

1

PRORAČUN ODZIVNIH POLJA

1.1

PRORAČUN UZDUŽNE ČVRSTOĆE

1.1.1 PRORAČUN PRIMARNE ČVRSTOĆE

1.1.1.1 Proračun odziva u uzdužno efikasnim elementima strukture metodom linijskih konačnih elemenata

Za proračun primarnog odziva brodske konstrukcije (uzdužna čvrstoća, torziona čvrstoća) koristi se gredna idealizacija broskog trupa. Proračun se provodi primjenom proširene teorije grede za koju je potrebno odrediti geometrijske karakteristike presjeka (statički momenti, momenti inercije s obzirom na osi presjeka, polarni moment inercije, torziona krutost, položaj težišta presjeka, centra torzije). Odziv strukture na zadana opterećenja dobije se u vidu polja pomaka odnosno naprezanja (normalna naprezanja, smična naprezanja) po presjeku konstrukcije.

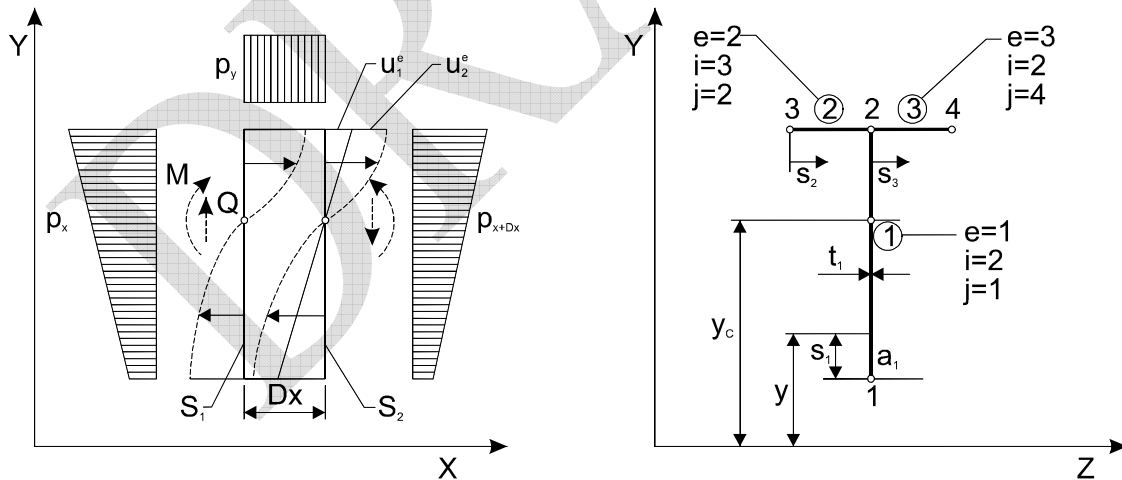
Određivanje geometrijskih karakteristika presjeka za grednu idealizaciju te rasporeda pomaka i naprezanja po presjeku strukture iz poznatih rezultata grednog proračuna vrši se obično analitičkim metodama. Takvi proračuni postaju vrlo složeni za višestruko povezane presjeke s kombinacijom otvorenih i zatvorenih (ćelija) struktura. Stoga se pribjegava različitim idealizacijama složene strukture u svrhu dobivanja jednostavne linijske konture na koju je onda moguće primijeniti analitička rješenja.

Primjena numeričkih metoda baziranih na energetskom pristupu daje mogućnost alternativnog pristupa navedenim problemima. Postupak se bazira na rastavu presjeka na linijske konačne elemente koji su opisani brojevima čvorova (i, j) i koordinatama čvorova (y_i, z_i) , (y_j, z_j) na

koje su vezani te debljinom elementa t^e . Uz svaki element dane su također i karakteristike materijala (Youngov modul elastičnosti E , modul smika G , efikasnost materijala u odnosu na normalna - RN , odnosno smična - RS naprezanja kojima se uzima u obzir neefikasnost materijala među grotlima ili olakšanja u nosačima kod proračuna krutosti na smik).

Primjenom energetske metode, u ovoj točki prikazati će se princip proračuna i raspodjele smičnih naprezanja po poprečnom presjeku trupa uslijed poprečne sile kod savijanja u vertikalnoj i horizontalnoj ravnini, proračun vitoperenja i raspodjele primarnih smičnih naprezanja uslijed čiste torzije konstrukcije te proračun normalnih i sekundarnih smičnih naprezanja uslijed spriječenog vitoperenja konstrukcije. Ujedno će se prikazati proračun geometrijskih karakteristika presjeka i karakteristika krutosti presjeka, a to su:

- površina poprečnog presjeka A ,
- težište presjeka u odnosu na ishodište koordinatnog sistema Y_{CG}, Z_{CG} ,
- moment inercije u odnosu na težište presjeka I_Y, I_Z, I_{YZ}, I_p ,
- glavni momenti inercije nesimetričnog presjeka I_1, I_2 ,
- položaj i zaokret neutralne osi u odnosu na ishodište koordinatnog sistema uzevši u obzir različite karakteristike materijala i efikasnost elementa u odnosu na normalna naprezanja Y_{NA}, Z_{NA}, ϕ_0 ,
- centar smika (torzije) presjeka Y_{CT}, Z_{CT} ,
- faktor aksijalne krutosti presjeka EA ,
- faktori krutosti presjeka na savijanje oko neutralne osi EI_Z, EI_Y ,
- faktori krutosti na smik za vertikalno i horizontalno savijanje GA_V, GA_H ,
- faktor krutosti na torziju GI_T ,
- faktor krutosti na vitoperenje EI_W .



Slika 1.1.1 Isječak iz nosača uzdužne strukture.

Proračun i raspored korigiranih normalnih naprezanja kod savijanja oko obje osi te proračun ekvivalentnih naprezanja u presjeku trupa uslijed najnepovoljnije kombinacije normalnih i smičnih naprezanja izazvane istovremenim savijanjem i torzijom idealiziranog proizvoljnog presjeka linijskim elementima prikazati će se u nastavku ovog rada. Osnovne geometrijske karakteristike presjeka definiraju se slijedećim izrazima (Slika 1.1.1).

Površina poprečnog presjeka A :

$$A = \sum_e l^e \cdot t^e, \quad e = 1 \dots n \text{ (broj elemenata)}; \quad (1.1.1)$$

gdje je:

l^e duljina elementa između čvora i, j :

$$l^e = \sqrt{(y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}; \quad (1.1.2)$$

Težište presjeka u odnosu na ishodište koordinatnog sistema Y_{CG}, Z_{CG} :

$$Y_{CG} = \frac{\sum_e l^e \cdot t^e \cdot (y_i + y_j)}{2 \cdot A}; \quad Z_{CG} = \frac{\sum_e l^e \cdot t^e \cdot (z_i + z_j)}{2 \cdot A}; \quad (1.1.3)$$

Moment inercije u odnosu na težište presjeka I_Y, I_Z :

$$I_Y = \sum_e \left[\frac{l^e \cdot t^e \cdot (z_i + z_j)^2}{4} + I_{0Y}^e \right];$$

$$I_Z = \sum_e \left[\frac{l^e \cdot t^e \cdot (y_i + y_j)^2}{4} + I_{0Z}^e \right]; \quad (1.1.4)$$

$$I_{YZ} = \sum_e \left[\frac{l^e \cdot t^e \cdot (z_i + z_j) \cdot (y_i + y_j)}{4} + I_{0YZ}^e \right];$$

gdje su:

$I_{0Y}^e, I_{0Z}^e, I_{0YZ}^e$ momenti inercije samog elementa oko osi kroz težište elementa.

Glavni momenti inercije I_1, I_2 :

$$I_1 = \frac{I_Y + I_Z}{2} + \frac{\sqrt{(I_Y - I_Z)^2 + 4 \cdot I_{YZ}}}{2}; \quad (1.1.5)$$

$$I_2 = \frac{I_Y + I_Z}{2} - \frac{\sqrt{(I_Y - I_Z)^2 + 4 \cdot I_{YZ}}}{2}$$

Položaj neutralne osi u odnosu na ishodište koordinatnog sistema uzevši u obzir različite karakteristike materijala i efikasnost elementa u odnosu na normalna naprezanja Y_{NA}, Z_{NA} :

$$Y_{NA} = \frac{\sum_e E^e \cdot l^e \cdot t^e \cdot (y_i + y_j) \cdot RN^e}{2 \cdot \sum_e E^e \cdot l^e \cdot t^e \cdot RN^e};$$

$$Z_{NA} = \frac{\sum_e E^e \cdot l^e \cdot t^e \cdot (z_i + z_j) \cdot RN^e}{2 \cdot \sum_e E^e \cdot l^e \cdot t^e \cdot RN^e}; \quad (1.1.6)$$

Kut zaokreta glavnih osi φ :

$$\tan 2\varphi = -2 \cdot \frac{I_{YZ}}{I_Y + I_Z} ; \quad (1.1.7)$$

Faktori krutosti presjeka na savijanje oko neutralne osi EI_Z , EI_Y :

$$\begin{aligned} EI_Y &= \sum_e E^e \left[\frac{l^e \cdot t^e \cdot (z_i + z_j)^2}{4} + I_{0Y}^e \right] \cdot RN^e \\ EI_Z &= \sum_e E^e \left[\frac{l^e \cdot t^e \cdot (y_i + y_j)^2}{4} + I_{0Z}^e \right] \cdot RN^e \end{aligned} ; \quad (1.1.8)$$

gdje su y_i , z_i koordinate čvora u sistemu s ishodištem u sjecištu neutralnih osi.

