

Drugi kolokvij iz kolegija
OPĆA TEORIJA SUSTAVA
 17.1.2018.

Zadatak 1. Dinamika sustava u prostoru stanja opisana je sljedećom matričnom formom

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u.$$

Provedite sintezu linearnog statičkog regulatora po svim varijablama stanja tako da svojstvene vrijednosti matrice koeficijenata zatvorenog sustava (polovi sustava) budu $\lambda_{d1} = -1$, $\lambda_{d2} = -2 + 4j$, $\lambda_{d3} = -2 - 4j$, a stacionarno stanje varijable x_1 iznosi 1.

Zadatak 2. Dinamika sustava u prostoru stanja opisana je sljedećom matričnom formom

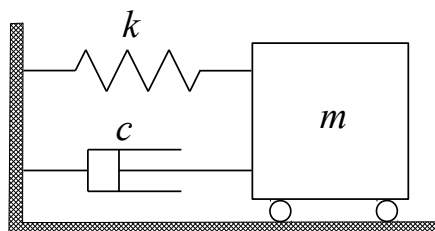
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}.$$

Provedite sintezu linearnog statičkog regulatora po svim varijablama stanja oblika $\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x}$ tako da svojstvene vrijednosti matrice koeficijenata zatvorenog sustava (polovi sustava) budu $\lambda_{d1} = -2$, $\lambda_{d2} = -3$.

Uputa: Ukoliko smatrate potrebnim koristite sljedeće svojstvo matrica. Ako je matrica \mathbf{M} dimenzije $m \times n$ i $\text{rang}(\mathbf{M}) = n$ tada matrica \mathbf{M} ima lijevi inverz prema izrazu $(\mathbf{M}^T \mathbf{M})^{-1} \mathbf{M}^T$, a ako je $\text{rang}(\mathbf{M}) = m$ tada matrica \mathbf{M} ima desni inverz prema izrazu $\mathbf{M}^T (\mathbf{M} \mathbf{M}^T)^{-1}$.

Zadatak 3. Dinamički sustav prikazan na slici 1 ima linearne karakteristike opruge i prigušnice pri čemu su $m = 10$ kg, $k = 10$ N/m, $c = 1$ Ns/m. Na sustav je potrebno primijeniti zakon upravljanja (horizontalna ulazna sila) oblika $u = -k_p y - k_d \dot{y}$, gdje je y horizontalni pomak sustava. Odredite uvjete stabilnosti na pojačanja k_p i k_d u smislu Ljapunova. Na osnovu LaSalleovog principa invarijantnosti komentirajte asimptotsku stabilnost sustava.

Uputa: Kandidata za Ljapunovljevu funkciju uzmite ukupnu energiju sustava.



Slika 1.

RJEŠENJA

Zadatak 1.

Regulator stanja je oblika

$$u = -\mathbf{K} \mathbf{x} + w, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Dinamika zatvorenog sustava je

$$\dot{\mathbf{x}} = \underbrace{(\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K})}_{\mathbf{A}_{cl}} \mathbf{x} + \mathbf{B} w. \quad (2)$$

Karakteristični polinom zatvorenog sustava je

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}_{cl}| = \lambda^3 + (k_3 + 6)\lambda^2 + (k_2 + 5)\lambda + k_1, \quad (3)$$

dok je željeni polinom

$$(\lambda + 1)(\lambda + 2 - 4j)(\lambda + 2 + 4j) = \lambda^3 + 5\lambda^2 + 24\lambda + 20. \quad (4)$$

Izjednačavanjem prethodna dva polinoma dobivaju se elementi matrice \mathbf{K}

$$k_1 = 20, \quad k_2 = 19, \quad k_3 = -1, \quad (5)$$

pa je matrica koeficijenata zatvorenog sustava

$$\mathbf{A}_{cl} = \mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -20 & -24 & -5 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Jednadžba stacionarnog stanja je

$$\mathbf{A}_{cl} \mathbf{x}^* = -\mathbf{B} w, \quad (7)$$

iz koje slijedi da za $x_1^* = 1$ treba biti $w = 20$.

Zakon upravljanja u konačnom obliku je

$$u = - \begin{bmatrix} 20 & 19 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + 20. \quad (8)$$

Zadatak 2.

