

Prvi kolokvij iz kolegija
OPĆA TEORIJA SUSTAVA RI
24.11.2021.

Zadatak 1. (25 bodova) Dinamika linearnog vremenski kontinuiranog sustava opisana je sljedećim diferencijalnim jednadžbama

$$\begin{aligned}\ddot{z}_1(t) + 2z_1(t) + 5\dot{z}_2(t) &= \dot{u}_1(t), \\ \ddot{z}_2(t) - z_2(t) - 3\dot{z}_1(t) &= \dot{u}_1(t) + \dot{u}_2(t),\end{aligned}$$

pri čemu su u_1 i u_2 ulazne varijable sustava. Zapišite dinamiku sustava u matričnom obliku prostora stanja ako su izlazne varijable $y_1 = z_1 + z_2$ i $y_2 = \dot{z}_1 + \dot{z}_2$.

Zadatak 2. (40 bodova) Linearni vremenski kontinuirani sustav opisan je u prostoru stanja sljedećom matričnom formom

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Računanjem matričnog eksponencijala (barem dimenzije 2×2), odredite $x_1(t)$, $x_2(t)$ i $x_3(t)$ ako su početni uvjeti $x_1(0) = x_{10}$, $x_2(0) = x_{20}$ i $x_3(0) = x_{30}$. Komentirajte stabilnost sustava.

Zadatak 3. (35 bodova) Linearni vremenski kontinuirani sustav opisan je matricama u prostoru stanja

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 9 & -3 & -5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{0},$$

gdje su \mathbf{A} matrica koeficijenata, \mathbf{B} matrica ulaza, \mathbf{C} matrica izlaza i \mathbf{D} matrica prijenosa. Provedite transformaciju sustava u modalnu formu. Ukoliko je transformacija matrice \mathbf{A} u Jordanovoj formi pokažite opravdanost izbora takve matrice. Inverz modalne matrice računajte primjenom Cayley-Hamiltonovog teorema.

NAPOMENA: Sva rješenja moraju biti u realnom skupu ili prostoru.