Modeling philosophy for primary response in concept design. Classical FE modeling, while giving good insight into stresses and deformations, is not capable of giving efficient and fast answers regarding feasibility criteria (buckling, fatigue, yield) required by the Rules. However, structural feasibility and compliance with the Rule requirements is of primary interest, not stresses or deformations. Most of the local failure criteria, e.g. different buckling failure modes of stiffened panels, require specified force and displacement boundary conditions. They are available only if logical structural parts, such as complete stiffened panels between girders and frames, are modeled (macro-elements). For the concept design structural evaluation of primary response (longitudinal strength, torsional strength) the beam idealization of wing/ship/bridge is often used. Primary strength calculation provides dominant response field (Demand) for design feasibility assessment. Evaluation is based on the extended beam theory which needs cross-sectional characteristics. They are obtained using analytical methods which can be very complicated for real combinations of open and closed cross-sections. Application of the energy based numerical methods gives an opportunity for alternative approach to given problems. Method is based on decomposing a cross-section into the line finite elements between nodes i and j with coordinates (y_i, z_i) , (y_j, z_j) ; element thickness t^e ; material characteristics (Young's modulus E / shear modulus G); material efficiency RN and RS (due to cutouts, lightening holes, etc.) w.r.t. normal/shear stresses. Using FEM approach, the procedure is developed for calculation of the set of cross-sectional geometric and stiffness characteristic at position x denoted \mathbf{G}^x . Standard stiffness matrices (alternatively with geometrical nonlinearity), for axial (\mathbf{k}_u) and flexural (\mathbf{k}_v , \mathbf{k}_w) and torsional response modes are given as functions of the geometric set \mathbf{G}^x :

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_u &= \frac{AE}{L} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} ; \\ \mathbf{k}_v &= \frac{EI_z}{(1 + \Phi_y)L^3} \begin{bmatrix} 12 & & & & \text{Symm} \\ 6L & (4 + \Phi_y)L^2 & & & \\ -12 & -6L & 12 & & \\ 6L & (2 - \Phi_y)L^2 & -6L & (4 + \Phi_y)L^2 & \end{bmatrix} ; \quad \Phi_y = \frac{12 \cdot EI_z}{L^2 \cdot GA_y} ; \end{aligned}$$

\mathbf{k}_w is obtained similarly. Stiffness matrices for free torsion (\mathbf{k}_T) and restrained warping (\mathbf{k}_ω) read:

$$\mathbf{k}_T = \frac{GI_T}{L} \begin{bmatrix} 6/5 & & & & \text{Symm} \\ L/10 & 2L^2/15 & & & \\ -6/5 & L/10 & 6/5 & & \\ L/10 & -2L^2/30 & -L/10 & 2L^2/15 & \end{bmatrix} ;$$

$$\mathbf{k}_\omega = \frac{EI_\omega}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & & & & & & & \text{Symm} \\ 6L & 4L^2 & & & & & & \\ -12 & -6L & 12 & & & & & \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 & & & & \end{bmatrix};$$

Global stiffness matrix \mathbf{K}_{ID} is obtained by the combination of modal stiffnesses corrected for centroid and shear centre position relative to position of origin of global C.S.

$$\mathbf{a}_L = \begin{Bmatrix} u \\ v_T \\ w_T \\ \theta \\ \theta_{yT} \\ \theta_{zT} \\ \theta_{,x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \omega_0 & z_{CG}\lambda + y_{CG}\mu & z_{CG}\mu - y_{CG}\lambda & 0 \\ 0 & \lambda & \mu & z_{CS} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu & \lambda & -y_{CS} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & -\mu & -y_{CS} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & \lambda & z_{CS} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \\ \theta \\ \Theta_y \\ \Theta_z \\ \theta_{,x} \end{Bmatrix} = \mathbf{t} \mathbf{a}_G;$$

where $\lambda = \cos(\phi_0)$ and $\mu = \sin(\phi_0)$.

$$\mathbf{f}_L = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_u \\ \mathbf{f}_v \\ \mathbf{f}_w \\ \mathbf{f}_\theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{k}_v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{k}_w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{k}_T + \mathbf{k}_\omega \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_u \\ \mathbf{a}_{vB} \\ \mathbf{a}_{wB} \\ \mathbf{a}_\theta \end{Bmatrix} = \mathbf{k}_L^e \cdot \mathbf{a}_L;$$

$$\text{where: } \mathbf{a}_L = \mathbf{T} \mathbf{a}_G \text{ and } \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{t} & 0 \\ 0 & \mathbf{t} \end{bmatrix}.$$

Finally, the global stiffness matrix \mathbf{K}_{ID} is obtained as a sum of element stiffness matrices $\mathbf{k}_G^e = \mathbf{T}^T \mathbf{k}_L^e \mathbf{T}$ with appropriate node numbering. The system $\mathbf{K}_{ID} \mathbf{a} = \mathbf{F}$ can now be solved for unknown displacements \mathbf{a} which in turn enable determination of element parameters \mathbf{a}_L . From those parameters the element axial, bending and torsion parameter distributions, based on the applied shape functions, can be derived (e.g. $\theta(x)$, $\theta_{,x}(x)$, $\theta_{,xx}(x)$, $\theta_{,xxx}(x)$ for torsion). The key element for calculation of the response of the complex thinwalled structure is therefore determination of elements of \mathbf{G}^x . A simple and elegant FEM procedure for such calculation is presented in the sequel.

1.1.1.2 Raspodjela smičnih naprezanja po presjeku uslijed poprečne sile kod savijanja trupa broda

Polje pomaka definirano standardnom teorijom grede ne omogućava direktan proračun polja smičnih naprezanja iz definicijskih jednadžbi teorije elastičnosti. Uvođenjem dodatnog korekcionog polja pomaka (deplanacija presjeka), moguće je totalnu potencijalnu energiju, prema proširenoj teoriji grede, izraziti u ovisnosti o osnovnim parametrima primarnog polja (pomaci i kutovi zaokreta) te parametrima dodatnog polja. Minimizacija totalne potencijalne energije sistema omogućuje određivanje svih nepoznatih parametara. Dodatno polje se definira linearnom aproksimacijom po elementima. Nepoznati parametri dodatnog polja su vrijednosti tog polja u čvorovima. Kod minimizacije totalne potencijalne energije sistema, sistem jednadžbi raspada se na dva podsistema od

kojih prvi odgovara određivanju parametara primarnog polja pomaka za savijanje oko osi Y i Z , dok se iz drugog podsistema dodatno polje pomaka. Polja se mogu uskladiti iterativnom procedurom. Kod proračuna potencijalne energije promatra se isječak iz nosača uzdužne strukture duljine Δx (Slika 1.1.1). Pretpostavka je da su parametri primarnog polja pomaka grede poznati iz proračuna savijanja nosača. Dodatno polje pomaka u aksijalnom smjeru $u_2(x, y, z)$ za presjek $x = x_0$ definira se u lokalnom koordinatnom sistemu elementa e između čvorova i i j gdje je os s postavljena duž linijskog elementa od čvora i prema čvoru j . Funkcija $u(s)$ definira se pomoću funkcije oblika \mathbf{N}^T u ovisnosti o pomacima čvorova elementa $\mathbf{u}^{eT} = \{u_i, u_j\}$:

$$u_2(x, y, z) \rightarrow u(s)_{x=x_0} = \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{u}^e = \left\{ 1 - \frac{s}{l^e} \quad \frac{s}{l^e} \right\} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix}; \quad (1.1.9)$$

Opterećenja p_Y, p_Z pretpostavljaju se zadanim, dok su opterećenja p_X i $p_{X+\Delta x}$ jednaka napreznanjima uzrokovanim momentima savijanja $M(x)$ i $M(x+\Delta x)$. Aksijalne sile u smjeru X se zanemaruju u ovom izvodu. Podjelom na savijanje oko osi Y i Z dobiju se odgovarajuće komponente momenata. Ti momenti povezani su standardnim relacijama s poprečnim silama Q te linijskim opterećenjem p_Y ili p_Z . Na bazi momenta inercije $I_Y(x), I_Z(x)$ moguće je onda dobiti sve potrebne vrijednosti za presjek x . Postupak proračuna metodom konačnih elemenata provodi se prema točkama:

1. Relativne deformacije ($\boldsymbol{\epsilon}$ se svodi na γ_{xs}):

$$\boldsymbol{\epsilon} \rightarrow \gamma_{xs} = \frac{\partial u}{\partial s} = \mathbf{B}^T \mathbf{u}^e = \left\{ -\frac{1}{l^e} \quad \frac{1}{l^e} \right\} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix}; \quad (1.1.10)$$

2. Napreznanja ($\boldsymbol{\sigma}$ se svodi na τ_{xs}):

$$\boldsymbol{\sigma} \rightarrow \tau_{xs} = G^e \gamma_{xs} = RS \cdot G^e \mathbf{B}^T \mathbf{u}^e; \quad (1.1.11)$$

3. Opterećenje (uz zanemarenje upliva p_Y, p_Z na duljini Δx) ako su osi x i y glavne osi inercije:

$$\begin{aligned} F(s) &= p_x(x + \Delta x, s)_{s_2} - p_x(x, s)_{s_1} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{y_c(s)}{EI_z} M_z \right)_{s_2^e} + \left(\frac{z_c(s)}{EI_y} M_y \right)_{s_2^e} \right] \cdot E^e \cdot RN^e \cdot \Delta x \\ &= [F_{SZ} \cdot Q_Y + F_{SY} \cdot Q_Z] \cdot E^e \cdot RN^e \cdot \Delta x \end{aligned}; \quad (1.1.12)$$

$$F_{SY} = \frac{z_c(s)}{EI_y}$$

$$F_{SZ} = \frac{y_c(s)}{EI_z}$$

gdje je:

y_c, z_c koordinate točke mjerene u odnosu na koordinatni sistem s ishodištem u sjecištu neutralnih osi presjeka:

$$y_c(s) = y_{ic} + s \cdot \sin \alpha^e; \quad z_c(s) = z_{ic} + s \cdot \cos \alpha^e; \quad (1.1.13)$$

α^e kut nagiba elementa prema osi Z : $\alpha^e = \angle(s, Z)$,

y_{ic}, z_{ic} koordinate čvora i elementa e .

4. Totalna potencijalna energija:

$$\Pi = U - W = \int_V \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} dV - W ; \quad (1.1.14)$$

Rad unutrašnjih sila na elementu:

$$U^e = \int_{V^e} \frac{1}{2} (RS \cdot G^e \mathbf{B}^T \mathbf{u}^e)^T \mathbf{B}^T \mathbf{u}^e dV = \int_{V^e} \frac{1}{2} RS \cdot G^e \mathbf{u}^{eT} \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{u}^e dV ; \quad (1.1.15)$$

$$U^e = \Delta x \cdot t^e \cdot RS^e \cdot G^e \frac{1}{2} \int_0^{l^e} \mathbf{u}^{eT} \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{u}^e ds ; \quad (1.1.16)$$

Rad vanjskih sila na elementu:

$$W = \int_{S^e} F(s) u(s) dS ; \quad (1.1.17)$$

za sistem od n elemenata:

$$\Pi = \sum_e \Pi^e = \Delta x \sum_e \left[\frac{1}{2} \mathbf{u}^{eT} \mathbf{K}^e \mathbf{u}^e - \mathbf{u}^{eT} \mathbf{F}^e \right] ; \quad (1.1.18)$$

gdje je:

\mathbf{K}^e matrica krutosti elementa e :

$$\mathbf{K}^e = t^e \cdot RS^e \cdot G^e \cdot \int_0^{l^e} \mathbf{B} \mathbf{B}^T ds ; \quad (1.1.19)$$

\mathbf{F}^e vektor opterećenja elementa e :

$$\mathbf{F}^e = t^e \cdot \int_0^{l^e} F^e(s) \mathbf{N} ds ; \quad (1.1.20)$$

5. Ukoliko se sumiranje provede po svim elementima, a pomaci i opterećenja se sortiraju u globalne vektore pomaka \mathbf{u} i sila \mathbf{F} dobije se:

$$\Pi = \Delta x \cdot \left[\frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{u}^T \mathbf{F} \right] ; \quad (1.1.21)$$

\mathbf{K} globalna matrica krutosti sistema.

