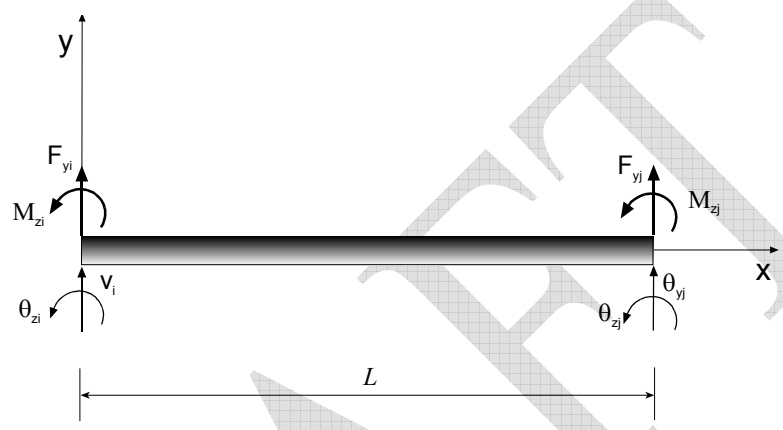
1 GREDNI KONAČNI ELEMENT ZA SAVIJANJE

1.1 Konačni element za savijanje u xy ravnini



Sl. 1.1 Sile i pomaci na konačnom elementu za savijanje u xy ravnini

Pri izvodu matrica krutosti elementa grede za savijanje je uključen i utjecaj smičnog progiba. Naime, ukoliko greda ima veliki iznos krutosti na savijanje (parametar EI/l^3) uslijed velikih prirubnica ili zbog male duljine, progib uslijed savijanja je mali i iznos smičnog progiba je reda veličine progiba od savijanja (što je ignorirano u elementarnoj teoriji) te se ne može zanemariti.

Pomaci grede uslijed savijanja čvornim silama i momentima u xy ravnini su dani kao

$$v = v_b + v_s \tag{1.1.1}$$

v_b pomaci uslijed savojnih deformacija,

v_s dodatni pomaci uslijed smičnih deformacija.

Diferencijalna jednadžba za savijanje glasi

$$EI_z \frac{d^2 v_b}{dx^2} = M_z \tag{1.1.2}$$

dok je diferencijalna jednadžba s dodatnim pomacima uslijed smičnih deformacija

$$GA_y \frac{dv_s}{dx} = F_y \tag{1.1.3}$$

gdje je:

E Youngov modul elastičnosti,

I_z moment inercije poprečnog presjeka elementa grede oko osi z,

G modul smika,

A_y površina poprečnog presjeka elementa grede koja je koja je efikasna kod smika.

U zadanom slučaju vrijedi da je

$$F_y = F_{yj} \tag{1.1.4}$$

i

$$M_z = M_{zj} + F_{yj} \cdot (L - x) \tag{1.1.5}$$

Uvrštavanjem jednadžbi (1.1.4) i (1.1.5) u (1.1.2) i (1.1.3) dobiva se da je

$$EI_z \frac{d^2 v_b}{dx^2} = M_{zj} + F_{yj} \cdot (L - x) \tag{1.1.6}$$

i

$$GA_y \frac{dv_s}{dx} = F_{yj} \tag{1.1.7}$$

Integriranjem jednadžbe (1.1.6) dobiva se

$$EI_z \frac{dv_b}{dx} = (M_{zj} + F_{yj} \cdot L) \cdot x - \frac{1}{2} F_{yj} \cdot x^2 + C_1 \tag{1.1.8}$$

Uvrštavanjem rubnih uvjeta

$$\begin{aligned} \frac{dv_b}{dx} &= \theta_{zi} \quad \text{za} \quad x = 0 \\ \frac{dv_b}{dx} &= \theta_{zj} \quad \text{za} \quad x = L \end{aligned} \tag{1.1.9}$$

u jednadžbu (1.1.8) dobiva se da je

$$EI_z \cdot \theta_{zi} = C_1 \tag{1.1.10}$$

$$EI_z \cdot \theta_{zi} = \left(M_{zj} + F_{yi} \cdot L\right) \cdot L - \frac{1}{2} F_{yi} \cdot L^2 + C_1 \tag{1.1.11}$$

iz čega se lako izračuna da je

$$C_1 = EI_z \cdot \theta_{zi} \tag{1.1.12}$$

$$M_{zj} = -\frac{1}{2} F_{yj} \cdot L - \frac{EI_z}{L} \cdot \theta_{zi} + \frac{EI_z}{L} \cdot \theta_{zj} \tag{1.1.13}$$

