

Sveučilište u Zagrebu
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE
Zavod za robotiku i automatizaciju proizvodnih sustava
Katedra za strojarsku automatiku

Računalna matematika

Linearna algebra

V. Milić

Zagreb, 2020./2021.

Sadržaj

- 1 Uvod
- 2 Osnovne operacije matrične algebre
- 3 Determinanta, rang i inverz matrice
- 4 Sustav linearnih algebarskih jednadžbi
- 5 Svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori
- 6 Vektorske i matrične norme
- 7 Primjeri
- 8 Preporučena literatura

- 1 Uvod
- 2 Osnovne operacije matrične algebre
- 3 Determinanta, rang i inverz matrice
- 4 Sustav linearnih algebarskih jednadžbi
- 5 Svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori
- 6 Vektorske i matrične norme
- 7 Primjeri
- 8 Preporučena literatura

Uvod

- Linearna algebra je dio matematike koji se bavi vektorskim prostorima i linearnim preslikavanjima/transformacijama (funkcijama/operatorima).
- Linearna algebra je nužna za razumijevanje i osnovni alat u gotovo svim matematičkim disciplinama, a izvorište joj je u rješavanju linearnih jednadžbi.
- Ima ključnu ulogu u gotovo svim znanostima koje koriste matematiku:
 - inženjerstvo i tehničke znanosti: teorija grafova, automatsko upravljanje, mehanika kontinuuma (konačni elementi), elektrotehnika, obrada slika/signala, kodiranje, itd.,
 - prirodne znanosti i ekonomija, tj. općenito gdje je potrebna obrada velikog broja podataka,
 - optimizacija: inženjerstvo, financije, ekonomija, itd.
- Nelinearni problem kojeg nije moguće direktno ili eksplicitno riješiti nastoji se linearizirati, tj. aproksimirati nekim linearnim problemom koji se zatim rješava metodama linearne algebre.

- 1 Uvod
- 2 Osnovne operacije matrične algebre**
- 3 Determinanta, rang i inverz matrice
- 4 Sustav linearnih algebarskih jednažbi
- 5 Svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori
- 6 Vektorske i matrične norme
- 7 Primjeri
- 8 Preporučena literatura

Jednakost matrica

- Matrica \mathbf{A} dimenzije $n \times m$ je jednaka matrici \mathbf{B} dimenzije $p \times q$ ako vrijedi $n = p$ i $m = q$ i

$$a_{ij} = b_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

U tom slučaju pišemo

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}.$$

- U MATLABu vrlo jednostavno:
`>> A == B`

Zbrajanje matrica

- Neka je $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ i $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{p \times q}$. Ako je $n = p$ i $m = q$ onda matricu $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ s elementima

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, m.,$$

zovemo zbrojem ili sumom matrica \mathbf{A} i \mathbf{B} i pišemo

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}.$$

- U MATLABu vrlo jednostavno:
`>> C = A + B`

Umnožak matrice sa skalarom

- Ako je $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ i $c \in \mathbb{R}$, onda matricu $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ s elementima

$$d_{ij} = c a_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, m.,$$

zovemo umnožak matrice \mathbf{A} sa skalarom c i označavamo

$$\mathbf{D} = c \mathbf{A}.$$

- U MATLABu vrlo jednostavno:

```
>> D = c*A
```


Umnožak matrica

- Neka je $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ i $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times p}$, umnožak ili produkt matrica \mathbf{A} i \mathbf{B} je matrica

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times p}$$

čiji su elementi određeni formulom

$$c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + a_{i3} b_{3j} + \dots + a_{im} b_{mj} = \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj},$$

$$i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, p.$$

- U MATLABu vrlo jednostavno:

```
>> C = A*B
```

Transponiranje matrica

- Neka je $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Matrica \mathbf{A}^T se naziva transponirana matrica matrici \mathbf{A} , ako je svaki redak od \mathbf{A}^T jednak odgovarajućem stupcu matrice \mathbf{A} . Prema tome, transponiranu matricu dobivamo tako da stupce (retke) matrice zamijenimo njenim retcima (stupcima). Ako je

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{onda je} \quad \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- Neka je $\mathbf{Z} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ i $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_1 + i\mathbf{Z}_2$, pri čemu su $\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2 \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Tada se $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_1 - i\mathbf{Z}_2$ naziva kompleksno konjugirana matrica i označava sa $\bar{\mathbf{Z}}$. Kompleksno transponirana ili hermitski adjungirana matrica \mathbf{Z} je matrica $\mathbf{Z}^* = \mathbf{Z}_1^T - i\mathbf{Z}_2^T$.
- U MATLABu operaciju transponiranja matrice možemo provesti na sljedeće načine:
 - `>> A'` - transponiranje i kompleksna konjugacija (ili primjenom ugrađene funkcije `ctranspose(A)`),
 - `>> A.'` - transponiranje bez kompleksne konjugacije (ili primjenom ugrađene funkcije `transpose(A)`).