6. Minimizacija totalne potencijalne energije daje onoliko jednadžbi koliko ima nepoznatih pomaka u_i :

$$\delta \Pi_{\mathbf{u}} = 0 \rightarrow \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{F} ; \quad (1.1.22)$$

7. Za predloženu linearnu raspodjelu pomaka po linijskom elementu, matrica krutosti elementa:

$$\mathbf{K}^e = \frac{G^e \cdot t^e \cdot RS^e}{l^e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} ; \quad (1.1.23)$$

8. Vektor opterećenja elementa za savijanje oko osi z:

$$\mathbf{F}_z^e(x) = Q_y(x) \cdot \bar{\mathbf{F}}_z^e(x) = \frac{E^e \cdot Q_y(x) \cdot t^e \cdot RN^e}{EI_z} \left\{ \begin{array}{c} \frac{y_{ic} \cdot l^e}{2} + \frac{l^{e2} \sin \alpha^e}{6} \\ \frac{y_{ic} \cdot l^e}{2} + \frac{l^{e2} \sin \alpha^e}{3} \end{array} \right\}; \quad (1.1.24)$$

9. Vektor opterećenja elementa za savijanje oko osi y:

$$\mathbf{F}_y^e(x) = Q_z(x) \cdot \bar{\mathbf{F}}_y^e(x) = \frac{E^e \cdot Q_z(x) \cdot t^e \cdot RN^e}{EI_y} \left\{ \begin{array}{c} \frac{z_{ic} \cdot l^e}{2} + \frac{l^{e2} \sin \alpha^e}{6} \\ \frac{z_{ic} \cdot l^e}{2} + \frac{l^{e2} \sin \alpha^e}{3} \end{array} \right\}; \quad (1.1.25)$$

10. Globalni problem za savijanje oko osi z i y, prema tome glasi:

$$\mathbf{K} \mathbf{u}_z = \mathbf{F}_z; \quad (1.1.26)$$

$$\mathbf{K} \mathbf{u}_y = \mathbf{F}_y; \quad (1.1.27)$$

gdje je:

K globalna matrica krutosti sistema dobivena sumiranjem po stupnjevima slobode matrice elemenata,

u_y, u_z globalni pomaci čvorova strukture dani kao produkt poprečne sile i pomaka $\bar{\mathbf{u}}_y$ i $\bar{\mathbf{u}}_z$ za jedinične poprečne sile koje djeluju u centru smika presjeka trupa na poziciji x:

$$\mathbf{u}_y = Q_z(x) \cdot \bar{\mathbf{u}}_y; \quad \mathbf{u}_z = Q_y(x) \cdot \bar{\mathbf{u}}_z; \quad (1.1.28)$$

F_y, F_z globalna opterećenja čvorova strukture dane kao produkt poprečne sile i jediničnog opterećenja $\bar{\mathbf{F}}_y$ i $\bar{\mathbf{F}}_z$:

$$\mathbf{F}_y = Q_z \cdot \bar{\mathbf{F}}_y; \quad \mathbf{F}_z = Q_y \cdot \bar{\mathbf{F}}_z; \quad (1.1.29)$$

Očito je da je dovoljno provesti proračune:

$$\mathbf{K} \bar{\mathbf{u}}_z = \bar{\mathbf{F}}_z; \quad (1.1.30)$$

$$\mathbf{K} \bar{\mathbf{u}}_y = \bar{\mathbf{F}}_y; \quad (1.1.31)$$

s jediničnom vrijednošću poprečnih sila $Q_z = Q_y = 1$, te potom za svaku vrijednost poprečnih sila izvršiti proračun pomaka \mathbf{u}_z , \mathbf{u}_y .

Dioba na komponente savijanja oko osi y i z implicira rješavanje sistema jednačbi s istom matricom krutosti, ali je potrebno obratiti pažnju na često različite rubne uvjete, posebno za slučaj modeliranja simetričnih struktura.

11. Smična naprezanja, konstantna po elementu, računaju se prema izrazu:

$$(\tau_{xs}^e)_y = G^e \cdot Q_y \cdot \mathbf{B}^T \cdot \bar{\mathbf{u}}_z^e = \frac{G^e \cdot Q_y}{l^e} \cdot \left\{ -1 \quad 1 \right\} \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{u}_j \end{Bmatrix}_z ; \quad (1.1.32)$$

$$(\tau_{xs}^e)_z = G^e \cdot Q_z \cdot \mathbf{B}^T \cdot \bar{\mathbf{u}}_y^e = \frac{G^e \cdot Q_z}{l^e} \cdot \left\{ -1 \quad 1 \right\} \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{u}_j \end{Bmatrix}_y ; \quad (1.1.33)$$

12. Želi li se nešto točnije izračunati distribucija naprezanja $\tau_{xs}^e(s)$ duž elementa iz poznatog srednjeg naprezanja τ_{xs}^{ke} , proračun se provodi prema izrazu:

$$(\tau_{xs}^e(s))_u = (\tau_{xs}^{ke})_u - \tau_{1u}^{ke} + \tau_{1u}(s) ; \quad (1.1.34)$$

gdje je:

$$\tau_{1y}(s) = \frac{Q_y \cdot E^e \cdot S_z(s) \cdot RN^e}{EI_z \cdot t^e \cdot RS^e} ; \quad (1.1.35)$$

$$\tau_{1z}(s) = \frac{Q_z \cdot E^e \cdot S_y(s) \cdot RN^e}{EI_y \cdot t^e \cdot RS^e} ;$$

$$\tau_{1y}^{ke} = \frac{1}{l^e} \int_0^{l^e} \tau_{1y}(s) ds ; \quad (1.1.36)$$

$$\tau_{1z}^{ke} = \frac{1}{l^e} \int_0^{l^e} \tau_{1z}(s) ds$$

S_z, S_y statički momenti koji se dobiju iz izraza:

$$S_z(s) = \int_0^s y_c(s_1) \cdot t^e \cdot RS^e ds_1 = t^e \cdot RS^e \cdot \int_0^s \left(y_{ic} + s_1 \cdot \frac{y_j - y_i}{l^e} \right) ds_1 ; \quad (1.1.37)$$

$$S_y(s) = \int_0^s z_c(s_1) \cdot t^e \cdot RS^e ds_1 = t^e \cdot RS^e \cdot \int_0^s \left(z_{ic} + s_1 \cdot \frac{z_j - z_i}{l^e} \right) ds_1 ; \quad (1.1.38)$$

Sređivanjem gornjih izraza dobije se:

$$(\tau_{xs}^e(s))_y = (\tau_{xs}^{ke})_y - \frac{1}{l^e} \int_0^{l^e} \frac{Q_y \cdot E^e \cdot S_z(s) \cdot RN^e}{EI_z \cdot t^e \cdot RS^e} ds + \frac{Q_y \cdot E^e \cdot S_z(s) \cdot RN^e}{EI_z \cdot t^e \cdot RS^e} ; \quad (1.1.39)$$

$$(\tau_{xs}^e(s))_z = (\tau_{xs}^{ke})_z - \frac{1}{l^e} \int_0^{l^e} \frac{Q_z \cdot E^e \cdot S_y(s) \cdot RN^e}{EI_y \cdot t^e \cdot RS^e} ds + \frac{Q_z \cdot E^e \cdot S_y(s) \cdot RN^e}{EI_y \cdot t^e \cdot RS^e} ; \quad (1.1.40)$$

$$(\tau_{xs}^e(s))_y = Q_y \cdot \left[G^e \cdot \mathbf{B}^T \cdot \bar{\mathbf{u}}_z^e - \frac{E^e \cdot RN^e}{EI_z} \cdot \left(\frac{l^e}{3} \cdot \left(y_{ic} + \frac{1}{2} y_{yc} \right) - y_{ic} \cdot s - (y_{jc} - y_{ic}) \cdot \frac{s^2}{2l^e} \right) \right] ; \quad (1.1.41)$$

$$(\tau_{xs}^e(s))_z = Q_z \cdot \left[G^e \cdot \mathbf{B}^T \cdot \bar{\mathbf{u}}_y^e - \frac{E^e \cdot RN^e}{EI_y} \cdot \left(\frac{l^e}{3} \cdot \left(z_{ic} + \frac{1}{2} z_{yc} \right) - z_{ic} \cdot s - (z_{jc} - z_{ic}) \cdot \frac{s^2}{2l^e} \right) \right] ; \quad (1.1.42)$$

1.1.1.3 Proračun položaja centra smika (torzije) te proračun aksijalne krutosti i krutosti na smik

Centar smika (torzije) u odnosu na neutralne osi presjeka Y_{CT} , Z_{CT} :

$$Y_{CT} = \sum_e \left[\int_0^{l^e} (\tau_{xs}^e)_{Q_z=1} \cdot t^e \cdot d_c^e \cdot ds \right] \cdot RS^e ; \quad (1.1.43)$$

$$Z_{CT} = \sum_e \left[\int_0^{l^e} (\tau_{xs}^e)_{Q_y=1} \cdot t^e \cdot d_c^e \cdot ds \right] \cdot RS^e$$

gdje je:

d_c^e udaljenost elementa od sjecišta neutralnih osi (mjereno po normali na element):

$$d_c^e = z_{ic} \sin \alpha^e - y_{ic} \cos \alpha^e ; \quad (1.1.44)$$

Faktor aksijalne krutosti presjeka EA :

$$EA = \sum_e E^e \cdot I^e \cdot t^e \cdot RN^e ; \quad (1.1.45)$$

Faktori krutosti na smik za vertikalno i horizontalno savijanje GA_V , GA_H :

$$GA_V = \frac{1}{\sum_e \left[\int_0^{l^e} \frac{((\tau_{xs}^e)_y)_{Q_y=1}^2}{G^e} \cdot t^e \cdot ds \right] \cdot RS^e} ; \quad (1.1.46)$$

$$GA_H = \frac{1}{\sum_e \left[\int_0^{l^e} \frac{((\tau_{xs}^e)_z)_{Q_z=1}^2}{G^e} \cdot t^e \cdot ds \right] \cdot RS^e}$$

gdje je:

τ_{xs} vrijednost smičnog naprezanja prema gore danim izrazima.

