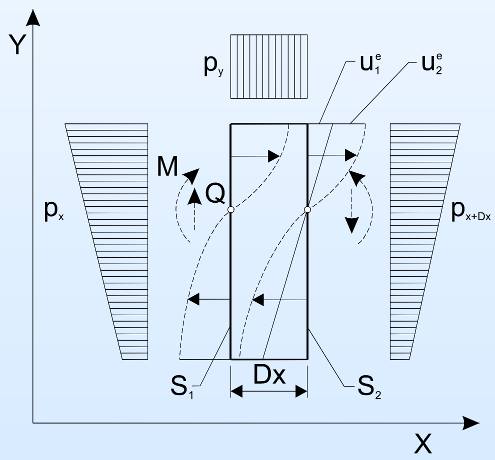
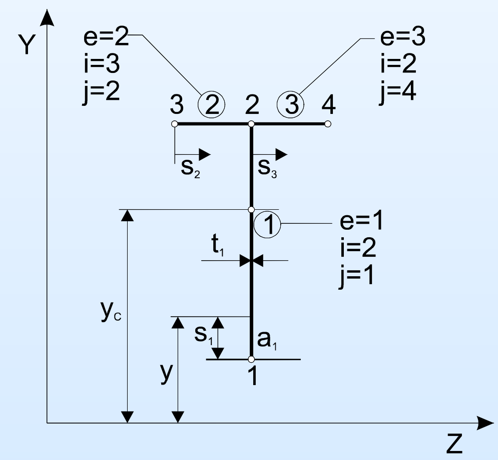
Čvrstoća i pouzdanost zrakoplovnih konstrukcija
Čvrstoća broda



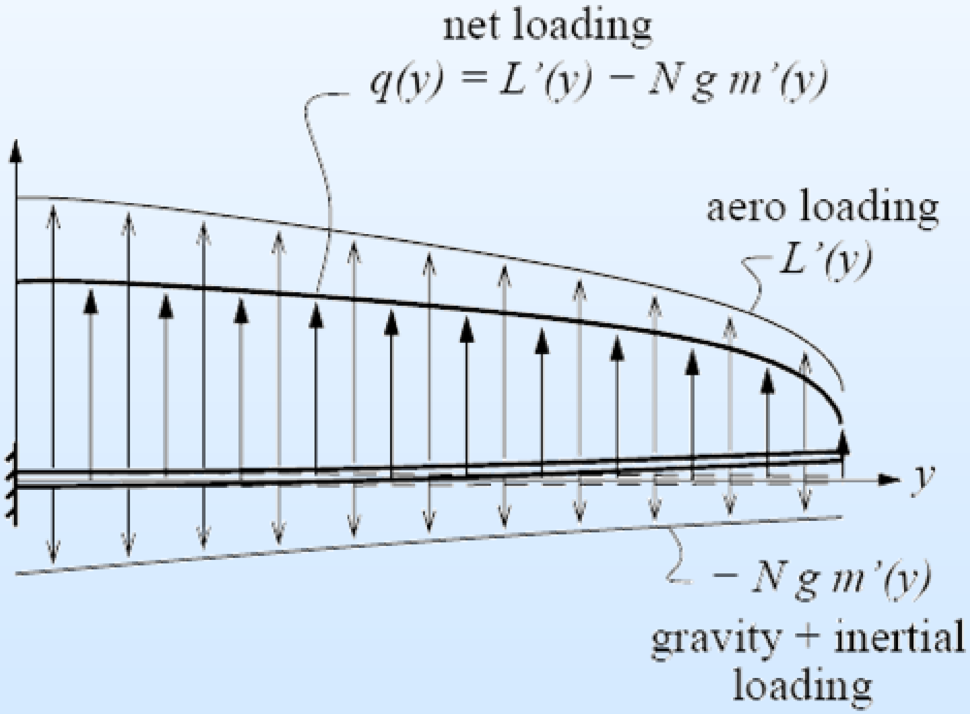


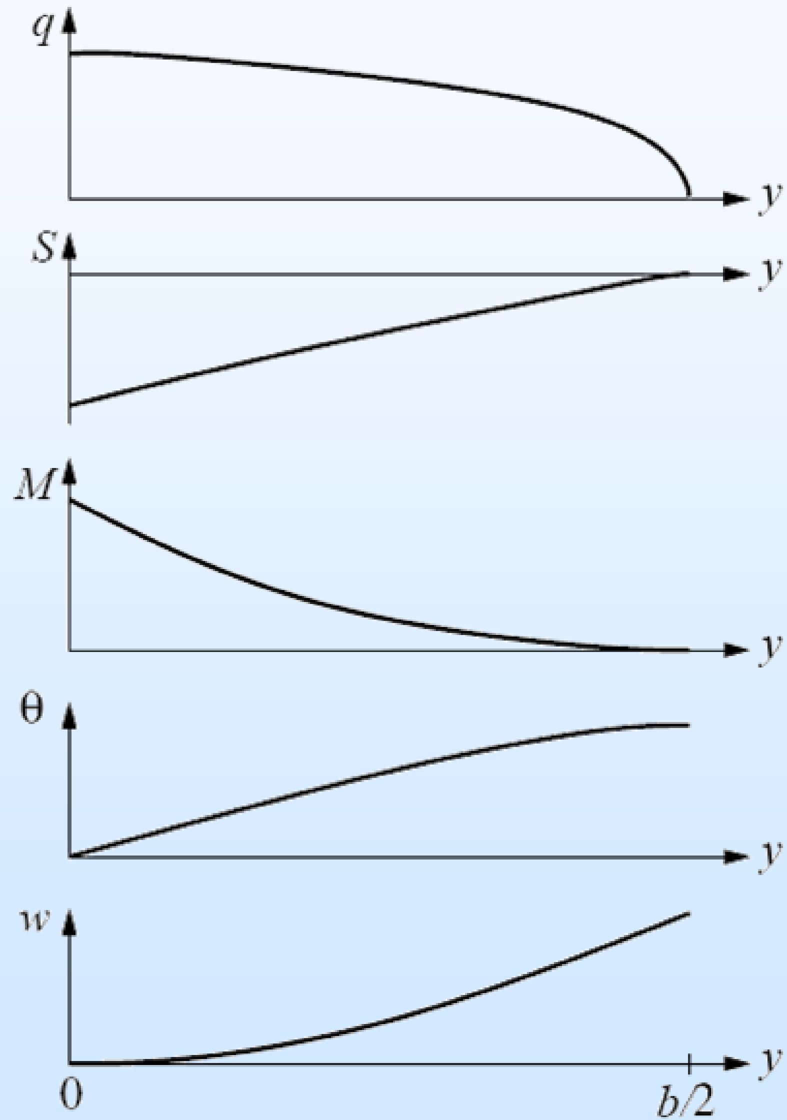
Proračun i utjecaj smičnih naprezanja uslijed savijanja

Sadržaj

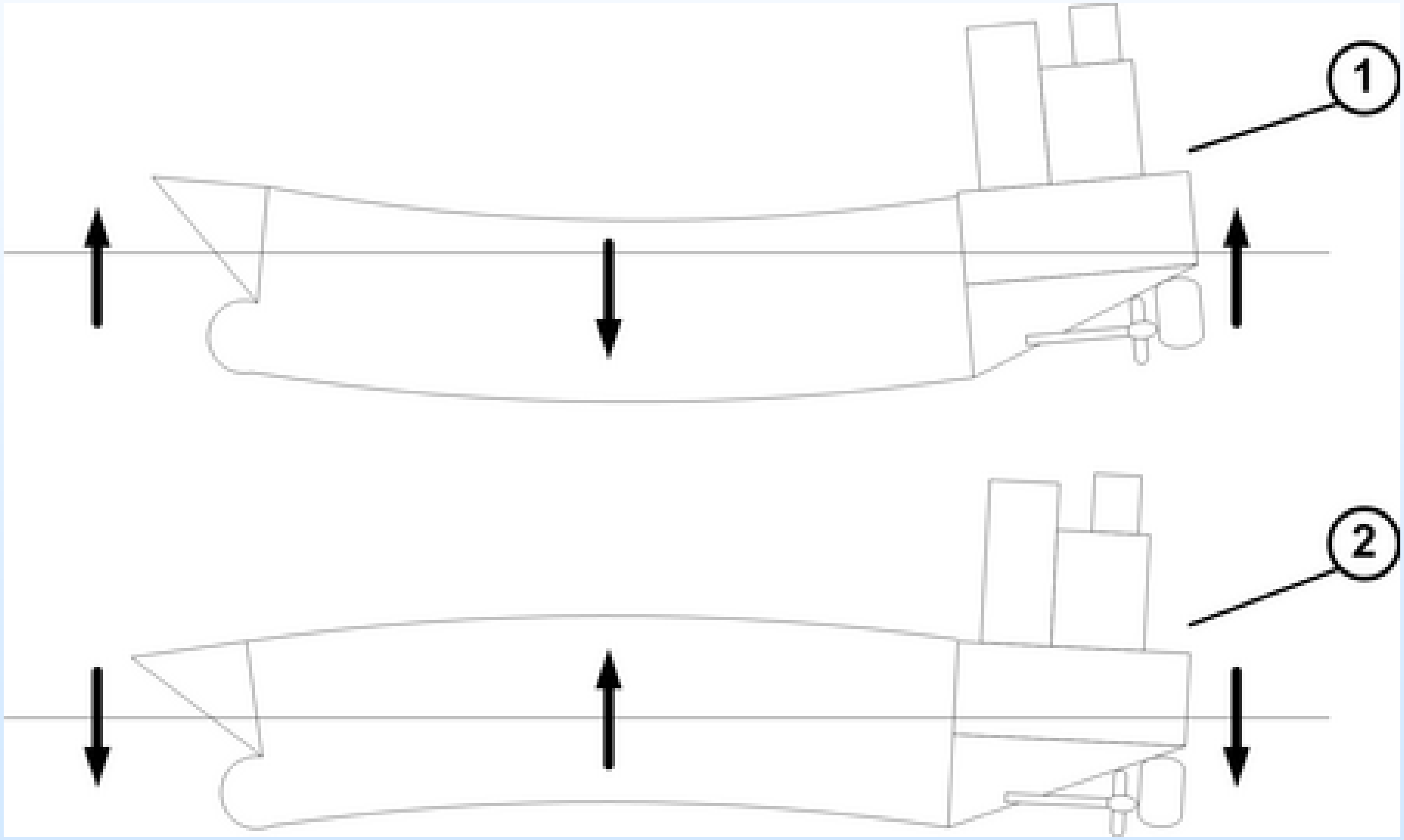
- Uvod
- Proračun normalnih naprezanja kod savijanja
- Proračun smičnih naprezanja kod savijanja
- Proračun smičnih naprezanja kod savijanja za složene presjeke metodom konačnih elemenata
- Proračun položaja centra smika (torzije)
- Korekcija normalnih naprezanja u presjeku uslijed utjecaja smičnih naprezanja (Lockwood-Taylor)
- Ponavljanje