Uvrštavanjem (1.1.12) i (1.1.13) u (1.1.8) dobiva se

$$EI_z \frac{dv_b}{dx} = EI_z \cdot \theta_{zi} + \left[\frac{1}{2} F_{yj} \cdot L - \frac{EI_z}{L} \cdot \theta_{zi} + \frac{EI_z}{L} \cdot \theta_{zj}\right] x - \frac{1}{2} F_{yj} \cdot x^2 \tag{1.1.14}$$

Pod ovim uvjetima ukupni progib elastične linije $v=v_b+v_s$ se može definirati diferencijalnom jednadžbom:

$$\begin{aligned} EI_z \frac{dv}{dx} &= EI_z \left(\frac{dv_b}{dx} + \frac{dv_b}{dx}\right) = \\ &= EI_z \cdot \theta_{zi} + \left[\frac{1}{2} F_{yj} \cdot L - \frac{EI_z}{L} \cdot \theta_{zi} + \frac{EI_z}{L} \cdot \theta_{zj}\right] x - \frac{1}{2} F_{yj} \cdot x^2 + \frac{EI_z}{GA_y} F_{yj} \end{aligned} \tag{1.1.15}$$

čiji je integral:

$$EI_z \cdot v = C_2 + \left[EI_z \cdot \theta_{zi} + \frac{EI_z}{GA_y} F_{yj}\right] \cdot x + \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{2} F_{yj} \cdot L - \frac{EI_z}{L} \cdot \theta_{zi} + \frac{EI_z}{L} \cdot \theta_{zj}\right] x^2 - \frac{1}{6} F_{yj} \cdot x^3 \tag{1.1.16}$$

uz rubne uvijete:

$$\begin{aligned} v &= v_i \quad \text{za} \quad x = 0 \\ v &= v_j \quad \text{za} \quad x = L \end{aligned} \tag{1.1.17}$$

Uvrštenjem rubnih uvjeta u jednadžbu (1.1.16) dobiva se:

$$EI_z \cdot v_i = C_2 \tag{1.1.18}$$

$$EI_z \cdot v_j = C_2 + \left[EI_z \cdot \theta_{zi} + \frac{EI_z}{GA_y} F_{yj}\right] \cdot L + \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{2} F_{yj} \cdot L - \frac{EI_z}{L} \cdot \theta_{zi} + \frac{EI_z}{L} \cdot \theta_{zj}\right] L^2 - \frac{1}{6} F_{yj} \cdot L^3 \tag{1.1.19}$$

iz čega se dobiva

$$EI_z \cdot v_j = EI_z \cdot v_i + \left[EI_z \cdot \theta_{zi} + \frac{EI_z}{GA_y} F_{yj} \right] \cdot L + \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{2} F_{yj} \cdot L - \frac{EI_z}{L} \cdot \theta_{zi} + \frac{EI_z}{L} \cdot \theta_{zj} \right] L^2 - \frac{1}{6} F_{yj} \cdot L^3 \quad (1.1.20)$$

što je ekvivalentno izrazu

$$\frac{1}{12} F_{yj} \cdot L^3 \left(1 + \frac{12 \cdot EI_z}{L^2 \cdot GA_y} \right) = -EI_z \cdot v_i - \frac{1}{2} EI_z \cdot L \cdot \theta_{zi} + EI_z \cdot v_j - \frac{1}{2} EI_z \cdot L \cdot \theta_{zj} \quad (1.1.21)$$