1.1.1.4 Korekcija normalnih naprezanja u presjeku uslijed utjecaja smičnih naprezanja

U ovoj točki prikazati će se proračun i raspored korigiranih normalnih naprezanja kod savijanja oko horizontalne i vertikalne osi idealiziranog proizvoljnog presjeka trupa broda linijskim konačnim elementima te proračun ekvivalentnih naprezanja u presjeku trupa uslijed najnepovoljnije kombinacije normalnih i smičnih naprezanja izazvane istovremenim savijanjem i torzijom trupa. Ukoliko se želi uzeti u obzir aksijalna promjena polja pomaka $u(x,s)$ te opterećenje po duljini grede $p_y(x)$, $p_z(x)$, model prikazan na slici 2.1 postaje nešto složeniji. Ukupna promjena polja naprezanja iznosi 10-15% nekorrigiranih. Iz tog razloga približno rješenje prema Lockwood-Tayloru daje za praksu zadovoljavajuće rješenje. Aproksimacija implicira 5 koraka:

1. Proračun nekorigiranih smičnih i normalnih naprezanja,
2. Proračun promjene polja pomaka iz relativnih deformacija na bazi koraka 1.,
3. Proračun korekcionih normalnih naprezanja σ_x^c na bazi polja pomaka iz koraka 2.,
4. Proračun korekcionog momenta savijanja M^c na bazi neuravnoteženih normalnih naprezanja σ_x^c iz koraka 3.,
5. Proračun ukupne korekcije normalnih naprezanja σ_x^{cT} implicira sumiranje σ_x^c i linearno promjenjivih naprezanja uzrokovanih korekcionim momentom savijanja M^c :
 $\sigma_x^{cT} = \sigma_x^c + \sigma_x^{M^c}$.

Primjenom modela metode konačnih elemenata algoritam izgleda kako slijedi:

1. Nekorigirana raspodjela:

$$(\sigma_x)_y^i = RN^e \cdot \frac{M_y}{EI_y} E^e \cdot z_{ic} ; (\sigma_y)_z^i = RN^e \cdot \frac{M_z}{EI_z} E^e \cdot y_{ic} ; \quad (1.1.47)$$

$$\begin{aligned} (\tau_{xs})_y^i &= G^e \cdot \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{u}_z^e ; \\ (\tau_{xs})_z^i &= G^e \cdot \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{u}_y^e ; \end{aligned} \quad (1.1.48)$$

gdje su:

- y_{ic}, z_{ic} koordinate čvora i ,
 i broj čvorova: $i = 1 \dots m$,
 e broj elemenata: $e = 1 \dots n$.

2. Promjena polja pomaka po x za čvor i npr. kod savijanja presjeka simetričnog oko osi y odnosno z :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_y^i = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{l^i} \frac{\partial u}{\partial s} ds = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{l^i} Q_z(x) \frac{\partial \bar{u}_y(s)}{\partial s} ds = -p_z \cdot (\bar{u}_y^i - \bar{u}_y^c) ; \quad (1.1.49)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_z^i = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{l^i} \frac{\partial u}{\partial s} ds = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{l^i} Q_y(x) \frac{\partial \bar{u}_z(s)}{\partial s} ds = -p_y \cdot (\bar{u}_z^i - \bar{u}_z^c) ; \quad (1.1.50)$$

jer je $\frac{\partial Q_y}{\partial x} = -p_y$ i $\frac{\partial Q_z}{\partial x} = -p_z$, a integral predstavlja relativan pomak čvorova u odnosu na pomak čvora na neutralnoj osi presjeka \bar{u}^c kod savijanja oko osi y odnosno z jediničnim opterećenjem $Q_z = 1$ i $Q_y = 1$.

3. Korekcija σ_x^c za normalna naprezanja u čvoru i elementa e glasi:

$$(\sigma_x^c)_y^i = \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon} = E^e \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_y^i = -E^e \cdot p_z \cdot (\bar{u}_y^i - \bar{u}_y^c) \cdot RN^e ; \quad (1.1.51)$$

$$(\sigma_x^c)_z^i = \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon} = E^e \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_z^i = -E^e \cdot p_y \cdot (\bar{u}_z^i - \bar{u}_z^c) \cdot RN^e ; \quad (1.1.52)$$

4. Korekcijski moment savijanja M^c glasi:

$$M_y^c = \sum_e \int_0^{l^e} (\sigma_x^c(s))_y \cdot z_c(s) \cdot t^e ds ; \quad (1.1.53)$$

$$M_z^c = \sum_e \int_0^{l^e} (\sigma_x^c(s))_z \cdot y_c(s) \cdot t^e ds ; \quad (1.1.54)$$

gdje je:

$$\sigma_x^c(s) = (\sigma_x^c)^i + \left[(\sigma_x^c)^i - (\sigma_x^c)^j \right] \cdot \frac{s}{l^e} ; \quad (1.1.55)$$

5. Ukupne korekcije normalnih naprezanja za čvor i glase:

$$\left(\sigma_x^{cT} \right)_y = RN^e \cdot \left[\frac{z_{ic}}{EI_y} \cdot M_y^c \cdot E^e - E^e \cdot p_z \cdot (\bar{u}_y^i - \bar{u}_y^c) \right] ; \quad (1.1.56)$$

za savijanje oko osi y ,

$$\left(\sigma_x^{cT} \right)_z = RN^e \cdot \left[\frac{y_{ic}}{EI_z} \cdot M_z^c \cdot E^e - E^e \cdot p_y \cdot (\bar{u}_z^i - \bar{u}_z^c) \right] ; \quad (1.1.57)$$

za savijanje oko osi z .

6. Približna vrijednost normalnih naprezanja, za istovremeno savijanje oko obje osi, za čvor i :

$$\sigma_x^i = \left[RN^e \cdot \frac{M_z}{EI_z} E^e \cdot y_{ic} + \left(\sigma_x^{cT} \right)_z \right] + \left[RN^e \cdot \frac{M_y}{EI_y} E^e \cdot z_{ic} + \left(\sigma_x^{cT} \right)_y \right] ; \quad (1.1.58)$$

1.1.1.5 Proračun vitoperenja i primarnih smičnih naprezanja uslijed čiste torzije trupa broda

Sekcija tankostijenog nosača duljine Δx (Slika 1.1.1) opterećena je u ovom slučaju na torziju momentom M_x . Polje pomaka na svakom elementu definira se u koordinatnom sistemu s osima x i s u centralnoj plohi elementa te osi t okomito na element. Polje pomaka po sredini debljine stijenke u smjeru osi x može se izraziti u standardnoj formi pomoću funkcije vitoperenja centralne plohe elementa $\bar{u}(s)_{t=0}$ za jedinični prirast kuta torzije i samog prirasta kuta torzije $\theta_{x,x}$:

$$u(x, s) = \bar{u}(s)_{t=0} \cdot \theta_{x,x}(x_0) ; \quad (1.1.59)$$

$$v(x, s, t) \rightarrow v_s(x)_{t=0} = d_{Tt=0} \cdot \theta_x(x_0) ; \quad (1.1.60)$$

gdje je:

$\bar{u}(s)$ funkcija vitoperenja za tankostijeni element (vitoperenje centralne plohe elementa),

$v_s(x)$ pomak elementa uslijed rotacije za kut $\theta_x(x)$, normalan na radijvektor iz centra torzije na element,

d_T normalna udaljenost elementa od centra torzije,
 $\theta_{x,x}(x)$ prirast kuta torzije po jedinici duljine:

$$\Delta\theta_x = \theta_{x,x} \cdot \Delta x ; \quad (1.1.61)$$

Vektori relativnih deformacija $\boldsymbol{\varepsilon}$ i naprezanja $\boldsymbol{\sigma}$ glase (uz $\boldsymbol{\varepsilon}_s \approx 0$):

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{u} \cdot \theta_{x,xx} \\ \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial s} + d_T \right) \theta_{x,x} \end{Bmatrix} ; \quad (1.1.62)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} E \cdot \bar{u} \cdot \theta_{x,xx} \\ G \cdot \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial s} + d_T \right) \theta_{x,x} \end{Bmatrix} ; \quad (1.1.63)$$

Izraz za totalnu potencijalnu energiju sekcije glasi:

$$\Pi = U - W = \int_V \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} dV - W ; \quad (1.1.64)$$

gdje je:

W potencijal vanjskog opterećenja za kojeg se pretpostavlja da ne ovisi o pomacima u ,

U unutrašnja energija koja ovisi o pomacima.

Uvjet $\delta\Pi = 0$ raspada se na dva uvjeta: $\delta\Pi_{\theta_x} = 0$ (jednadžba torzije grede) i $\delta\Pi_{\bar{u}} = 0$ (raspodjela vitoperenja po presjeku). Totalna potencijalna energija sekcije duljine Δx može se izraziti kao suma doprinosa svakog pojedinog elementa. Zanimari li se doprinos od ε_x totalnoj potencijalnoj energiji kod slobodne torzije dobije se:

$$\Pi = \sum_e \Pi^e, e = 1 \dots n \text{ (broj elemenata)} ; \quad (1.1.65)$$

Uvjet minimuma glasi:

$$\delta\Pi_{\mathbf{u}} = \delta U_{\mathbf{u}} = 0 \text{ ili } \frac{\partial U}{\partial u_i} = 0, i = 1 \dots m \text{ (broj čvorova)}. \quad (1.1.66)$$

Unutrašnju energiju svakog pojedinog elementa može se izraziti u obliku:

$$U^e = \Delta x \cdot RS^e \cdot t^e \cdot \frac{G^e}{2} \int_0^{l^e} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial s} + d_T^e \right)^2 \cdot \theta_{x,x}^2 ds ; \quad (1.1.67)$$

Uvođenjem standardne notacije metode konačnih elemenata za promatrani element, pretpostavka je da se rješavanjem sistema jednadžbi $\delta\Pi_{\theta_x} = 0$ dobilo pomak $\theta_x(x)$.

Pomaci na elementu e pretpostavljeni su konstantnim po debljini t^e , a funkcija $\bar{u}(s)$ se može izraziti pomoću funkcije oblika $\mathbf{N}(s)$ i pomaka čvorova $\bar{\mathbf{u}}^{eT} = \{ \bar{u}_i \quad \bar{u}_j \}$:

$$\bar{\mathbf{u}}(s) = \mathbf{N}^T \cdot \bar{\mathbf{u}}^e = \left\{ 1 - \frac{s}{l^e} \quad \frac{s}{l^e} \right\} \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{u}_j \end{Bmatrix}; \quad (1.1.68)$$

Derivacija pomaka:

$$\frac{\partial \bar{u}(x, s)}{\partial s} = \frac{\partial \bar{u}(s)}{\partial s} \cdot \theta_{x,x}(x) = \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{u}}^e \theta_{x,x}(x) = \left\{ -\frac{1}{l^e} \quad \frac{1}{l^e} \right\} \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{u}_j \end{Bmatrix} \theta_{x,x}; \quad (1.1.69)$$

Relativna deformacija na elementu e glasi:

$$\gamma_{xs} = \left(\frac{\partial \bar{u}(s)}{\partial s} + d_T^e \right) \cdot \theta_{x,x}(x) = (\mathbf{B}^T \bar{\mathbf{u}}^e + d_T^e) \theta_{x,x}(x); \quad (1.1.70)$$

Naprezanja:

$$\tau_{xs} = G^e \cdot \gamma_{xs} = G^e \cdot (\mathbf{B}^T \bar{\mathbf{u}}^e + d_T^e) \theta_{x,x}(x); \quad (1.1.71)$$

Krak elementa e s obzirom na centar torzije:

$$d_T^e = z_{iT} \sin \alpha^e - y_{iT} \cos \alpha^e; \quad (1.1.72)$$

z_{iT}, y_{iT} koordinate prvog čvora i elementa e s obzirom na centar torzije,

α^e kut nagiba elementa s obzirom na os z .