Opterećenje krila zrakoplova

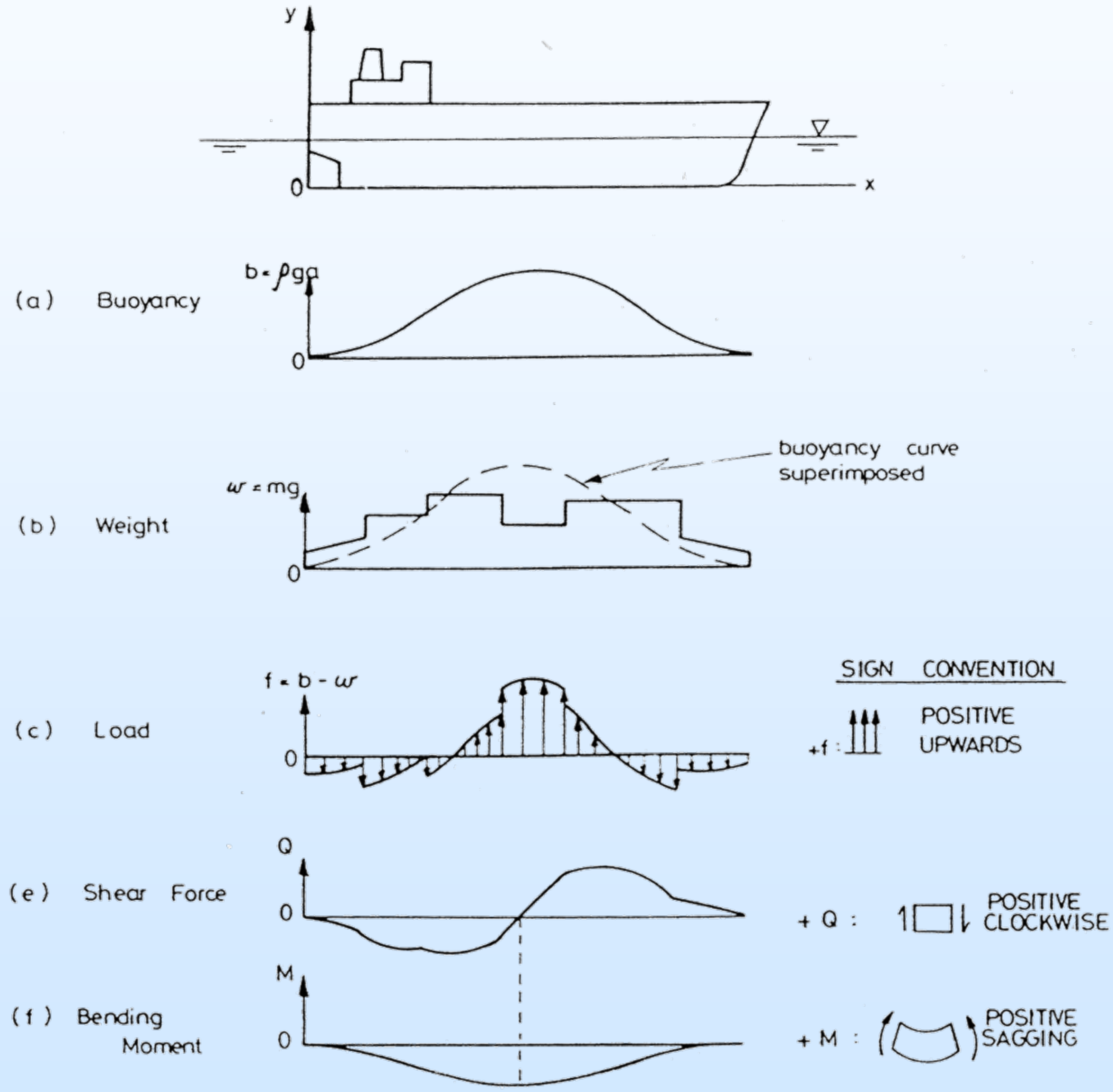


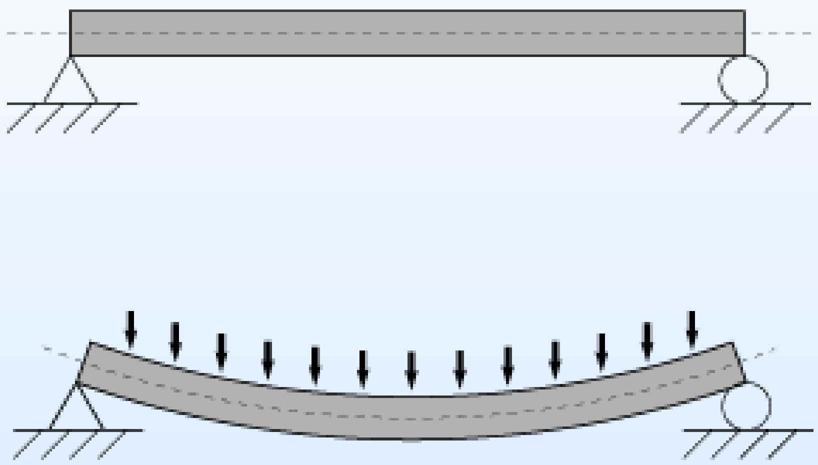


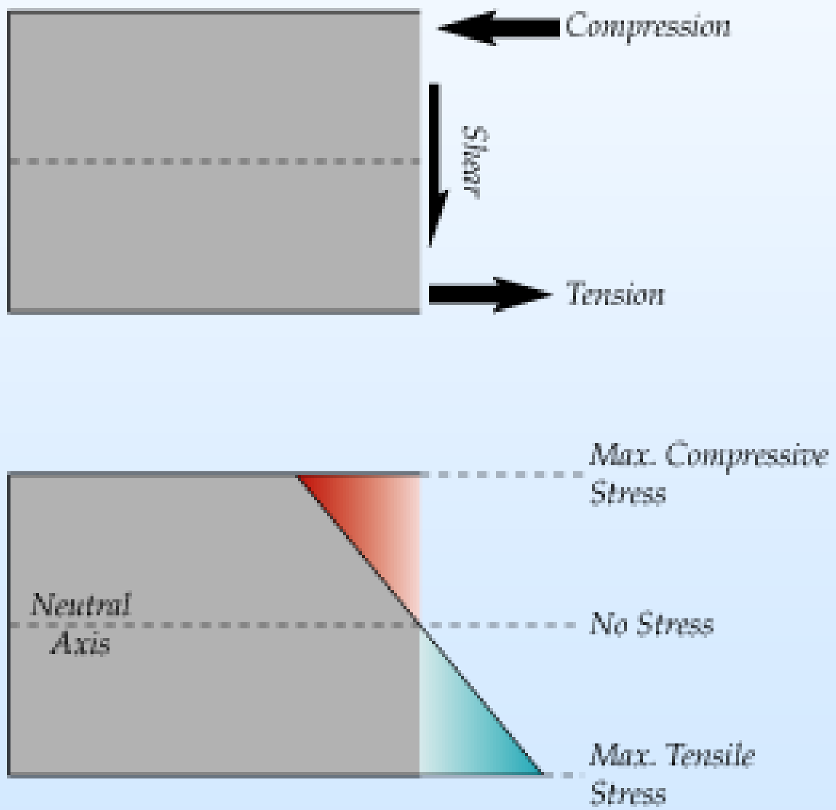
Progib (Sagg) / Pregib (Hogg)



Opterećenje broda






Compression
Shear
Tension
Max. Compressive
Stress
Neutral
Axis
No Stress
Max. Tensile
Stress

Proračun normalnih naprezanja kod savijanja

Normalna naprezanja vitkih štapova računaju se pod pretpostavkom čistog savijanja tj. zanemaruje se promjena momenta savijanja odnosno postojanje poprečne sile i smičnih naprezanja

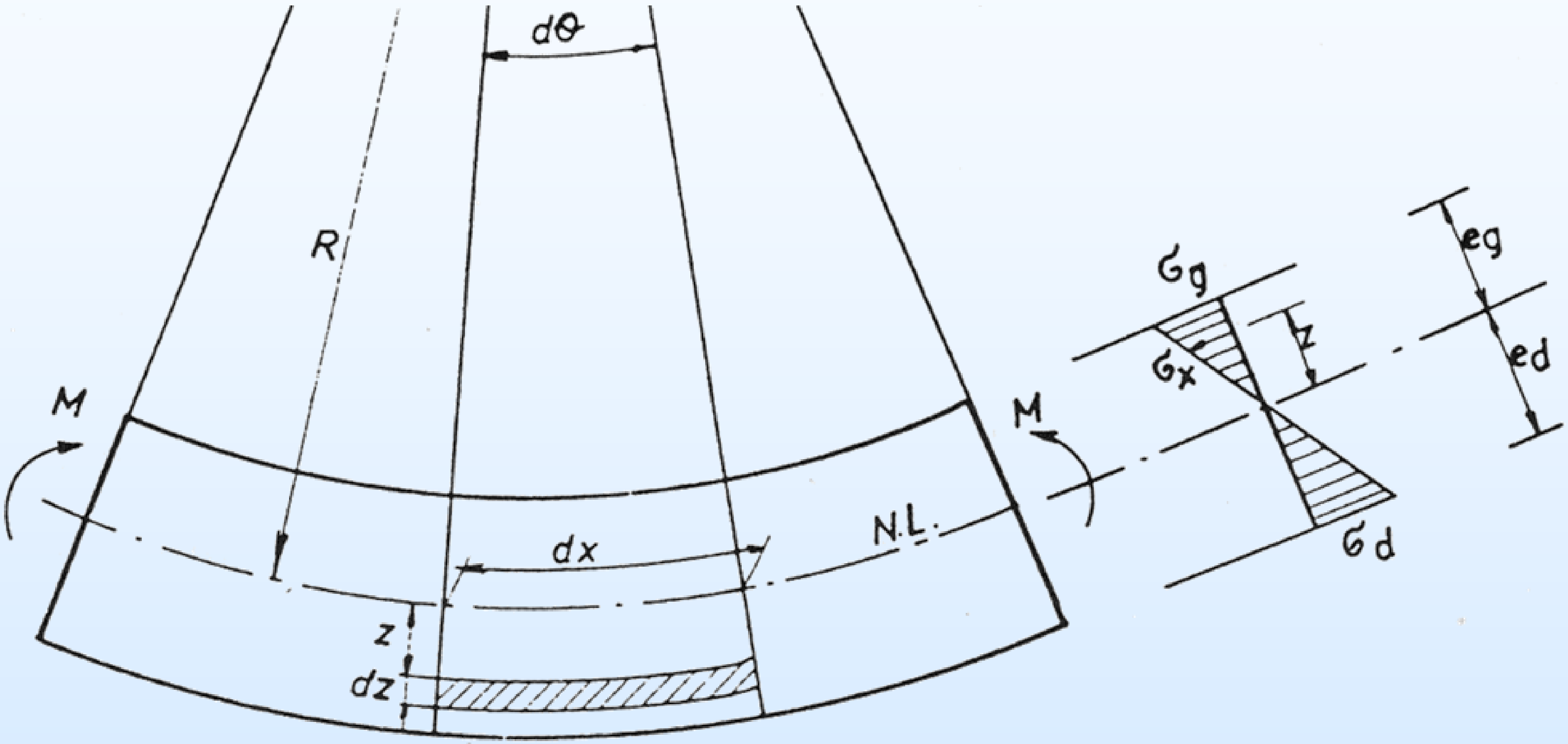
Bernulijeva hipoteza:

- Kod savijanja pojedini presjeci se ne deformiraju nego se samo zakreću,
- Iz toga proizlazi linearna distribucija deformacija
- U linearnom elastičnom području i linearna distribucija naprezanja

Budući da se donja vlakna nosaća rastežu a gornja tlače, mora postojati jedan sloj u kojem vlakna ne mjenjaju duljinu

To je tzv. neutralni sloj koji se na nacrtu projicira na neutralnu liniju

Proračun normalnih naprezanja kod savijanja



$$\varepsilon = \frac{(R+z)d\theta - Rd\theta}{Rd\theta} = \frac{z}{R}; \quad \sigma = E\varepsilon; \Longrightarrow \quad \sigma = E\frac{z}{R}$$

Proračun normalnih naprezanja kod savijanja

Iz uvijeta ravnoteže:

$$\sum F_x = 0; \qquad \int_A \sigma_x dA = 0$$

$$\sum M = 0; \qquad \int_A \sigma_x dA \cdot z = M$$

Neutralna linija prolazi kroz težište

Iz prvog uvijeta dobije se:

$$\int_A \frac{E}{R} z dA = 0; \Longrightarrow \frac{E}{R}\int_A z dA = 0; \Longrightarrow \int_A z dA = 0;$$

Iz drugog uvijeta dobije se:

$$\int_A \frac{E}{R} z^2 dA = M; \Longrightarrow \frac{E}{R}\int_A z^2 dA = M; \Longrightarrow \frac{E}{R} I_y = M$$

Moment inercije oko osi y

Proračun normalnih naprezanja kod savijanja

Budući da je

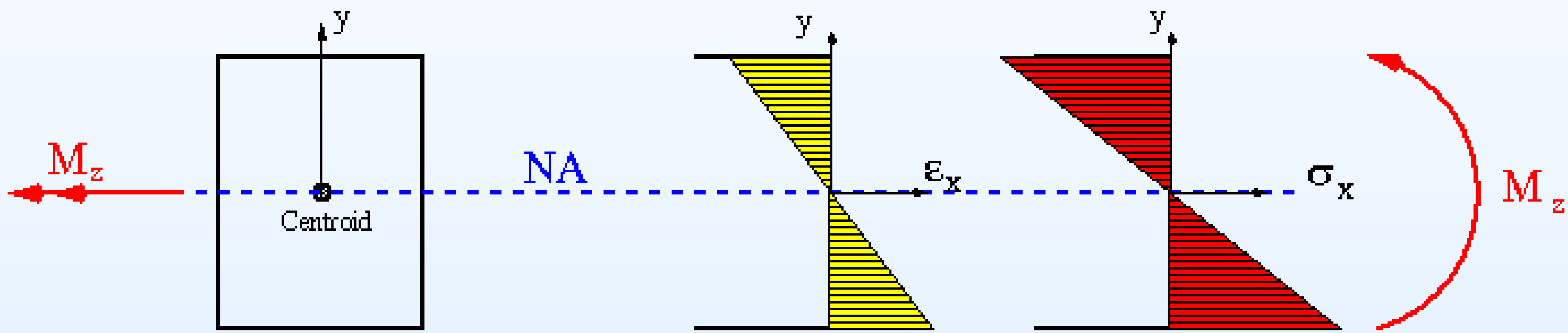
$$\frac{E}{R} = \frac{\sigma_x}{z}; \qquad \frac{E}{R} I_y = M \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\sigma_x = \frac{M}{I_y} z;}$$

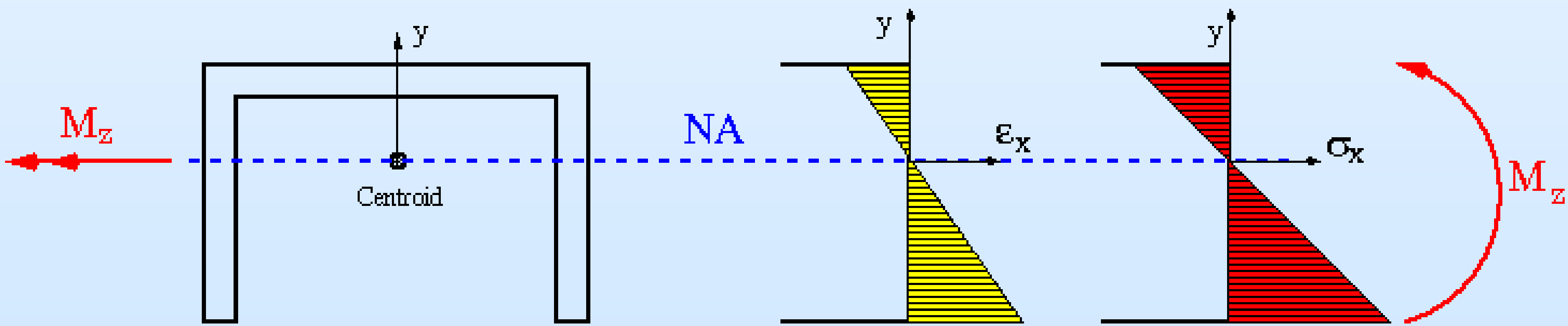
Maksimalna naprezanja nastaju u krajnjim vlaknima kad je *z*= e$_g$ ili *z*= e$_d$, pa ako označimo:

$$\frac{I_y}{e_g} = W_g; \quad \frac{I_y}{e_d} = W_d; \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\sigma_{xg} = \frac{M}{W_g}; \qquad \sigma_{xd} = \frac{M}{W_d};}$$

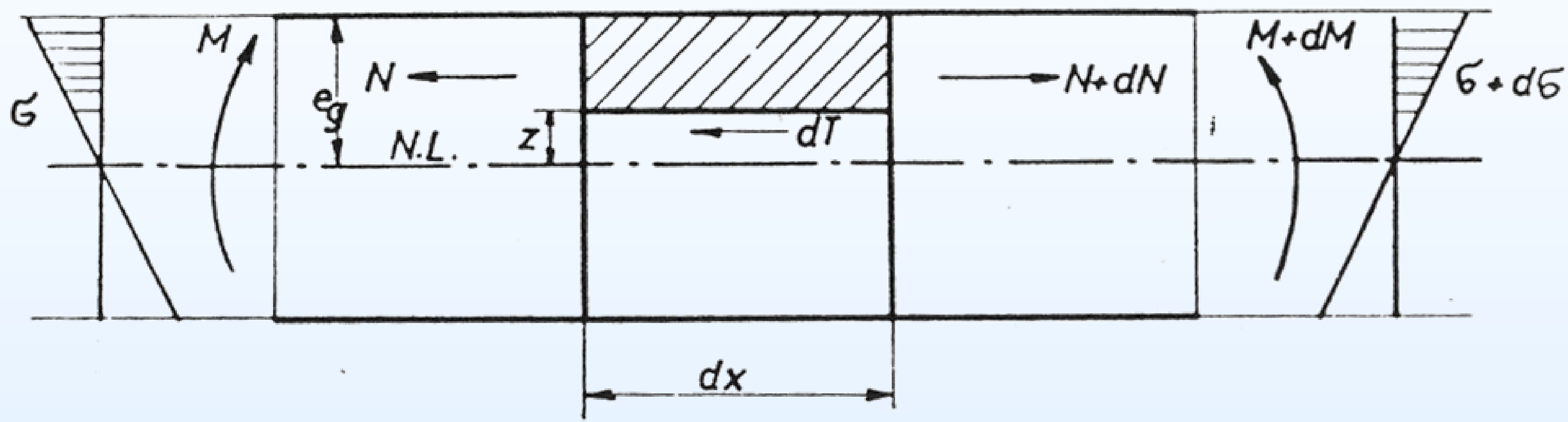
Moment otpora

Distribucija normalnih naprezanja kod savijanja





Proračun smičnih naprezanja kod savijanja



Ravnoteža promatranog sloja:

$$N + dN - N - dT = 0$$

$$N = \int_{z}^{e_g} \sigma dz \cdot t; \quad N + dN = \int_{z}^{e_g} (\sigma + d\sigma) dz \cdot t; \quad dT = \tau \cdot t dx$$

$$\int_{z}^{e_g} (\sigma + d\sigma) dz \cdot t - \int_{z}^{e_g} \sigma dz \cdot t = \tau \cdot t dx$$

Proračun smičnih naprezanja kod savijanja

Odnosno ako uvrstimo σ:

