p(H)$ dobivamo promjenu tlaka s visinom za poznatu ovisnost temperature o visini:

$$p(H) = p_0 \exp\left(-g_N \int_{H_0}^H \frac{dH}{R_s T(H)}\right) \quad \text{B.19}$$

To znači da možemo odrediti tlak na visini H ako znamo promjenu temperature T s visinom H , ali i vrijednost tlaka p_0 na visini H_0 . Obično uzimamo da je H_0 razina mora od koje mjerimo visinu, te je $H_0 = 0$.

U praksi pri sondaži atmosfere usvaja se hipoteza o vertikalnoj ravnoteži, te se ne mjeri promjena tlaka s visinom, već je računamo na temelju izmjerene temperature na raznim visinama. Zato je i plinska konstanta vlažnog zraka promjenljiva s visinom $R_s(H)$, a kako je poznat tlak pri zemlji p_0 , ova jednadžba omogućuje da odredimo tlak u ovisnosti o visini. Još je zanimljivije to što možemo obrnuto mjerenjem temperature, tlaka i relativne vlažnosti pomoću ove jednadžbi dobiti visinu mjerenja.

B.5 Standardna atmosfera

Iz svakodnevnoga života znamo da se stanje atmosfere značajno mijenja u ovisnosti o klimatskim uvjetima, godišnjim dobima, visini pa i tijekom jednog dana. Budući da aerodinamičke karakteristike letjelica bitno ovise o gustoći zraka i brzini zvuka, proračuni se u dinamici leta izvode za standardne (normalne) meteorološke uvjete. Ti standardni meteorološki uvjeti odgovaraju srednjim vrijednostima mjerenja u duljim razdobljima i na raznim mjernim mjestima. Oni čine tzv. standardnu, normalnu ili referentnu atmosferu. Utjecaj odstupanja meteoroloških uvjeta od normalnih veličina na let izučava se u teoriji poremećaja. Međunarodna organizacija za standardizaciju usvojila je tipične atmosfere u

ovisnosti o geografskoj širini (ISO 5878). Te tipične atmosfere obuhvaćaju zakonitost promjene najvažnijih parametara do visine 80 km. One se uzimaju u obzir pri proračunu performansi i projektiranju letjelica, pri obradi geofizičkih i meteoroloških podataka, za prikazivanje rezultata ispitivanja letjelica pod istim uvjetima. U tipičnoj atmosferi određena je promjena parametara atmosfere ovisno o visini. Međunarodna organizacija za standardizaciju propisala je standardnom atmosferom tipičnu atmosferu koja vrijedi za geografsku širinu $\varphi = 45^\circ$.

U standardnoj atmosferi zadane su promjene temperature T sa visinom H . U **troposferi**, od 0 do 11 km, u ISO standardima tj. za temperaturu u Kelvinovim stupnjevima $[^\circ K]$ i za visinu u metrima $[m]$:

$$T = T_{0N} + \beta H = 288.15 - 0.0065 \cdot H, \quad \text{B.20}$$

a u anglosaksonskim jedinicama kad je temperatura u Reaumurovim stupnjevima $[^\circ R]$ i visina i u stopama $[ft]$,

$$T = 519 - 0.00035745 \cdot H \quad \text{B.21}$$

U toj standardnoj atmosferi nema vlage i vlada vertikalna ravnoteža. U tim uvjetima u **troposferi** (do visine 11 km), rješenjem integrala koji daje vertikalna ravnoteža, dobivamo zakon promjene tlaka s visinom:

$$p = p_{0N} \left(1 + \frac{\beta}{T_{0N}} H \right)^{-\frac{g_0}{R\beta}} \quad \text{B.22}$$

- u ISO jedinicama (tlak u $[Pa]$ i visina u $[m]$)

$$p = 101325 \cdot \left(1 - 0.02256 \frac{H}{1000} \right)^{5.256}, \quad \text{B.23}$$

- a u anglosaksonskim jedinicama (visina u $[ft]$)

$$p = p_0 \cdot \left(1 - 0.00688 \frac{H}{1000} \right)^{5.256}. \quad \text{B.24}$$

gdje je $p_0 = 29.92 [in.Hg] = 2116.2 [lb/ft^2]$.

U **stratosferi** (od 11 Km visine do 20 Km), temperatura je konstantna

$$T = 216.6 \text{ } ^\circ K = 390.0 \text{ } ^\circ R, \quad \text{B.25}$$

te integracijom dobivamo diferencijalne jednačbe vertikalne ravnoteže od donje granice stratosfere do bilo koje visine u stratosferi:

$$p = p_{H_0} \exp\left(-g_N \int_{H_0}^H \frac{dH}{RT(H)}\right) = p_{H_0} \exp\left(-g_N \frac{H - H_0}{R \cdot T_{H_0}}\right) \quad \text{B.26}$$

- u ISO sustavu (visina u metrima, a tlak u paskalima)

$$p = 22632 \cdot \exp\left(-0.1577 \frac{H - 11000}{1000}\right), \quad \text{B.27}$$

- ili u anglosaksonskim jedinicama (visina u [ft])

$$p = p_{36089} \cdot \exp\left(-0.04806 \frac{H - 36089}{1000}\right). \quad \text{B.28}$$

a tlak se može mjeriti u $[lb/ft^2]$ ili u $[in.Hg]$. U prvom slučaju je tlak između troposfere i stratosfere $p_{36089} = 472.7 [lb/ft^2]$, a u drugom $p_{36089} = 6.684 [in.Hg]$.

Gustoća zraka i brzina zvuka ovisno o visini izračunavaju se za standardnu atmosferu po jednačbama:

- u ISO jedinicama (gustoća u $[Kg/m^3]$, tlak u $[Pa]$, temperatura u $[^{\circ}K]$) imaju oblik:

$$\rho_N = 0.003484 \cdot \frac{P_N}{T_N} \quad \text{B.29}$$

$$a_N = 20.05 \cdot \sqrt{T_N}$$

Na razini mora te jednačbe daju:

$$\rho_{N0} = 1.225 \text{ kg}/m^3 \quad \text{B.30}$$

$$a_{N0} = 340.3 \text{ m}/s$$

- u anglosaksonskim jedinicama (gustoća u $[slug/ft^3] = [lb \cdot s^2/ft^4]$, tlak u $[lb/ft^2]$, temperatura u $[^{\circ}R]$) te jednačbe imaju oblik

$$\rho_N = 5.826 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{P_N}{T_N} \quad \text{B.31}$$

$$a_N = 49.02 \cdot \sqrt{T_N},$$

što na razini mora daje:

$$\rho_{N0} = 2.3769 \text{ slug}/ft^3 \quad \text{B.32}$$

$$a_{N0} = 1116.4 \text{ ft}/s$$

Na mnogim zrakoplovima instrument za mjerenje tlaka ima skalu u [in.Hg]. Pri tome treba imati na umu da je $29.92[in.Hg] = 2116.2[lb/ft^2] = 101325 Pa$

Konačno, u normalnim uvjetima postoji veza između tlaka i temperature koju dobivamo eliminiramo visinu iz jednadžbi za promjenu tlaka i temperature. U troposferi je promjena tlaka s obzirom na visinu dana jednadžbom

$$p = p_0 \left(1 + \frac{\beta}{T_0} H \right)^{-\frac{g_n}{R\beta}},$$

a temperature

$$T = T_0 + \beta \cdot H .$$

Eliminacijom visine dobivamo jednadžbu po kojoj svakom tlaku odgovara određena temperatura.

$$T = T_0 \left(\frac{p}{p_0} \right)^{-\frac{R\beta}{g_n}} \quad \text{B.33}$$

U sustavu ISO jedinica ta jednadžba ima oblik

$$T = 288.15 \cdot \left(\frac{p}{101325} \right)^{0.1903} . \quad \text{B.34}$$

STANDARDNA ATMOSFERA ISO 2533

H	T	p	ρ	a	v
[m]	[K]	[N/m ²]	[Kg/m ³]	[m/s]	[m ² /s]
0	288.1	101325.	1.2250	340.3	0.146E-4
200	286.9	98946.	1.2017	339.5	0.148E-4
400	285.6	96612.	1.1787	338.8	0.151E-4
600	284.3	94323.	1.1560	338.0	0.153E-4
800	283.0	92078.	1.1337	337.2	0.156E-4
1000	281.7	89877.	1.1117	336.4	0.158E-4
1200	280.4	87719.	1.0900	335.7	0.161E-4
1400	279.1	85603.	1.0687	334.9	0.163E-4
1600	277.8	83528.	1.0476	334.1	0.166E-4
1800	276.5	81495.	1.0269	333.3	0.169E-4
2000	275.2	79502.	1.0066	332.5	0.171E-4
2200	273.9	77549.	0.9865	331.7	0.174E-4
2400	272.6	75635.	0.9667	331.0	0.177E-4
2600	271.3	73760.	0.9473	330.2	0.180E-4
2800	270.0	71923.	0.9281	329.4	0.183E-4
3000	268.7	70122.	0.9093	328.6	0.186E-4
3200	267.4	68359.	0.8907	327.8	0.189E-4
3400	266.1	66632.	0.8724	327.0	0.193E-4
3600	264.8	64940.	0.8545	326.2	0.196E-4
3800	263.5	63284.	0.8368	325.4	0.199E-4
4000	262.2	61662.	0.8194	324.6	0.203E-4
4200	260.9	60074.	0.8022	323.8	0.206E-4
4400	259.6	58519.	0.7854	323.0	0.210E-4
4600	258.3	56997.	0.7688	322.2	0.214E-4
4800	257.0	55508.	0.7525	321.4	0.217E-4
5000	255.7	54050.	0.7365	320.5	0.221E-4
5200	254.4	52623.	0.7207	319.7	0.225E-4
5400	253.1	51228.	0.7052	318.9	0.229E-4
5600	251.8	49862.	0.6899	318.1	0.233E-4
5800	250.5	48526.	0.6749	317.3	0.237E-4
6000	249.2	47219.	0.6601	316.5	0.242E-4

