Sveučilište u Zagrebu
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE
Zavod za robotiku i automatizaciju proizvodnih sustava
Katedra za strojarsku automatiku

Računalna matematika

Diferencijalne jednadžbe

A. Jokić; V. Milić; F. Maletić

Zagreb, 2020./2021.

Sadržaj

UVOD

- Diferencijalna jednadžba povezuje nepoznate funkcije jedne ili više nezavisnih varijabli i njihove derivacije.
- Matematički model nekog sustava prikazuje funkcijske ovisnosti između izlaznih i ulaznih veličina sustava odnosno dijelova sustava i iskazuje se odgovarajućim diferencijalnim ili integralno-diferencijalnim jednadžbama.
- Za postavljanje odgovarajućeg matematičkog modela dinamičkog sustava primjenjuju se osnovni fizikalni zakoni.
- Nije potrebno opisivati sve fizikalne pojave koje se u sustavu mogu odigrati, jer bi takav model postao presložen.
- Analizom ponašanja sustava u cjelini došlo se do spoznaje da se veliki broj, po fizikalnoj prirodi različitih procesa, opisuje matematičkim modelom istog tipa.

- Dinamički sustavi najčešće su opisani sustavom nelinearnih diferencijalnih jednadžbi.
- Nekim nelinearnim diferencijalnim jednadžbama rješenje je moguće eksplicitno izraziti pomoću poznatih funkcija. Međutim, daleko su brojnije one jednadžbe kojima je nemoguće odrediti egzaktno rješenje. Stoga se takve jednadžbe rješavaju numerički.
- Rješenje linearnih diferencijalnih jednadžbi moguće je izraziti eksplicitno, a do njega se dolazi uz pomoć općih metoda. To znači da sve linearne diferencijalne jednadžbe imaju istu formu rješenja.
- Moguće je dobiti linearni model kojim se dinamika nelinearnog sustava može opisati u okolini jednog odabranog ravnotežnog stanja. Prilikom linearizacije treba imati na umu da linearni model neće moći objasniti sva ponašanja nelinearnog sustava.

PROBLEM POČETNIH UVJETA

- Razmatramo numeričke metode za aproksimaciju rješenja običnih diferencijalnih jednadžbi prvog reda s danim početnim uvjetima oblika

$$\dot{x}(t) = f(x,t), \quad x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

  na vremenskom intervalu $t \in [t_0,\ t_f]$.

- Općenitiji problem je sustav od n običnih diferencijalnih jednadžbi prvog reda

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots x_n, t), \ \ x_1(t_0) = x_{10}, \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots x_n, t), \ \ x_2(t_0) = x_{20}, \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \dots x_n, t), \ \ x_n(t_0) = x_{n0}, \end{aligned} \tag{2}$$

  za n nepoznatih realnih funkcija $x_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Sustav jednadžbi (2) možemo napisati u obliku analognom izrazu (1) koristeći vektorsku notaciju

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \tag{3}$$

  gdje su

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ \vdots \\ x_{n0} \end{bmatrix}.$$

- U matematičkom opisu dinamičkih sustava pojavljuju se diferencijalne jednadžbe višeg reda oblika

$$y^{(n)} = f\left(y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots, y^{(n-1)}, t\right), \quad y^{(i)}(t_0) = y_{i0}, \;\; i = 0, 1, 2, \dots, n-1, \tag{4}$$

koje se svode na sustav diferencijalnih jednadžbi prvog reda. Da bi se to postiglo potrebno je uvesti dodatne funkcije

$$\begin{aligned} x_1(t) &:= y(t), \\ x_2(t) &:= \dot{y}(t), \\ x_3(t) &:= \ddot{y}(t), \\ &\vdots \\ x_n(t) &:= y^{(n-1)}(t), \end{aligned}$$

čime se diferencijalna jednadžba (4) transformira u ekvivalentni sustav diferencijalnih jednadžbi prvog reda u vektorskom obliku

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \\ f(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \end{bmatrix}, \tag{5}$$

pa možemo koristiti numeričke metode za rješavanje diferencijalne jednadžbe (1).