Unutrašnja energija sekcije uvrštavanjem gornjih izraza glasi:

$$U = \sum_e U^e = \sum_e RS^e \cdot \frac{\Delta x \cdot t^e \cdot l^e}{2} \int_0^{l^e} G^e \cdot (\mathbf{B}^T \bar{\mathbf{u}}^e + d_T^e)^2 \cdot \theta_{x,x}^2 ds; \quad (1.1.73)$$

$$U = \Delta x \cdot \theta_{x,x}^2 \cdot \sum_e \left(\frac{1}{2} \bar{\mathbf{u}}^{eT} \mathbf{K}^e \bar{\mathbf{u}}^e - \bar{\mathbf{u}}^{eT} \mathbf{F}^e + \frac{1}{2} d_T^{e2} \cdot RS^e \cdot l^e \cdot t^e \cdot G^e \right);$$

$$U = \Delta x \cdot \theta_{x,x}^2 \cdot \sum_e RS^e \cdot \frac{t^e \cdot G^e \cdot l^e}{2} \int_0^{l^e} (\bar{\mathbf{u}}^{eT} \mathbf{B} \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{u}}^e + 2 \cdot d_T^e \cdot \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{u}}^e + d_T^{e2}) ds;$$

gdje je:

$$\mathbf{K}^e = RS^e \cdot G^e \cdot t^e \int_0^{l^e} \mathbf{B} \mathbf{B}^T ds; \quad (1.1.74)$$

$$\mathbf{F}^e = -RS^e \cdot G^e \cdot t^e \cdot d_T^e \int_0^{l^e} \mathbf{B} ds; \quad (1.1.75)$$

Ukoliko se sumiranje provede po svim elementima, a pomaci $\bar{\mathbf{u}}^e$ sortiraju po globalnoj matrici čvorova $\bar{\mathbf{u}}$ te opterećenje \mathbf{F}^e po globalnoj numeraciji \mathbf{F} dobije se:

$$U = \Delta x \cdot \theta_{x,x}^2 \cdot \left(\frac{1}{2} \bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{K} \bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{F} + \frac{1}{2} \sum_e RS^e \cdot d_T^{e2} \cdot l^e \cdot t^e \cdot G^e \right); \quad (1.1.76)$$

Minimizacija totalne potencijalne energije daje:

$$\delta\Pi_{\mathbf{u}} = \delta U_{\mathbf{u}} = 0 \rightarrow \mathbf{K}\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{F} ; \quad (1.1.77)$$

gdje je:

$$\bar{\mathbf{u}} \quad \text{rješenje problema budući da je } u(x, s) = \bar{u}(s) \cdot \theta_{x,x}(x).$$

Za predloženu linearnu raspodjelu pomaka po linijskim elementima, dobije se:

$$\mathbf{K}^e = RS^e \cdot \frac{G^e \cdot t^e}{l^e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} ; \quad (1.1.78)$$

Vektor za \mathbf{F}^e torziju glasi:

$$\mathbf{F}^e = RS^e \cdot G^e \cdot t^e \cdot d_T^e \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} ; \quad (1.1.79)$$

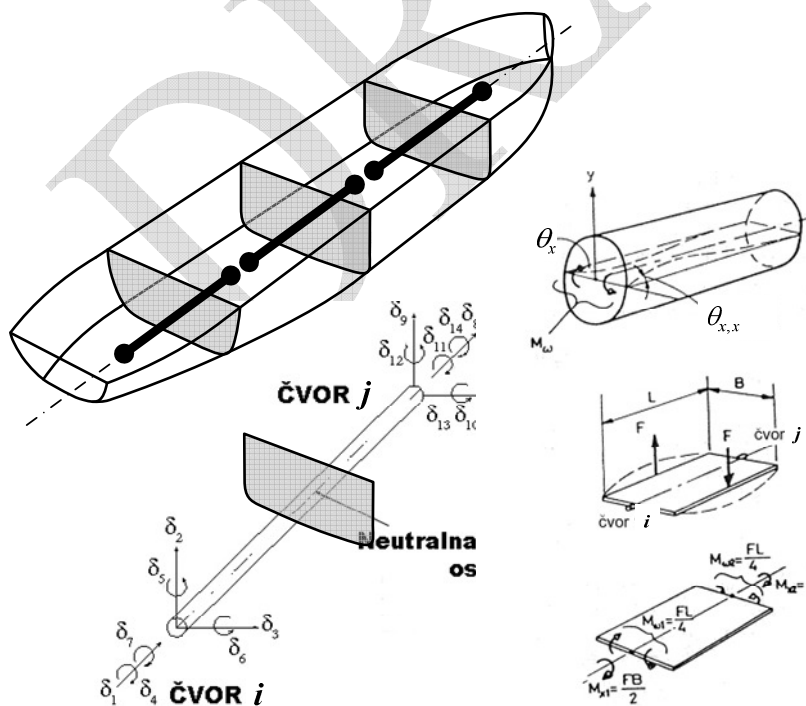
Smična naprezanja za elemente zatvorenih kontura glase:

$$\tau_{xs}^{ke(1)} = G^e \cdot \theta_{x,x} \cdot \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial s} + d_T^e \right) = G^e \cdot \theta_{x,x} \left(\begin{Bmatrix} -\frac{1}{l^e} & \frac{1}{l^e} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{u}_j \end{Bmatrix} + d_T^e \right) ; \quad (1.1.80)$$

Smična naprezanja za elemente otvorenih kontura glase:

$$\tau_{xs \max}^{ke(1)} = G^e \cdot \theta_{x,x} \cdot \frac{t^e}{2} ; \quad (1.1.81)$$

1.1.1.6 Konačni element za torziju.



Slika 1.1.2

Sile i pomaci na konačnom elementu za torziju.

Za ovaj element funkcija oblika može se opisati polinomom trećeg reda:

$$\theta(x) = C_1 + C_2x + C_2x^2 + C_2x^3 ; \quad (1.1.82)$$

ili zapisano u matičnom obliku:

$$\theta_x(x) = \mathbf{H}(x) \cdot \mathbf{C} ; \quad (1.1.83)$$

gdje je $\mathbf{H}(x) = [1 \quad x \quad x^2 \quad x^3]$ i $\mathbf{C}^T = [C_1 \quad C_2 \quad C_3 \quad C_4]$.

Za čvorne pomake koristi se vektor δ koji se sastoji od dva stupnja slobode $\theta_x(x)$ i $\theta_{x,x}(x)$ na svakom čvoru elementa:

$$\mathbf{a}_\theta = \begin{Bmatrix} \theta_{xi} \\ \theta_{xi,x} \\ \theta_{xj} \\ \theta_{xj,x} \end{Bmatrix} ; \quad (1.1.84)$$

gdje su: θ_x kut uvijanja,
 $\theta_{x,x}$ relativni kut uvijanja,

Deriviranje jednadžbe polinoma trećeg reda daje:

$$\theta_{x,x}(x) = C_2 + 2C_2x + 3C_2x^2 ; \quad (1.1.85)$$

Slijedeći korak je slaganje generaliziranog vektora pomaka $\theta(x)$ pomoću kojeg je moguće odrediti vrijednosti pomaka $\theta_x(x)$ i $\theta_{x,x}(x)$ u bilo kojoj točki unutar elementa u ovisnosti o četiri još nepoznate konstante.

$$\theta(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} ; \quad (1.1.86)$$

Pošto vektor $\theta(x)$ predstavlja pomak u bilo kojoj točki elementa, čvorni pomaci se jednostavno dobivaju supstituiranjem pripadajućih koordinata. U čvoru i imamo $x = 0$ pa se dobiva:

$$\theta_{xi} = C_1 \text{ i } \theta_{xi,x} = C_2 ; \quad (1.1.87)$$

U čvoru j , $x = L$ pa se dobiva:

$$\theta_{xj} = C_1 + C_2L + C_3L^2 + C_4L^3 \text{ i } \theta_{xj,x} = C_2 + 2C_3L + 3C_4L^2 ; \quad (1.1.88)$$

ili u matičnom obliku:

$$\begin{Bmatrix} \theta_{xi} \\ \theta_{xi,x} \\ \theta_{xj} \\ \theta_{xj,x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} \text{ ili } \theta = \mathbf{AC} ; \quad (1.1.89)$$

Pošto je matrica \mathbf{A} poznata, vektor nepoznatih koeficijenata se može izračunati kao:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{\theta} ; \quad (1.1.90)$$

Inverzija matrice \mathbf{A} iznosi:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{L^2} & -\frac{2}{L} & \frac{3}{L^2} & -\frac{1}{L} \\ \frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} & -\frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix} ; \quad (1.1.91)$$

Pomaci unutar elementa se mogu izraziti u ovisnosti o čvornim pomacima:

$$\theta_x(x) = \mathbf{H}(x)\mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{\theta} ; \quad (1.1.92)$$

a kao rezultat matičnog umnoška dobiva se:

$$\theta_x(x) = \mathbf{N}(x)\boldsymbol{\theta} ; \quad (1.1.93)$$

gdje je $\mathbf{N}(x)$ poznata pod imenom *funkcija oblika* a dana je kao:

$$\mathbf{N}(x) = \left[\left(1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \right) \quad x \left(1 - 2\xi + \xi^2 \right) \quad \left(3\xi^2 - 2\xi^3 \right) \quad x \left(\xi - \xi^2 \right) \right] ; \quad (1.1.94)$$

$$\text{uz } \xi = \frac{x}{L}.$$

Čvorno opterećenje koje se veže s kutom uvijanja θ_x je naravno moment uvijanja M_x . Čvorno opterećenje koje odgovara relativnom kutu uvijanja $\theta_{x,x}$ u nekoj točki bi bilo opterećenje koje bi uzrokovalo ovakav tip pomaka, tj. promjenu relativnog kuta uvijanja bez utjecaja na kut uvijanja u toj točki. Kao što je prikazano na slici to opterećenje je par poprečnih momenata uvijanja koji se nazivaju "bimoment", M_{ω} . Također se još naziva i "moment vitoperenja" jer vitoperi presjek iz vlastite ravnine. Stoga vektor čvornih sila glasi:

$$\mathbf{f}_{\theta} = \begin{Bmatrix} M_{xi} \\ M_{\omega i} \\ M_{xj} \\ M_{\omega j} \end{Bmatrix} ; \quad (1.1.95)$$

