Sveučilište u Zagrebu
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE
Zavod za robotiku i automatizaciju proizvodnih sustava
Katedra za strojarsku automatiku

Računalna matematika

Linearna algebra

A. Jokić; V. Milić; F. Maletić

Zagreb, 2020./2021.

Sadržaj

Uvod

- Linearna algebra je dio matematike koji se bavi vektorskim prostorima i linearnim preslikavanjima/transformacijama (funkcijama/operatorima).
- Linearna algebra je nužna za razumijevanje i osnovni alat u gotovo svim matematičkim disciplinama, a izvorište joj je u rješavanju linearnih jednadžbi.
- Ima ključnu ulogu u gotovo svim znanostima koje koriste matematiku:
  - inženjerstvo i tehničke znanosti: teorija grafova, automatsko upravljanje, mehanika kontinuuma (konačni elementi), elektrotehnika, obrada slika/signala, kodiranje, itd.,
  - prirodne znanosti i ekonomija, tj. općenito gdje je potrebna obrada velikog broja podataka,
  - optimizacija: inženjerstvo, financije, ekonomija, itd.
- Nelinearni problem kojeg nije moguće direktno ili eksplicitno riješiti nastoji se linearizirati, tj. aproksimirati nekim linearnim problemom koji se zatim rješava metodama linearne algebre.

Jednakost matrica

- Matrica $\mathbf{A}$ dimenzije $n \times m$ je jednaka matrici $\mathbf{B}$ dimenzije $p \times q$ ako vrijedi $n = p$ i $m = q$ i
$$a_{ij} = b_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \; j = 1, 2, \ldots, m.$$
U tom slučaju pišemo
$$\mathbf{A} = \mathbf{B}.$$
- U MATLABu vrlo jednostavno:
```
>> A == B
```

Zbrajanje matrica

- Neka je $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ i $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{p\times q}$. Ako je $n = p$ i $m = q$ onda matricu $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ s elementima
$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \; j = 1, 2, \ldots, m.,$$
zovemo zbrojem ili sumom matrica $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ i pišemo
$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}.$$

- U MATLABu vrlo jednostavno:
```
>> C = A + B
```

Umnožak matrice sa skalarom

- Ako je $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ i $c \in \mathbb{R}$, onda matricu $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ s elementima

$$d_{ij} = c\,a_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,\ j = 1, 2, \ldots, m.,$$

zovemo umnožak matrice $\mathbf{A}$ sa skalarom c i označavamo

$$\mathbf{D} = c\,\mathbf{A}.$$

- U MATLABu vrlo jednostavno:
```
>> D = c*A
```

Umnožak matrica

- Neka je $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ i $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times p}$, umnožak ili produkt matrica $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ je matrica

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}\,\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times p}$$

čiji su elementi određeni formulom

$$c_{ij} = a_{i1}\,b_{1j} + a_{i2}\,b_{2j} + a_{i3}\,b_{3j} + \ldots + a_{im}\,b_{mj} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}\,b_{kj},$$

$$i = 1, 2, \ldots, n,\ j = 1, 2, \ldots, p.$$

- U MATLABu vrlo jednostavno:

```
>> C = A*B
```

Transponiranje matrica

- Neka je $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Matrica $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ se naziva transponirana matrica matrici $\mathbf{A}$, ako je svaki redak od $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ jednak odgovarajućem stupcu matrice $\mathbf{A}$. Prema tome, transponiranu matricu dobivamo tako da stupce (retke) matrice zamijenimo njenim retcima (stupcima). Ako je

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{onda je} \quad \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- Neka je $\mathbf{Z} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ i $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_1 + i\mathbf{Z}_2$, pri čemu su $\mathbf{Z}_1,\ \mathbf{Z}_2 \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Tada se $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_1 - i\mathbf{Z}_2$ naziva kompleksno konjugirana matrica i označava sa $\bar{\mathbf{Z}}$. Kompleksno transponirana ili hermitski adjungirana matrica $\mathbf{Z}$ je matrica $\mathbf{Z}^* = \mathbf{Z}_1^{\mathrm{T}} - i\mathbf{Z}_2^{\mathrm{T}}$.

