

Prvi kolokvij iz kolegija
OPĆA TEORIJA SUSTAVA
 8.12.2017.

Zadatak 1. (30 bodova) Dinamika linearnog vremenski kontinuiranog sustava opisana je sljedećom matricom prijenosnih funkcija između vektora izlaza i ulaza

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} \frac{4s+8}{s^2+4s+3} & \frac{4s+10}{s^2+5s+6} \end{bmatrix}.$$

Zapišite dinamiku sustava u obliku prostora stanja izborom kanonskih varijabli stanja ako je matrica izlaza $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Matrica koeficijenata treba biti dijagonalna.

Zadatak 2. (35 bodova) Računanjem matričnog eksponencijala (barem dimenzije 2×2), odredite rješenja $y(t)$ i $z(t)$ linearnog vremenski kontinuiranog sustava

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) + y(t) &= t, \\ \ddot{z}(t) + 2\dot{z}(t) + z(t) + y(t) &= 0, \end{aligned}$$

za početne uvjete $y(0) = 1$, $z(0) = 1$ i $\dot{z}(0) = 1$.

Napomena: Ako se do rješenja došlo bez računanja matričnog eksponencijala tada se dobiva maksimalno 30 bodova.

Zadatak 3. (30 bodova) Linearni vremenski kontinuirani sustav opisan je matricama u prostoru stanja

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ a \\ b \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & b \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{0},$$

gdje su \mathbf{A} matrica koeficijenata, \mathbf{B} matrica ulaza, \mathbf{C} matrica izlaza i \mathbf{D} matrica prijenosa. Za koje kombinacije vrijednosti parametara a i b sustav nema potpuno: a) upravljiva stanja, b) mjerljiva stanja, c) istodobno upravljiva i mjerljiva stanja.

Bonus zadatak 4. (15 bodova) Neka je dinamika linearnog vremenski kontinuiranog sustava opisana u prostoru stanja

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C} \mathbf{x}. \end{aligned}$$

Matrica \mathbf{A} je u Frobeniusovoj formi i ima karakteristični polinom $\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1$. Odredite matricu transformacija kojom bi preveli sustav u kanonsku formu tako da transformirane matrice sustava $\hat{\mathbf{A}}$, $\hat{\mathbf{B}}$, $\hat{\mathbf{C}}$ budu realne.

RJEŠENJA

Zadatak 1. Iz zadane matrice prijenosnih funkcija između vektora izlaza i ulaza slijedi

$$Y(s) = \begin{bmatrix} \frac{4s+8}{s^2+4s+3} & \frac{4s+10}{s^2+5s+6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix},$$
$$Y(s) = \frac{4s+8}{s^2+4s+3}U_1(s) + \frac{4s+10}{s^2+5s+6}U_2(s), \quad (1)$$

$$Y(s) = 2\frac{U_1(s)}{s+1} + 2\frac{U_1(s)}{s+3} + 2\frac{U_2(s)}{s+2} + 2\frac{U_2(s)}{s+3}.$$

Budući da je matrica izlaza $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, tj. $Y(s) = X_1(s) + X_2(s) + X_3(s)$, iz gornjeg izraza izabiremo

$$X_1(s) = \frac{2U_1(s)}{s+1}, \quad X_2(s) = \frac{2U_2(s)}{s+2}, \quad X_3(s) = \frac{2U_1(s) + 2U_2(s)}{s+3}, \quad (2)$$

iz kojih slijede diferencijalne jednačbe:

$$\dot{x}_1 = -x_1 + 2u_1,$$

$$\dot{x}_2 = -2x_2 + 2u_2, \quad (3)$$

$$\dot{x}_3 = -3x_3 + 2u_1 + 2u_2.$$

Dinamika sustava u obliku prostora stanja je:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}.$$

Zadatak 2. Prvu jednadžbu sustava možemo napisati kao

$$\dot{y}(t) = -y(t) + t, \quad (5)$$

koja predstavlja nehomogeni sustav čije rješenje je oblika

$$y(t) = e^{\mathbf{A}t} y(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} u(\tau) d\tau. \quad (6)$$