1. NAČIN:

Regulator stanja je oblika

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K} \mathbf{x}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}, \quad (9)$$

tj. varijable upravljanja su

$$\begin{aligned} u_1 &= -k_{11}x_1 - k_{12}x_2, \\ u_2 &= -k_{21}x_1 - k_{22}x_2. \end{aligned} \quad (10)$$

Ako uvedemo supstituciju $u_a = u_1 + u_2$ tada imamo

$$u_a = -\mathbf{K}_a \mathbf{x}, \quad \mathbf{K}_a = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}, \quad k_1 = k_{11} + k_{21}, \quad k_2 = k_{12} + k_{22}, \quad (11)$$

čime matrica ulaza sustava postaje

$$\mathbf{B}_a = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Matrica koeficijenata zatvorenog sustava je

$$\mathbf{A}_{cl} = \mathbf{A} - \mathbf{B}_a \mathbf{K}_a = \begin{bmatrix} -k_1 - 2 & 1 - k_2 \\ 1 - 2k_2 & -2k_2 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Karakteristični polinom zatvorenog sustava je

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}_{cl}| = \lambda^2 + (k_1 + 2k_2 + 2)\lambda + 2k_1 + 5k_2 - 1, \quad (14)$$

dok je željeni polinom

$$(\lambda + 2)(\lambda + 3) = \lambda^2 + 5\lambda + 6. \quad (15)$$

Izjednačavanjem prethodna dva polinoma dobivaju se elementi matrice \mathbf{K}_a

$$k_1 = 1, \quad k_2 = 1, \quad (16)$$

što znači da će se željeni polovi polaznog sustava dobiti za bilo koje elemente matrice \mathbf{K} polaznog regulatora stanja koji ispunjavaju

$$k_{11} + k_{21} = 1, \quad k_{12} + k_{22} = 1. \quad (17)$$

2. NAČIN:

Bez uvođenja supstitucije matrica koeficijenata zatvorenog sustava je

$$\mathbf{A}_{cl} = \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -2 - k_{11} - k_{21} & 1 - k_{12} - k_{22} \\ 1 - 2k_{11} - 2k_{21} & -2k_{12} - 2k_{22} \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Karakteristični polinom zatvorenog sustava je

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}_{cl}| = \lambda^2 + (k_{11} + 2k_{12} + k_{21} + 2k_{22} + 2)\lambda + 2k_{11} + 5k_{12} + 2k_{21} + 5k_{22} - 1, \quad (19)$$

dok je željeni polinom

$$(\lambda + 2)(\lambda + 3) = \lambda^2 + 5\lambda + 6. \quad (20)$$

Izjednačavanjem prethodna dva polinoma dobivaju se sljedeće jednadžbe

$$\begin{aligned} k_{11} + 2k_{12} + k_{21} + 2k_{22} &= 3, \\ 2k_{11} + 5k_{12} + 2k_{21} + 5k_{22} &= 7. \end{aligned} \quad (21)$$

Dobro je uočiti da se i ovdje može uvesti supstitucija, ili se prethodne jednadžbe mogu zapisati u matričnom obliku za čije se rješavanje onda može primijeniti uputa

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & 5 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \begin{bmatrix} k_{11} \\ k_{12} \\ k_{21} \\ k_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad (22)$$

$$\begin{bmatrix} k_{11} \\ k_{12} \\ k_{21} \\ k_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{M}^T (\mathbf{M}\mathbf{M}^T)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Zadatak 3.

Dinamika sustava s uključenim zakonom upravljanja je

$$10\ddot{y} + (1 + k_d)\dot{y} + (10 + k_p)y = 0. \quad (23)$$

Kandidata za Ljapunovljevu funkciju uzimamo ukupnu energiju sustava

$$V(y, \dot{y}) = 5\dot{y}^2 + \frac{1}{2}(10 + k_p)y^2. \quad (24)$$

Derivacija Ljapunovljeve funkcije je

$$\dot{V}(y, \dot{y}) = 10\dot{y}\ddot{y} + (10 + k_p)y\dot{y} = (10\ddot{y} + (10 + k_p)y)\dot{y} = -(1 + k_d)\dot{y}^2. \quad (25)$$

Uvjeti stabilnosti po Ljapunovu su

$$\begin{aligned} V(y, \dot{y}) > 0 &\Rightarrow k_p > -10, \\ \dot{V}(y, \dot{y}) &\leq 0 \Rightarrow k_d > -1. \end{aligned} \quad (26)$$

LaSalleov princip invarijantnosti pokazuje da skup $\Omega \triangleq \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 | \dot{V}(\mathbf{x}) = 0\}$, gdje je $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2]^T = [y \ \dot{y}]^T$ ne sadrži druga rješenja osim trivijalnog, tj. ravnotežno stanje je asimptotski stabilno.