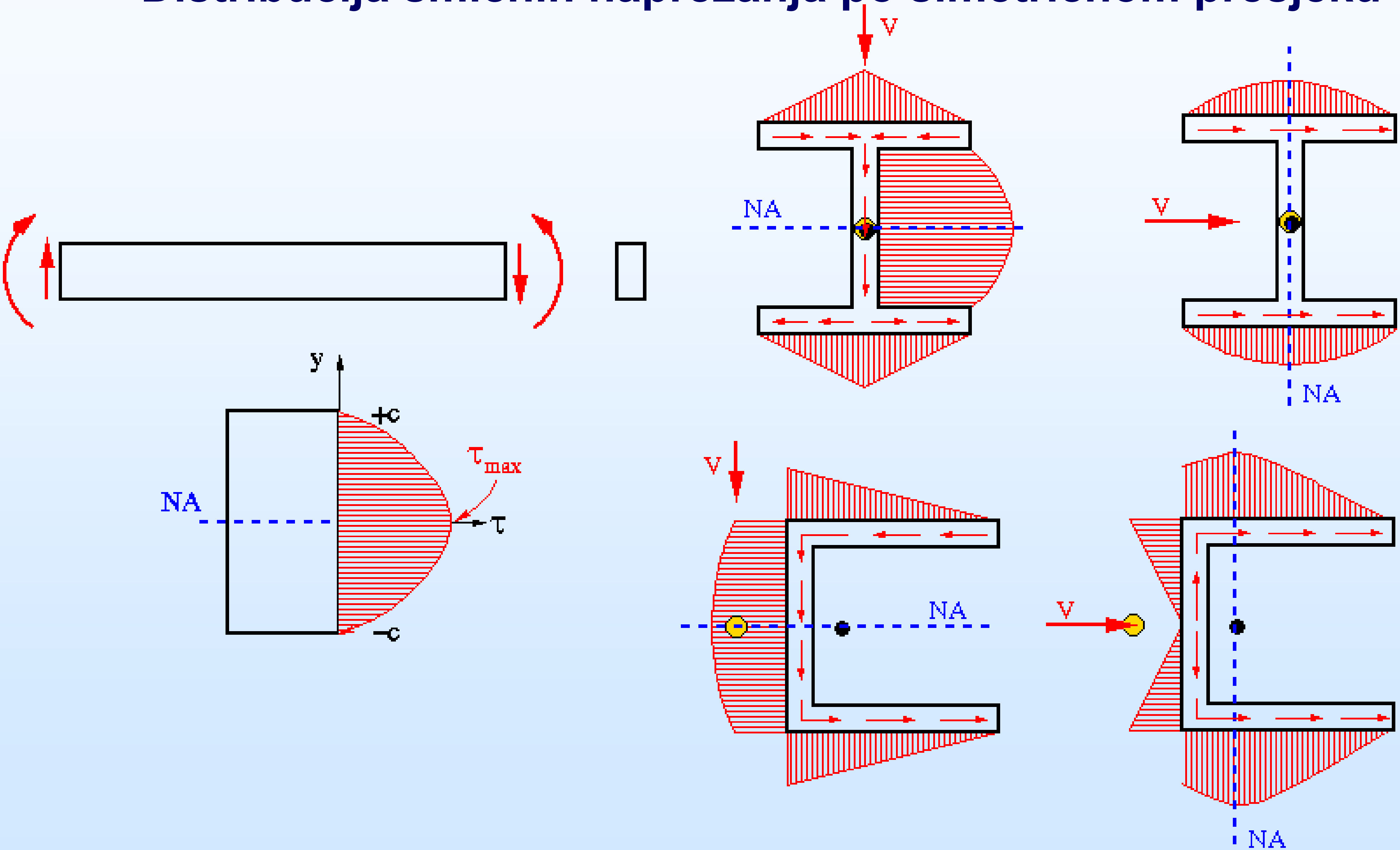
$$\int_{z}^{e_g}\left(\frac{M+dM}{I_y}z\right)tdz\cdot-\int_{z}^{e_g}\frac{M}{I_y}ztdz=\tau\cdot tdx$$

Iz gornje jednadžbe se dobiva da je smično naprezanje:

$$\tau=\frac{dM}{dx}\frac{1}{I_y t}\int_{z}^{e_g}tzdz \qquad \frac{dM}{dx}=Q \qquad S_y=\int_{z}^{e_g}tzdz$$

$$\boxed{\tau=\frac{QS_y}{I_y t}}$$

Distribucija smičnih naprezanja po simetričnom presjeku



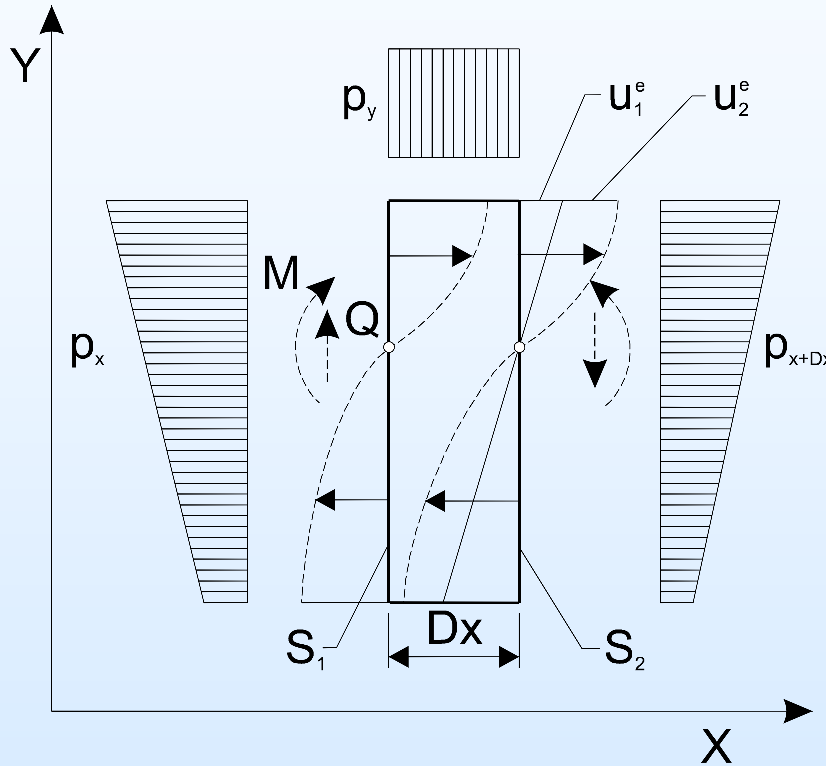
Proračun smičnih naprezanja kod savijanja za složene presjeke metodom konačnih elemenata

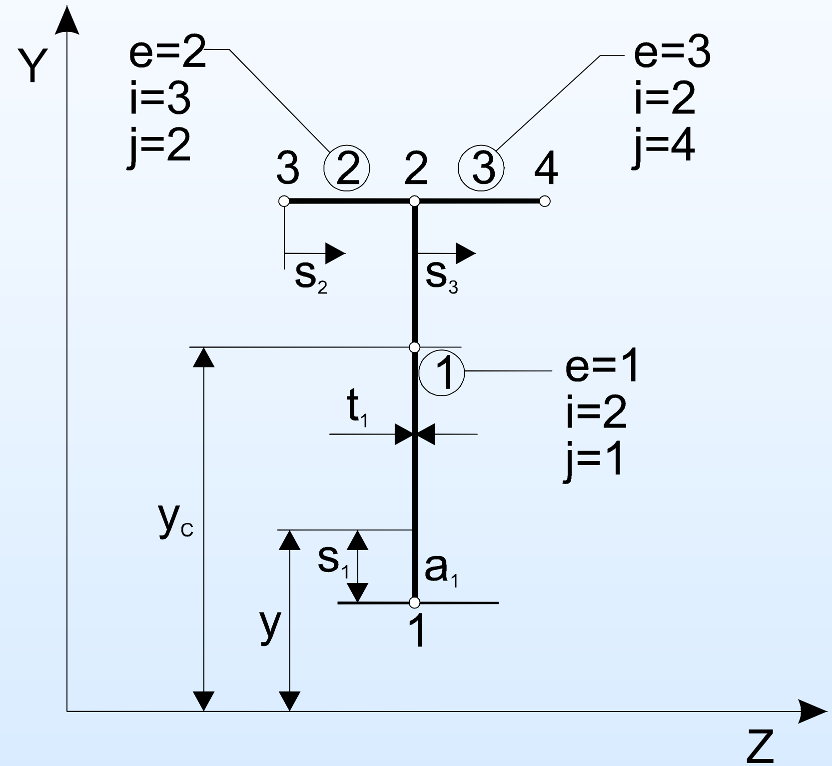
Polje pomaka definirano standardnom teorijom grede ne omogućava direktan proračun polja smičnih naprezanja iz definicijskih jednadžbi teorije elastičnosti.

Uvođenjem dodatnog korekcionog polja pomaka (**deplanacija presjeka**), moguće je totalnu potencijalnu energiju, prema proširenoj teoriji grede, izraziti u ovisnosti o osnovnim parametrima primarnog polja (pomaci i kutovi zaokreta) te parametrima dodatnog polja.