- U MATLABu operaciju transponiranja matrice možemo provesti na sljedeće načine:
  `>> A'` - transponiranje i kompleksna konjugacija (ili primjenom ugrađene funkcije `ctranspose(A)`),
  `>> A.'` - transponiranje bez kompleksne konjugacije (ili primjenom ugrađene funkcije `transpose(A)`).

Potencije matrica

- Ako je $\mathbf{A}$ kvadratna matrica dimenzije $n \times n$ onda je

  $$\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}_n.$$

  Također vrijedi sljedeće

  $$\mathbf{A}^p = \underbrace{\mathbf{A}\,\mathbf{A}\,\cdots\,\mathbf{A}}_{p \text{ puta}}.$$

  Za potenciranje kvadratnih matrica vrijedi svojstvo asocijativnosti, npr.

  $$\mathbf{A}^3 = \mathbf{A}\,\mathbf{A}\,\mathbf{A} = \mathbf{A}\,\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}^2\,\mathbf{A}.$$

  Za nenegativne cijele brojeve r i s lako se pokaže da vrijedi

  $$\mathbf{A}^r\,\mathbf{A}^s = \mathbf{A}^{r+s}, \quad (\mathbf{A}^r)^s = \mathbf{A}^{rs}.$$

- U MATLABu vrlo jednostavno:
  `>> A^p`

Posebne matrice

U linearnoj algebri postoje neke posebne vrste matrica, a najčešće se upotrebljavaju:

- nul-matrica kojoj su svi elementi nule, tj. $a_{ij} = 0$ (u MATLAB-u: `zeros()`),
- matrica jedinica kojoj su svi elementi jedinice, tj $a_{ij} = 1$ (u MATLAB-u: `ones()`),
- dijagonalna matrica je kvadratna matrica kojoj su svi elementi izvan glavne dijagonale jednaki nuli, tj. $a_{ij} = 0$ ako $i \neq j,\ \forall i, j \in \{1,\, 2,\, \ldots,\, n\}$ (u MATLAB-u: `diag()`),
- jedinična matrica je kvadratna matrica koja ima jedinice na glavnoj dijagonali, dok su ostali elementi nule. Obično se označava s $\mathbf{I}_n$ gdje indeks n označava dimenziju matrice (u MATLAB-u: `eye()`).

Skalarni i vektorski produkt

- Skalarni produkt (engl. *dot product, inner product*) dva vektora u prostoru $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$) definiran je sljedećim izrazima

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \in \mathbb{R} \quad \text{i} \quad \mathbf{x}^{*}\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i y_i \in \mathbb{C}.$$

- U Euklidskom prostoru skalarni produkt jednak je:

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} = \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \cdot \cos(\theta).$$

- Vektorski produkt (engl. *cross product, vector product*) dva vektora je takvo množenje koje kao rezultat daje opet vektor:

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{bmatrix}.$$

- Vektorski produkt posebnost trodimenzionalnog Euklidskog prostora. Geometrijska interpretacija:

$$\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \cdot \sin(\theta).$$

- Za računanje skalarnog i vektorskog produkta u MATLABu postoje ugrađene funkcije: `dot()` i `cross()`.

Determinanta matrice

- Determinanta je funkcija definirana na skupu svih kvadratnih matrica, a poprima vrijednosti iz skupa skalara.

- Determinanta matrice definira se induktivno, tj. determinanta matrice n-tog reda definira se pomoću determinante matrice $(n-1)$-og reda.

- Laplaceova formula: Neka su a_{ij} elementi kvadratne matrice i neka je $M_{ij} = |\mathbf{A}_{ij}|$ determinata matrice pomicanjem u lijevo i-tog retka i j-tog stupca. Tada za fiksirani redak i

$$|\mathbf{A}| = \sum_{j} (-1)^{i+j} a_{ij}\, M_{ij},$$

gdje se $M_{i,j}$ naziva minor matrice $\mathbf{A}$, dok se izraz $C_{ij} = (-1)^{i+j}\, M_{ij}$ naziva kofaktor.

