

Prvi kolokvij iz kolegija
OPĆA TEORIJA SUSTAVA
 11.12.2018.

Zadatak 1. (30 bodova) Dinamika linearnog vremenski kontinuiranog sustava opisana je sljedećim diferencijalnim jednadžbama

$$\begin{aligned}\dot{z}_1(t) + \dot{z}_1(t) - 6z_1(t) + z_2(t) &= u_1(t), \\ \ddot{z}_2(t) - \dot{z}_2(t) + 3z_1(t) &= \dot{u}_1(t) + u_2(t),\end{aligned}$$

pri čemu su u_1 i u_2 ulazne varijable sustava. Zapišite dinamiku sustava u obliku prostora stanja ako je izlazna varijabla $y = 2z_1 + \dot{z}_2$.

Zadatak 2. (35 bodova) Dinamika linearnog vremenski kontinuiranog sustava opisana je u prostoru stanja sljedećom matričnom formom

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{v},$$

gdje je \mathbf{x} vektor varijabli stanja, a \mathbf{v} je realni vektor konstanti. Neka za matricu koeficijenata $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ vrijedi $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$.

- a) Izvedite eksplicitni izraz za eksponencijalnu matricu $e^{\mathbf{A}t}$.
- b) Pokažite da je opće rješenje sustava u slučaju kada su početni uvjeti jednaki nuli oblika

$$\mathbf{x}(t) = [\mathbf{A}(e^t - 1) + t(\mathbf{I} - \mathbf{A})] \mathbf{v},$$

pri čemu je \mathbf{I} jedinična matrica.

NAPOMENA: Matrica \mathbf{A} je singularna osim u slučaju jedinične matrice.

Zadatak 3. (35 bodova) Linearni vremenski kontinuirani sustav opisan je matricama u prostoru stanja

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ a+b \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} b & 1 & a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{0},$$

gdje su \mathbf{A} matrica koeficijenata, \mathbf{B} matrica ulaza, \mathbf{C} matrica izlaza i \mathbf{D} matrica prijenosa. Na osnovu kanonske forme sustava, tj. primjenom modalne analize, odredite za koje kombinacije vrijednosti parametara a i b sustav nema potpuno: a) upravljiva stanja, b) osmotriva stanja.

NAPOMENA: Tamo gdje je potrebno, inverz matrice računajte primjenom Cayley-Hamiltonovog teorema.

RJEŠENJA

Zadatak 1.

Možemo na primjer uvesti sljedeće supstitucije

$$\begin{aligned}x_1 &= \dot{z}_1 + z_1, \\x_2 &= z_1, \\x_3 &= \dot{z}_2 - z_2 - u_1, \\x_4 &= z_2,\end{aligned}$$

na osnovu kojih dobivamo jednadžbe stanja

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 6z_1 - z_2 + u_1 = 6x_2 - x_4 + u_1, \\ \dot{x}_2 &= x_1 - z_1 = x_1 - x_2, \\ \dot{x}_3 &= -3z_1 + u_2 = -3x_2 + u_2, \\ \dot{x}_4 &= x_3 + z_2 + u_1 = x_3 + x_4 + u_1,\end{aligned}$$

i jednadžbu izlaza

$$y = 2z_1 + \dot{z}_2 = 2x_2 + x_3 + x_4 + u_1.$$

U matričnom zapisu prostor stanja je

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix},$$
$$y = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}.$$

Zadatak 2.

a) Funkciju $e^{\mathbf{A}t}$ možemo razviti u Taylorov red

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \mathbf{A}^k = \mathbf{I} + t\mathbf{A} + \frac{t^2}{2!} \mathbf{A}^2 + \frac{t^3}{3!} \mathbf{A}^3 + \frac{t^4}{4!} \mathbf{A}^4 + \dots$$

Za matricu \mathbf{A} vrijedi sljedeće (idempotentna matrica)

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^2 &= \mathbf{A}, \\ \mathbf{A}^3 &= \mathbf{A}^2 \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{A} = \mathbf{A}^2 = \mathbf{A}, \\ \mathbf{A}^4 &= \mathbf{A}^3 \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{A} = \mathbf{A}^2 = \mathbf{A}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

tako da Taylorov razvoj matričnog eksponencijala postaje

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}t} &= \mathbf{I} + t\mathbf{A} + \frac{t^2}{2!} \mathbf{A} + \frac{t^3}{3!} \mathbf{A} + \frac{t^4}{4!} \mathbf{A} + \dots \\ &= \mathbf{I} + \left(t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \dots \right) \mathbf{A}. \end{aligned}$$