Diferencijalna jednadžba za uvijanje uključuje prvu i treću derivaciju pomaka θ_x :

$$\theta_{x,x}(x) = \mathbf{B}_1\boldsymbol{\theta} ; \quad (1.1.96)$$

$$\text{uz } \mathbf{B}_1 = \left[-\frac{6}{L}(\xi - \xi^2) \quad 1 - 4\xi + 3\xi^2 \quad \frac{6}{L}(\xi - \xi^2) \quad -2\xi + 3\xi^2 \right]$$

$$\theta_{x,xxx}(x) = \mathbf{B}_2\boldsymbol{\theta} ; \quad (1.1.97)$$

$$\text{uz } \mathbf{B}_2 = \frac{6}{L^2} \begin{bmatrix} \frac{2}{L} & 1 & -\frac{2}{L} & 1 \end{bmatrix}.$$

Diferencijalna jednačba torzije prikazuje vezu između unutarnjih sila i deformacija. Prikladno je diferencijalne jednačbe podijeliti na dva dijela koji odgovaraju St. Venant-ovoj krutosti i krutosti na vitoperenje:

$$M_t(x) = M_x(x) + M_\omega(x); \quad (1.1.98)$$

$$\text{gdje je } M_x(x) = GJ\theta_{x,x}(x) \text{ i } M_\omega(x) = -EI_\omega\theta_{x,xxx}(x).$$

Unutarnji momenti uvijanja se mogu izraziti u ovisnosti o čvornim pomacima:

$$M_x(x) = GJ\mathbf{B}_1\boldsymbol{\theta}; \quad M_\omega(x) = -EI_\omega\mathbf{B}_2\boldsymbol{\theta}; \quad (1.1.99)$$

Slijedeći korak je određivanje matrice krutosti elementa tj. povezivanje čvornih sila \mathbf{f}_θ i čvornih pomaka $\boldsymbol{\theta}$.

$$\mathbf{f}_\theta = \mathbf{k}_\theta \cdot \boldsymbol{\theta}; \quad (1.1.100)$$

\mathbf{k}_θ se dobiva izjednačavanjem rada unutrašnjih sila u ovisnosti o čvornim pomacima $\boldsymbol{\theta}$, te izjednačavanjem s vanjskim radom čvornih sila \mathbf{f}_θ tijekom virtualnog pomaka $\boldsymbol{\theta}^*$ elementa. U rezultirajućoj jednačbi \mathbf{k}_θ je matrica koeficijenata koja se množi sa $\boldsymbol{\theta}$. Rad unutarnjih sila dan je jednačbom:

$$W_{\text{int}} = \int_0^L [\theta_{x,x} M_x(x) + \theta_{x,x} M_\omega(x)] dx = \int_0^L [\theta_{x,x} GJ\theta_{x,x} + \theta_{x,x} (-EI_\omega)\theta_{x,xxx}] dx; \quad (1.1.101)$$

Ako se uvede virtualni čvorni pomak $\boldsymbol{\theta}^*$, tada je pripadajuća vrijednost $\theta_{x,x}(x) = (\mathbf{B}_1\boldsymbol{\theta}^*)^T = \boldsymbol{\theta}^{*T}\mathbf{B}_1^T$. Stvarni unutarnji momenti uvijanja mogu ostati izraženi preko stvarnih pomaka $\theta_x(x)$ i $\theta_{x,x}(x)$, tako da je:

$$W_{\text{int}} = \int_0^L [\boldsymbol{\theta}^{*T}\mathbf{B}_1^T GJ\theta_{x,x} + \boldsymbol{\theta}^{*T}\mathbf{B}_1^T (-EI_\omega)\theta_{x,xxx}] dx; \quad (1.1.102)$$

Opći pomaci $\theta_x(x)$ i $\theta_{x,x}(x)$, se mogu prikazati u ovisnosti o čvornim pomacima. Rezultat je:

$$W_{\text{int}} = \int_0^L [\boldsymbol{\theta}^{*T}\mathbf{B}_1^T GJ\mathbf{B}_1\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\theta}^{*T}\mathbf{B}_1^T (-EI_\omega)\mathbf{B}_2\boldsymbol{\theta}] dx; \quad (1.1.103)$$

Vanjski rad čvornih sila je:

$$W_{\text{ext}} = \boldsymbol{\theta}^{*T}\mathbf{f}_\theta; \quad (1.1.104)$$

Izjednačavanjem prethodnih jednačbi i postavljanjem jediničnog virtualnog pomaka dobiva se:

$$\mathbf{f}_\theta = \left[\int_0^L \mathbf{B}_1^T GJ\mathbf{B}_1 dx \right] \boldsymbol{\theta} + \left[\int_0^L \mathbf{B}_1^T (-EI_\omega)\mathbf{B}_2 dx \right] \boldsymbol{\theta}; \quad (1.1.105)$$

Izrazi u uglatim zagradama su dva dijela matrice krutosti za torziju koji odgovaraju St. Venant-ovoj krutosti i krutosti za vitoperenje:

$$\mathbf{k}_\theta = \mathbf{k}_J + \mathbf{k}_\omega; \quad (1.1.106)$$

Matrica krutosti za St. Venant- ovo uvijanje glasi:

$$\mathbf{k}_J = \frac{GJ}{L} \begin{bmatrix} \frac{6}{5} & & & & & & \text{Symm} \\ & \frac{L}{10} & \frac{2L^2}{15} & & & & \\ & \frac{6}{5} & \frac{L}{10} & \frac{6}{5} & & & \\ & & & & \frac{L}{10} & \frac{2L^2}{30} & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{bmatrix}; \quad (1.1.107)$$

Matrica krutosti za vitoperenje:

$$\mathbf{k}_\omega = \frac{EI_\omega}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & & & & & & \text{Symm} \\ & 6L & 4L^2 & & & & \\ & -12 & -6L & 12 & & & \\ & & & & & & \\ & 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 & & \end{bmatrix}; \quad (1.1.108)$$

Konačni rezultat je:

$$\begin{Bmatrix} M_{xi} \\ M_{oi} \\ M_{xj} \\ M_{oj} \end{Bmatrix} = \frac{GJ}{L} \begin{bmatrix} \frac{6}{5} & & & & & & \text{Symm} \\ & \frac{L}{10} & \frac{2L^2}{15} & & & & \\ & \frac{6}{5} & \frac{L}{10} & \frac{6}{5} & & & \\ & & & & \frac{L}{10} & \frac{2L^2}{30} & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{bmatrix} + \frac{EI_\omega}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & & & & & & \text{Symm} \\ & 6L & 4L^2 & & & & \\ & -12 & -6L & 12 & & & \\ & & & & & & \\ & 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 & & \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \theta_{xi} \\ \theta_{xi,x} \\ \theta_{xj} \\ \theta_{xj,x} \end{Bmatrix}; \quad (1.1.109)$$

Ukupna matrica krutosti za gredni konačni element. Daljnji zadatak je složiti matricu krutosti grednog elementa, koji bi bio pogodan za računanje naprežanja na krilu ili trupu zrakoplova, kombinacijom matrica krutosti za štapni konačni element, konačni element za savijanje u xy ravnini, konačni element za savijanje u xz ravnini i konačni element za torziju.

Kao glavni koordinatni sustav elementa odabran je koordinatni sustav kroz težište elementa i to u smjeru glavnih osi inercije jer su sva svojstva grede koja se tiču savijanja (momenti inercije, momenti savijanja itd.) definirani u odnosu na te osi. No ipak čvorovi elementa nisu smješteni u težište, jer su zakreti kod uvijanja θ definirani u odnosu na centar smika. Zbog toga je neophodno postaviti čvorove elementa na tu os. Pošto se poprečni presjek ne deformira lateralni zakret uslijed savijanja ima isti iznos na cijelom presjeku, tako da premještanje čvora u centar smika ne utječe na pomake uslijed savijanja.

Kako bi se izbjegla dvoznačnost čvorni pomaci uslijed savijanja u xy ravnini su označeni sa \mathbf{v}_s , a u ravnini xz \mathbf{w}_s . To je važno napomenuti jer u uzdužnom smjeru čvorni pomaci nisu pomaci centra smika. Umjesto toga, kako bi se zadovoljila uzdužna ravnoteža, uzdužni čvorni pomaci moraju biti definirani kao prosječni pomaci poprečnog presjeka, što nije isto što i uzdužni pomak centra smika. Uzdužni čvorni pomaci su označeni sa \mathbf{u} .

S ovakvim izborom koordinata elemenata i čvornih pomaka nema sukoba između četiri načina odziva: uzdužnog, savijanja u xy ravnini, savijanja u xz ravnini i uvijanja. Stoga se opća

matrica krutosti u koordinatama elementa može dobiti jednostavno grupiranjem četiri matrice krutosti kako slijedi:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{f}_u \\ \mathbf{f}_v \\ \mathbf{f}_w \\ \mathbf{f}_\theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{k}_v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{k}_w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{k}_\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v}_T \\ \mathbf{w}_T \\ \boldsymbol{\theta} \end{Bmatrix} \text{ ili } \mathbf{f} = \mathbf{k}\boldsymbol{\delta} ; \quad (1.1.110)$$

Kako poprečni presjek krila ili trupa zrakoplova nije prizmatičan, centar smika svakog elementa može biti na drugoj lokaciji. Stoga je potrebno definirati globalni koordinatni sustav tako da se susjedni elementi mogu povezati. Nakon toga potrebno je transformirati matricu krutosti iz koordinatnog sustava elementa u globalni koordinatni sustav. Kako su matrice krutosti za savijanje definirane za koordinatne osi kroz glavne osi tromosti, potrebno je koordinatni sustav još i zarotirati za kut φ_0 , tj. za kut između glavnih osi tromosti i osi globalnog koordinatnog sustava.

Radi jednostavnosti prvo će se izvesti matrica transformacije uslijed translacije lokalnog koordinatnog sustava elementa u globalni koordinatni sustav \mathbf{T}_T , a nakon toga matrica transformacije uslijed rotacije lokalnog koordinatnog sustava elementa u globalni koordinatni sustav \mathbf{T}_R . Ukupna matrica transformacije će biti jednaka umnošku matrica \mathbf{T}_T i \mathbf{T}_R . Veza između globalnih i lokalnih pomaka je slijedeća:

$$U(x) = u(x) - y_{CG}v'_T(x) + z_{CG}w'_T(x) + \omega_n(y, z)\theta'(x) ;$$

$$V(x) = v_T(x) - z_{CS}\theta(x) ;$$

$$W(x) = w_T(x) + y_{CS}\theta(x) ;$$

$$V'(x) = v'_T(x) - z_{CS}\theta'(x) ;$$

$$W'(x) = w'_T(x) + y_{CS}\theta'(x) ;$$

gdje su: y_{CG} y koordinata težišta u globalnom sustavu,

z_{CG} z koordinata težišta u globalnom sustavu,

y_{CS} y koordinata centra smika u globalnom sustavu,

z_{CS} z koordinata centra smika u globalnom sustavu,

ω_n normalizirana funkcija vitoperenja presjeka.

