

Sveučilište u Zagrebu  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE  
Zavod za robotiku i automatizaciju proizvodnih sustava  
Katedra za strojarsku automatiku

# Računalna matematika

## Aproksimacija i interpolacija

V. Milić

Zagreb, 2020./2021.

# Sadržaj

- 1 Aproksimacija
  - Linearne aproksimacijske funkcije
  - Nelinearne aproksimacijske funkcije
  - Minimizacija pogreške
- 2 Interpolacija
  - Polinomna interpolacija
  - Lagrangeov oblik interpolacijskog polinoma
  - Newtonov oblik interpolacijskog polinoma
- 3 Primjeri
- 4 Preporučena literatura

## 1 Aproksimacija

- Linearne aproksimacijske funkcije
- Nelinearne aproksimacijske funkcije
- Minimizacija pogreške

## 2 Interpolacija

- Polinomna interpolacija
- Lagrangeov oblik interpolacijskog polinoma
- Newtonov oblik interpolacijskog polinoma

## 3 Primjeri

## 4 Preporučena literatura

# APROKSIMACIJA

- Poznate su neke informacije o funkciji  $f$  na skupu  $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}$  (najčešće interval oblika  $[a, b]$  ili diskretni skup točaka) i na osnovu tih informacija želimo funkciju  $f$  zamijeniti nekom drugom funkcijom  $\varphi$  na istom ili većem skupu na način da su  $f$  i  $\varphi$  prema nekom kriteriju bliske.
- Postoje dva glavna slučaja kada provodimo aproksimaciju:
  - znamo funkciju  $f$ , ali je ona u formi kompliciranoj za računanje - javlja se u raznim numeričkim metodama,
  - ne znamo funkciju  $f$  već npr. samo njezine vrijednosti na nekom diskretnom skupu točaka - javlja se kod mjerenja nekih veličina.
- Aproksimacijska funkcija  $\varphi$  u općem slučaju ima sljedeći oblik

$$\varphi(x) = \varphi(x; a_0, a_1, \dots, a_m).$$

- Prema ovisnosti o parametrima  $\{a_0, a_1, \dots, a_m\}$  aproksimacijske funkcije mogu biti linearne i nelinearne.

# Linearne aproksimacijske funkcije

- Opći oblik linearne aproksimacijske funkcije:

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^m a_i \varphi_i(x).$$

- Najčešće korišteni vektorski prostori i baze:
  - polinomi:  $\varphi_i(x) = x^i$ ,  $i = 0, 1, \dots, m$ ;
  - trigonometrijski polinomi:  $\varphi_i \in \{1, \cos(x), \sin(x), \cos(2x), \sin(2x), \dots\}$ ;
  - splajnovi: po dijelovima polinomi.
- Budući da je funkcija  $\varphi$  linearno ovisna o parametrima  $\{a_0, a_1, \dots, a_m\}$ , njihovo određivanje svodi se na rješavanje sustava linearnih algebarskih jednadžbi ili rješavanje linearnih optimizacijskih problema.

# Nelinearne aproksimacijske funkcije

- Nelinearne aproksimacijske funkcije imaju nelinearnu ovisnost o parametrima.
- Najčešće korišteni vektorski prostori i baze:

- eksponencijalne:

$$\varphi(x) = a_0 e^{b_0 x} + a_1 e^{b_1 x} + \dots + a_m e^{b_m x},$$

gdje je broj nezavisnih parametara  $2m + 2$ ;

- racionalne:

$$\varphi(x) = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n},$$

gdje je broj nezavisnih parametara  $m + n + 1$ .

- Određivanje parametara svodi se na rješavanje sustava nelinearnih algebarskih jednadžbi ili rješavanje nelinearnih optimizacijskih problema.