PREGLED NUMERIČKIH METODA

- Numerički postupci prikladni za programiranje na računalima zasnivaju se na aproksimaciji rješenja sukcesivnim diskretnim točkama t_i vremenske varijable t, pri čemu $i = 0,\, 1,\, \ldots,\, N$.
- Vremenski interval $[t_0,\, t_f]$ u kojem se traži rješenje dijeli se na konačan broj koraka N. Ako su ti koraci jednaki, njihova veličina je

$$\tau = \frac{t_f - t_0}{N}. \tag{6}$$

- Postupak sukcesivnog numeričkog rješavanja diferencijalnih jednadžbi svodi se na izračunavanje aproksimacije rješenja $\mathbf{x}_{i+1}$ u točki t_{i+1} iz prethodno izračunatih vrijednosti za $t_i,\ t_{i-1},\ t_{i-p+1}$.
- Ako se za izračunavanje $\mathbf{x}_{i+1}$ upotrebljava samo prethodni korak tada je to **jednokoračni postupak**. Postupci koji se koriste rezultatima izračunatim u više prethodnih koraka su **višekoračni postupci**.

Eulerova metoda

- Najjednostavniji postupak za numeričko rješavanje diferencijalnih jednadžbi je Eulerova metoda.
- Razmatra se problem početnih uvjeta (Cauchyev problem) sustava običnih diferencijalnih jednadžbi prvog reda
$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0. \tag{7}$$
- Metoda se zasniva na ideji da se $\dot{\mathbf{x}}$ u jednadžbi (7) zamijeni s podijeljenom razlikom
$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{\mathbf{x}(t+\tau) - \mathbf{x}(t)}{\tau} + \mathcal{O}(\tau). \tag{8}$$
- Iz gornjeg izraza dobiva se aproksimacija
$$\mathbf{x}(t+\tau) \approx \mathbf{x}(t) + \tau \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t). \tag{9}$$
- Interval $[t_0,\, t_f]$ se podijeli na N jednakih dijelova: $\tau = (t_f - t_0)/N$, $t_i = t_0 + i\tau$, $i = 0,\, 1,\, \ldots,\, N$ čime se dolazi do rekurzivnog izraza
$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + \tau \mathbf{f}(\mathbf{x}_i, t_i), \tag{10}$$
gdje je početni uvjet $\mathbf{x}_0$ zadan kao inicijalni uvjet diferencijalne jednadžbe. Dobivene vrijednosti $\mathbf{x}_i$ su aproksimacije rješenja diferencijalne jednadžbe u točkama t_i.

Jednokoračne metode

- Jednokoračne eksplicitne metode, među koje spada metoda Runge-Kutta, mogu se prikazati u sljedećem općem rekurzivnom obliku

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + \tau\phi(\mathbf{x}_i, t_i, \tau), \quad i = 0,\, 1,\, \ldots,\, N, \tag{11}$$

  pri čemu se funkcija ϕ naziva *funkcija prirasta*. Odabir funkcije ϕ definira različite metode.

- Funkcija ϕ konstruira se tako da se s (11) aproksimira razvoj rješenja $\mathbf{x}(t)$ u Taylorov red s određenim brojem članova. Ovisno o tome s koliko je članova reda postignuto slaganje izraza (11) dobiva se algoritam odgovarajuće točnosti.

- Opći rekurzivni oblik metode Runge-Kutta n-tog reda je

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}_1 &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_i, \mathbf{t}_i),\\
\mathbf{k}_2 &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_i + \tau\beta_{21}\mathbf{k}_1, t_i + \tau\alpha_2),\\
&\vdots\\
\mathbf{k}_n &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_i + \tau\sum_{j=1}^{n-1}\beta_{nj}\mathbf{k}_j, t_i + \tau\alpha_n),\\
\mathbf{x}_{i+1} &= \mathbf{x}_i + \tau\sum_{j=1}^{n} w_j\mathbf{k}_j.
\end{aligned} \tag{12}$$

  pri čemu različit izbor koeficijenata w, α i β definira različite metode (Butcherova tablica).

Višekoračne metode

- Ukoliko se želi točnije diskretizirati vremensku derivaciju u jednadžbi $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ potrebno je koristiti centralnu diferencijaciju $\dot{\mathbf{x}}(t_i) \approx (\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_{i-1})/2\tau$. Time se dolazi do sljedeće metode

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_{i-1} + 2\tau\mathbf{f}(\mathbf{x}_i, t_i). \tag{13}$$

- Osnovna razlika prema prethodnim metodama je u tome što je ova metoda višekoračna: za računanje vrijednosti $\mathbf{x}_{i+1}$ potrebni su $\mathbf{x}_i$ i $\mathbf{x}_{i-1}$.