H [m]	T [K]	p [N/m ²]	ρ [Kg/m ³]	a [m/s]	γ [m ² /s]
6000	249.2	47219.	0.6601	316.5	0.242E-4
6200	247.9	45941.	0.6456	315.6	0.246E-4
6400	246.6	44692.	0.6314	314.8	0.250E-4
6600	245.3	43470.	0.6174	314.0	0.255E-4
6800	244.0	42275.	0.6036	313.1	0.260E-4
7000	242.7	41107.	0.5900	312.3	0.265E-4
7200	241.4	39966.	0.5767	311.5	0.270E-4
7400	240.1	38850.	0.5637	310.6	0.275E-4
7600	238.8	37760.	0.5508	309.8	0.280E-4
7800	237.5	36694.	0.5382	308.9	0.285E-4
8000	236.2	35653.	0.5258	308.1	0.290E-4
8200	234.9	34637.	0.5136	307.3	0.296E-4
8400	233.6	33644.	0.5017	306.4	0.302E-4
8600	232.3	32674.	0.4899	305.6	0.307E-4
8800	231.0	31727.	0.4784	304.7	0.313E-4
9000	229.7	30803.	0.4671	303.8	0.320E-4
9200	228.4	29900.	0.4560	303.0	0.326E-4
9400	227.1	29019.	0.4451	302.1	0.332E-4
9600	225.8	28159.	0.4344	301.3	0.339E-4
9800	224.5	27320.	0.4239	300.4	0.346E-4
10000	223.3	26502.	0.4135	299.5	0.352E-4
10200	222.0	25703.	0.4034	298.7	0.360E-4
10400	220.7	24924.	0.3935	297.8	0.367E-4
10600	219.4	24165.	0.3838	296.9	0.374E-4
10800	218.1	23424.	0.3742	296.0	0.382E-4
11000	216.8	22702.	0.3648	295.2	0.390E-4
11200	216.6	21998.	0.3537	295.1	0.402E-4
11400	216.6	21317.	0.3428	295.1	0.415E-4
11600	216.6	20658.	0.3322	295.1	0.428E-4
11800	216.6	20019.	0.3219	295.1	0.442E-4
12000	216.6	19400.	0.3119	295.1	0.456E-4
12200	216.6	18800.	0.3023	295.1	0.470E-4
12400	216.6	18218.	0.2929	295.1	0.485E-4
12600	216.6	17655.	0.2839	295.1	0.501E-4
12800	216.6	17109.	0.2751	295.1	0.517E-4
13000	216.6	16580.	0.2666	295.1	0.533E-4

H [m]	T [K]	p [N/m ²]	ρ [Kg/m ³]	a [m/s]	γ [m ² /s]
13000	216.6	16580.	0.2666	295.1	0.533E-4
13200	216.6	16067.	0.2584	295.1	0.550E-4
13400	216.6	15570.	0.2504	295.1	0.568E-4
13600	216.6	15089.	0.2426	295.1	0.586E-4
13800	216.6	14623.	0.2351	295.1	0.605E-4
14000	216.6	14171.	0.2279	295.1	0.624E-4
14200	216.6	13733.	0.2208	295.1	0.644E-4
14400	216.6	13308.	0.2140	295.1	0.664E-4
14600	216.6	12897.	0.2074	295.1	0.686E-4
14800	216.6	12498.	0.2010	295.1	0.707E-4
15000	216.6	12112.	0.1948	295.1	0.730E-4
15200	216.6	11738.	0.1887	295.1	0.753E-4
15400	216.6	11375.	0.1829	295.1	0.777E-4
15600	216.6	11024.	0.1773	295.1	0.802E-4
15800	216.6	10683.	0.1718	295.1	0.828E-4
16000	216.6	10353.	0.1665	295.1	0.854E-4
16200	216.6	10033.	0.1613	295.1	0.881E-4
16400	216.6	9723.	0.1564	295.1	0.909E-4
16600	216.6	9423.	0.1515	295.1	0.938E-4
16800	216.6	9132.	0.1468	295.1	0.968E-4
17000	216.6	8850.	0.1423	295.1	0.999E-4
17200	216.6	8577.	0.1379	295.1	0.103E-3
17400	216.6	8312.	0.1337	295.1	0.106E-3
17600	216.6	8055.	0.1295	295.1	0.110E-3
17800	216.6	7807.	0.1255	295.1	0.113E-3
18000	216.6	7566.	0.1217	295.1	0.117E-3
18200	216.6	7332.	0.1179	295.1	0.121E-3
18400	216.6	7106.	0.1143	295.1	0.124E-3
18600	216.6	6886.	0.1107	295.1	0.128E-3
18800	216.6	6674.	0.1073	295.1	0.132E-3
19000	216.6	6468.	0.1040	295.1	0.137E-3
19200	216.6	6268.	0.1008	295.1	0.141E-3
19400	216.6	6075.	0.0977	295.1	0.146E-3
19600	216.6	5887.	0.0947	295.1	0.150E-3
19800	216.6	5706.	0.0917	295.1	0.155E-3
20000	216.6	5530.	0.0889	295.1	0.160E-3

C PERFORMANSE KLIPNOG MOTORA

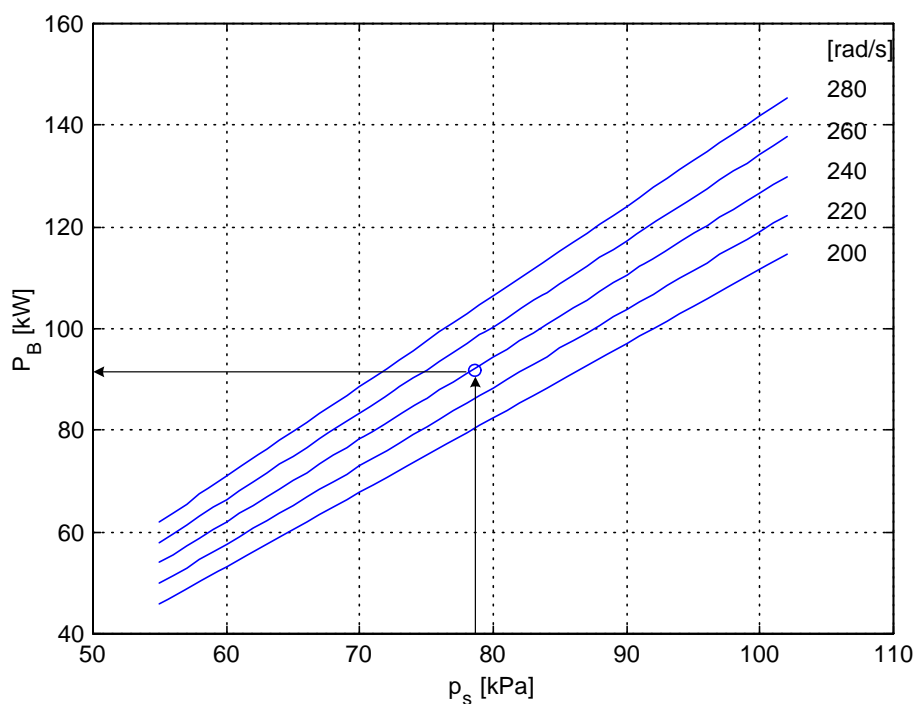
C.1 Snaga klipnog motora

Proizvođači motora na temelju ispitivanja motora daju dva dijagrama prema kojima se može odrediti snaga motora ovisno o parametrima:

- kutna brzina motora ω u $[rad/s]$, a u AS sustavu (anglosaksonske jedinice) RPM u broju okretaja u minuti (revolutions per minute),
- tlak punjenja p_s u $[Pa]$, a u AS jedinicama označava se sa MAP (manifold absolute pressure) i mjeri se $in.Hg$ (inch of Hg) ili u psi (pounds per square inch),
- tlak i temperatura okolnog zraka (vidi prilog B) i
- aerodinamička brzina letjelice V u $[m/s]$, a u AS u miljama po satu mph (miles per hour).

Ta snaga se određuje pomoću dva dijagrama kao na slikama C-1 i C-2.