Budući da je $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \dots$ dio gornjeg izraza u zagradi jednak je $e^t - 1$ što znači da je eksplicitni izraz za eksponencijalnu matricu

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + (e^t - 1)\mathbf{A}.$$

b) Opće rješenje nehomogenog linearnog vremenski kontinuiranog sustava je

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{v} d\tau.$$

Budući da su početni uvjeti jednaki nuli imamo sljedeće

$$\mathbf{x}(t) = \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{v} d\tau = e^{\mathbf{A}t} \int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau} d\tau \cdot \mathbf{v}.$$

Nadalje,

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau} d\tau &= \int_0^t \left(\mathbf{I} - \tau \mathbf{A} + \frac{\tau^2}{2!} \mathbf{A}^2 - \frac{\tau^3}{3!} \mathbf{A}^3 + \frac{\tau^4}{4!} \mathbf{A}^4 - \dots \right) d\tau = \\ &= \mathbf{I}t - \frac{t^2}{2!} \mathbf{A} + \frac{t^3}{3!} \mathbf{A}^2 - \frac{t^4}{4!} \mathbf{A}^3 + \frac{t^5}{5!} \mathbf{A}^4 - \dots, \end{aligned}$$

i uzimajući u obzir da je matrica \mathbf{A} idempotentna

$$\int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau} d\tau = \mathbf{I}t - \left(\frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^5}{5!} + \dots \right) \mathbf{A}.$$

Budući da je $e^{-t} = 1 - t + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} - \dots$ dio gornjeg izraza u zagradi jednak je $e^{-t} - 1 + t$ iz čega slijedi

$$\int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau} d\tau = \mathbf{I}t + (1 - t - e^{-t}) \mathbf{A}.$$

Sada je opće rješenje

$$\mathbf{x}(t) = \underbrace{[\mathbf{I} + (e^t - 1)\mathbf{A}]}_{e^{\mathbf{A}t}} \cdot \underbrace{[\mathbf{I}t + (1 - t - e^{-t})\mathbf{A}]}_{\int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau} d\tau} \cdot \mathbf{v}.$$

Pojednostavljivanjem (npr. sve pomnožiti i tražiti zajedničke faktore) gornjeg izraza i ponovo uzimajući u obzir da je matrica \mathbf{A} idempotentna dobiva se

$$\mathbf{x}(t) = [\mathbf{A}(e^t - 1) + t(\mathbf{I} - \mathbf{A})] \mathbf{v}.$$

Zadatak 3.

Svojstvene vrijednosti matrice \mathbf{A} su $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Budući da je matrica \mathbf{A} u Frobeniusovoj formi za modalnu matricu možemo izabrati

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & 1 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & 2\lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Inverz matrice \mathbf{P} potrebno je izračunati primjenom Cayley-Hamiltonovog teorema

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{P}) = \lambda^3 - \lambda^2 + 2\lambda - 4, \\ p(\mathbf{P}) &= \mathbf{P}^3 - \mathbf{P}^2 + 2\mathbf{P} - 4\mathbf{I} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Kada gornji izraz pomnožimo s \mathbf{P}^{-1} dobivamo

$$\mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{4} (\mathbf{P}^2 - \mathbf{P} + 2\mathbf{I}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Sada možemo izračunati transformirane matrice sustava

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{A}} &= \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \hat{\mathbf{B}} &= \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{a+b}{4} \\ \frac{-a-b}{2} \\ 1 + \frac{a+b}{2} \end{bmatrix}, \\ \hat{\mathbf{C}} &= \mathbf{C} \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 4a + b - 2 & b & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Uvjet potpune upravljivosti stanja je da matrica $\hat{\mathbf{B}}$ nema niti jedan nul-redak iz čega slijedi da sustav nema potpuno upravljiva stanja za sljedeće kombinacije parametara: $a = -b$ ili $a = -2 - b$.

Uvjet potpune osmotrivosti stanja je da matrica $\hat{\mathbf{C}}$ nema niti jedan nul-stupac iz čega slijedi da sustav nema potpuno osmotriva stanja za sljedeće kombinacije parametara: $b = 2 - 4a$ ili $b = 0$.