- Opći oblik eksplicitne Adamsove višekoračne metode k-tog reda je

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + \tau\sum_{j=1}^{k} a_j\mathbf{f}(\mathbf{x}_{i-j+1}, t_{i-j+1}), \tag{14}$$

gdje se koeficijenti a_j računaju iz relacije

$$a_j = (-1)^j \int_0^1 \binom{-s}{j} ds. \tag{15}$$

- Prednost Adamsove metode prema odgovarajućoj Runge-Kutta metodi je u tome što ona treba samo jedno računanje funkcije po koraku, tj. jednu funkcijsku vrijednost može se iskoristiti iz prethodnog koraka.

KRUTI SUSTAVI

- Za diferencijalnu jednadžbu kažemo da je kruta, ako mala perturbacija početnih uvjeta dovede do velike perturbacije u rješenju problema.
- Za ovakve sustave pojedine numeričke metode su numerički nestabilne, osim ako se korak integracije ne uzme izuzetno malen.
- Općenito: ovakve diferencijalne jednadžbe sadrže članove koji mogu izazvati velike devijacije u rješenju.
- Kruti sustav ima neke komponente koje se brzo mijenjaju i druge koje se sporo mijenjaju. Iako tranzijente pojave (brze komponente) imaju veći utjecaj u samo kratkim intervalima, (kod nekih metoda) one mogu „diktirati" korak integracije za cijeli interval.

SKUPINA NAREDBI `ode`

- Najjednostavniji oblik primjene MATLABovih ugrađenih funkcija za rješavanje običnih diferencijalnih jednadžbi:

```
>> [T, X] = solver(odesys, tint, x0)
```

- `odesys` (string ili *handle*) je ime M-funkcije koja opisuje sustav diferencijalnih jednadžbi prvog reda.
- `tint` je vremenski interval u kojem se traži rješenje.
- `x0` je vektor koji sadrži početne uvjete.
- `T` je vektor koji sadrži diskretne točke vremenskog intervala.
- `X` je matrica čiji stupci sadrže izračunate vrijednosti svake varijable sustava u diskretnim točkama vremenskog intervala.

- `solver` može biti:
  - `ode45`: eksplicitna Runge-Kutta-Dormand-Prince jednokoračna metoda za rješavanje ne-krutih sustava;
  - `ode23`: eksplicitna Runge-Kutta-Bogacki-Shampine jednokoračna metoda za rješavanje ne-krutih sustava, ali može se primijeniti za rješavanje umjereno krutih sustava;
  - `ode113`: Adams-Bashforth-Moulton višekoračna metoda promijenjivog reda (od 1. do 13.) za rješavanje ne-krutih sustava, moguće je postići visoku točnost rješenja;
  - `ode15s`: višekoračna metoda promijenjivog reda (od 1. do 5.) za rješavanje krutih sustava koja se zasniva na računanju konačnih diferencija unazad (Gearova metoda), također može rješavati i diferencijalno-algebarske jednadžbe;
  - `ode23s`: Rosenbrockova metoda 2. reda za rješavanje krutih sustava koja pripada skupini implicitnih Runge-Kutta metoda.

PROBLEM RUBNIH UVJETA

- Opći oblik problema rubnih uvjeta (engl. *Boundary Value Problem* – BVP) u vektorskoj notaciji je

$$\begin{aligned} &\dot{\mathbf{y}}(x) = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}(x), \mathbf{p}), \quad a \le x \le b, \\ &\mathbf{r}(\mathbf{y}(a), \mathbf{y}(b)) = \mathbf{0}, \end{aligned} \tag{16}$$

  gdje je $\mathbf{p}$ vektor nepoznatih parametara sustava.

- Tipični oblik problema je

$$\begin{aligned} &\ddot{\mathbf{y}} + \psi(x)\,\dot{\mathbf{y}} + \varphi(x)\,\mathbf{y} = \mathbf{g}(x), \quad a \le x \le b, \\ &\mathbf{y}(a) = \mathbf{y}_0, \quad \mathbf{y}(b) = \mathbf{y}_1. \end{aligned} \tag{17}$$

- Problem oblika (16) u MATLABu se može riješiti primjenom funkcija iz skupine `bvp`.