C.1.1 Prvi dijagram, snaga P_B



Slika C-1 Prvi dijagram snage motora LYCOMING O-360-A (180 HP)

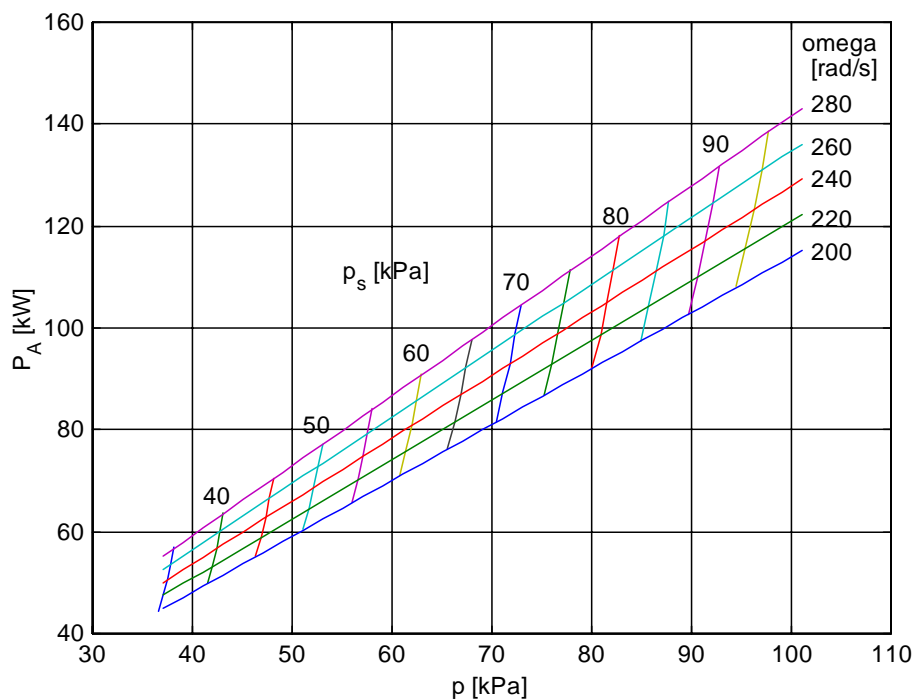
Prvi dijagram je familija krivulja $P_B = f(\omega, p_s)$ dobivena na temelju ispitivanja motora na probnom stolu. Taj dijagram, u statičkim uvjetima (aerodinamička brzina jednaka je nuli), daje snagu P_B ovisno o tlaku punjenja p_s a za razne kutne brzine ω motora, kada je temperatura i tlak okolnog zraka u normalnim uvjetima na razini mora (vidi prilog C). Na apscisi nalazi se tlak punjenja p_s . To je tlak smjese zraka i goriva odmah iza zaklopke rasplinjača. Na ordinati je snaga motora P_B . Svaka krivulja je za jednu određenu kutnu brzinu motora ω .

C.1.2 Drugi dijagram, snaga P_A

Na drugom dijagramu su dvije familije krivulja

$$P_A = f(p, \omega)$$

$$P_A = f(p, p_s)$$



Slika C-2 Drugi dijagram motora LYCOMING O-360-A (180 HP)

Obje familije krivulja daju snagu motora P_A ovisno o promjeni tlaka okolnog zraka p , ali za temperaturu koja odgovara tom tlaku u normalnim uvjetima. Iz priloga C znamo da je ta temperatura

$$T = T_{0N} \left(\frac{P}{P_0} \right)^{\frac{R\beta}{\beta_n}} = 288.15 \cdot \left(\frac{P}{101325} \right)^{0.1903}.$$

Krivulje prve familije $P_A = f(p, \omega)$ daju snagu za određenu kutnu brzinu motora ω , a krivulje druge familije daju istu snagu $P_A = f(p, p_s)$ za određeni tlak punjenja p_s . Analizom ovog drugog dijagrama vidimo da na određenom tlaku okolnog zraka p , malo se mijenja p_s u normalnom radnom intervalu motora (od ω_{\min} do ω_{\max}). Kada opada tlak okolnog zraka, motor radi na sve manjem i manjem p_s , i snaga motora pada te ako je mali tlak okolnog zraka, bit će mala i raspoloživa snaga motora.

Na osi x ovog drugog dijagrama često se nanosi visina umjesto tlaka, koja odgovara u normalnim uvjetima tom tlaku okolnog zraka. Ta visina vezana je za okolni tlak jednadžbom normalne atmosfere (vidi prilog B). U tom slučaju ove dvije familije krivulja imaju visinu kao neovisnu varijablu:

$$P_A = f(H, \omega)$$

$$P_A = f(H, p_s)$$

Takvi dijagrami obično se sreću u literaturi (npr. [14], [26] i dr.) Treba još reći kada umjesto tlaka okolnog zraka na os x nanesimo odgovarajuću visinu onda se dijagram C-2 okrene (desna strana postane lijeva i obratno), jer kad raste visina, tlak pada.

C.2 Grafička metoda određivanja snage P_D

Snaga motora, u okolnom zraku koji ima temperaturu T_D i tlak p_D , za određene vrijednosti parametara ω i p_s može se odrediti pomoću ova dva prikazana dijagrama. Postupak određivanja snage je slijedeći

- 1) Na prvom dijagramu, na odgovarajućoj krivulji za zadani broj okretaja motora ω , očita se snaga P_B ovisno o tlaku punjenja p_s .
- 2) Na drugom dijagramu ucrtta se točka A u presjeku krivulje za zadani tlak punjenja p_s i krivulje za zadanu kutnu brzinu motora ω . Odredi se ordinata P_A i apscisa p_A te točke. To je snaga koju bi motor razvio u okolnom zraku koji ima taj tlak i njemu odgovarajuću temperaturu u normalnim uvjetima.
- 3) Ucrtta se na tom istom dijagramu točka C koja ima apscisu jednaku normalnom tlaku na razini mora p_{0N} , a ordinatu jednaku dobivenoj snazi prema prvom dijagramu P_B . Ta

točka predstavlja snagu motora za zadani tlak punjenja p_s i zadanu kutnu brzinu motora ω , ali u zraku koji ima i tlak koji odgovara razini mora i odgovarajuću temperaturu u normalnim uvjetima..

- 4) Spoje se točke C i A. Ako prihvatimo pretpostavku da je snaga motora, za zadani tlak punjenja p_s i zadanu kutnu brzinu motora ω , linearno ovisna o tlaku okolnog zraka (i na odgovarajućoj temperaturi u normalnim uvjetima), onda je to pravac CA.
- 5) Na tom pravcu CA odredimo točku D koja ima apscisu jednaku zadanom tlaku okolnog zraka p_D .
- 6) Ordinata točke D predstavlja snagu motora za zadane radne parametre motora p_s i ω u okolnom zraku koji ima zadani tlak p_D i temperaturi koja odgovara tom tlaku u normalnim uvjetima T_N , a ne odgovara zadanoj temperaturi okolnog zraka T_D :

$$T_N = 288.15 \cdot \left(\frac{p_D}{101325} \right)^{0.1903}$$

- 7) Da bismo konačno dobili traženu snagu na zadanoj temperaturi, pretpostavit ćemo da je snaga obrnuto proporcionalna kvadratnom korijenu iz temperature okolnog zraka. Zato se očitana snaga u točki D množi sa $\sqrt{T_N/T_D}$.

C.2.1 Primjer

Da bismo prikazali originalnu primjenu dijagrama, u ovom ćemo se primjeru služiti anslosaksonskim jedinicama. Temperatura okolnog zraka je $T_D = 269 \text{ }^0K$, a tlak je $p_D = 95 \text{ kPa}$. Kutna brzina elise je $\omega_{elise} = 240 \text{ rad/s}$, a tlak punjenja je $p_s = 78.5 \text{ kPa}$. Treba grafički odrediti raspoloživu snagu motora čije su performanse dane dijagramom na slici G-1 i G-2.

- 1) Na prvom dijagramu nacrtana je točka B koja predstavlja raspoloživu snagu na razini mora. Ona se nalazi na krivulji $\omega = 240$ za vrijednost apscise $p_s = 78.5 \text{ kPa}$:

$$P_B = 91 \text{ kW}$$

- 2) točka A određena je na drugom dijagramu u presjeku krivulja $\omega = 240 \text{ rad/s}$ i $p_s = 78.5 \text{ kPa}$:

$$P_A = 103 \text{ kW}$$

$$p_A = 80 \text{ kPa}$$

Na tom tlaku temperatura u normalnim uvjetima ima vrijednost:

$$T_A = 288.15 \cdot \left(\frac{P_A}{101325} \right)^{0.1903} = 288.15 \cdot \left(\frac{80.0}{101325} \right)^{0.1903} = 275.5 \text{ } ^\circ K$$

U normalnim uvjetima atmosfere taj tlak i ta temperatura vladaju na visini $H = 1950 \text{ m}$. Drugim riječima, za zadane p_s i ω , pri tlaku okolnog zraka 80 kPa i temperaturi $275.5 \text{ } ^\circ K$, snaga je 103 kW .

- 3) Ucertamo točku C u drugi dijagram. Apscisa te točke je $p_{0N} = 101.3 \text{ kPa}$, a ordinata je $P_B = 91 \text{ kW}$.
- 4) Od A do C snaga opada od vrijednosti $P_A = 103 \text{ kW}$ do $P_B = 91 \text{ kW}$, zbog porasta tlaka i temperature okolnog zraka od $p_A = 80 \text{ kPa}$ i $T_A = 275.5 \text{ } ^\circ K$ do $p_{0N} = 101.3 \text{ kPa}$, i $T_{0N} = 288.2 \text{ } ^\circ K$. Zato pravac AC predstavlja promjenu snage ovisno o tlaku i odgovarajućoj temperaturi okolnoga zraka, pri zadanim parametrima p_s i ω .
- 5) Na pravcu AC odredimo točku D u kojoj je zadani tlak okolnog zraka $p_D = 95.0 \text{ kPa}$ i odgovarajuća temperatura

$$T_N = 288.15 \cdot \left(\frac{P_D}{101325} \right)^{0.1903} = 288.15 \cdot \left(\frac{95.0}{101.325} \right)^{0.1903} = 284.6 \text{ } ^\circ K$$

- 6) Ordinata te točke predstavlja snagu motora za zadani p_s i ω u okolnom zraku koji ima tlak p_D i njemu odgovarajuću temperaturu T_N :

$$P'_D = 95 \text{ kW}$$

- 7) Tu snagu trebamo još svesti na zadanu temperaturu:

$$P_D = P'_D \cdot \sqrt{\frac{T_N}{T_D}} = 95 \cdot \sqrt{\frac{284.6}{269}} = 98 \text{ kW}$$