Ova transformacija ne utječe na rotacione stupnjeve slobode uslijed uvijanja $\theta(x)$ i $\theta'(x)$, tako da novi simbol za pomak u globalnom sustavu nije potreban. Za transformaciju lokalne matrice krutosti \mathbf{k} u globalnu matricu krutosti \mathbf{K} potrebno je invertirati prethodne jednadžbe, što daje:

$$u(x) = U(x) + y_{CG}v'_T(x) - z_{CG}w'_T(x) - \omega_n(y, z)\theta'(x) ;$$

$$v_T(x) = V(x) + z_{CS}\theta(x) ;$$

$$w_T(x) = W(x) - y_{CS}\theta(x) ;$$

$$v'_T(x) = V'(x) + z_{CS}\theta'(x) ;$$

$$w'_T(x) = W'(x) - y_{CS}\theta'(x) ;$$

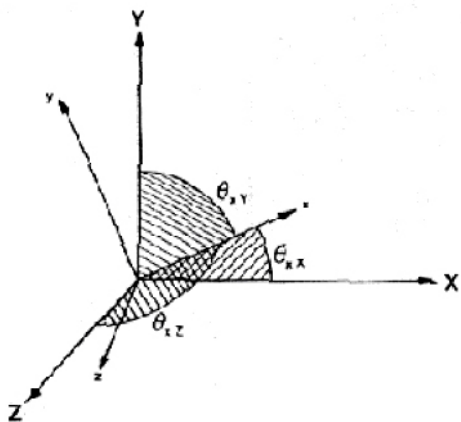
ili zapisano u matricnom obliku

$$\delta_L = \begin{Bmatrix} u \\ v_T \\ w_T \\ \theta \\ w'_T \\ v'_T \\ \theta' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \omega_0 & z_{CG} & -y_{CG} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & z_{CS} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -y_{CS} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -y_{CS} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & z_{CS} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \\ \theta \\ W' \\ V' \\ \theta' \end{Bmatrix} = \mathbf{t}_T \delta_G ; \quad (1.1.111)$$

gdje je:

$$\mathbf{t}_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \omega_0 & z_{CG} & -y_{CG} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & z_{CS} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -y_{CS} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -y_{CS} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & z_{CS} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad (1.1.112)$$

matrica transformacije za translaciju koordinatnih osi.



Slika 1.1.3

Transformacija pri rotaciji koordinatnih osi.

Općenito matrica transformacije uslijed rotacije iznosi:

$$\mathbf{t}_R = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} ; \quad (1.1.113)$$

s tim da Slika 1.1.3 prikazuje da je:

$$\lambda = \begin{bmatrix} \cos \varphi_{xX} & \cos \varphi_{xY} & \cos \varphi_{xZ} \\ \cos \varphi_{yX} & \cos \varphi_{yY} & \cos \varphi_{yZ} \\ \cos \varphi_{zX} & \cos \varphi_{zY} & \cos \varphi_{zZ} \end{bmatrix}; \quad (1.1.114)$$

U ovom slučaju postoji samo rotacija oko osi x, te se matrica λ svodi samo na pripadajuće članove:

$$\lambda = \begin{bmatrix} \cos \varphi_{yY} & \cos \varphi_{yZ} \\ \cos \varphi_{zY} & \cos \varphi_{zZ} \end{bmatrix}; \quad (1.1.115)$$

Matrica λ se može dalje raspisati

$$\lambda = \begin{bmatrix} \cos \varphi_{yY} & \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_{yY}\right) \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi_{zZ}\right) & \cos \varphi_{zZ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_0 & \sin \varphi_0 \\ -\sin \varphi_0 & \cos \varphi_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & \mu \\ -\mu & \lambda \end{bmatrix}; \quad (1.1.116)$$

Pošto su uzdužni pomaci i pomaci uslijed uvijanja neovisni o rotaciji pripadajuća matrica transformacije je zapravo jedinična matrica. Savijanje u xy ravnini i savijanje u xz ravnini su međusobno povezani matricom λ , te matrica transformacije uslijed rotacije glasi:

$$\mathbf{t}_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & -\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (1.1.117)$$

Ukupna matrica transformacije sada iznosi:

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}_T \mathbf{t}_R; \quad (1.1.118)$$

ili raspisano:

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \omega_0 & z_{CG}\lambda + y_{CG}\mu & z_{CG}\mu - y_{CG}\lambda & 0 \\ 0 & \lambda & \mu & z_{CS} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu & \lambda & -y_{CS} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & -\mu & -y_{CS} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & \lambda & z_{CS} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (1.1.119)$$

Za oba čvora konačnog elementa i i j , matrica transformacije glasi $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{t} & 0 \\ 0 & \mathbf{t} \end{bmatrix}$, odnosno:

$$\delta_L = \mathbf{T}\delta_G ; \quad (1.1.120)$$

Iz uvjeta da je energija elementa invarijantna u odnosu na koordinatni sustav:

$$U^e = \frac{1}{2} \delta_L^T \mathbf{k}_L^e \delta_L = \frac{1}{2} \delta_G^T \mathbf{T}^T \mathbf{k}_L^e \mathbf{T} \delta_G = \frac{1}{2} \delta_G^T \mathbf{k}_G^e \delta_G ; \quad (1.1.121)$$

gdje je $\mathbf{k}_G^e = \mathbf{T}^T \mathbf{k}_L^e \mathbf{T}$.

1.1.1.7 Proračun krutosti na torziju i krutosti na vitoperenje složene tankostijene konstrukcije

Faktor krutosti na torziju elemenata koji čine dio otvorenih kontura $e_o = 1 \dots n_o$ računa se pomoću izraza:

$$GI_{T_o} = \sum_{e_o} G^e \cdot \frac{l^e \cdot t^e{}^3}{3} \cdot RS^e ; \quad (1.1.122)$$

Faktor krutosti na torziju elemenata koji su dijelovi zatvorenih kontura n_c računa se preko:

$$GI_{T_c} = \sum_{e_c} G^e \cdot l^e \cdot t^e \cdot \left(\frac{\bar{u}_j - \bar{u}_i}{l^e} + d_T^e \right)^2 \cdot RS^e ; \quad (1.1.123)$$

Ukupni faktor krutosti na torziju elementa računa se pomoću izraza:

$$GI_T = GI_{T_o} + GI_{T_c} ; \quad (1.1.124)$$

Faktori krutosti na vitoperenje računaju se pomoću izraza:

$$EI_W = \sum_e \left[E^e \cdot t^e \int_0^{l^e} \bar{u}^2 ds \right] \cdot RN^e = \sum_e \left[E^e \cdot t^e \int_0^{l^e} \bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{N} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{u}} ds \right] \cdot RN^e ;$$

$$EI_W = \sum_e E^e \cdot \frac{l^e \cdot t^e}{3} (\bar{u}_i^2 + \bar{u}_i \cdot \bar{u}_j + \bar{u}_j^2) \cdot RN^e ; \quad (1.1.125)$$

1.1.1.8 Proračun normalnih i sekundarnih smičnih naprezanja uslijed spriječenog vitoperenja trupa broda

Spriječeno vitoperenje tankostijenog nosača rezultirati će pojavom normalnih naprezanja u nosaču te pojavom sekundarnih smičnih naprezanja koja će uravnotežiti nejednoliku raspodjelu normalnih naprezanja. Važno je naglasiti da će ovaj dodatni mehanizam utjecati na ukupnu unutrašnju energiju i rad vanjskih sila na nosaču, te će rješenje trebati iterativno rješavati sa slijedećim koracima:

1. $\delta II_{\theta_x} = 0$ što kao rezultat daje distribuciju kutova zaokreta duž nosača,
2. $\delta II_u = 0$ što kao rezultat daje raspodjelu vitoperenja po presjeku,
3. Proračun primarnih smičnih naprezanja te normalna naprezanja uzrokovanih spriječenim vitoperenjem presjeka,
4. Proračun veličine sekundarnih smičnih naprezanja i pripadajućeg vitoperenja,

5. Korekcija izraza za Π s obzirom na izračunate veličine iz 3 i 4 koraka te povratak na korak 1. Proračun se odvija na sljedeći način:

Proračun normalnih naprezanja uzrokovanih spriječenim vitoperenjem presjeka:

$$\sigma_{xw} = E \cdot \varepsilon_x = E \frac{\partial u(x,s)}{\partial x} = E \cdot \frac{\partial}{\partial x} (\bar{u}(s) \cdot \theta_{x,x}(x)) = E \cdot \bar{u}(s) \cdot \theta_{x,xx} ; \quad (1.1.126)$$

ili za svaki pojedini čvor i na elementu e :

$$\sigma_{xw}^i = E^e \cdot \theta_{x,xx} \cdot \bar{u}_i \cdot RN^e ; \quad (1.1.127)$$

Totalna potencijalna energija presjeka opterećenog aksijalnim opterećenjem p_x izražene kao suma doprinosa n elemenata:

$$\Pi = \sum_e \left(\frac{1}{2} \int_V \sigma^T \varepsilon dV + \int_{S_1^e} p_x(x,s) \cdot u_2(x,s) dS + \int_{S_2^e} p_x(x+\Delta x,s) \cdot u_2(x+\Delta x,s) dS \right) ; \quad (1.1.128)$$

gdje je:

$u(x,s)$ polje pomaka strukture,

$u_2(x,s)$ korekcijsko polje pomaka koje sadrži nepoznate pomake za spriječeno vitoperenje,

S_1^e, S_2^e Slika 1.1.1.