# Minimizacija pogreške

- Parametri aproksimacijske funkcije mogu se odrediti tako da se minimizira norma (standardno se uzimaju  $\mathcal{L}_2$  i  $\mathcal{L}_\infty$  norme) pogreške

$$e(x) = f(x) - \varphi(x).$$

- Za  $\mathcal{L}_2$  normu traže se parametri funkcije  $\varphi$  tako da bude

$$\min_{\varphi \in \mathcal{F}} \|e(x)\|_2.$$

- U diskretnom slučaju imamo minimizaciju sljedećeg izraza

$$\sqrt{\sum_{k=0}^n (f(x_k) - \varphi(x_k))^2}.$$

- U kontinuiranom slučaju imamo minimizaciju sljedećeg izraza

$$\sqrt{\int_a^b (f(x) - \varphi(x))^2 dx}.$$

# Matrična formulacija linearnog problema najmanjih kvadrata

- Skup podataka  $(x_k, f_k)$  za  $k = 0, 1, 2, \dots, n$  treba aproksimirati funkcijom

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^m a_i \varphi_i(x).$$

- Drugim riječima, treba odrediti parametre  $a_0, a_1, \dots, a_m$  tako da je

$$\sum_{k=0}^n \left( f_k - \sum_{i=0}^m a_i \varphi_i(x_k) \right)^2 \rightarrow \min$$

- Uvedimo sljedeće  $\mathbf{V} = [v_{ki}] = [\varphi_i(x_k)]$ ,  $\mathbf{a} = [a_i]$ ,  $\mathbf{f} = [f_k]$ , čime dobivamo sustav linearnih algebarskih jednadžbi

$$\mathbf{V}\mathbf{a} = \mathbf{f}.$$

- Uobičajeno je  $n \geq m$ , pa imamo preodređen sustav linearnih jednadžbi koji ne mora uvijek imati rješenje, tj. može biti  $\mathbf{f} - \mathbf{V}\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ .
- „Najbolje” rješenje  $\mathbf{a}$  je „najmanji” rezidual, tj. rješenje

$$\min_{\mathbf{a}} \|\mathbf{f} - \mathbf{V}\mathbf{a}\|_2^2 \rightarrow \text{Problem najmanjih kvadrata.}$$



- 1 Aproksimacija
  - Linearne aproksimacijske funkcije
  - Nelinearne aproksimacijske funkcije
  - Minimizacija pogreške
  
- 2 **Interpolacija**
  - Polinomna interpolacija
  - Lagrangeov oblik interpolacijskog polinoma
  - Newtonov oblik interpolacijskog polinoma
  
- 3 Primjeri
  
- 4 Preporučena literatura

# INTERPOLACIJA

- Najčešće se zahtjeva da aproksimacijska funkcija prolazi određenim točkama tj. da interpolira funkciju u tim točkama.
- Drugim riječima, funkcije  $f$  i  $\varphi$  trebaju se podudarati na nekom konačnom skupu točaka (čvorovi interpolacije), tj. mora vrijediti uvjet

$$\varphi(x_k) = f(x_k).$$

- Iz uvjete interpolacije slijedi da je broj parametara funkcije  $\varphi$ , koje treba odrediti, jednak broju čvorova interpolacije.
- Može se zahtijevati da se u čvorovima, osim funkcijskih vrijednosti, poklapaju i vrijednosti njihovih derivacija.

# Polinomna interpolacija

- Neka je funkcija  $f$  zadana na diskretnom skupu različitih točaka  $x_k$ , tj. imamo  $f_k = f(x_k)$  za  $k = 1, \dots, n + 1$ . Tada postoji jedinstveni interpolacijski polinom stupnja najviše  $n$

$$\varphi(x) := p(x) = c_1x^n + c_2x^{n-1} + \dots + c_nx + c_{n+1},$$

za koji vrijedi

$$p(x_k) = f_k, \quad k = 1, \dots, n + 1.$$

- Prethodni uvjet interpolacije možemo raspisati u sljedeći oblik

$$p(x_1) = c_1x_1^n + c_2x_1^{n-1} + \dots + c_nx_1 + c_{n+1} = f_1,$$

$$p(x_2) = c_1x_2^n + c_2x_2^{n-1} + \dots + c_nx_2 + c_{n+1} = f_2,$$

⋮

$$p(x_{n+1}) = c_1x_{n+1}^n + c_2x_{n+1}^{n-1} + \dots + c_nx_{n+1} + c_{n+1} = f_{n+1},$$