C.2.2 Analitička metoda određivanja snage P_D

Prema lit. [22], dana je metoda kojom se mogu ova dva dijagrama motora pretvoriti u jednadžbe. Tako su u lit. [26], za motor LYCOMING O-360-A (180 HP) dane jednadžbe u AS jedinicama:

$$BHPB = -42.8 + 3.08 \cdot MAP + 0.00186 \cdot RPM \cdot MAP - 0.0018 \cdot RPM$$

$$BHPA = 4.3 + 1.37 \cdot MAP + 0.0018 \cdot RPM \cdot MAP + 0.003 \cdot RPM$$

U tim jednadžbama je kutna brzina motora RPM izražena brojem okretaja u minuti, tlak punjenja MAP izražen je u palcima živinoga stupca $in.Hg$, a snaga BPH (*brake power hors*) u konjskim snagama. Te jednadžbe možemo transformirati u sustav ISO jedinica. U ISO sustavu jedinica koristit ćemo oznake P_B, P_A u vatima, tlak punjenja p_s u Pa , a za kutnu brzinu motora ω u rad/s :

$$\frac{P_B}{745.7} = -42.8 + 3.08 \cdot \frac{P_s}{3386} + 0.00186 \cdot 9.5493 \omega \cdot \frac{P_s}{3386} - 0.0018 \cdot 9.5493 \omega$$

i

$$\frac{P_A}{745.7} = 4.3 + 1.37 \cdot \frac{P_s}{3386} + 0.0018 \cdot 9.5493 \omega \cdot \frac{P_s}{3386} + 0.003 \cdot 9.5493 \omega$$

Sređivanjem dobivamo tražene jednadžbe u ISO sustavu jedinica:

$$P_B = -31916 + 0.6783 \cdot p_s + 0.003912 \cdot p_s \cdot \omega - 12.817 \cdot \omega \quad C.1$$

$$P_A = 3206.5 + 0.3017 \cdot p_s + 0.003785 \cdot p_s \cdot \omega + 21.363 \cdot \omega \quad C.2$$

Prva jednadžba $P_B = f(p_s, \omega)$ omogućuje nam izračunati ordinatu točke C (slika C-2). Apscisa točke C je normalni tlak na razini mora, jer je cijela jednadžba određena za uvjete na razini mora. Prema tome koordinate točke C na slici C-2 jesu:

$$p_C = p_{0N}$$

$$P_C = P_B$$

Tako smo odredili radno stanje C, u kome je snaga P_C pri tlaku zraka $p_C = p_{0N}$. Drugo radno stanje koje možemo odrediti jest snaga motora P_A ako je kutna brzina $\omega_{elise} = 240 \text{ rad/s}$ i tlak okolnog zraka p . Da bismo odredili položaj te točke A (slika C-2), znamo da je ona na pravcu $P_A = f(p, \omega)$ za $\omega_{elise} = 240 \text{ rad/s}$. Jednadžba familije pravaca na slici C-1 ima oblik

$$P_A = 3922 + 1.638 \cdot \omega + 0.0034406 \cdot \omega \cdot p + 0.41009 \cdot p \quad C.3$$

Iz ove jednadžbe možemo odrediti tlak okolnog zraka ako je poznata snaga motora P_A i njegova kutna brzina ω . Taj tlak je apscisa točke A:

$$p_A = \frac{P_A - 3922 - 1.638 \cdot \omega}{0.0034406 \cdot \omega + 0.41009} \quad C.4$$

U točki A imamo snagu motora P_A pri tlaku okolnog zraka p_A i njemu odgovarajućoj temperaturi T_A , a u točki C snagu P_B pri tlaku okolnog zraka p_{0N} i temperaturi T_{0N} . Objekti točke daju snagu za zadane parametre p_s i ω . Zato možemo linearno interpolirati između

točaka A i C da bismo odredili snagu P'_D ako je tlak okolnog zraka jednak zadanom tlaku p_D i njemu odgovarajućoj temperaturi T_N :

$$P'_D = P_B + (P_A - P_B) \frac{P_D - P_{0N}}{P_A - P_{0N}} \quad \text{C.5}$$

Tako smo dobili snagu P'_D za zadane parametre p_S i ω , u okolnom zraku koji ima zadani tlak p_D , ali kad je temperatura okolnog zraka jednaka temperaturi (vidi prilog B):

$$T_N = 288.15 \cdot \left(\frac{p_D}{101325} \right)^{0.1903} \quad \text{C.6}$$

Da bismo konačno dobili snagu pri zadanoj temperaturi T_D , koristimo činjenicu da je snaga obrnuto proporcionalna kvadratnom korijenu iz temperature:

$$P_D = P'_D \sqrt{\frac{T_N}{T_D}} \quad \text{C.7}$$

Tako dobivamo snagu P_D za zadane parametre motora p_S i ω , u atmosferi koja ima zadani tlak p_D i zadanu temperaturu T_D zraka.

C.2.3 Primjer

Uradimo isti primjer analitički. Karakteristike su okolnoga zraka:

$$T_D = 269 \text{ } ^\circ K$$

$$p_D = 95 \text{ kPa}$$

Parametri rada motora su

$$\omega = 240 \text{ rad/s}$$

$$p_S = 78.5 \text{ kPa}$$

Treba odrediti analitički istu raspoloživu snagu motora LYCOMING O-360-A (180 HP) kao u prethodnom primjeru:

$$\begin{aligned} P_B &= -31916 + 0.6783 p_S + 0.003912 \omega \cdot p_S - 12.817 \omega \\ &= -31916 + 0.6783 \cdot 78500 + 0.003912 \cdot 240 \cdot 78500 - 12.817 \cdot 240 \\ &= 92.0 \text{ kW} \end{aligned}$$

$$p_B = 101325 \text{ Pa}$$

$$\begin{aligned} P_A &= 3206.5 + 0.3017 p_S + 0.003785 \omega \cdot p_S + 21.363 \omega \\ &= 3206.5 + 0.3017 \cdot 78500 + 0.00378 \cdot 240 \cdot 78500 + 21.363 \cdot 240 \\ &= 103.2 \text{ kW} \end{aligned}$$

$$P_A = \frac{P_A - 3922 - 1.638 \cdot \omega}{0.0034406 \cdot \omega + 0.41009} = \frac{103200 - 3922 - 1.638 \cdot 240}{0.0034406 \cdot 240 + 0.41009} = 80.0 \text{ kPa}$$

$$P'_D = P_B + (P_A - P_B) \frac{P_D - P_{0N}}{P_A - P_{0N}} = 92.0 + (103.2 - 92.0) \cdot \frac{95.0 - 101.3}{80.0 - 101.3} = 95.3 \text{ kW}$$

$$T_N = 288.15 \cdot \left(\frac{P_D}{101325} \right)^{0.1903} = 288.15 \cdot \left(\frac{95}{101.325} \right)^{0.1903} = 284.6 \text{ } ^\circ\text{K}$$

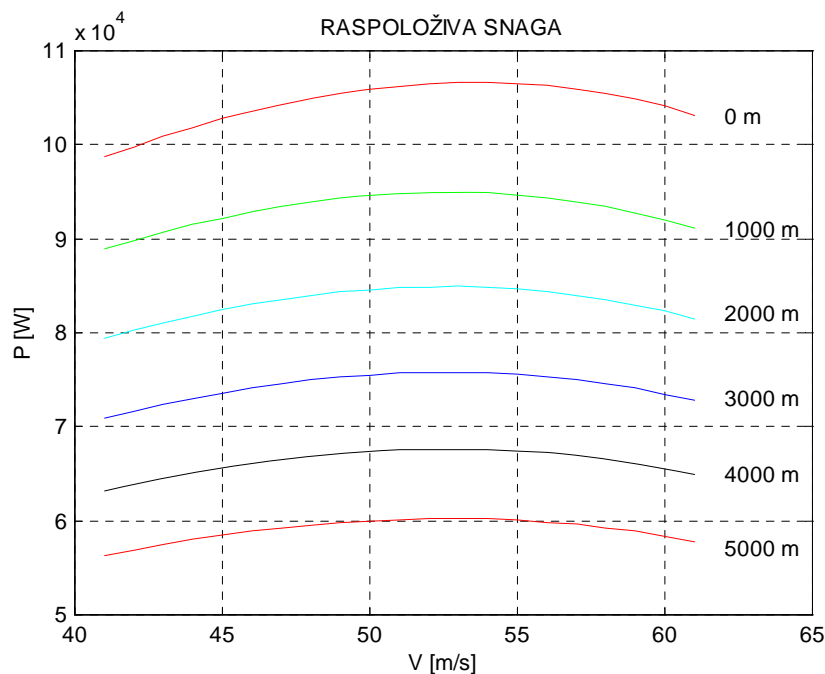
$$P_D = P'_D \sqrt{\frac{T_N}{T_D}} = 95.3 \cdot \sqrt{\frac{284.6}{269}} = 98.0 \text{ kW}$$

C.2.4 Vježba

Treba odrediti promjenu raspoložive snage pogonske grupe koju čini motor LYCOMING O-360-A (180 HP) i elisa zrakoplova Piper Cherokee PA-28, ovisno o aerodinamičkoj brzini za visine 0, 1000, 2000, 3000 i 4000 m. Pretpostavimo da motor radi na kutnoj brzini $\omega_{\max} = 240 \text{ rad/s}$, a koeficijent učinkovitosti elise neka je

$$\eta_{elise} = -1.6923J^3 + 1.4815J^2 + 0.5670J + 0.2644,$$

gdje je parametar elise $J = \frac{V}{nD} = 0.80$ (promjer elise je $D = 1.88 \text{ m}$, n broj okretaja u s.).