ε_2, σ_2 polja relativnih deformacija i naprezanja:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_2 = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_2}{\partial x} \\ \frac{\partial u_2}{\partial s} \end{Bmatrix} ; \quad \boldsymbol{\sigma}_2 = \begin{Bmatrix} E \frac{\partial u_2}{\partial x} \\ G \frac{\partial u_2}{\partial s} \end{Bmatrix} ; \quad (1.1.129)$$

p_x aksijalno opterećenje:

$$p_x(x+\Delta x,s) = p_x(x,s) + \frac{\partial p_x}{\partial x} \Delta x ; \quad (1.1.130)$$

Ukoliko se zanemari promjena u_2 na elementu duljine Δx kod proračuna potencijalne energije:

$$\Pi = \sum_e \Pi^e = \sum_e \left[\frac{1}{2} \int_{V^e} G^e \left(\frac{\partial u_2}{\partial s} \right)^2 dV - \Delta x \int_{S_2^e} \frac{\partial p_x}{\partial x} u_2(x,s) dS \right] ; \quad (1.1.131)$$

Polje pomaka $u_2(x,s)$ po elementu za lineranu interpolacijsku funkciju glasi:

$$u_2(x,s) = u_2(s)_{x=x_0} = \left\{ 1 - \frac{s}{l^e} \quad \frac{s}{l^e} \right\} \begin{Bmatrix} u_{2i} \\ u_{2j} \end{Bmatrix} = \mathbf{N}^T \mathbf{u}_2^e ; \quad (1.1.132)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial s} = \frac{1}{l^e} \begin{Bmatrix} -1 & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{2i} \\ u_{2j} \end{Bmatrix} = \mathbf{B}^T \mathbf{u}_2^e ; \quad (1.1.133)$$

gdje je:

$u_2(s)_{x=x_0}$ polje pomaka u_2 na presjeku x_0 ,

u_{2i}, u_{2j} pomaci čvorova i, j na koje je vezan element e .

Opterećenje p_x potječe od spriječenog vitoperenja presjeka

$$p_x(x, s) = -\sigma_{xw}(x, s) = -E^e \cdot \bar{u}(s) \cdot \theta_{x,xx}(x) \cdot RN^e ; \quad (1.1.134)$$

$$\frac{\partial p_x}{\partial x} = -E^e \cdot \bar{u}(s) \cdot \frac{\partial}{\partial x} \theta_{x,xx} \cdot RN^e = -E^e \cdot \theta_{x,xxx} \cdot \mathbf{N}^T \cdot \bar{\mathbf{u}}^e \cdot RN^e ; \quad (1.1.135)$$

Totalna potencijalna energija elementa nakon uvrštavanja glasi:

$$\begin{aligned} \Pi^e &= \frac{1}{2} \Delta x \cdot \mathbf{u}_2^{eT} (t^e \cdot G^e \cdot RS^e \int_0^{l^e} \mathbf{B}\mathbf{B}^T ds) \cdot \mathbf{u}_2^e + \Delta x \cdot \mathbf{u}_2^{eT} (\theta_{x,xxx} \cdot t^e \cdot E^e \cdot RN^e \int_0^{l^e} \mathbf{N}\mathbf{N}^T ds) \cdot \bar{\mathbf{u}}^e \\ \Pi^e &= \frac{1}{2} \Delta x \cdot \mathbf{u}_2^{eT} \cdot \mathbf{K}^e \cdot \mathbf{u}_2^e + \Delta x \cdot \mathbf{u}_2^{eT} \cdot \mathbf{F}^e ; \end{aligned} \quad (1.1.136)$$

gdje je:

\mathbf{K}^e matrica krutosti elementa e :

$$\mathbf{K}^e = RS^e \cdot \frac{G^e \cdot t^e}{l^e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} ; \quad (1.1.137)$$

\mathbf{F}^e vektor opterećenja elementa e :

$$\mathbf{F}^e = \theta_{x,xxx} \cdot RN^e \cdot E^e \cdot t^e \cdot l^e \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{u}_j \end{Bmatrix} ; \quad (1.1.138)$$

Minimizacija totalne potencijalne energije s obzirom na nepoznato polje pomaka u_2 vodi do:

$$\delta \Pi_{u_2} = \delta u_2 \left(\sum_e \Pi^e \right) = 0 \rightarrow \Delta x (\mathbf{K} \mathbf{u}_2 + \mathbf{F}) = 0 \rightarrow \mathbf{K} \mathbf{u}_2 = -\mathbf{F} ; \quad (1.1.139)$$

gdje je:

\mathbf{K} globalna matrica krutosti,

\mathbf{u}_2 globalni vektor nepoznatih pomaka:

$$\mathbf{u}_2 = \theta_{x,xxx} \cdot \bar{\mathbf{u}}_2 ; \quad (1.1.140)$$

\mathbf{F} globalni vektor opterećenja:

$$\mathbf{F} = \theta_{x,xxx} \cdot \bar{\mathbf{F}} ; \quad (1.1.141)$$

Očito je da je dovoljno izvesti proračun $\mathbf{K}\bar{\mathbf{u}}_2 = \mathbf{F}$ iz čega se množenjem $\bar{\mathbf{u}}_2$ s $\theta_{x,xxx}$ dobivaju traženi pomaci. Sekundarna smična naprezanja, konstantna po elementu, određuju se prema izrazu:

$$\tau_{xs}^{ke(2)} = G^e \frac{\partial u_2}{\partial s} = G^e \frac{u_{2j} - u_{2i}}{l^e} = G^e \frac{\bar{u}_{2j} - \bar{u}_{2i}}{l^e} \theta_{x,xxx} ; \quad (1.1.142)$$

Ukoliko se želi nešto točnije izračunati distribucija naprezanja $\tau_{xs}^{e(2)}(s)$ duž elementa iz poznatog naprezanja $\tau_{xs}^{ke(2)}$ i smjera toka naprezanja provodi se slijedeći proračun:

$$\tau_{xs}^{e(2)}(s) = \tau_{xs}^{ke(2)} - \tau_2^{ke} + \tau_2(s) ; \quad (1.1.143)$$

gdje je:

$$\tau_2(s) = -\frac{E^e \cdot RN^e \cdot \theta_{x,xxx}}{t^e \cdot RS^e} \int_0^s \bar{u}(s_1) \cdot t^e ds_1 = -\frac{E^e \cdot RN^e \cdot \theta_{x,xxx}}{RS^e} \int_0^s \left(\bar{u}_i + \frac{\bar{u}_j - \bar{u}_i}{l^e} s_1 \right) ds_1 ;$$

$$\tau_2^{ke} = \frac{1}{l^e} \int_0^{l^e} \tau_2(s) ds = -\frac{E^e \cdot RN^e \cdot \theta_{x,xxx}}{RS^e \cdot l^e} \int_0^{l^e} \left(\bar{u}_i \cdot s + \frac{\bar{u}_j - \bar{u}_i}{2 \cdot l^e} s^2 \right) ds ; \quad (1.1.144)$$

$$\tau_2^{ke} = -\frac{E^e \cdot RN^e \cdot \theta_{x,xxx}}{3 \cdot RS^e} \left(\bar{u}_i + \frac{1}{2} \bar{u}_j \right) \cdot l^e ; \quad (1.1.145)$$

Nakon sređivanja dobije se izraz za sekundarno smično naprezanje uslijed spriječenog vitoperenja konstrukcije:

$$\tau_{xs}^{e(2)}(s) = \left[G^e \frac{\bar{u}_{2j} - \bar{u}_{2i}}{l^e} + \frac{E^e \cdot RN^e}{RS^e} \cdot \left(\left(\bar{u}_i + \frac{1}{2} \bar{u}_j \right) \cdot \frac{l^e}{3} - \bar{u}_i \cdot s - \frac{\bar{u}_j - \bar{u}_i}{2 \cdot l^e} s^2 \right) \right] \cdot \theta_{x,xxx} ; \quad (1.1.146)$$

1.1.2 PRORAČUN EKVIVALENTNIH NAPREZANJA ELEMENATA STRUKTURE

Najnepovoljnije normalno naprezanje uzrokovano savijanjem i torzijom npr. simetrične konstrukcije za element e između čvorova i i j :

$$\sigma_{\max}^e = \max(\sigma_x^i, \sigma_x^j) ; \quad (1.1.147)$$

čvor i :

$$\sigma_x^i = \left[RN^e \cdot \frac{M_Z}{EI_Z} E^e \cdot y_{ic} + (\sigma_x^{cT})_z^i \right] + \left[RN^e \cdot \frac{M_Y}{EI_Y} E^e \cdot z_{ic} + (\sigma_x^{cT})_y^i \right] + \sigma_{xw}^i ; \quad (1.1.148)$$

čvor j :

$$\sigma_x^j = \left[RN^e \cdot \frac{M_Z}{EI_Z} E^e \cdot y_{jc} + (\sigma_x^{cT})_z^j \right] + \left[RN^e \cdot \frac{M_Y}{EI_Y} E^e \cdot z_{jc} + (\sigma_x^{cT})_y^j \right] + \sigma_{xw}^j ; \quad (1.1.149)$$

gdje su vrijednosti prva dva člana gornjih izraza za normalna naprezanja poznata i odnose se na savijanje oko obje osi, dok je vrijednost trećeg člana dobivena uslijed spriječenog vitoperenja kod torzije. Srednje normalno naprezanje uzrokovano savijanjem i torzijom konstrukcije za element e između čvorova i i j :

$$\sigma_s^e = \frac{\sigma_x^i + \sigma_x^j}{2} ; \quad (1.1.150)$$

Najnepovoljnije smično naprezanje uzrokovano savijanjem i torzijom konstrukcije za element e , ovisno o tome da li se smična naprezanja smatraju konstantna po elementu τ_{\max}^{ke} ili se pretpostavlja točnija raspodjela po elementu τ_{\max}^e :

$$\tau_{\max}^{ke} = (\tau_{xs}^{ke})_y + (\tau_{xs}^{ke})_z + (\tau_{xs}^{ke})^{(1)} + (\tau_{xs}^{ke})^{(2)} ; \quad (1.1.151)$$

ili

$$\tau_{\max}^e = (\tau_{xs}^e)_y + (\tau_{xs}^e)_z + (\tau_{xs}^{ke})^{(1)} + (\tau_{xs}^{ke})^{(2)} ; \quad (1.1.152)$$

gdje su prva dva člana otprije poznata za slučaj konstantnih smičnih naprezanja duž elementa, ili za slučaj preciznijeg rasporeda. Treći član odnosi se na primarna smična naprezanja uslijed čiste torzije trupa i dobiva se ovisno o pripadnosti elementa zatvorenoj ili otvorenoj konturi. Četvrti član odnosi se na sekundarna smična naprezanja uslijed spriječenog vitoperenja konstrukcije i dobiva se za slučaj konstantnih smičnih naprezanja duž elementa ili za slučaj preciznije raspodjele. Ekvivalentna naprezanja računaju se prema kriteriju:

$$\sigma_{ekv}^e \sqrt{\sigma_{\max}^e{}^2 + 3 \cdot \tau_{\max}^{ke,e^2}} ; \quad (1.1.153)$$

Vektor naprezanja uzdužnog elementa strukture σ_L^e , prilagođen za provjeru podobnosti, glasi:

$$\mathbf{s}_L^{eT} = \left\{ \sigma_s^e \quad \tau_{\max}^{ke} \right\} ; \quad (1.1.154)$$

DRAFT