Potencije matrica

- Ako je \mathbf{A} kvadratna matrica dimenzije $n \times n$ onda je

$$\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}_n.$$

Također vrijedi sljedeće

$$\mathbf{A}^p = \underbrace{\mathbf{A} \mathbf{A} \cdots \mathbf{A}}_{p \text{ puta}}.$$

Za potenciranje kvadratnih matrica vrijedi svojstvo asocijativnosti, npr.

$$\mathbf{A}^3 = \mathbf{A} \mathbf{A} \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{A}^2 = \mathbf{A}^2 \mathbf{A}.$$

Za nenegativne cijele brojeve r i s lako se pokaže da vrijedi

$$\mathbf{A}^r \mathbf{A}^s = \mathbf{A}^{r+s}, \quad (\mathbf{A}^r)^s = \mathbf{A}^{rs}.$$

- U MATLABu vrlo jednostavno:
`>> A^p`

Posebne matrice

U linearnoj algebri postoje neke posebne vrste matrica, a najčešće se upotrebljavaju:

- nul-matrica kojoj su svi elementi nule, tj. $a_{ij} = 0$ (u MATLAB-u: `zeros()`),
- matrica jedinica kojoj su svi elementi jedinice, tj. $a_{ij} = 1$ (u MATLAB-u: `ones()`),
- dijagonalna matrica je kvadratna matrica kojoj su svi elementi izvan glavne dijagonale jednaki nuli, tj. $a_{ij} = 0$ ako $i \neq j$, $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ (u MATLAB-u: `diag()`),
- jedinična matrica je kvadratna matrica koja ima jedinice na glavnoj dijagonali, dok su ostali elementi nule. Obično se označava s \mathbf{I}_n gdje indeks n označava dimenziju matrice (u MATLAB-u: `eye()`).

Skalarni i vektorski produkt

- Skalarni produkt (engl. *dot product*, *inner product*) dva vektora u prostoru \mathbb{R}^n (\mathbb{C}^n) definiran je sljedećim izrazima

$$\mathbf{x}^T \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i \in \mathbb{R} \quad \text{i} \quad \mathbf{x}^* \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i y_i \in \mathbb{C}.$$

- U Euklidskom prostoru skalarni produkt jednak je:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{y} = \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \cdot \cos(\theta).$$

- Vektorski produkt (engl. *cross product*, *vector product*) dva vektora je takvo množenje koje kao rezultat daje opet vektor:

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{bmatrix}.$$

- Vektorski produkt posebnost trodimenzionalnog Euklidskog prostora. Geometrijska interpretacija:

$$\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \cdot \sin(\theta).$$

- Za računanje skalarnog i vektorskog produkta u MATLABu postoje ugrađene funkcije: `dot()` i `cross()`.

- 1 Uvod
- 2 Osnovne operacije matrične algebre
- 3 Determinanta, rang i inverz matrice**
- 4 Sustav linearnih algebarskih jednadžbi
- 5 Svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori
- 6 Vektorske i matrične norme
- 7 Primjeri
- 8 Preporučena literatura

Determinanta matrice

- Determinanta je funkcija definirana na skupu svih kvadratnih matrica, a poprima vrijednosti iz skupa skalara.
- Determinanta matrice definira se induktivno, tj. determinanta matrice n -tog reda definira se pomoću determinante matrice $(n - 1)$ -og reda.
- Laplaceova formula: Neka su a_{ij} elementi kvadratne matrice i neka je $M_{ij} = |\mathbf{A}_{ij}|$ determinanta matrice pomicanjem u lijevo i -tog retka i j -tog stupca. Tada za fiksirani redak i

$$|\mathbf{A}| = \sum_j (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij},$$

gdje se $M_{i,j}$ naziva minor matrice \mathbf{A} , dok se izraz $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ naziva kofaktor.

- Za računanje determinante matrice u MATLABu postoji ugrađena funkcija: `det()`.