Slika C-3 Raspoloživa snaga motora LYCOMING O-360-A (180 HP) i elise zrakoplova Piper Cherokee PA-28

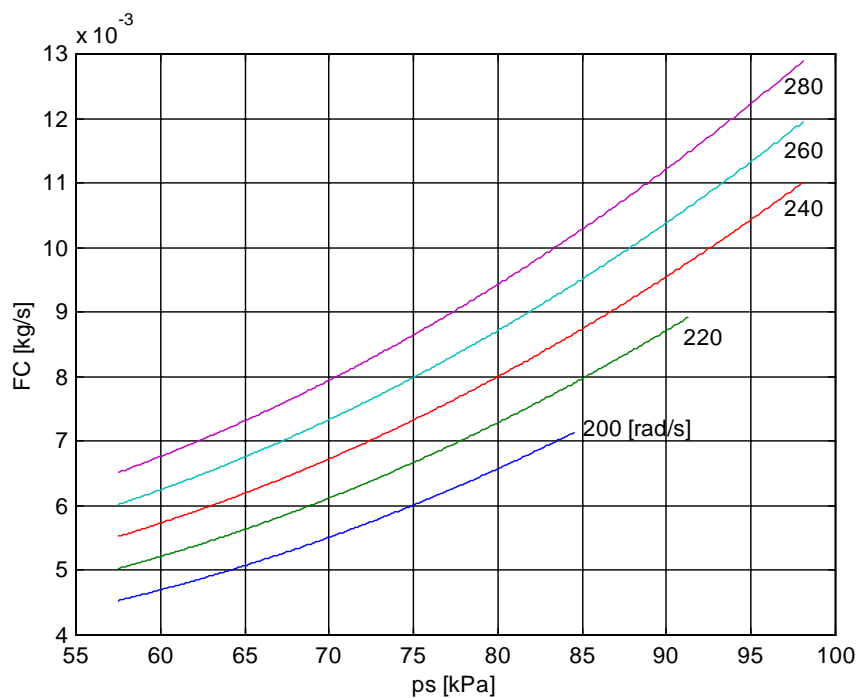
Pretpostavljamo normalne uvjete atmosfere. Zbog aerodinamičke brzine tlak okolnog zraka treba povećati za dinamički tlak, tako da ulazni tlak bude jednak totalnom tlaku, koji je zbroj okolnog tlaka i dinamičkog tlaka. Taj dinamički tlak umanjuje se do 15% zbog gubitaka u strujanju oko motora do otvora gdje zrak ulazi u motor:

$$p_{total} = p_N + 0.85 \cdot \frac{\rho_N V^2}{2}$$

Snaga motora P_{mot} računa se prema analitičkom postupku iz prethodnog primjera C.2.3. Raspoloživa snaga bit će

$$P_a = \eta_{elise} \cdot P_{mot}$$

S ovim jednadžbama napravljen je program u MATLAB-u, koji se zove *Rasp_snaga*, nalazi se na disketi u direktoriju *Motor*. Pomoću toga programa nacrtan je dijagram C-3.



Slika C-4 Potrošnja goriva za motor LYCOMING O-360-A (180 HP)

C.2.5 Potrošnja goriva

Na temelju eksperimentalnih ispitivanja proizvođači motora izrađuju dijagrame koji daju potrošnju goriva u normalnim uvjetima okolnog zraka (T_{0N} i p_{0N}) za razne kutne brzine motora ovisno o tlaku punjenja MAP. Na temelju takvog dijagrama za slučaj motora

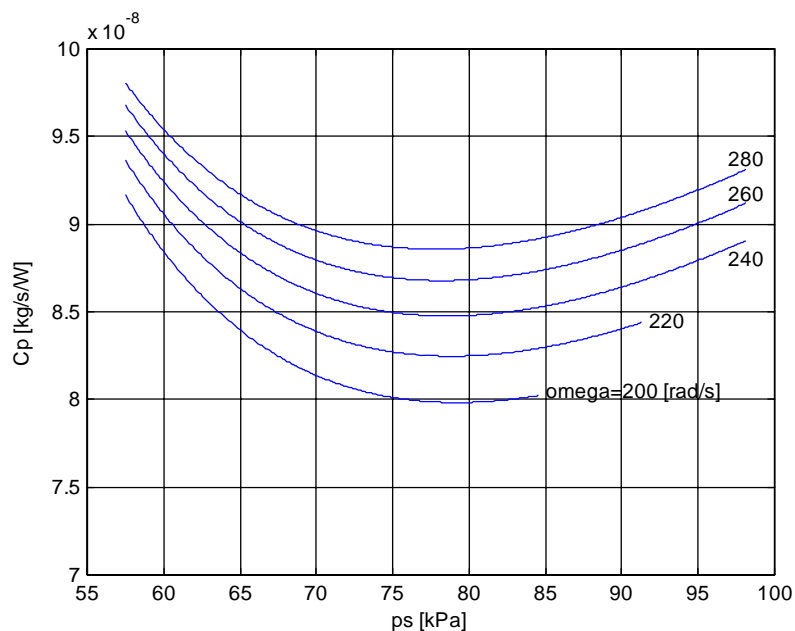
LYCOMING O-360-A (180 HP) usklađen je polinom drugog reda koji daje potrošnju goriva FC (fuel consumption) ovisno o tlaku punjenja:

$$FC = a_1 p_s^2 + a_2 p_s + a_3, \quad \text{C.8}$$

u kome su koeficijenti funkcije kutne brzine motora:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{0.000053562 \cdot \omega + 0.0081068}{3.386^2} \cdot C \\ a_2 &= -\frac{0.0000090642 \cdot \omega + 0.35685}{3.386} \cdot C \\ a_3 &= (0.017431 \cdot \omega + 3.17) \cdot C \\ C &= 0.720 \cdot 3.785 / 3600 \end{aligned} \quad \text{C.9}$$

Da bi dobili potrošnju u $[kg/s]$ za slučaj specifične mase goriva $0.72 kg/l$ koeficijente trebamo pomnožiti sa C . Bez koeficijenta C dobili potrošnju u USA galonima na sat. S tom jednadžbom nacrtan je dijagram prikazan na slici C-4. Na ordinati je potrošnja goriva FC (fuel consumption) u $[kg/s]$. U mehanici leta upotrebljavamo specifičnu potrošnju goriva C_p . Ona pokazuje kolika je potrošnja goriva u jedinici vremena po jednoj jedinici proizvedene snage, a to znači da je njena dimenzija $[kg/(sW)]$. Da bismo dobili dijagram specifične potrošnje C_p , moramo vrijednosti očitane na dijagramu potrošnje FC podijeliti s ostvarenom snagom u istim uvjetima.



Slika C-5 Specifična potrošnja motora LYCOMING O-360-A (180 HP)

Na temelju jednadžba raspoložive snage motora i potrošnje goriva, treba za motor LYCOMING O-360-A (180 HP), odrediti ovisnost specifične potrošnje goriva (potrošnja goriva po jedinici ostvarene snage) o tlaku punjenja za razne kutne brzine motora u normalnim atmosferskim uvjetima. Potrošnju goriva, koja ovisi o tlaku punjenja, dana je jednadžbama C-8 i C-9, a ostvarena snaga u istim uvjetima je

$$P_B = -31916 + 0.6783 p_s + 0.003912 \omega \cdot p_s - 12.817 \omega, \quad \text{C.10}$$

Tako dobivamo da je tražena specifična potrošnja

$$C_P = \frac{FC}{P_B}. \quad \text{C.11}$$

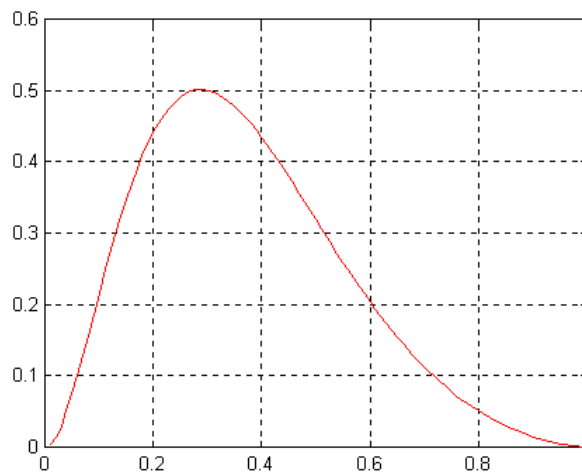
Prema ovom algoritmu napravljen je program u MATLAB-u koji se zove *spec.m*. Nalazi se u direktoriju *Motor* na disketi. Pomoću njega nacrtan je dijagram na slici C-5

D MAKSIMALNI UZGON KRILA

Ovaj postupak procjene maksimalnog koeficijenta uzgona krila $C_{L\max}$ i napadnog kuta α_{\max} prema [18], razlikuje se za krila male vitkosti od postupka procjene za krila velike vitkosti. Granica malih i velikih vitkosti krila A_B ovisi o Machovu broju kao i o obliku krila.

$$A_B = \frac{3\sqrt{|1 - Ma^2|}}{[C_1(\lambda) + 1]\cos \Lambda_{LE}} \quad D.1$$

λ je suženje krila, odnos vršne prema korijenskoj tetivi krila, a Λ_{LE} je strijela prednjeg napadnog ruba krila. Eksperimentalna funkcija $C_1(\lambda)$ prikazana je na slici D-1