Minimizacija totalne potencijalne energije sustava omogućuje određivanje svih nepoznatih parametara

Proračun smičnih naprezanja kod savijanja za složene presjeke metodom konačnih elemenata





$u_2(x,y,z)$ - dodatno polje pomaka u aksijalnom smjeru

p_X i $p_{X+\Delta X}$ - opterećenja jednaka naprezanjima uzrokovanim momentima savijanja $M(x)$ i $M(x+\Delta x)$

Proračun smičnih naprezanja kod savijanja za složene presjeke metodom konačnih elemenata

Dodatno polje pomaka u aksijalnom smjeru

$$u_2(x,y,z) \to u(s)_{x=x_0} = \mathbf{N}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{u}^e = \begin{Bmatrix} 1-\dfrac{s}{l^e} & \dfrac{s}{l^e} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix}$$

funkcija oblika čvorni pomaci

Relativne deformacije (ε se svodi na γ_{xs}):

$$\boldsymbol{\varepsilon} \to \gamma_{xs} = \frac{\partial u}{\partial s} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \mathbf{u}^e = \begin{Bmatrix} -\dfrac{1}{l^e} & \dfrac{1}{l^e} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix}$$

Naprezanja (σ se svodi na τ_{xs}):

$$\boldsymbol{\sigma} \to \tau_{xs} = G^e \gamma_{xs} = RS \cdot G^e \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \mathbf{u}^e$$

Proračun smičnih naprezanja kod savijanja za složene presjeke metodom konačnih elemenata

Opaska:

$$\mathbf{N}^{\mathrm{T}} = \left\{ 1 - \frac{s}{l^e} \quad \frac{s}{l^e} \right\} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B}^T = \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial s} = \left\{ -\frac{1}{l^e} \quad \frac{1}{l^e} \right\}$$

funkcija oblika

prva derivacija funkcije oblika

Proračun smičnih naprezanja kod savijanja za složene presjeke metodom konačnih elemenata

Opterećenje (uz zanemarenje upliva p_Y , p_Z na duljini Δx) ako su osi x i y glavne osi inercije $\left(\text{napomena} : p_x \equiv \sigma_x\right)$

$$F(s) = p_x(x+\Delta x, s)_{S2} - p_x(x, s)_{S1} = \Delta p_x = \frac{\partial p_x}{\partial x}\cdot \Delta x = p_{x,x}\cdot \Delta x$$

$$F(s) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{y_c(s)}{EI_z}M_z\right)_{S_2^e} + \left(\frac{z_c(s)}{EI_y}M_y\right)_{S_2^e}\right]\cdot E^e \cdot RN^e \cdot \Delta x$$

$$F_{SZ} = \frac{y_c(s)}{EI_z} \qquad F_{SY} = \frac{z_c(s)}{EI_Y}; \qquad Q = \frac{\partial M}{\partial x}$$

$$F(s) = \left[F_{SZ}\cdot Q_Y + F_{SY}\cdot Q_Z\right]\cdot E^e \cdot RN^e \cdot \Delta x$$

Proračun smičnih naprezanja kod savijanja za složene presjeke metodom konačnih elemenata

y_c, z_c **koordinate točke mjerene u odnosu na koordinatni sustav s ishodištem u sjecištu neutralnih osi presjeka:**

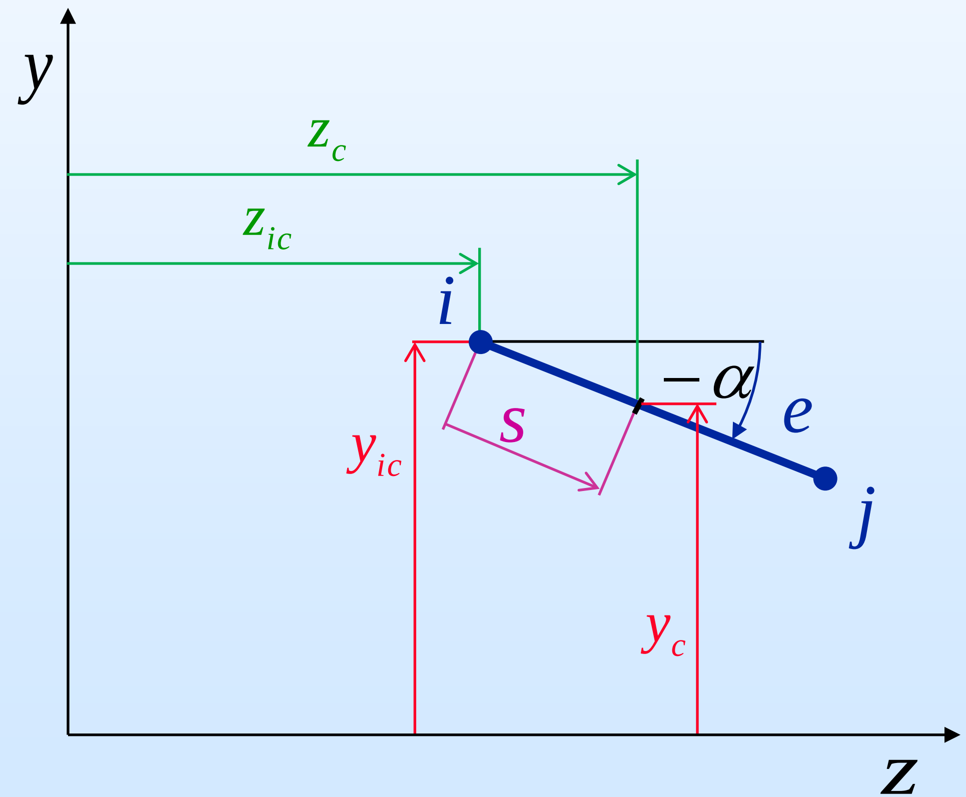
$$y_c(s) = y_{ic} + s \cdot \sin \alpha^e$$

$$z_c(s) = z_{ic} + s \cdot \cos \alpha^e$$

α^e **kut nagiba elementa prema osi *Z* :**

$$\alpha^e = \angle(s, Z)$$

y_{ic}, z_{ic} **koordinate čvora *i* elementa *e*.**



Proračun smičnih naprezanja kod savijanja za složene presjeke metodom konačnih elemenata

Totalna potencijalna energija:

$$\Pi = U - W = \int_V \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\varepsilon} \,\mathrm{d}V - W$$

Proračun smičnih naprezanja kod savijanja za složene presjeke metodom konačnih elemenata

Rad unutrašnjih sila na elementu:

$$U^e = \int_{V^e} \frac{1}{2} (RS \cdot G^e \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \mathbf{u}^e)^{\mathrm{T}} \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \mathbf{u}^e \mathrm{d}V$$

$$U^e = \int_{V^e} \frac{1}{2} RS \cdot G^e \mathbf{u}^{e\mathrm{T}} \mathbf{B} \ \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \mathbf{u}^e \mathrm{d}V$$

$$U^e = \Delta x \cdot t^e \cdot RS^e \cdot G^e \frac{1}{2} \int_o^{l^e} \mathbf{u}^{e\mathrm{T}} \mathbf{B} \ \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \mathbf{u}^e \mathrm{d}s$$

Proračun smičnih naprezanja kod savijanja za složene presjeke metodom konačnih elemenata

Rad vanjskih sila na elementu :

$$W^e = \int_{S^e} F(s)u(s)\mathrm{d}S$$

$$W^e = t^e \cdot \int_0^{l^e} F^e(s)\mathbf{u}^{eT}\mathbf{N}ds$$

$$W^e = \mathbf{u}^{e\mathrm{T}}\mathbf{F}^e$$

Proračun smičnih naprezanja kod savijanja za složene presjeke metodom konačnih elemenata

Totalna potencijalna energija za sustav od *n* elemenata:

$$\Pi = \sum_{e=1}^{n} \Pi^e = \sum_{e=1}^{n} \left[\Delta x \frac{1}{2} \mathbf{u}^{e\mathrm{T}} \mathbf{K}^e \mathbf{u}^e - \mathbf{u}^{e\mathrm{T}} \mathbf{F}^e \right]$$

$\mathbf{u}^{e\mathrm{T}}$ čvorni pomaci elementa *e*: $\mathbf{u}^{e\mathrm{T}} = \{\mathrm{u_i}\ \mathrm{u_j}\}$:

$\mathbf{K}^e$ matrica krutosti elementa *e*:

$$\mathbf{K}^e = t^e \cdot RS^e \cdot G^e \cdot \int_0^{l^e} \mathbf{B}\mathbf{B}^{\mathrm{T}} ds$$

$\mathbf{F}^e$ vektor opterećenja elementa *e*:

$$\mathbf{F}^e = t^e \cdot \int_0^{l^e} F^e(s) \mathbf{N} ds$$

Proračun smičnih naprezanja kod savijanja za složene presjeke metodom konačnih elemenata

Ukoliko se sumiranje provede po svim elementima, a pomaci i opterećenja se sortiraju u globalne vektore pomaka u i sila F

$$\Pi = \Delta x \cdot \left[\frac{1}{2} \mathbf{u}^{\mathrm{T}} \mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{u}^{\mathrm{T}} \mathbf{F} \right]$$

$\mathbf{u}$ **globalni vektor pomaka sustava**

$\mathbf{K}$ **globalna matrica krutosti sustava**

$\mathbf{F}$ **globalni vektor pomaka sustava**

Proračun smičnih naprezanja kod savijanja za složene presjeke metodom konačnih elemenata

Minimizacija totalne potencijalne energije daje onoliko jednadžbi koliko ima nepoznatih pomaka u_i:

$$\delta\Pi_{\mathbf{u}} = 0 \rightarrow \boxed{\mathbf{Ku} = \mathbf{F}}$$

Proračun smičnih naprezanja kod savijanja za složene presjeke metodom konačnih elemenata

Prema već danoj formuli matrica krutosti elementa je definirana kao:

$$\mathbf{K}^e = t^e \cdot RS^e \cdot G^e \cdot \int_0^{l^e} \mathbf{B}\mathbf{B}^{\mathrm{T}} ds$$

Za predloženu linearnu raspodjelu pomaka po linijskom elementu, matrica krutosti elementa:

$$\mathbf{N}^{\mathrm{T}} = \left\{ 1 - \frac{s}{l^e} \quad \frac{s}{l^e} \right\} \longrightarrow \mathbf{B}^T = \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial s} = \left\{ -\frac{1}{l^e} \quad \frac{1}{l^e} \right\}$$

$$\boxed{\mathbf{K}^e = \frac{G^e \cdot t^e \cdot RS^e}{l^e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}$$

Proračun smičnih naprezanja kod savijanja za složene presjeke metodom konačnih elemenata

Opaska:

$$\int_0^{l^e} \mathbf{B}\mathbf{B}^{\mathrm{T}} ds = \mathbf{B}\mathbf{B}^{\mathrm{T}} \int_0^{l^e} ds = \mathbf{B}\mathbf{B}^{\mathrm{T}} l^e$$

Jer $\mathbf{B}$ sadrži samo konstantne članove

$$\mathbf{B}\mathbf{B}^{\mathrm{T}} = \begin{Bmatrix} -\dfrac{1}{l^e} \\ \dfrac{1}{l^e} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -\dfrac{1}{l^e} & \dfrac{1}{l^e} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\left(l^e\right)^2} & -\dfrac{1}{\left(l^e\right)^2} \\ -\dfrac{1}{\left(l^e\right)^2} & \dfrac{1}{\left(l^e\right)^2} \end{bmatrix} = \frac{1}{\left(l^e\right)^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\int_0^{l^e} \mathbf{B}\mathbf{B}^{\mathrm{T}} ds = l^e \frac{1}{\left(l^e\right)^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{l^e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Proračun smičnih naprezanja kod savijanja za složene presjeke metodom konačnih elemenata