Rang matrice

- **Linearno nezavisni vektori.** Za skup od m vektora \mathbf{x}_i za $i = 1, 2, \dots, m$ koji imaju n elemenata, tj. $\mathbf{x}_i = [x_{1i} \ x_{2i} \ \dots \ x_{ni}]^T$, kažemo da je linearno nezavisan ako ne postoji skup konstanti k_1, k_2, \dots, k_m (od kojih je barem jedna različita od nule) takav da

$$k_1\mathbf{x}_1 + k_2\mathbf{x}_2 + \dots + k_m\mathbf{x}_m = \mathbf{0}$$

- Ako postoje konstante k_1, k_2, \dots, k_m (od kojih je barem jedna različita od nule) takve da je gornji izraz zadovoljen, tada kažemo da su vektori \mathbf{x}_i za $i = 1, 2, \dots, m$, linearno zavisni.
- Vektori \mathbf{x}_i za $i = 1, 2, \dots, m$, mogu biti linearno nezavisni samo ako je broj vektora m manji ili jednak dimenziji vektorskog prostora n , odnosno $m \leq n$.

- **Rang matrice.** Formirajmo matricu čiji su stupci jednaki vektorima \mathbf{x}_i za $i = 1, 2, \dots, m$

$$\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{x}_m] = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nm} \end{bmatrix}, \quad m \leq n.$$

- Kažemo da matrica \mathbf{X} ima rang r ako ima r linearno nezavisnih stupaca, odnosno vektora \mathbf{x}_i za $i = 1, 2, \dots, m$.
- Na ovaj način je ispitivanje linearne nezavisnosti vektora ekvivalentno ispitivanju ranga matrice. Stoga, da bi skup vektora \mathbf{x}_i za $i = 1, 2, \dots, m$, bio linearno nezavisan, rang matrice \mathbf{X} mora biti jednak m .
- Za računanje ranga matrice u MATLABu postoji ugrađena funkcija: `rank()`.

Inverz matrice

- Za kvadratnu matricu \mathbf{A} dimenzije $n \times n$, matrica \mathbf{B} dimenzije $n \times n$ koja zadovoljava uvjete

$$\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{I}_n \quad \text{i} \quad \mathbf{B}\mathbf{A} = \mathbf{I}_n,$$

zove se inverz matrice \mathbf{A} i označava se sa $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$. Matrice za koje postoji inverz obično se nazivaju invertibilne, regularne ili nesingularne. Kvadratne matrice koje nisu regularne nazivaju se singularne.

- Nužan i dovoljan uvjet da bi kvadratna matrica \mathbf{A} dimenzije $n \times n$ bila nesingularna je $|\mathbf{A}| \neq 0 \Rightarrow \text{rank}(\mathbf{A}) = n$, budući da je

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\text{adj}(\mathbf{A})}{|\mathbf{A}|}$$

gdje je

$$\text{adj}(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}^T, \quad C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

- U nekim slučajevima za pravokutne matrice moguće je definirati tzv. poopćeni inverz.
- Ako je matrica \mathbf{A} dimenzije $m \times n$ i $\text{rank}(\mathbf{A}) = n$ tada matrica \mathbf{A} ima lijevi inverz

$$\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^* \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^* \quad \text{odnosno} \quad \mathbf{A}^+ \mathbf{A} = \mathbf{I}_n.$$

- Ako je $\text{rank}(\mathbf{A}) = m$ tada matrica \mathbf{A} ima desni inverz

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^* (\mathbf{A} \mathbf{A}^*)^{-1} \quad \text{odnosno} \quad \mathbf{A} \mathbf{A}^+ = \mathbf{I}_m.$$

- Za računanje inverza matrice u MATLABu postoje ugrađene funkcije: `inv()`, `A^-1`, `\` (LU faktorizacija), `pinv()`.

- 1 Uvod
- 2 Osnovne operacije matrične algebre
- 3 Determinanta, rang i inverz matrice
- 4 Sustav linearnih algebarskih jednadžbi**
- 5 Svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori
- 6 Vektorske i matrične norme
- 7 Primjeri
- 8 Preporučena literatura

Sustav linearnih algebarskih jednadžbi

- Izvorište linearne algebre jest rješavanje sustava linearnih jednadžbi

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned}$$

- Uvođenjem matrice sustava $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, vektora rješenja $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ i vektora desne strane sustava $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

sustav prelazi u matrični problem

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}.$$

- Ako je matrica \mathbf{A} kvadratna tj. $m = n$ i punog ranga tada rješenje možemo pisati kao

