

Drugi kolokvij iz kolegija
OPĆA TEORIJA SUSTAVA
17.1.2019.

Zadatak 1. (50 bodova) Dinamika sustava u prostoru stanja opisana je sljedećom matričnom formom

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 8 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}.$$

gdje su x_1 , x_2 , x_3 varijable stanja, a u_1 , u_2 , u_3 varijable upravljanja. Provedite sintezu linearnog statičkog regulatora po svim varijablama stanja tako da matrica koeficijenata zatvorenog sustava ima Frobeniusovu formu sa svojstvenim vrijednostima $\lambda_{d1} = -1$, $\lambda_{d2} = -3$, $\lambda_{d3} = -5$.

Zadatak 2. (50 bodova) Dinamika homogenog sustava u prostoru stanja opisana je sljedećom matričnom formom

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Komentirajte stabilnost ravnotežnog stanja sustava u smislu Ljapunova. Izvedite Ljapunovljevu jednadžbu linearnog homogenog sustava u općem slučaju.

RJEŠENJA

Zadatak 1.

Željeni karakteristični polinom je

$$(\lambda - \lambda_{d1})(\lambda - \lambda_{d2})(\lambda - \lambda_{d3}) = (\lambda + 1)(\lambda + 3)(\lambda + 5) = \lambda^3 + 9\lambda^2 + 23\lambda + 15.$$

Željena matrica koeficijenata zatvorenog sustava je

$$\mathbf{A}_{cl} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -15 & -23 & -9 \end{bmatrix}.$$

Linearni statički regulator po svim varijablama stanja je

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K} \mathbf{x} = - \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Budući da je matrica ulaza \mathbf{B} regularna, iz jednadžbe $\mathbf{A}_{cl} = \mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K}$ direktno se može izračunati matrica pojačanja regulatora

$$\mathbf{K} = \mathbf{B}^{-1} (\mathbf{A} - \mathbf{A}_{cl}) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & \frac{33}{2} \\ 2 & -4 & -\frac{23}{2} \\ 6 & 7 & \frac{21}{2} \end{bmatrix}.$$

Zadatak 2.

Za linearni homogeni sustav $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x}$ uzimamo kandidata za Ljapunovljevu funkciju

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{P}^T > \mathbf{0}.$$

Derivacija Ljapunovljeve funkcije je

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}) &= \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{x} = \\ &= \mathbf{x}^T \underbrace{(\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A})}_{-\mathbf{Q}} \mathbf{x}, \\ \dot{V}(\mathbf{x}) &= -\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}, \quad \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T > \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Rješavanjem Ljapunovljeve jednadžbe

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} = -\mathbf{Q},$$

za zadani sustav i za $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$ dobiva se

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Budući da su svojstvene vrijednosti matrice \mathbf{P} $\lambda_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{4}$ pozitivne, ravnotežno stanje sustava je stabilno.