Sveučilište u Zagrebu
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE
Zavod za robotiku i automatizaciju proizvodnih sustava
Katedra za strojarsku automatiku

Računalna matematika

Optimizacija

A. Jokić; V. Milić; F. Maletić

Zagreb, 2020./2021.

Sadržaj

UVOD

- Optimizacija sadrži skup aktivnosti čiji je cilj pronaći „najbolje rješenje”, optimum, uz poštivanje zadanih ograničenja.
- Pojam „matematičko programiranje” često je korišten kao sinonim optimiranju, pa tako imamo i pojmove: linearno programiranje, kvadratno programiranje, nelinearno programiranje, semi-definitno programiranje itd.
- Optimiranje rada sustava/procesa (*on-line*):
    - planiranje proizvodnje u elektroenergetskoj mreži,
    - upravljanje motorom automobila,
    - upravljanje tokovima snage i energijom u hibridnom automobilu,
    - gibanje robota prilikom obavljanja zadatka,
    - optimalno upravljanje dinamičkim sustavima (bogata inženjerska/znanstvena grana za sebe).

- U fundamentalnim fizikalnim zakonima/problemima:
  - traženje ravnotežnog položaja minimizacijom potencijalne energije,
  - stabilnost dinamičkih sustava — traženje Ljapunovljeve funkcije.
- Optimalno projektiranje
  - optimalna raspodjela vjetro-turbina u vjetro-parku,
  - optimiranje topologije, oblike, dimenzija mehanizama i nosivih konstrukcija.

FORMULACIJA PROBLEMA OPTIMIZACIJE

- Formulacija optimizacijskog problema zahtjeva definiranje:
  - $\mathcal{X}$ projektnog skupa (skup projektnih varijabli, skup varijabli odluke, *engl. decision set*),
  - $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{X}$ dozvoljenog skupa (*engl. feasible set, constraint set*),
  - $f : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ funkcije cilja (*engl. objective function, cost function*).

Cilj

Odrediti vrijednost projektnih varijabli $x \in \mathcal{F}$ za koju je funkcija cilja $f(x)$ minimalna.

Optimizacijski problem s ograničenjima

$$\min_{\mathbf{x}} \; f(\mathbf{x}), \tag{1}$$

uz ograničenja

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}, \tag{2}$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \tag{3}$$

gdje su:

$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix}^\mathsf{T}$ projektne varijable,
$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcija cilja,
$\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ ograničenja tipa nejednakosti,
$\mathbf{h} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ograničenja tipa jednakosti.

- Optimalno rješenje $\mathbf{x}^*$ je vektor projektnih varijabli koji, od svih vektora iz projektnog prostora koji zadovoljavaju ograničenja, ima najmanju vrijednost funkcije cilja f.
- Vrijedi sljedeće svojstvo

$$\max_{\mathbf{x}} \; f(\mathbf{x}) \iff \min_{\mathbf{x}} \; -f(\mathbf{x}). \tag{4}$$

- Neke klasifikacije problema:
  - diskretan problem ako je $\mathcal{F}$ konačan skup,
  - kontinuiran problem: ako nije diskretan,
  - problem cjelobrojnog optimiranja (*engl. integer optimization*): ako su projektne varijable cijeli brojevi,
  - linearan optimizacijski problem: ako je f linearna funkcija,
  - problem a ograničenjima: ako je $\mathcal{F}$ definiran ograničenjima tipa $\mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}$, $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$,
  - problem bez ograničenja: ako je $\mathcal{F} = \mathcal{X}$,
  - stohastički problem: ako je $\mathcal{F}$ stohastički karakterizian (nepouzdan).
- Postoji još cijeli niz klasa i klasifikacija koji ovdje nisu navedeni (kvadratno programiranje, semidefinitno programiranje, geometrijsko programiranje, itd).

LINEARNO PROGRAMIRANJE

Definicija problema linearnog programiranja

$$\min_{\mathbf{x}} \quad \mathbf{c}^{\mathsf{T}}\mathbf{x}, \tag{5}$$

uz ograničenja

$$\mathbf{A}_{eq}\mathbf{x} = \mathbf{b}_{eq}, \tag{6}$$

$$\mathbf{A}_{in}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}_{in}, \tag{7}$$

gdje je $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ vektor projektnih varijabli.

- Funkcija cilja i ograničenja su linearne u projektnim varijablama.
- LP se može učinkovito riješiti i kad problem ima preko 10000 varijabli.

KVADRATNO PROGRAMIRANJE

Definicija problema kvadratnog programiranja

$$\min_{\mathbf{x}} \quad \frac{1}{2}\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}, \tag{8}$$

uz ograničenja

$$\mathbf{A}_{eq}\mathbf{x} = \mathbf{b}_{eq}, \tag{9}$$

$$\mathbf{A}_{in}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}_{in}, \tag{10}$$

gdje je $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ vektor projektnih varijabli.

- Funkcija cilja je kvadratna dok su ograničenja linearne funkcije u projektnim varijablama.
- Matrica $\mathbf{H}$ mora biti simetrična pozitivno definitna matrica jer tada imamo (striktnu) konveksnost i nužno konačan minimum.

