

Sveučilište u Zagrebu
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE
Zavod za robotiku i automatizaciju proizvodnih sustava
Katedra za strojarsku automatiku

Računalna matematika

Uvod u matematički programski paket

A. Jokić; V. Milić; F. Maletić

Zagreb, 2020./2021.

Sadržaj

- 1 Polja, vektori, matrice
- 2 MATLAB – matrični laboratorij
 - Početak rada
 - Tipovi podataka
 - Operatori
 - Funkcije
 - Vektori, matrice, polinomi
- 3 Primjeri
- 4 Preporučena literatura

1 Polja, vektori, matrice

2 MATLAB – matrični laboratorij

- Početak rada
- Tipovi podataka
- Operatori
- Funkcije
- Vektori, matrice, polinomi

3 Primjeri

4 Preporučena literatura

POLJA, VEKTORI, MATRICE

- Polje se može promatrati kao sustavno uređena grupa sličnih objekata obično poredanih u retke i stupce.
- U računarskim znanostima važno mjesto zauzimaju poljima orijentirani ili višedimenzionalni programski jezici (engl. array programming languages) kao što su npr. MATLAB, Octave, R, NumPy i SciPy iz Pythona, itd.
- Glavna karakteristika ovih programskih jezika je poopćenje skalarnih operacija, tj. vektorizacija.
- Matrica se može promatrati kao dvodimenzionalno polje čiji su svi elementi podaci istog tipa (cijeli, realni ili kompleksni brojevi) koji su raspoređeni u retke i stupce. Matrica je matematički objekt.

- Matrica \mathbf{A} s m redaka, n stupaca i s elementima a_{ij} zapisuje se kao

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Takvu matricu zovemo $m \times n$ matrica ili matrica tipa (reda, dimenzije) $m \times n$. Ako vrijedi $m = n$, kažemo da je \mathbf{A} kvadratna matrica reda n .

- Matricu sa samo jednim retkom zovemo matrica redak ili jednoretčana matrica, a matricu sa samo jednim stupcem zovemo matrica stupac ili jednostupčana matrica. Jednostupčane i jednoretčane matrice kraće zovemo vektorima.
- Matricu, čiji su elementi realni brojevi, zovemo realna matrica, a matricu, čiji su elementi kako realni tako i kompleksni brojevi, zovemo kompleksna matrica. S $\mathbb{R}^{m \times n}$ ($\mathbb{C}^{m \times n}$) označavamo skup svih realnih (kompleksnih) $m \times n$ matrica.

- 1 Polja, vektori, matrice
- 2 MATLAB – matrični laboratorij**
 - Početak rada
 - Tipovi podataka
 - Operatori
 - Funkcije
 - Vektori, matrice, polinomi
- 3 Primjeri
- 4 Preporučena literatura

POČETAK RADA

● RADNO OKRUŽENJE

- Command window – radni prozor
- Workspace – memorijski radni prostor (who – varijable)
- Current directory – trenutni radni prostor
- Command history – povijesni redoslijed naredbi

● ZNAKOVI NA NAREDBENOJ LINIJI

- >> - MATLABov upit korisniku, engl. prompt
- , - odvajanje naredbi
- ; - sprječavanje ispisa rezultata
- ... - nastavak naredbe u idućoj liniji
- % - komentar (od znaka udesno)

● ZAGRADE

- () - grupiranje izraza, grupiranje funkcijskih argumenata, indeksiranje matrica
- [] - grupiranje vektorskih (matričnih) elemenata
- { } - polja različitih tipova podataka s klasičnim indeksiranjem

● POMOĆ

>> help - poziva pomoć

>> help ops - pomoć o operatorima

>> help format – pomoć o formatima

>> help elfun – pomoć o elementarnim funkcijama

>> intro - uvod o MATLABu

>> demo - demonstracija primjera

>> lookfor - pretraživanje pojmova

>> CTRL+C - prekid izvođenja

>> quit - završetak rada

TIPOVI PODATAKA

- temeljni tip - kompleksna matrica
- brojevi - double
- znak i niz znakova unutar jednostrukih navodnika - char, string
- funkcijski tip - function handle @ (funkcija kao argument)
- objekti - Java i INLINE object.
- složeni podaci:
 - strukture (engl. structures) - polje različitih tipova podataka, npr. spline, solve, optimizacijski solveri, itd.
 - ćelije (engl. cells) - polje različitih tipova podataka, npr. varargin, varargout, switch-case, itd.

● KONSTANTE I VARIJABLE

- pi - 3.141592...
 - i, j - kompleksne varijable, $\sqrt{-1}$
 - eps - relativna točnost, najmanji iznos između dva realna broja
 - inf, NaN - beskonačno (npr. 1/0) i nije broj (npr 0/0)
 - realmax, realmin - najveći i najmanji realni broj
 - flintmax ili u starijim verzijama bitmax - najveći cijeli broj (floating point integer)
 - ans - varijabla odgovora (answer)
 - ime_varijable - alfanumerički niz znakova, početni znak slovo, bez posebnih znakova, osjetljivost na velika i mala slova.
- Jednom definirana varijabla može se ispisati jednostavnim pozivom imena i tipke enter (return).