DIFERENCIJALNO-ALGEBARSKE JEDNADŽBE

- Promotrimo dinamički sustav čiji je matematički model opisan implicitnom diferencijalnom jednadžbom
$$\mathbf{F}(\dot{\mathbf{x}}(t),\, \mathbf{x}(t),\, t) = \mathbf{0}. \tag{18}$$
- Ako je $\det\left(\dfrac{\partial \mathbf{F}}{\partial \dot{\mathbf{x}}}\right) \neq 0$ tada iz izraza (18) možemo odrediti eksplicitni oblik $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x},\, t)$.
- Ako je $\det\left(\dfrac{\partial \mathbf{F}}{\partial \dot{\mathbf{x}}}\right) = 0$ tada iz izraza (18) ne možemo odrediti oblik $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x},\, t)$ i rješenje $\mathbf{x}$ mora zadovoljiti određena algebarska ograničenja.
- Jednostavniji je tzv. polu-eksplicitni oblik
$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x},\, \mathbf{y},\, t), \\ \mathbf{g}(\mathbf{x},\, \mathbf{y},\, t) &= 0, \end{aligned} \tag{19}$$
gdje je $\mathbf{g}$ vektor algebarskih ograničenja.
- Primjer: njihalo u Kartezijevom koordinatnom sustavu.
- Problem oblika (19) u MATLABu se može riješiti primjenom funkcija `ode15i, ode15s, ode23t`.

Primjer 1. Linearni homogeni sustav

Običnu linearnu homogenu diferencijalnu jednadžbu drugog reda

$$\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + 10\,y(t) = 0,$$

možemo zapisati kao sustav od dvije diferencijalne jednadžbe prvog reda

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -10\,x_1 - x_2, \end{aligned}$$

gdje su $x_1 = y$ i $x_2 = \dot{y}$. U matričnom zapisu gornji sustav je sljedećeg oblika

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Rješenje je oblika:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\,\mathbf{x}(0)$$

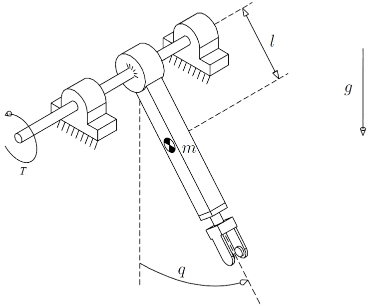
Rješenje sustava za početne uvjete $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 1$ pogledati u priloženoj M-datoteci.

Primjer 2. Nelinearni sustav

- Gibanje mehaničkog sustava prikazanog na slici opisano je sljedećom diferencijalnom jednadžbom

$$J\,\ddot{q}(t) + B\,\dot{q}(t) + m\,g\,l\,\sin(q(t)) = T, \tag{20}$$

gdje su q kut zakreta članka [rad], T ulazni moment [Nm], J ukupni moment tromosti oko osi koja prolazi zglobom [kgm^2], B koeficijent viskoznog prigušenja [Nms/rad], m masa članka [kg], l udaljenost težišta od osi zgloba [m], g akceleracija sile teže [m/s^2].



Slika: Preuzeto iz: R. Kelly, V. Santibanez and A. Loria: *Control of Robot Manipulators in Joint Space*, Springer-Verlag, London, 2005.

- Uvodimo nove zavisne varijable definirane na sljedeći način

$$x_1(t) = q(t), \quad x_2(t) = \dot{q}(t). \tag{21}$$

- Deriviranjem varijabli x_1, x_2 po vremenu t i na osnovu jednadžbe (20) dobivamo sustav diferencijalnih jednadžbi prvog reda

$$\dot{x}_1 = x_2, \tag{22}$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{J}\left(T - m\,g\,l\,\sin(x_1) - B\,x_2\right). \tag{23}$$

Odziv sustava na $T = 5$ Nm u intervalu $t \in [0,\ 5]$ uz početne uvjete $q(0) = 0.5,\ \dot{q}(0) = 0$ pogledati u priloženoj M-datoteci.

Primjer 3. Usporedba numeričkih metoda

Kao primjer, koji će poslužiti za analizu točnosti, brzine i stabilnosti, u prethodnim poglavljima opisanih numeričkih metoda, razmatra se sljedeći sustav diferencijalnih jednadžbi

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= -x_1(t) + g_1(t), \\
\dot{x}_2(t) &= x_1(t) - x_2^2(t) + g_2(t), \\
\dot{x}_3(t) &= x_2^2(t) + g_3(t),
\end{aligned}
\tag{24}
$$

gdje su

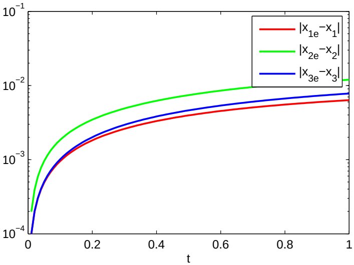
$$
\begin{aligned}
g_1(t) &= -1 + t + t^2, \\
g_2(t) &= e^{-2t}\left[-e^{2t}(-1+t)t + (-1+t)^2t^2 - e^t(1-3t+t^2)\right], \\
g_3(t) &= -e^{-3t}(-1+t)^2t^2 + (-1+t)\cos(t) + \sin(t),
\end{aligned}
\tag{25}
$$