Primjer 1. Linearno programiranje

Potrebno je odrediti x_1, x_2, x_3, x_4 koji maksimiziraju funkciju

$$f(x) = 4x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 8x_4, \tag{11}$$

uz ograničenja

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 950, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 7x_4 &\leq 4600, \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 &\leq 5000, \\ x_4 &\geq 400, \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Rješenje pogledati u priloženoj M-datoteci.

Primjer 2. Kvadratno programiranje

Potrebno je odrediti x_1, x_2, x_3 koji minimiziraju funkciju

$$f(x) = \frac{3}{2}x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 - x_1 - 2x_2 - 3x_3, \tag{13}$$

uz ograničenja

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &\leq \frac{5}{2}, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 1, \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Rješenje pogledati u priloženoj M-datoteci.

Primjer 3. Nelinearno programiranje

Potrebno je odrediti x_1, x_2 koji minimiziraju funkciju

$$f(x) = e^{x_1}\left(4x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_1x_2 + 2x_2 + 1\right), \tag{15}$$

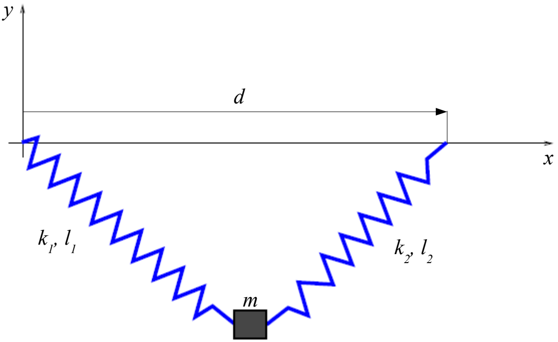
uz ograničenja

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} + x_1x_2 - x_1 - x_2 \leq 0, \\ -x_1x_2 \leq 10. \end{aligned} \tag{16}$$

Rješenje pogledati u priloženoj M-datoteci.

Primjer 4. Ravnotežni položaj sustava u potencijalnom polju (Newtonova metoda)

Za tijelo mase m obješeno u vertikalnoj ravnini o dva elastična pera zanemarive mase s konstantama k_1, k_2 i duljinama l_1, l_2, dok je razmak objesišta jednak d, potrebno je izračunati ravnotežni položaj[1].



Slika: Masa obješena na dvije opruge.

[1] Aganović, I., Veselić, K., *Matematičke metode i modeli*, Sveučilište J. J. Strossmayera, Odjel za matematiku, Osijek, 2014., dostupno na: `http://www.mathos.unios.hr/images/uploads/715.pdf`

Potencijalna energija mase m u položaju $(x,\ y)$ glasi

$$V(x, y) = mgy + \frac{k_1}{2}\left(l_1 - \sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 + \frac{k_2}{2}\left(l_2 - \sqrt{(d-x)^2 + y^2}\right)^2 \tag{17}$$

Stabilna ravnoteža

Ako glatka funkcija $V(x, y)$ poprima u točki $(x^*,\ y^*)$ minimum onda vrijedi

$$\frac{\partial V}{\partial(x,\ y)}(x^*,\ y^*) = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial(x,\ y)^2}(x^*,\ y^*) \geq \mathbf{0}. \tag{18}$$

Obratno, ako vrijedi

$$\frac{\partial V}{\partial(x,\ y)}(x^*,\ y^*) = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial(x,\ y)^2}(x^*,\ y^*) > \mathbf{0}. \tag{19}$$

onda V poprima u točki $(x^*,\ y^*)$ strogi lokalni minimum.

Za numeričko rješavanje jednadžbi ravnoteže $\frac{\partial V}{\partial(x,\ y)}(x^*,\ y^*) = \mathbf{0}$ može se koristiti Newton-Raphsonova metoda koja generira niz točaka iteracijama:

$$\mathbf{q}_{k+1} = \mathbf{q}_k - [\nabla^2 V(\mathbf{q}_k)]^{-1} \nabla V(\mathbf{q}_k)^\mathsf{T}, \tag{20}$$

gdje je $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}^\mathsf{T}$.

Gradijent funkcije V po vektorskoj varijabli $\mathbf{q}$ je

$$\nabla V(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}. \tag{21}$$

Matrica drugih parcijalnih funkcije V po vektorskoj varijabli $\mathbf{q}$ je

$$\nabla^2 V(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}. \tag{22}$$

Rješenje pogledati u priloženoj M-datoteci.

Drmač, Z., Hari, V., Marušić, M., Rogina, M., Singer, S., Singer, S. *Numerička analiza; Poglavlje 11: Optimizacija*. Sveučilište u Zagrebu, PMF - Matematički odjel, 2003. Dostupno na: `http://web.math.pmf.unizg.hr/~singer/num_anal/num_anal.pdf`

Beck, A., *Introduction to Nonlinear Optimization. Theory, Algorithms, and Applications with MATLAB*. SIAM, Philadelphia, PA, USA, 2014.

Venkataraman, P., *Applied Optimization with MATLAB Programming. Second Edition.* Wiley, Hoboken, NJ, USA, 2009.