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}.$$

- 1 Uvod
- 2 Osnovne operacije matrične algebre
- 3 Determinanta, rang i inverz matrice
- 4 Sustav linearnih algebarskih jednažbi
- 5 Svojtvene vrijednosti i svojstveni vektori**
- 6 Vektorske i matrične norme
- 7 Primjeri
- 8 Preporučena literatura

Svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori

- Neka je \mathbf{A} kvadratna matrica dimenzije $n \times n$. Vektor \mathbf{x} dimenzije $n \times 1$, $\mathbf{x} \neq 0$ je vlastiti vektor od \mathbf{A} ako postoji takav skalar λ da je

$$\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x} \quad \text{odnosno} \quad (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = 0.$$

U tom slučaju, λ je vlastita vrijednost, a par (\mathbf{x}, λ) je vlastiti par matrice \mathbf{A} .

- Navedeni sustav jednadžbi ima netrivialno rješenje jedino ako vrijedi

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0.$$

- Razvojem gornje determinante dobiva se polinom n -tog reda koji se naziva karakterističnim polinomom matrice \mathbf{A} .
- Za računanje svojstvenih vrijednosti i vektora kao i za računanje karakterističnog polinoma matrice u MATLABu postoje ugrađene funkcije: `eig()` i `poly()`.

- 1 Uvod
- 2 Osnovne operacije matrice algebre
- 3 Determinanta, rang i inverz matrice
- 4 Sustav linearnih algebarskih jednažbi
- 5 Svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori
- 6 Vektorske i matrice norme**
- 7 Primjeri
- 8 Preporučena literatura

Vektorske i matrice norme

- Norma realnog ili kompleksnog vektor \mathbf{x} dimenzije n je funkcija $\|\cdot\|$ koja preslikava vektorski prostor u prostor nenegativnih realnih brojeva. Najčešće se koriste p -norme (ili ℓ_p norme) definirane sljedećim izrazom

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \geq 1.$$

- Za $p = 1$ dobivamo 1-normu (ili ℓ_1 normu)

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|.$$

- Za $p = 2$ dobivamo 2-normu (ili ℓ_2 normu) ili Euklidsku normu

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}.$$

- Za $p = \infty$ dobivamo ∞ -normu (ili ℓ_∞ normu)

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

- Matrične norme možemo dobiti kao operatorske (inducirane) norme iz odgovarajućih vektorskih normi korištenjem sljedećeg izraza

$$\|\mathbf{A}\| = \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|.$$

- Kada se u gornji izraz uvrste odgovarajuće vektorske norme, dobivaju se matrična 1-norma (ili maksimalna stupčana norma)

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|,$$

matrična 2-norma (ili spektralna norma)

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}},$$

gdje je λ_{max} najveća svojstvena vrijednost matrice $\{\mathbf{A}^* \mathbf{A}\}$, te matrična ∞ -norma (ili maksimalna retčana norma)






$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

- Za računanje vektorskih i matričnih normi u MATLABu postoji ugrađena funkcija: `norm()`.

- 1 Uvod
- 2 Osnovne operacije matrične algebre
- 3 Determinanta, rang i inverz matrice
- 4 Sustav linearnih algebarskih jednadžbi
- 5 Svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori
- 6 Vektorske i matrične norme
- 7 Primjeri**
- 8 Preporučena literatura

Pogledati priložene M-datoteke

- 1 Uvod
- 2 Osnovne operacije matrične algebre
- 3 Determinanta, rang i inverz matrice
- 4 Sustav linearnih algebarskih jednadžbi
- 5 Svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori
- 6 Vektorske i matrične norme
- 7 Primjeri
- 8 Preporučena literatura**

-  Hahn, B. H., Valentine, D. T. *Essential MATLAB for Engineers and Scientists. Fifth Edition*. Academic Press Elsevier, Waltham, MA, USA, 2013.
-  Dianat, S. A., Saber, E. S. *Advanced Linear Algebra for Engineers with MATLAB*. CRC Press, Boca Raton, FL, USA, 2009.
-  William F. *Numerical Linear Algebra with Applications Using MATLAB*. Academic Press Elsevier, Waltham, MA, USA, 2015.
-  Drmač, Z., Hari, V., Marušić, M., Rogina, M., Singer, S., Singer, S. *Numerička analiza; Poglavlje 2: Kratki uvod u linearnu algebru*. Sveučilište u Zagrebu, PMF - Matematički odjel, 2003. Dostupno na:
http://web.math.pmf.unizg.hr/~singer/num_anal/num_anal.pdf
-  Meyer, C. D. *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*. SIAM, Philadelphia, 2000.