Vektor opterećenja elementa *e*:

$$\mathbf{F}^e = t^e \cdot \int_0^{l^e} F^e(s)\mathbf{N}ds$$

$$\mathbf{N}^{\mathrm{T}} = \left\{ 1 - \frac{s}{l^e} \quad \frac{s}{l^e} \right\}$$

$$F(s) = \left[F_{SZ} \cdot Q_Y + F_{SY} \cdot Q_Z \right] \cdot E^e \cdot RN^e \cdot \Delta x; \qquad F_{SZ} = \frac{y_c(s)}{EI_z}; \qquad F_{SY} = \frac{z_c(s)}{EI_Y};$$

$$y_c(s) = y_{ic} + s \cdot \sin \alpha^e; \qquad z_c(s) = z_{ic} + s \cdot \cos \alpha^e;$$

Proračun smičnih naprezanja kod savijanja za složene presjeke metodom konačnih elemenata

Vektor opterećenja elementa za savijanje oko osi *z*:

$$\mathbf{F}_z^e(x) = Q_y(x)\cdot\overline{\mathbf{F}}_z^e(x) = \frac{E^e\cdot Q_y(x)\cdot t^e\cdot RN^e}{EI_Z}\begin{Bmatrix} \dfrac{y_{ic}\cdot l^e}{2}+\dfrac{{l^e}^2\sin\alpha^e}{6} \\ \dfrac{y_{ic}\cdot l^e}{2}+\dfrac{{l^e}^2\sin\alpha^e}{3} \end{Bmatrix}$$

Vektor opterećenja elementa za savijanje oko osi *y*:

$$\mathbf{F}_y^e(x) = Q_z(x)\cdot\overline{\mathbf{F}}_y^e(x) = \frac{E^e\cdot Q_z(x)\cdot t^e\cdot RN^e}{EI_Y}\begin{Bmatrix} \dfrac{z_{ic}\cdot l^e}{2}+\dfrac{{l^e}^2\sin\alpha^e}{6} \\ \dfrac{z_{ic}\cdot l^e}{2}+\dfrac{{l^e}^2\sin\alpha^e}{3} \end{Bmatrix}$$

Proračun smičnih naprezanja kod savijanja za složene presjeke metodom konačnih elemenata

Globalni problem za savijanje oko osi *z* i *y*, prema tome glasi:

$$\mathbf{K}\,\mathbf{u}_z = \mathbf{F}_z$$

$$\mathbf{K}\,\mathbf{u}_y = \mathbf{F}_y$$

$\mathbf{K}$ globalna matrica krutosti sustava

$\mathbf{u}$ globalni vektor pomaka sustava

$$\mathbf{u}_y = Q_z(x)\cdot\overline{\mathbf{u}}_y \qquad \mathbf{u}_z = Q_y(x)\cdot\overline{\mathbf{u}}_z$$

$\mathbf{F}$ globalni vektor pomaka sustava

$$\mathbf{F}_y = Q_z\cdot\overline{\mathbf{F}}_y \qquad \mathbf{F}_z = Q_y\cdot\overline{\mathbf{F}}_z$$

Proračun smičnih naprezanja kod savijanja za složene presjeke metodom konačnih elemenata

Očito je da je dovoljno provesti proračune:

$$\mathbf{K}\,\bar{\mathbf{u}}_z = \bar{\mathbf{F}}_z$$

$$\mathbf{K}\,\bar{\mathbf{u}}_y = \bar{\mathbf{F}}_y$$

s jediničnom vrijednošću poprečnih sila ($Q=1$) , te potom za svaku vrijednost poprečnih sila izvršiti proračun pomaka

$$\mathbf{u}_y = Q_z(x)\cdot\bar{\mathbf{u}}_y$$

$$\mathbf{u}_z = Q_y(x)\cdot\bar{\mathbf{u}}_z$$

Proračun smičnih naprezanja kod savijanja za složene presjeke metodom konačnih elemenata

Smična naprezanja, konstantna po elementu, računaju se prema izrazu:

$$\left(\tau_{xs}^{ke}\right)_y = G^e \cdot Q_y \cdot \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \cdot \overline{\mathbf{u}}_z^e = \frac{G^e \cdot Q_y}{l^e} \cdot \{-1 \quad 1\} \begin{Bmatrix} \overline{u}_i \\ \overline{u}_j \end{Bmatrix}_z$$

$$\left(\tau_{xs}^{ke}\right)_z = G^e \cdot Q_z \cdot \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \cdot \overline{\mathbf{u}}_y^e = \frac{G^e \cdot Q_z}{l^e} \cdot \{-1 \quad 1\} \begin{Bmatrix} \overline{u}_i \\ \overline{u}_j \end{Bmatrix}_y$$

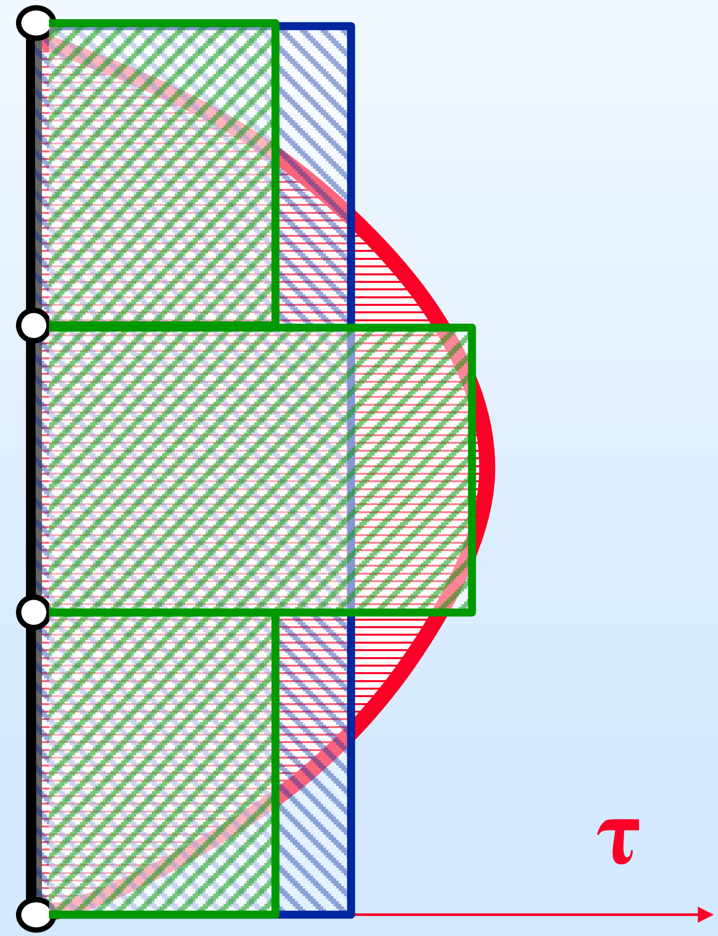
Proračun smičnih naprezanja kod savijanja za složene presjeke metodom konačnih elemenata

Stvarna distribucija smičnih naprezanja po dijelu konstrukcije je parabolična

Smična naprezanja, izračunata ovom metodom su konstantna po elementu,

Povećavanjem broja elemenata može se dobiti točnija distribucija naprezanja po dijelu konstrukcije (no to vodi povećanju stupnjeva slobode)

Iz poznatih srednjih naprezanja po elementu moguće je točnije izračunati distribuciju s obzirom da znamo kako izgleda stvarna distribucija



Proračun smičnih naprezanja kod savijanja za složene presjeke metodom konačnih elemenata

Želi li se nešto točnije izračunati distribucija naprezanja $\tau_{xs}^{e}(s)$ duž elementa iz poznatog srednjeg naprezanja τ_{xs}^{ke}, proračun se provodi prema izrazu:

$$\left(\tau_{xs}^{e}(s)\right)_u = \left(\tau_{xs}^{ke}\right)_u - \tau_{1u}^{ke} + \tau_{1u}(s)$$

$$\tau_{1y}(s) = \frac{Q_y \cdot E^e \cdot S_z(s) \cdot RN^e}{EI_Z \cdot t^e \cdot RS^e} \qquad \tau_{1y}^{ke} = \frac{1}{l^e}\int_0^{l^e} \tau_{1y}(s)\mathrm{d}s$$

$$\tau_{1z}(s) = \frac{Q_z \cdot E^e \cdot S_y(s) \cdot RN^e}{EI_y \cdot t^e \cdot RS^e} \qquad \tau_{1z}^{ke} = \frac{1}{l^e}\int_0^{l^e} \tau_{1z}(s)\mathrm{d}s$$

S_z, S_y **statički momenti tromosti**

Proračun smičnih naprezanja kod savijanja za složene presjeke metodom konačnih elemenata

S_z, S_y statički momenti se dobiju iz izraza:

$$S_z(s) = \int_0^s y_c(s_1) \cdot t^e \cdot RS^e \mathrm{d}s_1 = t^e \cdot RS^e \cdot \int_0^s \left(y_{ic} + s_1 \cdot \frac{y_j - y_i}{l^e} \right) \mathrm{d}s_1$$

$$S_y(s) = \int_0^s z_c(s_1) \cdot t^e \cdot RS^e \mathrm{d}s_1 = t^e \cdot RS^e \cdot \int_0^s \left(z_{ic} + s_1 \cdot \frac{z_j - z_i}{l^e} \right) \mathrm{d}s_1$$

Proračun smičnih naprezanja kod savijanja za složene presjeke metodom konačnih elemenata

Sređivanjem izraza na prethodna dva *slidea* dobije se:

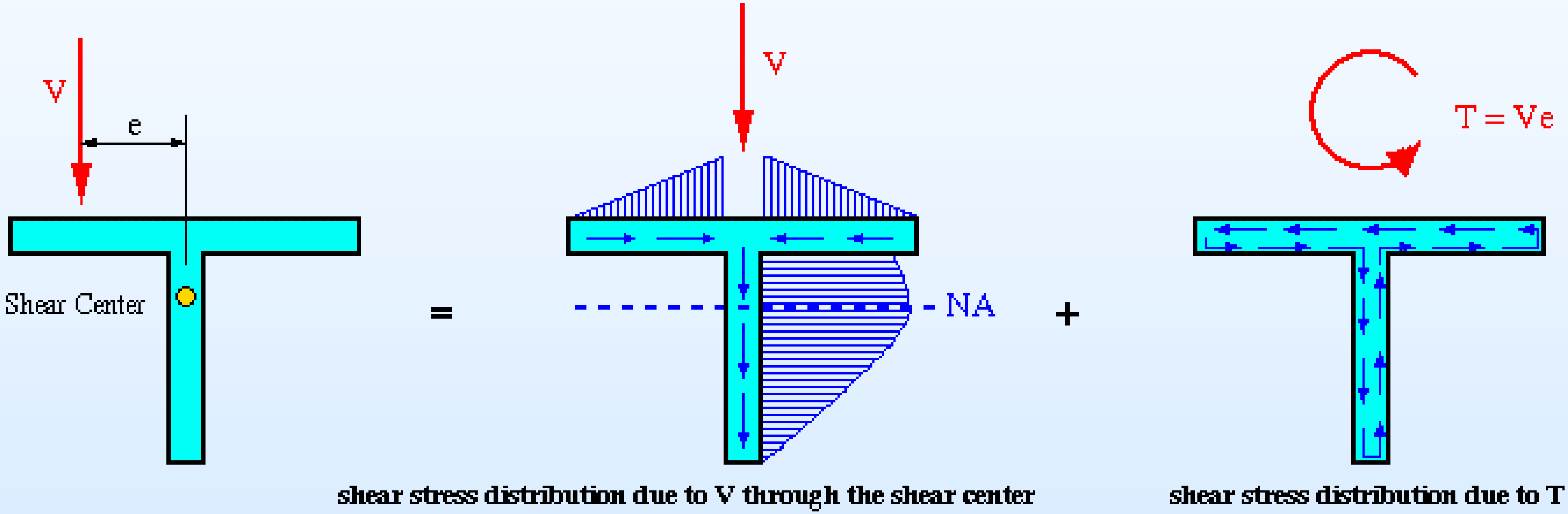
$$\left(\tau_{xs}^{e}(s)\right)_y = \left(\tau_{xs}^{ke}\right)_y - \frac{1}{l^e}\int_0^{l^e} \frac{Q_y \cdot E^e \cdot S_z(s) \cdot RN^e}{EI_Z \cdot t^e \cdot RS^e}\,\mathrm{d}s + \frac{Q_y \cdot E^e \cdot S_z(s) \cdot RN^e}{EI_Z \cdot t^e \cdot RS^e}$$

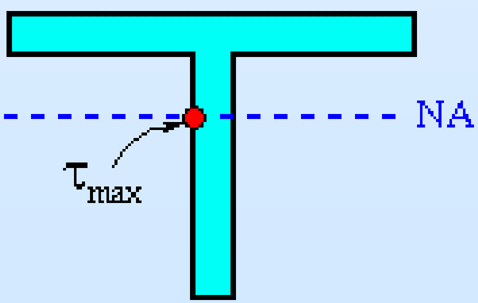
$$\left(\tau_{xs}^{e}(s)\right)_z = \left(\tau_{xs}^{ke}\right)_z - \frac{1}{l^e}\int_0^{l^e} \frac{Q_z \cdot E^e \cdot S_y(s) \cdot RN^e}{EI_Y \cdot t^e \cdot RS^e}\,\mathrm{d}s + \frac{Q_z \cdot E^e \cdot S_y(s) \cdot RN^e}{EI_Y \cdot t^e \cdot RS^e}$$

$$\left(\tau_{xs}^{e}(s)\right)_y = Q_y \cdot \left[G^e \cdot \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \cdot \bar{\mathbf{u}}_z^e - \frac{E^e \cdot RN^e}{EI_Z} \cdot \left(\frac{l^e}{3} \cdot \left(y_{ic} + \frac{1}{2} y_{yc} \right) - y_{ic} \cdot s - \left(y_{jc} - y_{ic} \right) \cdot \frac{s^2}{2l^e} \right) \right]$$

$$\left(\tau_{xs}^{e}(s)\right)_z = Q_z \cdot \left[G^e \cdot \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \cdot \bar{\mathbf{u}}_y^e - \frac{E^e \cdot RN^e}{EI_Y} \cdot \left(\frac{l^e}{3} \cdot \left(z_{ic} + \frac{1}{2} z_{yc} \right) - z_{ic} \cdot s - \left(z_{jc} - z_{ic} \right) \cdot \frac{s^2}{2l^e} \right) \right]$$

Distribucija smičnih naprezanja za silu koja ne djeluje kroz centar smika





$$\tau_{max} = \tau_{NA}\Big|_{\text{due to V}} + \tau_{NA}\Big|_{\text{due to T}}$$

Proračun položaja centra smika (torzije)

Smična naprezanja drže u ravnoteži poprečnu silu koja djeluje u tom presjeku (ona ih upravo i uzrokuje)

U općenitom slučaju poprečna sila i rezultanta smičnih sila u presjeku daju spreg sila koji proizvodi torzioni moment pa dolazi do uvijanja nosača

Samo ako poprečna sila prolazi kroz jednu određenu točku koja se zove centar smika, postoji samo posmak presjeka, a ne i njegovo zakretanje

Položaj centra smika SC određuje se iz uvjeta jednakosti momenta poprečne sile i smičnih naprezanja za bilo koju točku presjeka

Proračun položaja centra smika (torzije)

$$\boxed{Q_z} Y_{CT} = \sum_e \left[\int_0^{l^e} \boxed{(\tau_{xs}^e)} \cdot t^e \cdot \boxed{d_c^e} \cdot \mathrm{ds} \right] \cdot RS^e$$

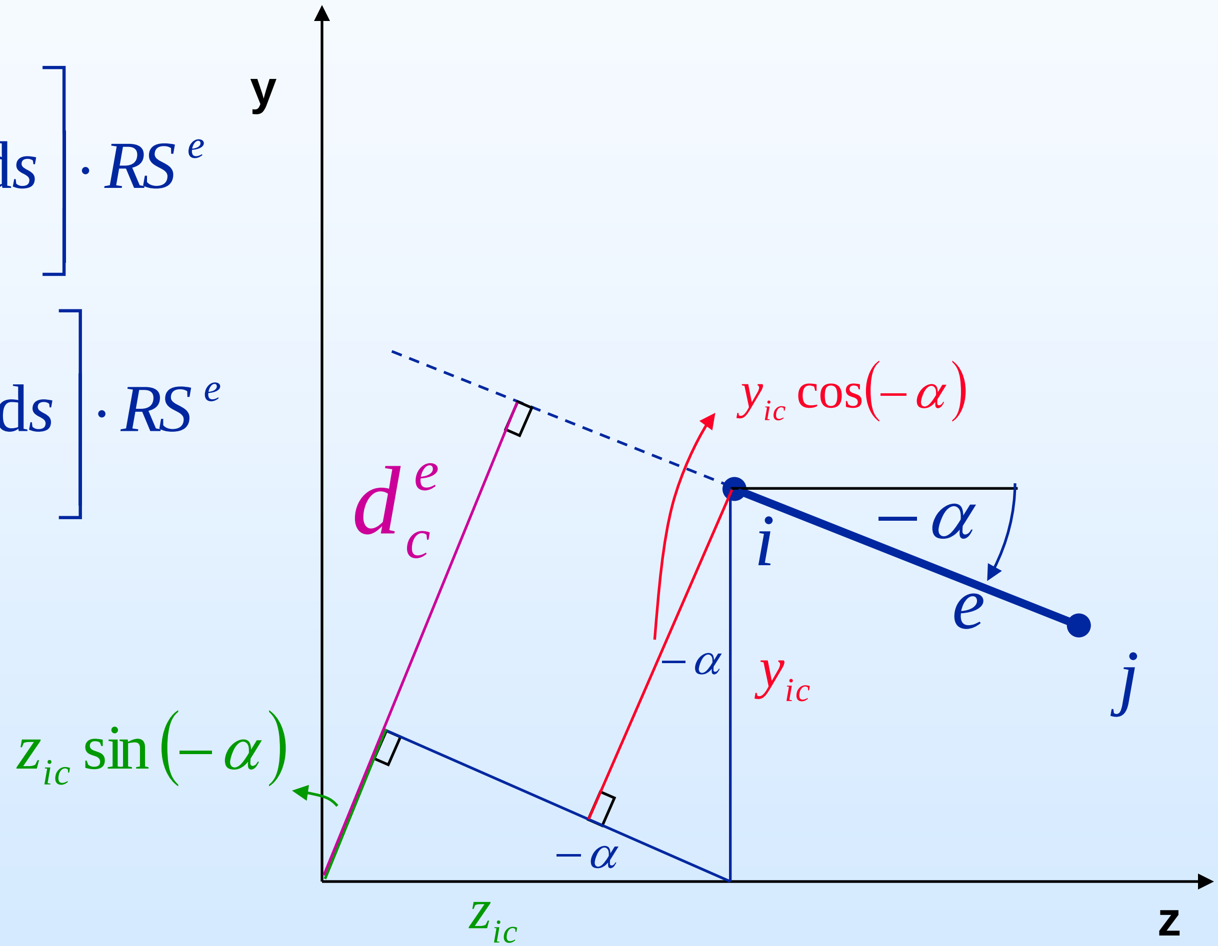
$$\boxed{Q_y} Z_{CT} = \sum_e \left[\int_0^{l^e} \boxed{(\tau_{xs}^e)} \cdot t^e \cdot \boxed{d_c^e} \cdot \mathrm{ds} \right] \cdot RS^e$$

$$Q_z = 1; \quad Q_y = 1$$

$$z_{ic} \sin(-\alpha) = -z_{ic} \sin(\alpha)$$

$$y_{ic} \cos(-\alpha) = y_{ic} \cos(\alpha)$$

$$d_c^e = y_{ic} \cos(\alpha^e) - z_{ic} \sin(\alpha^e)$$



y, z osi koordinatnog sustava kroz neutralne osi poprečnog presjeka

Proračun položaja centra smika (torzije)