Uvođenjem supstitucije

$$\Phi_y = \frac{12 \cdot EI_z}{L^2 \cdot GA_y} \quad (1.1.22)$$

i njezinim uvrštenjem u jednadžbu (1.1.21) može se zapisati da je:

$$F_{yj} = -\frac{12 \cdot EI_z}{L^3 (1 + \Phi_y)} \cdot v_i - \frac{6 \cdot EI_z}{L^2 (1 + \Phi_y)} \cdot \theta_{zi} + \frac{12 \cdot EI_z}{L^3 (1 + \Phi_y)} \cdot v_j - \frac{6 \cdot EI_z}{L^2 (1 + \Phi_y)} \cdot \theta_{zj} \quad (1.1.23)$$

Uvrštenjem jednadžbe (1.1.23) u (1.1.13) dobiva se da je:

$$M_{zj} = \frac{6 \cdot EI_z}{L^2 (1 + \Phi_y)} \cdot v_i + \frac{EI_z \cdot (2 - \Phi_y)}{L (1 + \Phi_y)} \cdot \theta_{zi} - \frac{6 \cdot EI_z}{L^2 (1 + \Phi_y)} \cdot v_j + \frac{EI_z \cdot (4 + \Phi_y)}{L (1 + \Phi_y)} \cdot \theta_{zj} \quad (1.1.24)$$

Iz uvjeta ravnoteže za čvorne sile i momente dobiva se:

$$F_{yi} + F_{yj} = 0 \quad (1.1.25)$$

$$M_{zi} + M_{zj} + F_{yj} \cdot L = 0 \quad (1.1.26)$$

iz čega se može dobiti da su:

$$F_{yi} = -F_{yj} = \frac{12 \cdot EI_z}{L^3 (1 + \Phi_y)} \cdot v_i + \frac{6 \cdot EI_z}{L^2 (1 + \Phi_y)} \cdot \theta_{zi} - \frac{12 \cdot EI_z}{L^3 (1 + \Phi_y)} \cdot v_i + \frac{6 \cdot EI_z}{L^2 (1 + \Phi_y)} \cdot \theta_{zj} \quad (1.1.27)$$

$$M_{zi} = -M_{zj} - F_{yj} \cdot L = \frac{6 \cdot EI_z}{L^2 (1 + \Phi_y)} \cdot v_i + \frac{EI_z \cdot (4 + \Phi_y)}{L (1 + \Phi_y)} \cdot \theta_{zi} - \frac{6 \cdot EI_z}{L^2 (1 + \Phi_y)} \cdot v_j + \frac{EI_z \cdot (2 - \Phi_y)}{L (1 + \Phi_y)} \cdot \theta_{zj} \quad (1.1.28)$$

Uspoređujući konačni rezultat

$$
\begin{aligned}
F_i &= \frac{12\cdot EI_z}{L^3\left(1+\Phi_y\right)}\cdot v_i + \frac{6\cdot EI_z}{L^2\left(1+\Phi_y\right)}\cdot \theta_{zi} - \frac{12\cdot EI_z}{L^3\left(1+\Phi_y\right)}\cdot v_i + \frac{6\cdot EI_z}{L^2\left(1+\Phi_y\right)}\cdot \theta_{zj} \\
F_j &= \frac{6\cdot EI_z}{L^2\left(1+\Phi_y\right)}\cdot v_i + \frac{EI_z\cdot\left(4+\Phi_y\right)}{L\left(1+\Phi_y\right)}\cdot \theta_{zi} - \frac{6\cdot EI_z}{L^2\left(1+\Phi_y\right)}\cdot v_j + \frac{EI_z\cdot\left(2-\Phi_y\right)}{L\left(1+\Phi_y\right)}\cdot \theta_{zj} \\
M_{zi} &= -\frac{12\cdot EI_z}{L^3\left(1+\Phi_y\right)}\cdot v_i - \frac{6\cdot EI_z}{L^2\left(1+\Phi_y\right)}\cdot \theta_{zi} + \frac{12\cdot EI_z}{L^3\left(1+\Phi_y\right)}\cdot v_j - \frac{6\cdot EI_z}{L^2\left(1+\Phi_y\right)}\cdot \theta_{zj} \\
M_{zj} &= \frac{6\cdot EI_z}{L^2\left(1+\Phi_y\right)}\cdot \delta_2 + \frac{EI_z\cdot\left(2-\Phi_y\right)}{L\left(1+\Phi_y\right)}\cdot \theta_{zi} - \frac{6\cdot EI_z}{L^2\left(1+\Phi_y\right)}\cdot \delta_9 + \frac{EI_z\cdot\left(4+\Phi_y\right)}{L\left(1+\Phi_y\right)}\cdot \theta_{zi}
\end{aligned}
\tag{1.1.29}
$$