- Za računanje determinante matrice u MATLABu postoji ugrađena funkcija: `det()`.

Rang matrice

- **Linearno nezavisni vektori.** Za skup od m vektora $\mathbf{x}_i$ za $i = 1, 2, \ldots, m$ koji imaju n elemenata, tj. $\mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} x_{1i} & x_{2i} & \cdots & x_{ni} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, kažemo da je linearno nezavisan ako ne postoji skup konstanti $k_1,\ k_2\ , \ldots,\ k_m$ (od kojih je barem jedna različita od nule) takav da

$$k_1\mathbf{x}_1 + k_2\mathbf{x}_2 + \cdots + k_m\mathbf{x}_m = \mathbf{0}$$

- Ako postoje konstante $k_1,\ k_2\ , \ldots,\ k_m$ (od kojih je barem jedna različita od nule) takve da je gornji izraz zadovoljen, tada kažemo da su vektori $\mathbf{x}_i$ za $i = 1, 2, \ldots, m$, linearno zavisni.

- Vektori $\mathbf{x}_i$ za $i = 1, 2, \ldots, m$, mogu biti linearno nezavisni samo ako je broj vektora m manji ili jednak dimenziji vektorskog prostora n, odnosno $m \leq n$.

- **Rang matrice.** Formirajmo matricu čiji su stupci jednaki vektorima $\mathbf{x}_i$ za $i = 1, 2, \ldots, m$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \cdots & \mathbf{x}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nm} \end{bmatrix}, \quad m \leq n.$$

- Kažemo da matrica $\mathbf{X}$ ima rang r ako ima r linearno nezavisnih stupaca, odnosno vektora $\mathbf{x}_i$ za $i = 1, 2, \ldots, m$.

- Na ovaj način je ispitivanje linearne nezavisnosti vektora ekvivalentno ispitivanju ranga matrice. Stoga, da bi skup vektora $\mathbf{x}_i$ za $i = 1, 2, \ldots, m$, bio linearno nezavisan, rang matrice $\mathbf{X}$ mora biti jednak m.

- Za računanje ranga matrice u MATLABu postoji ugrađena funkcija: `rank()`.

Inverz matrice

- Za kvadratnu matricu $\mathbf{A}$ dimenzije $n \times n$, matrica $\mathbf{B}$ dimenzije $n \times n$ koja zadovoljava uvjete
$$\mathbf{A}\,\mathbf{B} = \mathbf{I}_n \quad \text{i} \quad \mathbf{B}\,\mathbf{A} = \mathbf{I}_n,$$
zove se inverz matrice $\mathbf{A}$ i označava se sa $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$. Matrice za koje postoji inverz obično se nazivaju invertibilne, regularne ili nesingularne. Kvadratne matrice koje nisu regularne nazivaju se singularne.

- Nužan i dovoljan uvjet da bi kvadratna matrica $\mathbf{A}$ dimenzije $n \times n$ bila nesingularna je $|\mathbf{A}| \neq 0 \Rightarrow \mathrm{rank}(\mathbf{A}) = n$, budući da je
$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\mathrm{adj}(\mathbf{A})}{|\mathbf{A}|}$$
gdje je
$$\mathrm{adj}(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \quad C_{ij} = (-1)^{i+j}\, M_{ij}.$$

- U nekim slučajevima za pravokutne matrice moguće je definirati tzv. poopćeni inverz.
- Ako je matrica $\mathbf{A}$ dimenzije $m \times n$ i $\operatorname{rank}(\mathbf{A}) = n$ tada matrica $\mathbf{A}$ ima lijevi inverz

$$\mathbf{A}^{+} = \left(\mathbf{A}^{*}\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^{*} \quad \text{odnosno} \quad \mathbf{A}^{+}\mathbf{A} = \mathbf{I}_n.$$

- Ako je $\operatorname{rank}(\mathbf{A}) = m$ tada matrica $\mathbf{A}$ ima desni inverz

$$\mathbf{A}^{+} = \mathbf{A}^{*}\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^{*}\right)^{-1} \quad \text{odnosno} \quad \mathbf{A}\mathbf{A}^{+} = \mathbf{I}_m.$$

- Za računanje inverza matrice u MATLABu postoje ugrađene funkcije: `inv()`, `A^-1`, $\backslash$ (LU faktorizacija), `pinv()`.