- ili u matičnom obliku

$$\begin{bmatrix} x_1^n & x_1^{n-1} & \dots & x_1 & 1 \\ x_2^n & x_2^{n-1} & \dots & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{n+1}^n & x_{n+1}^{n-1} & \dots & x_{n+1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n+1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}\mathbf{c} = \mathbf{f}.$$

- Matrica  $\mathbf{V}$  se naziva Vandermondova matrica.
- Može se pokazati da je

$$|\mathbf{V}| = \prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (x_j - x_i)$$

- Ako i samo ako su  $x_i \neq x_j$  za  $i \neq j$  tada je  $\text{rank}(\mathbf{V}) = n + 1 \Rightarrow$  sustav ima jedinstveno rješenje.
- Kao što je dobro poznato polinomi visokog stupnja mogu imati vrlo loša svojstva: vrlo su oscilatorni i imaju veliku osjetljivost na perturbacije u parametrima. Zbog toga se koristi po dijelovima polinomna interpolacija, tj. na svakom podintervalu koristi se polinom niskog stupnja - **splajn interpolacija**.

# Lagrangeov oblik interpolacijskog polinoma

- Lagrangeov interpolacijski polinom u općem slučaju definiran je izrazom

$$p(x) = \sum_{k=1}^n f_k \ell_k(x),$$

pri čemu je Lagrangeova baza

$$\ell_k(x) = \prod_{i=1, i \neq k}^n \frac{x - x_i}{x_k - x_i}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

# Newtonov oblik interpolacijskog polinoma

- Newtonov interpolacijski polinom u općem slučaju definiran je izrazom

$$p(x) = \sum_{k=1}^n a_k n_k(x),$$

pri čemu je Newtonova baza

$$n_k(x) = \prod_{i=1}^k (x - x_i), \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

dok su parametri definirani kao podijeljene razlike

$$a_1 = f[x_1] = f(x_1),$$

$$a_2 = f[x_1, x_2] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

$$a_3 = f[x_1, x_2, x_3] = \frac{\frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}}{x_3 - x_1},$$




⋮

- 1 Aproksimacija
  - Linearne aproksimacijske funkcije
  - Nelinearne aproksimacijske funkcije
  - Minimizacija pogreške
- 2 Interpolacija
  - Polinomna interpolacija
  - Lagrangeov oblik interpolacijskog polinoma
  - Newtonov oblik interpolacijskog polinoma
- 3 Primjeri
- 4 Preporučena literatura

# Pogledati priložene M-datoteke



- 1 Aproksimacija
  - Linearne aproksimacijske funkcije
  - Nelinearne aproksimacijske funkcije
  - Minimizacija pogreške
  
- 2 Interpolacija
  - Polinomna interpolacija
  - Lagrangeov oblik interpolacijskog polinoma
  - Newtonov oblik interpolacijskog polinoma
  
- 3 Primjeri
  
- 4 Preporučena literatura

-  Drmač, Z., Hari, V., Marušić, M., Rogina, M., Singer, S., Singer, S. *Numerička analiza; Poglavlje 7: Aproksimacija i interpolacija*. Sveučilište u Zagrebu, PMF - Matematički odjel, 2003. Dostupno na:  
[http://web.math.pmf.unizg.hr/~singer/num\\_anal/num\\_anal.pdf](http://web.math.pmf.unizg.hr/~singer/num_anal/num_anal.pdf)
-  Phillips, G. M. *Interpolation and Approximation by Polynomials*. Springer-Verlag, New York, 2003.
-  Davis, P. J. *Interpolation and Approximation*, Dover Publications, New York, 1975.