Za zadanu diferencijalnu jednadžbu imamo: $y(0) = 1$, $\mathbf{A} = -1$, $\mathbf{B} = 1$, $u(t) = t$, što uvršteno u gornji izraz nakon rješavanja integrala daje

$$y(t) = 2e^{-t} + t - 1. \quad (7)$$

Sada gornje rješenje za $y(t)$ uvrstimo u drugu diferencijalnu jednadžbu:

$$\ddot{z}(t) + 2\dot{z}(t) + z(t) = -2e^{-t} - t + 1. \quad (8)$$

Izborom varijabli stanja $x_1 = z$ i $x_2 = \dot{z}$ gornju diferencijalnu jednadžbu možemo zapisati kao

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \underbrace{(-2e^{-t} - t + 1)}_{u(t)}, \quad (9)$$

koja također predstavlja nehomogeni sustav čije rješenje je oblika

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} u(\tau) d\tau. \quad (10)$$

za $\mathbf{x}(0) = [z(0) \quad \dot{z}(0)]^T$.

Primjenom Cayley-Hamiltonovg teorema za višestruke svojstvene vrijednosti matrice \mathbf{A} dobiva se

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} e^{-t} + te^{-t} & te^{-t} \\ -te^{-t} & e^{-t} - te^{-t} \end{bmatrix} \quad (11)$$

Nakon uvrštavanja gornje matrice u izraz (10) i rješavanja integrala dobiva se

$$x_1(t) = z(t) = 3 - t - (2 - t^2)e^{-t}. \quad (12)$$

Zadatak 3. Matrica upravljivosti stanja je

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ a & a+b & a+3b \\ b & 2b & 4b \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Sustav ima potpuno upravljiva stanja ako je $\text{rank}(\mathbf{E}) = n$, gdje je $n = 3$ red sustava. Budući da je \mathbf{E} kvadratna matrica imamo $\text{rank}(\mathbf{E}) = n$ ako i samo ako $\det(\mathbf{E}) \neq 0$, pa sustav neće imati potpuno upravljiva stanja za

$$\det(\mathbf{E}) = -3ba^2 + 4b^2a - b^3 = 0 \Rightarrow a = b, \quad a = \frac{1}{3}b, \quad b = 0. \quad (14)$$

Matrica mjerljivosti stanja sustava je

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & b \\ -1 & 1 & 2b \\ 1 & 0 & 4b+1 \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Sustav ima potpuno mjerljiva stanja ako je $\text{rank}(\mathbf{H}) = n$, gdje je $n = 3$ red sustava. Budući da je \mathbf{H} kvadratna matrica imamo $\text{rank}(\mathbf{H}) = n$ ako i samo ako $\det(\mathbf{H}) \neq 0$, pa sustav neće imati potpuno mjerljiva stanja za

$$\det(\mathbf{H}) = 3b + 1 = 0 \Rightarrow b = -\frac{1}{3}. \quad (16)$$

Sustav nema istodobno upravljiva i mjerljiva stanja za $b = -\frac{1}{3}$, $a = -\frac{1}{3}$ ili $a = -\frac{1}{9}$.

Zadatak 4. Matrica koeficijenata \mathbf{A} je u Frobeniusovoj formi i ima svojstvene vrijednosti $\lambda_{1,2} = \pm j$, $\lambda_{3,4} = \pm j$, pa modalnu matricu sustava možemo izabrati u Vandermondovoj formi uz odgovarajuću modifikaciju s obzirom da imamo višestruke svojstvene vrijednosti. Modifikacija podrazumijeva derivaciju stupaca po svojstvenim vrijednostima koje se ponavljaju. Na primjer uzimajući $\lambda_1 = \lambda_3 = j$, $\lambda_2 = \lambda_4 = -j$ dobivamo:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & 1 & 1 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & 2\lambda_1 & 2\lambda_2 \\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3 & 3\lambda_1^2 & 3\lambda_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ j & -j & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2j & -2j \\ -j & j & -3 & -3 \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Uvodimo matricu

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}j & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}j \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}j \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Tražena matrica transformacija je:

$$\mathbf{T} = \mathbf{PK} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \end{bmatrix}. \quad (19)$$