Sustav linearnih algebarskih jednadžbi

- Izvorište linearne algebre jest rješavanje sustava linearnih jednadžbi

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned}$$

- Uvođenjem matrice sustava $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, vektora rješenja $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ i vektora desne strane sustava $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

  sustav prelazi u matrični problem

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

- Ako je matrica $\mathbf{A}$ kvadratna tj. $m = n$ i punog ranga tada rješenje možemo pisati kao

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}.$$

Svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori

- Neka je $\mathbf{A}$ kvadratna matrica dimenzije $n \times n$. Vektor $\mathbf{x}$ dimenzije $n \times 1$, $\mathbf{x} \neq 0$ je vlastiti vektor od $\mathbf{A}$ ako postoji takav skalar λ da je

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} \quad \text{odnosno} \quad (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\,\mathbf{x} = 0.$$

  U tom slučaju, λ je vlastita vrijednost, a par $(\mathbf{x},\ \lambda)$ je vlastiti par matrice $\mathbf{A}$.

- Navedeni sustav jednadžbi ima netrivijalno rješenje jedino ako vrijedi

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = 0.$$

- Razvojem gornje determinante dobiva se polinom n-tog reda koji se naziva karakterističnim polinomom matrice $\mathbf{A}$.

- Za računanje svojstvenih vrijednosti i vektora kao i za računanje karakterističnog polinoma matrice u MATLABu postoje ugrađene funkcije: `eig()` i `poly()`.

Vektorske i matrične norme

- Norma realnog ili kompleksnog vektor $\mathbf{x}$ dimenzije n je funkcija $\|\cdot\|$ koja preslikava vektorski prostor u prostor nenegativnih realnih brojeva. Najčešće se koriste p-norme (ili ℓ_p norme) definirane sljedećim izrazom

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \geq 1.$$

- Za $p = 1$ dobivamo 1-normu (ili ℓ_1 normu)

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|.$$

- Za $p = 2$ dobivamo 2-normu (ili ℓ_2 normu) ili Euklidsku normu

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}.$$

- Za $p = \infty$ dobivamo ∞-normu (ili ℓ_∞ normu)

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

- Matrične norme možemo dobiti kao operatorske (inducirane) norme iz odgovarajućih vektorskih normi korištenjem sljedećeg izraza

$$\|\mathbf{A}\| = \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|.$$

- Kada se u gornji izraz uvrste odgovarajuće vektorske norme, dobivaju se matrična 1-norma (ili maksimalna stupčana norma)

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|,$$

matrična 2-norma (ili spektralna norma)

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}},$$

gdje je λ_{max} najveća svojstvena vrijednost matrice $\{\mathbf{A}^*\mathbf{A}\}$, te matrična ∞-norma (ili maksimalna retčana norma)

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{1\leq i\leq m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

- Za računanje vektorskih i matričnih normi u MATLABu postoji ugrađena funkcija: `norm()`.

Pogledati priložene M-datoteke

- Hahn, B. H., Valentine, D. T. *Essential MATLAB for Engineers and Scientists. Fifth Edition*. Academic Press Elsevier, Waltham, MA, USA, 2013.
- Dianat, S. A., Saber, E. S. *Advanced Linear Algebra for Engineers with MATLAB*. CRC Press, Boca Raton, FL, USA, 2009.
- William F. *Numerical Linear Algebra with Applications Using MATLAB*. Academic Press Elsevier, Waltham, MA, USA, 2015.
- Drmač, Z., Hari, V., Marušić, M., Rogina, M., Singer, S., Singer, S. *Numerička analiza; Poglavlje 2: Kratki uvod u linearnu algebru*. Sveučilište u Zagrebu, PMF - Matematički odjel, 2003. Dostupno na: `http://web.math.pmf.unizg.hr/~singer/num_anal/num_anal.pdf`
- Meyer, C. D. *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*. SIAM, Philadelphia, 2000.