Slika D-1. Funkcija $C_1(\lambda)$

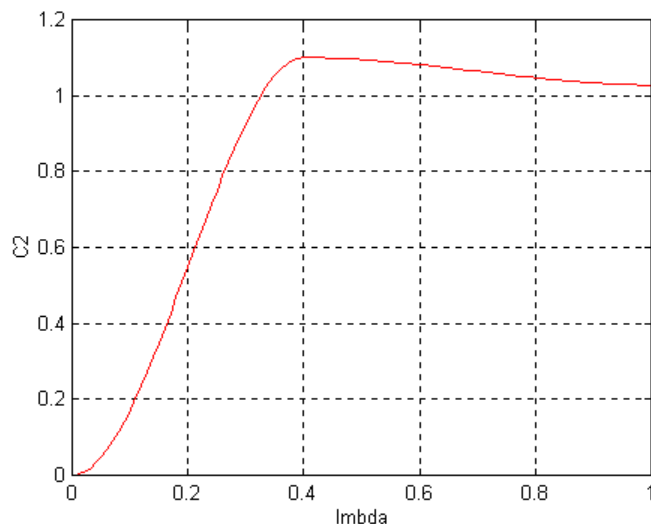
Ako je krilo male vitkosti, tj. ako je $A < A_B$, onda je

$$\begin{aligned} C_{L\max} &= f_L(A', \Delta_y) + \Delta f_L(A'', Ma) \\ \alpha_{\max} &= f_\alpha(A') + \Delta f_\alpha(A'', Ma) \end{aligned} \quad D.2$$

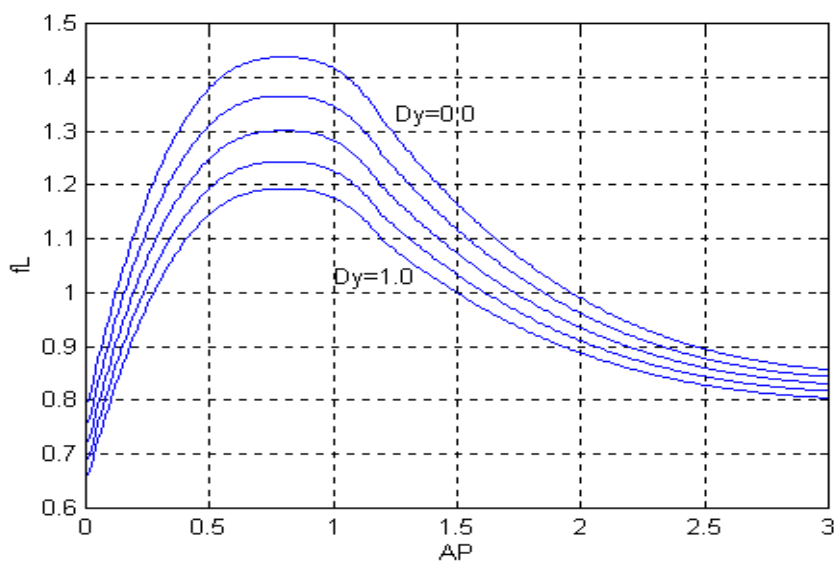
Uz već objašnjeni parametar Δ_y , koji predstavlja utjecaj oblika prednjeg ruba na maksimalni koeficijent uzgona, pojavljuju se još dva parametra:

$$\begin{aligned} A' &= (C_1 + 1) \frac{A \cos \Lambda_{LE}}{\sqrt{|1 - Ma^2|}} \\ A'' &= (C_2 + 1) A \tan \Lambda_{LE} \end{aligned} \quad D.3$$

U ovim parametrima pojavljuje se još jedna funkcija od suženja krila $C_2(\lambda)$. Ona je prikazana na slici D-2.

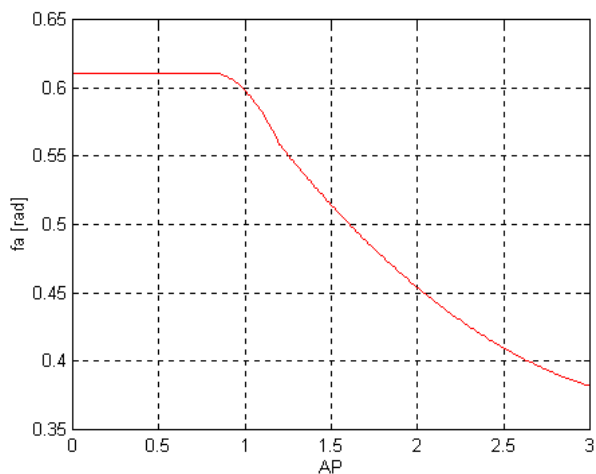
Slika D-2. Funkcija $C_2(\lambda)$

Eksperimentalne funkcije f_L i f_α ovisno o ovim parametrima prikazane su na slikama D-3 i D-4. Na tim dijagramima je Δ_y označeno s Dy .

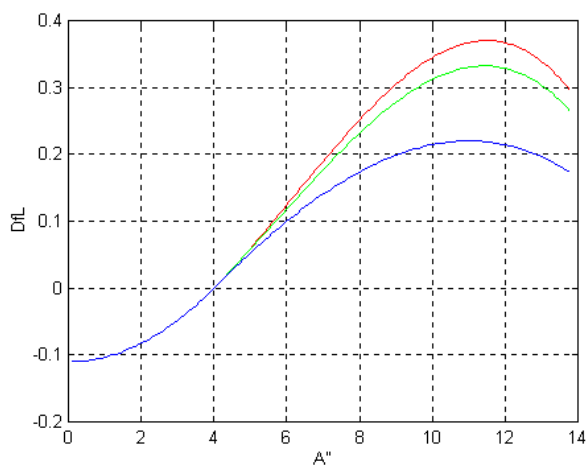
Slika D-3. Funkcija $f_L(A', \Delta_y)$

Funkcije Δf_L i Δf_α dane su dijagramima na slikama D-5 i D-6.

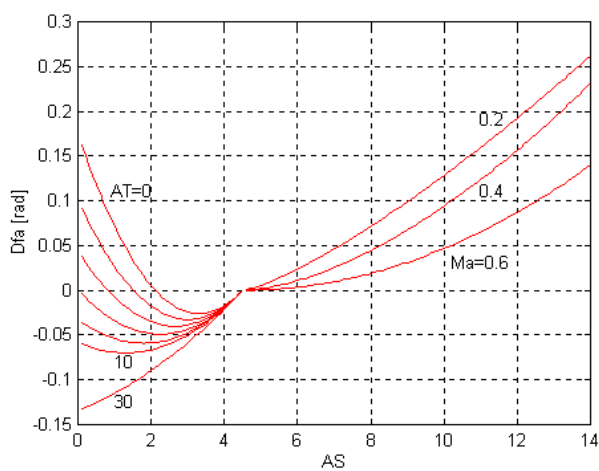
Za krila velike vitkosti, a to su krila koja imaju $A > A_B$, koeficijent maksimalnog uzgona krila $C_{L_{\max}}$ za $0.2 \leq Ma \leq 0.6$ zbroj je dvaju dijelova :



Slika D-4. Funkcija $f_\alpha(A')$



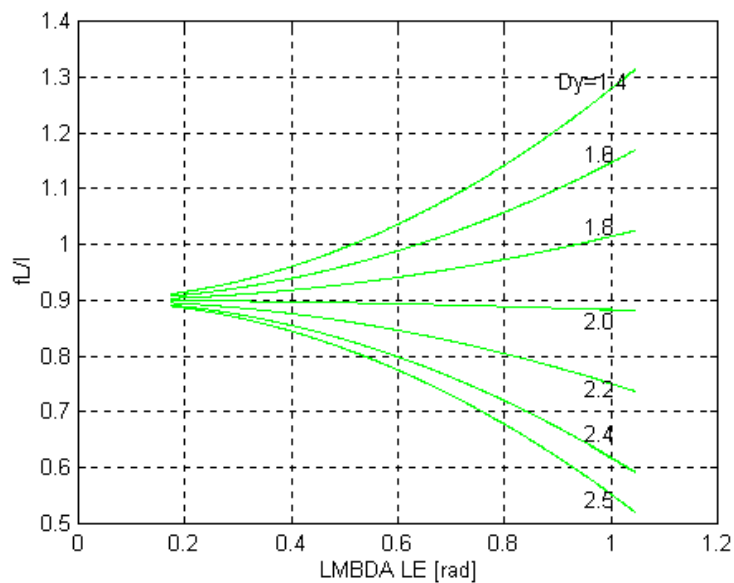
Slika D-5. Funkcija $\Delta f_L(A'', Ma)$



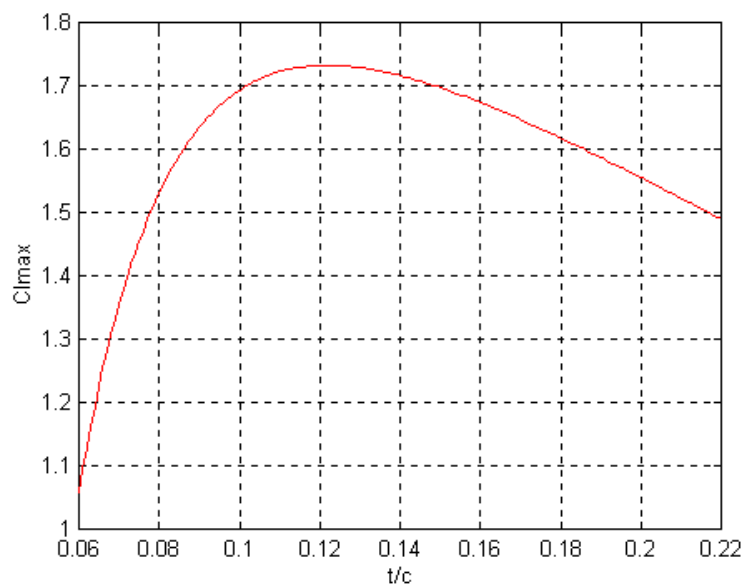
Slika D-6. Funkcija $\Delta f_\alpha(A'', Ma)$

$$C_{L\max} = f_{L/\ell} C_{\ell\max} + \Delta C_{L\max} \quad \text{D.4}$$

- Prvi dio $f_{L/\ell} C_{\ell\max}$, koeficijent maksimalnog uzgona krila pri $Ma = 0.2$ proporcionalan je maksimalnom uzgonu profila krila. Koeficijent proporcionalnosti $f_{L/\ell}$ ovisi o strijeli napadnog ruba Λ_{LE} i o parametru Δ_y . Ta ovisnost prikazana je na dijagramu slike D-7, a koeficijent maksimalnog uzgona profila $C_{\ell\max}$ koji ovisi o relativnoj debljini t/c prikazan je na slici D-8.