Centar smika (torzije) u odnosu na neutralne osi presjeka Y_{CT}, Z_{CT}:

$$Y_{\mathrm{CT}} = \sum_e \left[\int_0^{l^e} (\tau_{xs}^e)_{Q_z=1} \cdot t^e \cdot d_c^e \cdot \mathrm{ds} \right] \cdot RS^e$$

$$Z_{\mathrm{CT}} = \sum_e \left[\int_0^{l^e} (\tau_{xs}^e)_{Q_y=1} \cdot t^e \cdot d_c^e \cdot \mathrm{ds} \right] \cdot RS^e$$

d_c^e udaljenost elementa od sjecišta neutralnih osi (mjereno po normali na element)

$$d_c^e = z_{ic} \sin \alpha^e - y_{ic} \cos \alpha^e$$

Korekcija normalnih naprezanja u presjeku uslijed utjecaja smičnih naprezanja

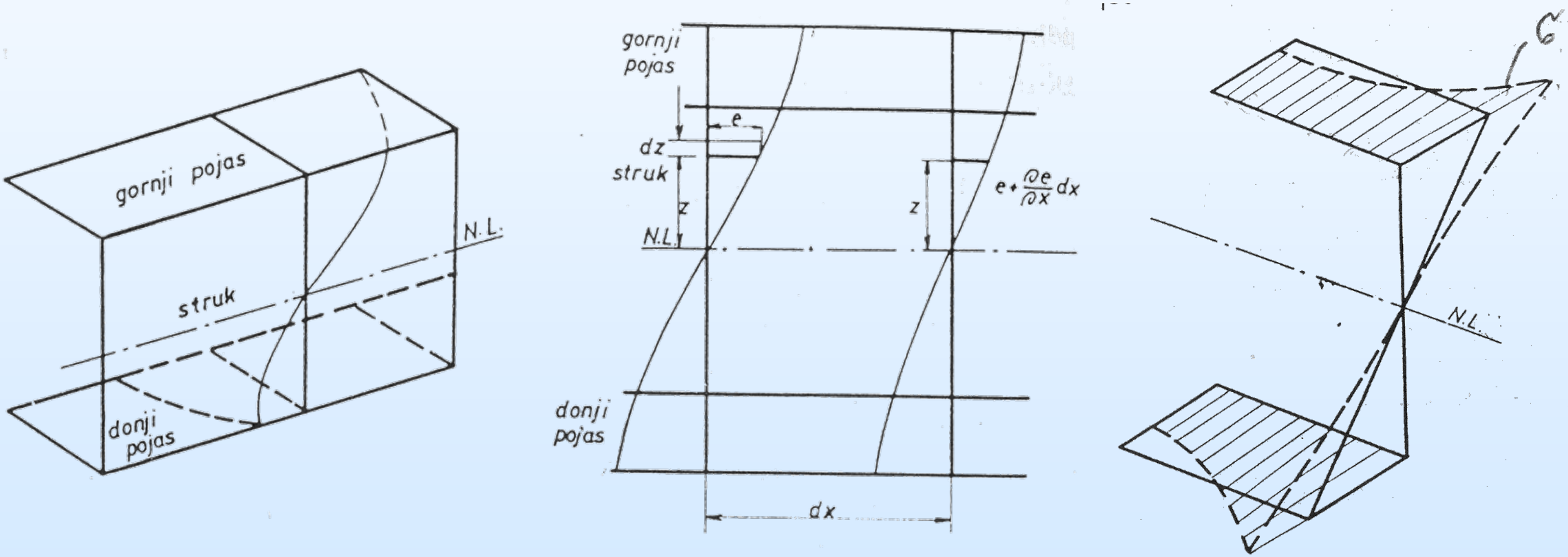
Kod izvoda formule za normalna naprezanja pretpostavljeno je da se poprečni presjeci zakreću, ali da ostaju ravni

Ta pretpostavka je ostvarena samo ako nema poprečnih sila

Ako postoji poprečna sila onda se presjeci deformiraju i ne ostaju ravni

Zbog toga ni normalna naprezanja nisu linearno raspodijeljena po presjeku

Korekcija normalnih naprezanja u presjeku uslijed utjecaja smičnih naprezanja



Korekcija normalnih naprezanja u presjeku uslijed utjecaja smičnih naprezanja

Ukoliko se želi uzeti u obzir aksijalna promjena polja pomaka *u(x,s)* te opterećenje po duljini grede $p_y(x)$, $p_z(x)$, model prikazan na definicijskoj slici postaje nešto složeniji.

Ukupna promjena polja naprezanja iznosi 10-15% nekorigiranih. Iz tog razloga približno rješenje prema Lockwood-Tayloru daje za praksu zadovoljavajuće rješenje.

Aproksimacija implicira 5 koraka:

Korekcija normalnih naprezanja u presjeku uslijed utjecaja smičnih naprezanja

Koraci:

1. **Proračun nekorigiranih smičnih i normalnih naprezanja,**
2. **Proračun promjene polja pomaka iz relativnih deformacija na bazi koraka 1.,**
3. **Proračun korekcionih normalnih naprezanja σ^c_x na bazi polja pomaka iz koraka 2.,**
4. **Proračun korekcionog momenta savijanja M^c na bazi neuravnoteženih normalnih naprezanja σ^c_x iz koraka 3.,**
5. **Proračun ukupne korekcije normalnih naprezanja σ^{cT}_x implicira sumiranje σ^c_x i linearno promjenjivih naprezanja uzrokovanih korekcionim momentom savijanja M^c : .**

$$\sigma_x^{cT} = \sigma_x^c + \sigma_x^{M^c}$$

Korekcija normalnih naprezanja u presjeku uslijed utjecaja smičnih naprezanja

1. **Nekorigirana raspodjela:**

$$(\sigma_x)_y^i = RN^e \cdot \frac{M_Y}{EI_Y} E^e \cdot z_{ic}; \qquad (\sigma_y)_z^i = RN^e \cdot \frac{M_Z}{EI_Z} E^e \cdot y_{ic}$$

$$\left(\tau_{xs}^{ke}\right)_y = G^e \cdot \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{u}_z^e; \qquad \left(\tau_{xs}^{ke}\right)_z = G^e \cdot \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{u}_y^e$$

y_{ic} , z_{ic}	koordinate čvora i,
i	broj čvorova: $i = 1 \ldots m$,
e	broj elemenata: $e = 1 \ldots n$.

Korekcija normalnih naprezanja u presjeku uslijed utjecaja smičnih naprezanja

2.Promjena polja pomaka po *x* za čvor *i* npr. kod savijanja presjeka simetričnog oko osi *y* odnosno *z*:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_y^i = \frac{\partial}{\partial x}\int_0^{l^i}\frac{\partial u}{\partial s}ds = \frac{\partial}{\partial x}\int_0^{l^i} Q_z(x)\frac{\partial \overline{u}_y(s)}{\partial s}ds = -p_z\cdot\left(\overline{u}_y^i - \overline{u}_y^c\right)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_z^i = \frac{\partial}{\partial x}\int_0^{l^i}\frac{\partial u}{\partial s}ds = \frac{\partial}{\partial x}\int_0^{l^i} Q_y(x)\frac{\partial \overline{u}_z(s)}{\partial s}ds = -p_y\cdot\left(\overline{u}_z^i - \overline{u}_z^c\right)$$

$$\frac{\partial Q_y}{\partial x} = -p_y; \qquad \frac{\partial Q_z}{\partial x} = -p_z;$$

Integral predstavlja relativan pomak čvorova u odnosu na pomak čvora na neutralnoj osi presjeka $\overline{u}^c$ ***kod savijanja oko osi y odnosno z jediničnim opterećenjem*** $Q_z = 1$ ***i*** $Q_y = 1$.

Korekcija normalnih naprezanja u presjeku uslijed utjecaja smičnih naprezanja

3.Korekcija za normalna naprezanja σ^{c}_{x} u čvoru *i* elementa *e* glasi:

$$\left(\sigma_x^c\right)_y^i = \mathbf{E}\boldsymbol{\varepsilon} = E^e\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_y^i = -E^e \cdot p_z \cdot \left(\bar{u}_y^i - \bar{u}_y^c\right) \cdot RN^e$$

$$\left(\sigma_x^c\right)_z^i = \mathbf{E}\boldsymbol{\varepsilon} = E^e\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_z^i = -E^e \cdot p_y \cdot \left(\bar{u}_z^i - \bar{u}_z^c\right) \cdot RN^e$$

Korekcija normalnih naprezanja u presjeku uslijed utjecaja smičnih naprezanja

4. **Korekcijski moment savijanja M^c glasi:**

$$M_y^c = \sum_e \int_0^{l^e} \left(\sigma_x^c(s)\right)_y \cdot z_c(s) \cdot t^e ds$$

$$M_z^c = \sum_e \int_0^{l^e} \left(\sigma_x^c(s)\right)_z \cdot y_c(s) \cdot t^e ds$$

$$\sigma_x^c(s) = \left(\sigma_x^c\right)^i + \left[\left(\sigma_x^c\right)^i - \left(\sigma_x^c\right)^j\right] \cdot \frac{s}{l^e}$$

Korekcija normalnih naprezanja u presjeku uslijed utjecaja smičnih naprezanja

5. Ukupne korekcije normalnih naprezanja za čvor *i* glase:

za savijanje oko osi y

$$\left(\sigma_x^{\ cT}\right)_y^i = RN^{\,e} \cdot \left[\frac{z_{ic}}{EI_Y} \cdot M_y^{\,c} \cdot E^{\,e} - E^{\,e} \cdot p_z \cdot \left(\overline{u}_y^{\,i} - \overline{u}_y^{\,c} \right) \right]$$

za savijanje oko osi z

$$\left(\sigma_x^{\ cT}\right)_z^i = RN^{\,e} \cdot \left[\frac{y_{ic}}{EI_Z} \cdot M_z^{\,c} \cdot E^{\,e} - E^{\,e} \cdot p_y \cdot \left(\overline{u}_z^{\,i} - \overline{u}_z^{\,c} \right) \right]$$

Korekcija normalnih naprezanja u presjeku uslijed utjecaja smičnih naprezanja

6.Približna vrijednost normalnih naprezanja, za istovremeno savijanje oko objе osi, za čvor *i*:

$$\sigma_x^i = \left[RN^e \cdot \frac{M_Z}{EI_Z} E^e \cdot y_{ic} + \left(\sigma_x{}^{cT}\right)_z^i \right] + \left[RN^e \cdot \frac{M_Y}{EI_Y} E^e \cdot z_{ic} + \left(\sigma_x{}^{cT}\right)_y^i \right]$$