OPERATORI

• ARITMETIČKI OPERATORI

- = - pridružba, assignment
- plus, uplus - plus, unarni plus, tj. +
- minus, uminus - minus, unarni minus, tj. -
- mtimes - matično množenje, tj. *
- mldivide - matično „dijeljenje” s lijeva (lijevo invertiranje), tj. \
- mrdivide - matično „dijeljenje” s desna (desno invertiranje), tj. /
- mpower - matično potenciranje, tj. ^

• RELACIJSKI OPERATORI

- eq - jednako, tj. ==
- ne - nejednako, tj. ~=
- lt - manje nego, tj. <
- gt - veće nego, tj. >
- le - manje ili jednako, tj. <=
- ge - veće ili jednako, tj. >=

● OPERATORI NAD ELEMENTIMA

- upotreba Hadamard-ovog ('točka', engl. 'dot') operatora.
- `power` - potenciranje nad poljem, tj. `^`
- `times` - množenje elemenata u polju, tj. `.*`
- `ldivide` - lijevo dijeljenje u polju, tj. `.\`
- `rdivide` - desno dijeljenje u polju, tj. `./`

● Na primjer:

>> `C = A.*B` znači $c_{ij} = a_{ij} \cdot b_{ij}$

>> `C = A./B` znači $c_{ij} = \frac{a_{ij}}{b_{ij}}$

>> `C = A.^B` znači $c_{ij} = a_{ij}^{b_{ij}}$

>> `C = A.^r` znači $c_{ij} = a_{ij}^r$, r je skalar

>> `C = r.^A` znači $c_{ij} = r^{a_{ij}}$, r je skalar

• LOGIČKI OPERATORI

- logički I (AND), među elementima `&`, a među izrazima `&&`
- logički ILI (OR), među elementima `|`, a među izrazima `||`
- logički NE (NOT), znakom `~`
- logički ekskluzivni ILI (XOR)
- `any` - istina (True, 1) ako je bilo koji element vektora različit od nule
- `all` - istina (True, 1) ako su svi elementi vektora različiti od nule

• OPERATORI SKUPOVA

- `union` - unija skupova
- `unique` - jedinstvene vrijednosti skupa.
- `intersect` - presjek skupova
- `setdiff` - razlika skupova
- `setxor` - ex-ili skupova
- `ismember` - istina (True, 1) ako je neki element član (member) skupa

FUNKCIJE

- TVORBA

```
function [iz1, iz2, ...] = ime_funkcije(ul1, ul2, ...)
```

gdje su:

ul1, ul2, ... ulazni argumenti funkcije

iz1, iz2, ... izlazna rješenja funkcije (potprograma)

- POZIV

```
>> [iz1, iz2, ...] = ime_funkcije(ul1, ul2, ...)
```

- ELEMENTARNE MATEMATIČKE FUNKCIJE (ugrađene, engl. built-in)

- Trigonometrijske: `sin()`, `sinh()`, `asin()`, `asinh()`, `cos()`, `cosh()`, `acos()`, `acosh()`, `tan()`, `tanh()`, `atan()`, `atanh()`, `atan2()`, `sec()`, `sech()`, `asec()`, `asech()`, itd.
- Eksponencijalne i logaritamske: `exp()`, `log()`, `log10()`, `log2()`, `pow2()`, `realsqrt()`, `sqrt()`, itd.
- Kompleksne: `abs()`, `angle()`, `complex()`, `conj()`, `imag()`, `real()`, itd.

VEKTORI, MATRICE, POLINOMI

• TVORBA VEKTORA I MATRICA

- Utipkavanjem elemenata vektora unutar [] ili programsko generiranje s pomoću petlje.
- Tvorba s rubovima i korakom {početak}:{korak}:{kraj}
- Ako je korak = 1 može se pisati samo {početak}:{kraj}
- Ako je imamo {početak}:{kraj}, pri čemu je početak > kraj onda će generirani vektor biti prazan (Empty matrix: 1-by-0). U ovom slučaju trebamo zadati negativan korak.
- Za tvorbu posebnih vektora i matrica: linspace(), logspace(), zeros(), ones(), diag(), eye(), itd.

• INDEKSIRANJE ELEMENATA MATRICE

- Matricu indeksno možemo predstaviti kao $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, gdje i predstavlja broj retka, a j predstavlja broj stupca.
- Ako u MATLABu izvršimo naredbu `>> A(i, j)`, pri čemu su i i j cijeli brojevi, tada ćemo dobiti element iz matrice \mathbf{A} koji se nalazi na i -tom retku i j -tom stupcu.

- TVORBA POLINOMA

- Opći oblik polinoma n -tog stupnja je:

$$p(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + c_{n-2} x^{n-2} + \dots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0 = \sum_{k=0}^n c_k x^k$$

- Polinom se u MATLABu predstavlja kao vektor redak (može biti i stupac) čiji su elementi koeficijenti polinoma poredani na sljedeći način



$$p = [c_n \quad c_{n-1} \quad c_{n-2} \quad \dots \quad c_2 \quad c_1 \quad c_0]$$

- Za rad s polinomima u MATLABu postoje ugrađene funkcije: `polyval()`, `roots()`, `polyder()`, `polyint()`, itd.

- 1 Polja, vektori, matrice
- 2 MATLAB – matrični laboratorij
 - Početak rada
 - Tipovi podataka
 - Operatori
 - Funkcije
 - Vektori, matrice, polinomi
- 3 Primjeri
- 4 Preporučena literatura

Pogledati priložene M-datoteke

- 1 Polja, vektori, matrice
- 2 MATLAB – matrični laboratorij
 - Početak rada
 - Tipovi podataka
 - Operatori
 - Funkcije
 - Vektori, matrice, polinomi
- 3 Primjeri
- 4 Preporučena literatura

-  B. H. Hahn, D. T. Valentine. *Essential MATLAB for Engineers and Scientists. Fifth Edition*. Academic Press Elsevier, Waltham, MA, USA, 2013.
-  The MathWorks, Inc. *MATLAB Primer*. Natick, MA, USA, 2016.