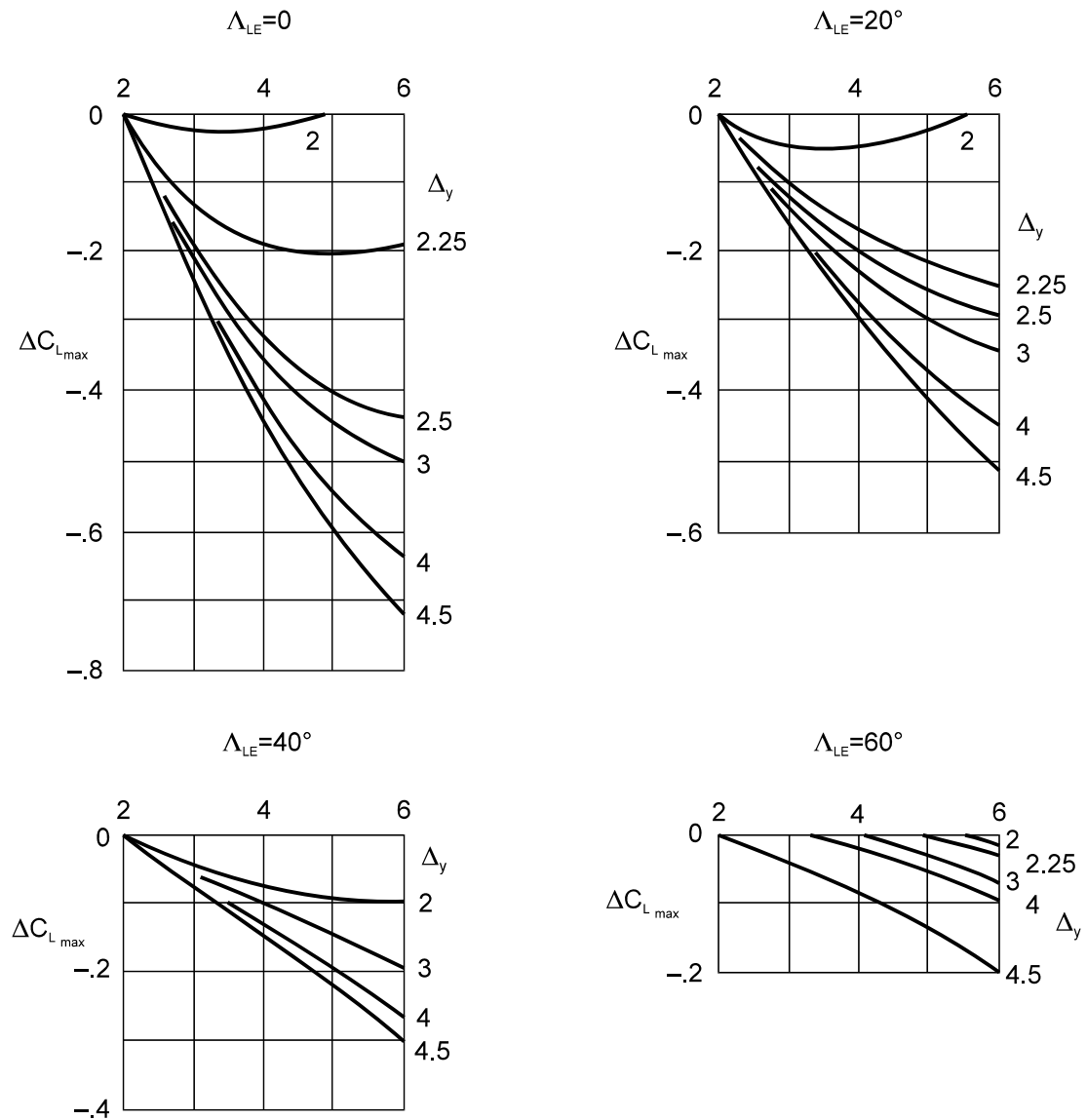


Slika D-7. Funkcija $f_{L/\ell} = f_{L/\ell}(\Lambda_{LE}, \Delta_y)$



Slika D-8. Maksimalni koeficijent uzgona profila $C_{\ell\max}$ u ovisnosti o relativnoj debljini t/c

- Drugi dio $\Delta C_{L_{\max}}$ predstavlja korekciju maksimalnog uzgona krila za $\Delta M = Ma - 0.2$. Ta korekcija je negativna. Osim ΔMa ta korekcija ovisi o strijeli napadnog ruba Λ_{LE} i o parametru Δy . Ta ovisnost $\Delta C_{L_{\max}}(\Delta Ma, \Delta y, \Lambda_{LE})$ prikazana je na slici D-9.



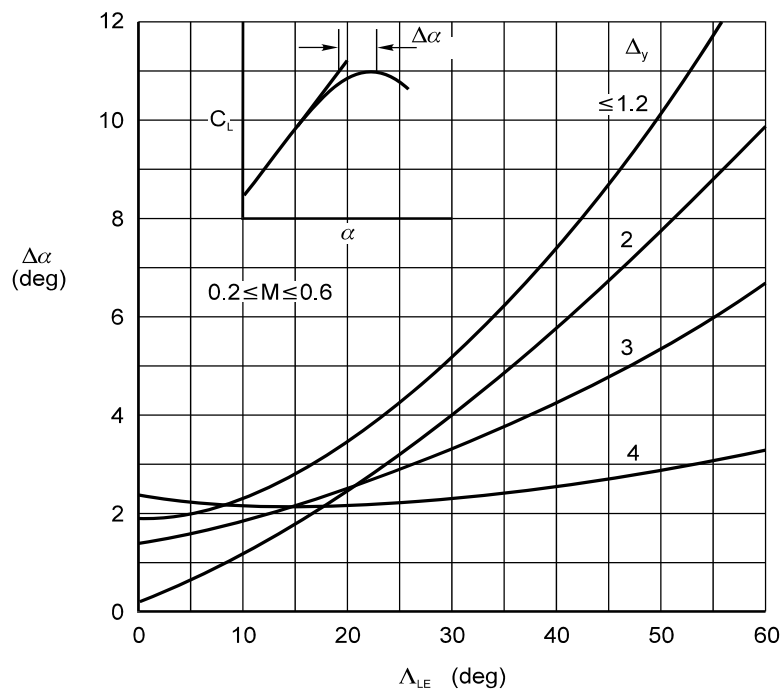
Slika D-9.

Koeficijenti maksimalnog uzgona krila $C_{L_{\max}}$ i napadnog kuta α_{\max} , osim o vrijednosti Δy , ovise i o obliku krila (vitkosti krila A , suženja krila λ , strijele napadnog ruba krila Λ_{LE}), o

relativnoj debljini krila i o Machovu broju Ma. Napadni kut pri kome krilo ostvaruje maksimalni uzgon je zbroj tri dijela:

$$\alpha_{\max} = \alpha_{OL} + \frac{C_{L\max}}{C_{L\alpha}} + \Delta\alpha_{\max} \quad \text{D.5}$$

Prva dva člana predstavljaju linearni dio. Prvi je aerodinamička značajka krila i ako krilo nije uvijeno, treći je prirast pri kojemu se dostiže maksimalni uzgon. Na slici D-10 prikazan je dijagram pomoću kojega određujemo $\Delta\alpha_{\max}$ u ovisnosti o strijelji napadnog ruba Λ_{LE} i o parametru Δ_y .



Slika D-10.

LITERATURA

- 1) Anderson, J.D., "Aircraft Performance and Design", McGraw Hill, New York, 1999.
- 2) Бочкарева, А.Ф. "Аэромеханика самолета", Машиностроение, Москва 1977.
- 3) Eshelby M.E., "Aircraft Performance", Arnold, London 2000.
- 4) Etkin, B., "Dynamics of Atmospheric Flight", John Wiley & Sons, Inc. New York, 1972.
- 5) Gantmaher F. R., Levin L. M., "The Flight of uncontrolled Rockets", Pergamon Press, Oxford 1964.
- 6) Goldstein, H., "Classical Mechanics", Second edition, Addison-Westley Publishing Company, London, 1981.
- 7) Haug, E., "Computer Aided Kinematics and Dynamics of Mechanical Systems", Volume I: Basic Methods, Allyn and Bacon, Boston, 1989.
- 8) ISO Concepts, Quantities and Symbols for Flight Dynamics, 1988, Part 1: Aircraft motion relative to the air, ISO/DIS 1151/1, and Part 2: Motion of the aircraft and the atmosphere relative to the Earth, ISO/DIS 1151/2
- 9) Janković S., "Mehanika leta zrakoplova", Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb 2002.
- 10) Jumper, E.J., "Wave Drag Prediction Using a Simplified Supersonic Area Rule", J. Aircraft, Vol. 20, No. 10, October 1983.
- 11) Jecić, S. "Mehanika II, Kinematika i mehanika", Tehnička knjiga d.d., Zagreb, 1995.
- 12) Лебедев, А.А., Чернобговкин, Л.С. "Динамика полета", Машиностроение, Москва, 1973.
- 13) McCormick, B. "Aerodynamics, Aeronautics and Flight Mechanics", John Wiley & Sons, Inc. New York, 1995.
- 14) Mair, W.A. and Birdsall, D. "Aircraft Performance", Cambridge, University Press, 1992.
- 15) Nielsen, J. N., "Missile Aerodynamics", McGraw-Hill, New York, 1960.
- 16) Pamadi, B. N., "Performance, Stability, Dynamics and Control of Airplanes", Education Series AIAA, Washington, 1998.
- 17) Raymer, D. "Aircraft Design: A Conceptual Approach, AIAA Education Series, Washington, 1992.
- 18) Rendulić, Z., "Mehanika leta", Vojno-izdavački i novinarski centar, Beograd, 1987.

