Sveučilište u Zagrebu
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE
Zavod za robotiku i automatizaciju proizvodnih sustava
Katedra za strojarsku automatiku

Računalna matematika

Aproksimacija i interpolacija

A. Jokić; V. Milić; F. Maletić

Zagreb, 2020./2021.

Sadržaj

APROKSIMACIJA

- Poznate su neke informacije o funkciji f na skupu $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}$ (najčešće interval oblika $[a,\ b]$ ili diskretni skup točaka) i na osnovu tih informacija želimo funkciju f zamijeniti nekom drugom funkcijom φ na istom ili većem skupu na način da su f i φ prema nekom kriteriju bliske.
- Postoje dva glavna slučaja kada provodimo aproksimaciju:
  - znamo funkciju f, ali je ona u formi kompliciranoj za računanje - javlja se u raznim numeričkim metodama,
  - ne znamo funkciju f već npr. samo njezine vrijednosti na nekom diskretnom skupu točaka - javlja se kod mjerenja nekih veličina.
- Aproksimacijska funkcija φ u općem slučaju ima sljedeći oblik

$$\varphi(x) = \varphi\left(x;\ a_0, a_1, \ldots, a_m\right).$$

- Prema ovisnosti o parametrima $\{a_0, a_1, \ldots, a_m\}$ aproksimacijske funkcije mogu biti linearne i nelinearne.

Linearne aproksimacijske funkcije

- Opći oblik linearne aproksimacijske funkcije:

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i \varphi_i(x).$$

- Najčešće korišteni vektorski prostori i baze:
  - polinomi: $\varphi_i(x) = x^i$, $i = 0, 1, \ldots, m$;
  - trigonometrijski polinomi: $\varphi_i \in \{1, \cos(x), \sin(x), \cos(2x), \sin(2x), \ldots\}$;
  - splajnovi: po dijelovima polinomi.
- Budući da je funkcija φ linearno ovisna o parametrima $\{a_0, a_1, \ldots, a_m\}$, njihovo određivanje svodi se na rješavanje sustava linearnih algebarskih jednadžbi ili rješavanje linearnih optimizacijskih problema.

Nelinearne aproksimacijske funkcije

- Nelinearne aproksimacijske funkcije imaju nelinearnu ovisnost o parametrima.
- Najčešće korišteni vektorski prostori i baze:
  - eksponencijalne:
  $$\varphi(x) = a_0 e^{b_0 x} + a_1 e^{b_1 x} + \ldots + a_m e^{b_m x},$$
  gdje je broj nezavisnih parametara $2m+2$;
  - racionalne:
  $$\varphi(x) = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n},$$
  gdje je broj nezavisnih parametara $m+n+1$.
- Određivanje parametara svodi se na rješavanje sustava nelinearnih algebarskih jednadžbi ili rješavanje nelinearnih optimizacijskih problema.

Minimizacija pogreške

- Parametri aproksimacijske funkcije mogu se odrediti tako da se minimizira norma (standardno se uzimaju $\mathcal{L}_2$ i $\mathcal{L}_\infty$ norme) pogreške

$$e(x) = f(x) - \varphi(x).$$

- Za $\mathcal{L}_2$ normu traže se parametri funkcije φ tako da bude

$$\min_{\varphi \in \mathcal{F}} \|e(x)\|_2.$$

- U diskretnom slučaju imamo minimizaciju sljedećeg izraza

$$\sqrt{\sum_{k=0}^{n} (f(x_k) - \varphi(x_k))^2}.$$

- U kontinuiranom slučaju imamo minimizaciju sljedećeg izraza

$$\sqrt{\int_a^b (f(x) - \varphi(x))^2 \, \mathrm{d}x}.$$

Matrična formulacija linearnog problema najmanjih kvadrata

- Skup podataka (x_k, f_k) za $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ treba aproksimirati funkcijom

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i \varphi_i(x).$$

- Drugim riječima, treba odrediti parametre $a_0, a_1, \ldots a_m$ tako da je

$$\sum_{k=0}^{n} \left(f_k - \sum_{i=0}^{m} a_i \varphi_i(x_k) \right)^2 \quad \to \quad \min$$

- Uvedimo sljedeće $\mathbf{V} = [v_{ki}] = [\varphi_i(x_k)]$, $\mathbf{a} = [a_i]$, $\mathbf{f} = [f_k]$, čime dobivamo sustav linearnih algebarskih jednadžbi

$$\mathbf{Va} = \mathbf{f}.$$

- Uobičajeno je $n \geq m$, pa imamo preodređen sustav linearnih jednadžbi koji ne mora uvijek imati rješenje, tj. može biti $\mathbf{f} - \mathbf{Va} \neq \mathbf{0}$.