s općom formulacijom konačnih elemenata

$$
\mathbf{f} = \mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\delta} \tag{1.1.30}
$$

može se zapisati

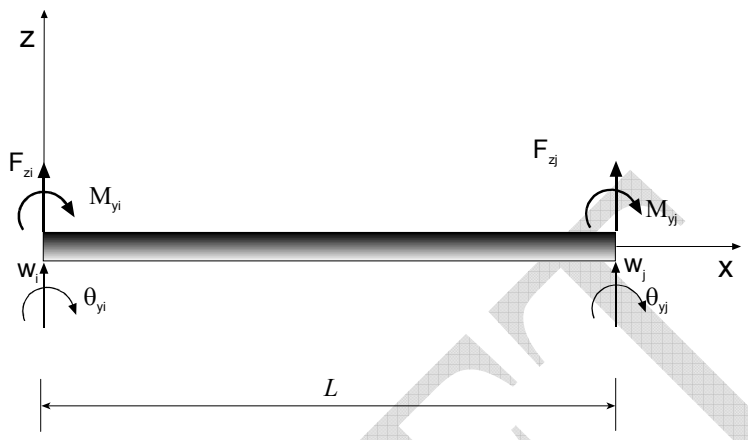
$$
\begin{Bmatrix} F_{yi} \\ M_{zi} \\ F_{yj} \\ M_{zj} \end{Bmatrix} = \frac{EI_z}{\left(1+\Phi_y\right)L^3}\begin{bmatrix} 12 & & & Symm \\ 6L & \left(4+\Phi_y\right)L^2 & & \\ -12 & -6L & 12 & \\ 6L & \left(2-\Phi_y\right)L^2 & -6L & \left(4+\Phi_y\right)L^2 \end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_{zi} \\ v_j \\ \theta_{zj} \end{Bmatrix} \tag{1.1.31}
$$

gdje je

$$
\mathbf{k}_v = \frac{EI_z}{\left(1+\Phi_y\right)L^3}\begin{bmatrix} 12 & & & Symm \\ 6L & \left(4+\Phi_y\right)L^2 & & \\ -12 & -6L & 12 & \\ 6L & \left(2-\Phi_y\right)L^2 & -6L & \left(4+\Phi_y\right)L^2 \end{bmatrix} \tag{1.1.32}
$$

matrica krutosti za savijanje u xy ravnini.

Konačni element za savijanje u xz ravnini



Sl. 1.2 Sile i pomaci na konačnom elementu za savijanje u xz ravnini

Na isti način kao i za savijanje u xy ravnini može se pokazati da je jednadžba konačnog elementa za savijanje u xz ravnini:

$$\begin{Bmatrix} F_{zi} \\ M_{yi} \\ F_{zj} \\ M_{yj} \end{Bmatrix} = \frac{EI_y}{(1+\Phi_z)L^3} \begin{bmatrix} 12 & & & Symm \\ -6L & (4+\Phi_z)L^2 & & \\ -12 & 6L & 12 & \\ -6L & (2-\Phi_z)L^2 & 6L & (4+\Phi_z)L^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{yi} \\ w_j \\ \theta_{yj} \end{Bmatrix} \tag{0.1}$$

gdje je

$$\mathbf{k}_w = \frac{EI_y}{(1+\Phi_z)L^3} \begin{bmatrix} 12 & & & Symm \\ -6L & (4+\Phi_z)L^2 & & \\ -12 & 6L & 12 & \\ -6L & (2-\Phi_z)L^2 & 6L & (4+\Phi_z)L^2 \end{bmatrix} \tag{0.2}$$

matrica krutosti za savijanje u xz ravnini, s tim da je

$$\Phi_z = \frac{12 \cdot EI_y}{L^2 \cdot GA_z} \tag{0.3}$$