- 19) Vinh, N. X. "Flight Mechanics of High Performance Aircraft", Cambridge, University Press, 1993.
- 20) "The USAF DATCOM, Public Domain Computer Programs for the Aeronautical Engineer. Last updated: 2 June 2003 by Ralph Carmichael ralph@pdas.com, Public Domain Aeronautical Software, P.O. Box 1438 Santa Cruz CA 95061 USA
- 21) ESDU (Engineering scientific data units), The Royal Aeronautical Society, London.
- 22) Janković S.: AERODINAMIČKI PRORAČUN PUTNIČKOG ZRAKOPLOVA, FSB, Zavod za zrakoplovstvo, TP-01/0120-01/A1

KAZALO

aerodinamička

apscisa krila, 2-5

ishodište, 2-5

tetiva, 2-5

aerodinamički

koeficijenti, 2-1

model zrakoplova, 2-2

parametri, 2-3

atmosfera

standardna, B-1

baza koordinatnog sustava, A-1

brzina

aerodinačka 1-5

apsolutna, 1-5

leta, 1-5

najmanje upravljivosti (Minimum Control Speed), 11-22

odvajanja (Take off Velocity), 11-4

penjanja (Rate of Climb, R/C), 8-2

penjanja, najveća (Best Rate of Climb, BRC), 8-5

derivacija matrice transformacije, A-9

derivacija vektora, A-3

derivativi, 2-4

dolet (Range), 7-11

energetska visina (Energy Height), 12-1

gradijent momenta propinjanja, 4-1

gradijent normalne sile, 4-1

gradijent penjanja (Climb Gradient), 8.2

gradijenti, 2-4

horizontalni zaokret, 8.3.1

jednadžba stanja zraka, B-3

koordinatni sustavi, 1-1

koordinanti sustav

aerodinamički, 1-7

brzinski, 1-5

letjelice, 1-3

lokalni, 1-2

nošeni, 1-2

koordinirani zaokret, 9-5

korak elise, 5-9

kut

napadni, 1-7

napadni motora, 5-1

penjanja najveći (Best Angle of Climb, BAC), 8-2

propinjanja, 1-3

ravnotežni napadni, 6-1

valjanja letjelice, 1-3

zanosa, 1-3

kutna brzina motora (Revolution Per Minute, RPM), C-1

minimalno vrijeme penjanja, 8-5

model zrakoplova

kao materijalne točke, 6-21

momenta propinjanja

horizontalni rep - trup, 4-6

krilo - tijelo, 4-2

nulti članovi, 4-9

tijela, 4-9

stacionarni gradijenti, 4-9

moment pogonske sile, 5-5 i 5-10

neutralna točka, 6-9

normalna sila

krilo - tijelo, 4-2

nulti članovi, 4-9

horizontalni rep - trup, 4-6

stacionarni gradijenti, 4-9

normalno opterećenje, 6-5 i 9-2

otpor, 3-1

- dna, 3-5
- dodatni, 3-11
- inducirani, 3-14
- nulti, 3-13
- transonični, 3-8
- trenja, 3-1
- valni, 3-6

Oswaldov koeficijent, 3-17

otklon upravljačke površine, 2-3

ovojnice horizontalnog leta, 7-9

ovojnica koordiniranog zaokreta, 9-9

petlja, 10-3

plinska konstanta zraka, B-3

područje uporabe zrakoplova, 7-9

polara, 3-16

polijetanje (Take off), 9-1

pogonska sila, 5-4 i 5-10

potrebna sila, 5-2

potrebna snaga, 5-2

potrošnja goriva (Fuel Consumption, FC), C-5

površina

- referentna, 2-1
- krila, 2-5

prirast specifične energije po jedinici goriva (Fuel Specific Energy), 12-12

raspoloživo opterećenje, 9-6

raspoloživa sila, 7-5

raspoloživa snaga, 7-5

savijanje struje, 4-6

sigurnost polijetanja, 11-22

slijetanje (Landing), 11-25

specifična energija (Specific Energy) 12-1

specifična potrošnja goriva (Specific Fuel Consumption), C-5

stabilnost

statička, 6-8
tlak punjenja (Manifold Absolute Pressure, MAP), C-1
trajanje leta (Endurance) 7-17
ukupna energija (Energy State), 12-1
upravljivost
 uzdužna, 6-12
usporenje struje, 4-7
uzgon, 2-2
vektorski i skalarni produkt A-2
vertikalna ravnoteža zraka, B-4
vertikalni zaokret, 10-1
visina nadvisivanja prepreke (Obstacle Clearance Altitude), 11-20
višak specifične snage, 10-1
vlažnost zraka, B-3
vrijeme penjanja, 8-7

Oznake

Opće oznake

a	brzina zvuka, ubrzanje
A	vitkost krila, azimut
b	raspon krila
c	tetiva profila
c_A	aerodinamička tetiva krila
C	napadna točka normalne sile
C_D C_L C_K	aerodinamički koeficijenti sila u aerodinamičkom koordinatnom sustavu
C_X C_Y C_Z	aerodinamički koeficijenti sila u koordinatnom sustavu letjelice
C_ℓ C_m C_n	aerodinamički koeficijenti momenata u koordinatnom sustavu letjelice
$C_A = -C_X$	aerodinamički koeficijent aksijalne sile
$C_N = -C_Z$	aerodinamički koeficijent normalne sile
d	promjer
D	otpor
e	Oswaldov koeficijent krila
E	trajanje leta
F	sila
g	ubrzanje sile Zemljine teže
h	udaljenost od aerodinamičkog ishodišta u pravcu x osi zrakoplova, visina leta
h_e	specifična energija
H	visina leta
i	postavni kut noseće površine, imaginarna jedinica
J	jedinična matrica
k_{BW}	koeficijent interferencije otklonjene kombinacije krilo - tijelo
K	koeficijent induciranog otpora zrakoplova
K_{BW}	koeficijent interferencije planarne kombinacije krilo - tijelo
ℓ	udaljenost od elise u pravcu x osi zrakoplova
L	uzgon, moment valjanja
\mathbf{L}_{AB}	matrica transformacije iz koordinatnog sustava A u koordinatni sustav B
\mathbf{L}_X \mathbf{L}_Y \mathbf{L}_Z	temeljne matrice transformacija

m		masa zrakoplova
M		moment propinjanja
Ma		Machov broj
n		normalno opterećenje
N		moment skretanja
N		neutralna točka.
p	}	komponente kutne brzine
q		
r		
p		tlak
P		snaga
P_a	P_r	raspoloživa snaga, potrebna snaga
P_s		specifični višak snage
R		dolet
$s = [\phi \ \theta \ \psi]$		stav zrakoplova
S		površina
t		vrijeme
T		pogonska sila, temperatura zraka
T_a	T_r	raspoloživa, potrebna pogonska sila
u	}	komponente brzine
v		
w		
V		intenzitet aerodinamičke brzine
V_k		intenzitet brzine leta
W		težina
W_f		širina trupa
X		aerodinamička sila u pravcu x osi
Y		aerodinamička sila u pravcu y osi
Z		aerodinamička sila u pravcu z osi

Grčka slova

α	β	napadni kut, kut klizanja
χ	γ	kut skretanja brzine, kut propinjanja brzine

ψ ϑ ϕ	De Sparraini kutovi zrakoplova
χ_A γ_A μ_A	De Sparraini kutovi aerodinamičkog koordinatnog sustava
δ_ℓ δ_m δ_n	otklon krilaca, otklon kormila visine, otklon kormila pravca
δ_f	otklon zakrilca
λ	suženje krila
η_V	koeficijent umanjenja dinamičkog tlaka na vertikalnom stabilizatoru
η_h	koeficijent umanjenja dinamičkog tlaka na horizontalnom stabilizatoru
ρ	gustoća zraka

Indeksi

$()_A$	veličina aerodinamičkog koordinatnog sustava
$()_B = ()_f$	veličina tijela
$()_F$	veličina koordinatnog sustava letjelice
$()_h$	veličina horizontalnog repa
$()_K$	brzina ili ubrzanje u odnosu na zemlju
$()_L$	veličina lokalnog koordinatnog sustava
$()_m$	veličina za središte mase
$()_n$	veličina za neutralnu točku
$()_O$	veličina nošenog koordinatnog sustava
$()_V$	veličina brzinskog koordinatnog sustava
	veličina vertikalnog repa
$()_W$	veličina krila (od dva polukrila)

EkspONENTI

$()^L$	komponente u lokalnom koordinatnom sustavu
$()^O$	komponente u nošenom koordinatnom sustavu
$()^F$	komponente u koordinatnom sustavu letjelice (obično se izostavlja)
$()^V$	komponente u brzinskom koordinatnom sustavu
$()^A$	komponente u aerodinamičkom koordinatnom sustavu