- „Najbolje" rješenje $\mathbf{a}$ je „najmanji" rezidual, tj. rješenje

$$\min_{\mathbf{a}} \|\mathbf{f} - \mathbf{Va}\|_2^2 \quad \to \quad \text{Problem najmanjih kvadrata.}$$

INTERPOLACIJA

- Najčešće se zahtjeva da aproksimacijska funkcija prolazi određenim točkama tj. da interpolira funkciju u tim točkama.
- Drugim riječima, funkcije f i φ trebaju se podudarati na nekom konačnom skupu točaka (čvorovi interpolacije), tj. mora vrijediti uvjet

$$\varphi(x_k) = f(x_k).$$

- Iz uvjete interpolacije slijedi da je broj parametara funkcije φ, koje treba odrediti, jednak broju čvorova interpolacije.
- Može se zahtijevati da se u čvorovima, osim funkcijskih vrijednosti, poklapaju i vrijednosti njihovih derivacija.

Polinomna interpolacija

- Neka je funkcija f zadana na diskretnom skupu različitih točaka x_k, tj. imamo $f_k = f(x_k)$ za $k = 1, \ldots, n+1$. Tada postoji jedinstveni interpolacijski polinom stupnja najviše n

$$\varphi(x) := p(x) = c_1 x^n + c_2 x^{n-1} + \cdots + c_n x + c_{n+1},$$

za koji vrijedi

$$p(x_k) = f_k, \quad k = 1, \ldots, n+1.$$

- Prethodni uvjet interpolacije možemo raspisati u sljedeći oblik

$$\begin{aligned}
p(x_1) &= c_1 x_1^n + c_2 x_1^{n-1} + \cdots + c_n x_1 + c_{n+1} = f_1, \\
p(x_2) &= c_1 x_2^n + c_2 x_2^{n-1} + \cdots + c_n x_2 + c_{n+1} = f_2, \\
&\vdots \\
p(x_{n+1}) &= c_1 x_{n+1}^n + c_2 x_{n+1}^{n-1} + \cdots + c_n x_{n+1} + c_{n+1} = f_{n+1},
\end{aligned}$$

- ili u matričnom obliku

$$\begin{bmatrix} x_1^n & x_1^{n-1} & \dots & x_1 & 1 \\ x_2^n & x_2^{n-1} & \dots & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{n+1}^n & x_{n+1}^{n-1} & \dots & x_{n+1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n+1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Vc} = \mathbf{f}.$$

- Matrica $\mathbf{V}$ se naziva Vandermondova matrica.
- Može se pokazati da je

$$|\mathbf{V}| = \prod_{1 \le i < j \le n+1} (x_j - x_i)$$

- Ako i samo ako su $x_i \neq x_j$ za $i \neq j$ tada je $\mathrm{rank}(\mathbf{V}) = n + 1 \Rightarrow$ sustav ima jedinstveno rješenje.
- Kao što je dobro poznato polinomi visokog stupnja mogu imati vrlo loša svojstva: vrlo su oscilatorni i imaju veliku osjetljivost na perturbacije u parametrima. Zbog toga se koristi po dijelovima polinomna interpolacija, tj. na svakom podintervalu koristi se polinom niskog stupnja - **splajn interpolacija**.

Lagrangeov oblik interpolacijskog polinoma

- Lagrangeov interpolacijski polinom u općem slučaju definiran je izrazom

$$p(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k \ell_k(x),$$

pri čemu je Lagrangeova baza

$$\ell_k(x) = \prod_{i=1,\, i \neq k}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Newtonov oblik interpolacijskog polinoma

- Newtonov interpolacijski polinom u općem slučaju definiran je izrazom

$$p(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k n_k(x),$$

pri čemu je Newtonova baza

$$n_k(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - x_i)\,, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

dok su parametri definirani kao podijeljene razlike

$$a_1 = f[x_1] = f(x_1),$$

$$a_2 = f[x_1, x_2] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

$$a_3 = f[x_1, x_2, x_3] = \frac{\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} - \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}}{x_3 - x_1},$$

$$\vdots$$

Pogledati priložene M-datoteke

- Drmač, Z., Hari, V., Marušić, M., Rogina, M., Singer, S., Singer, S. *Numerička analiza; Poglavlje 7: Aproksimacija i interpolacija*. Sveučilište u Zagrebu, PMF - Matematički odjel, 2003. Dostupno na: `http://web.math.pmf.unizg.hr/~singer/num_anal/num_anal.pdf`
- Phillips, G. M. *Interpolation and Approximation by Polynomials*. Springer-Verlag, New York, 2003.
- Davis, P. J. *Interpolation and Approximation*, Dover Publications, New York, 1975.