uz početne uvjete $x_i(0) = 0$, za $i = 1,\ 2,\ 3$. Egzaktno rješenje sustava je

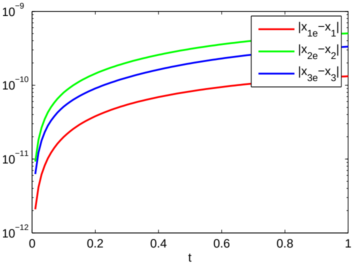
$$
\begin{aligned}
x_1(t) &= t(t-1), \\
x_2(t) &= t(t-1)e^{-t}, \\
x_3(t) &= (t-1)\sin(t).
\end{aligned}
\tag{26}
$$

Implementacija algoritama Eulerove metode, metode Runge-Kutta četvrtog reda i Adamsove metode četvrtog reda u programskom jeziku MATLAB dana je u priloženim M-datotekama.

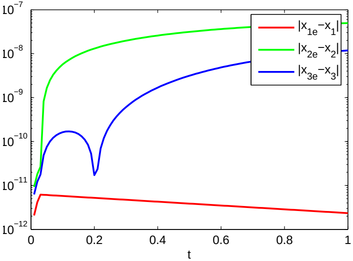
Na donjoj slici prikazani su rezultati usporedbe numeričkog rješenja s egzaktnim rješenjem svake pojedine metode za slučaj $N = 100$.



(a) Eulerova metoda



(b) Metoda Runge-Kutta 4. reda



(c) Adamsova metoda 4. reda

U donjoj tablici dani su rezultati usporedbe numeričkih metoda za rješavanje običnih difrencijalnih jednadžbi primjenom programskog jezika MATLAB.

Tablica: Usporedba metoda (MATLAB).

	Euler		Runge-Kutta 4. reda		Adams 4. reda	
Broj koraka	Vrijeme, s	Greška	Vrijeme, s	Greška	Vrijeme, s	Greška
$N = 10^1$	0.0310	0.1258	0.0310	$5.7256 \cdot 10^{-6}$	0.0310	$3.2738 \cdot 10^{-4}$
$N = 10^2$	0.0310	0.0120	0.0780	$5.0458 \cdot 10^{-10}$	0.0310	$4.9591 \cdot 10^{-8}$
$N = 10^3$	0.0470	0.0012	0.1410	$4.9766 \cdot 10^{-14}$	0.0630	$5.1428 \cdot 10^{-12}$
$N = 10^4$	0.297	$1.1877 \cdot 10^{-4}$	0.9210	$5.8287 \cdot 10^{-16}$	0.2970	$9.9920 \cdot 10^{-16}$
$N = 10^5$	2.7300	$1.1877 \cdot 10^{-5}$	8.7210	$1.7486 \cdot 10^{-15}$	2.4960	$1.7764 \cdot 10^{-15}$
$N = 10^6$	27.1910	$1.1877 \cdot 10^{-6}$	86.0960	$1.0852 \cdot 10^{-14}$	24.5540	$1.0852 \cdot 10^{-14}$

- Drmač, Z., Hari, V., Marušić, M., Rogina, M., Singer, S., Singer, S. *Numerička analiza; Poglavlje 10: Obične diferencijalne jednadžbe*. Sveučilište u Zagrebu, PMF - Matematički odjel, 2003. Dostupno na: `http://web.math.pmf.unizg.hr/~singer/num_anal/num_anal.pdf`
- Hairer, E. and Wanner, G. and Nøsett, S. P. *Solving Ordinary Differential Equations I. Nonstiff Problems*. Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- Butcher, J. C. *Numerical Methods for Ordinary Diferential Equations*. John Wiley and Sons Ltd, Chichester, 2008.
- Lapidus, L. and Seinfeld, J. H. *Numerical Solution of Ordinary Differential Equations*, Academic Press, New York, 1971.
- Hunt, B. R., Lipsman, R. L., Osborn, J. E., Rosenberg. J. M. *Differential Equations with MATLAB. Third Edition*. Wiley, Hoboken, NJ, USA, 2012.
- Stanoyevitch, A. *Introduction to Numerical Ordinary and Partial Differential Equations Using MATLAB*. Wiley, Hoboken, NJ, USA, 2005.