

Sveučilište u Zagrebu
Fakultet strojarstva i brodogradnje

Vježbe iz kolegija Računalna matematika:

Osnove linearne algebre

Andrej Jokić, Vladimir Milić, Filip Maletić

{ajokic, vmilic, fmaletic}@fsb.hr

*Ovo su nerecenzirani materijali za vježbe iz kolegija **Računalna matematika**, a odnose se na rješavanje nekih problema iz linearne algebre primjenom programskog paketa MATLAB. Ovdje izneseni pojmovi iz linearne algebre najvećim dijelom se temelje na knjigama [1] i [2]. Stoga se čitatelji upućuju na navedenu literaturu u kojoj se mogu naći izvodi i dokazi koji ovdje nisu dani.*

Autori će biti zahvalni svakomu tko upozori na greške ili predloži dodatne i poboljšane zadatke.

Sadržaj

1	Osnovne operacije matrice algebre	4
1.1	Matrice	4
1.2	Transponiranje	5
1.3	Zbrajanje matrica	6
1.4	Množenje matrice sa skalarom	6
1.5	Množenje matrica	7
1.6	Potencije matrica	7
1.7	Skalarni i vektorski produkt	8
2	Determinanta, rang, inverz i trag matrice	10
2.1	Determinanta matrice	10
2.2	Rang matrice	10
2.3	Inverz matrice	10
2.4	Trag matrice	11
3	Sustavi linearnih algebarskih jednadžbi	14
4	Svojstvene vrijednosti i vektori	16
5	Vektorske i matrice norme	18
	Literatura	20

1 Osnovne operacije matrice algebre

1.1 Matrice

Matrica je matematički objekt koji se sastoji od (realnih ili kompleksnih) brojeva koji su raspoređeni u retke i stupce. Zapisuje se u obliku pravokutne sheme, a brojeve od kojih se sastoji zovemo elementima matrice. Matrica \mathbf{A} sa m redaka, n stupaca i s elementima a_{ij} zapisuje se kao

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Takvu matricu zovemo $m \times n$ matrica ili matrica tipa (reda, dimenzije) $m \times n$. Ako vrijedi $m = n$, kažemo da je \mathbf{A} kvadratna matrica reda n .

Matricu sa samo jednim retkom zovemo matrica redak ili jednoretčana matrica, a matricu sa samo jednim stupcem zovemo matrica stupac ili jednostupčana matrica. Jednostupčane i jednoretčane matrice kraće zovemo vektorima. Matricu, čiji su elementi realni brojevi, zovemo realna matrica, a matricu, čiji su elementi kako realni tako i kompleksni brojevi, zovemo kompleksna matrica. S $\mathbb{R}^{m \times n}$ ($\mathbb{C}^{m \times n}$) označavamo skup svih realnih (kompleksnih) $m \times n$ matrica.

Zadatak 1.1. U MATLAB-u kreirajte sljedeće matrice:

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -17 \\ 102 & 3 & 10 \\ -5 & 0 & 21 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} 7 & 8 & -3i \\ -2 - i & 0 & -5 \\ 13 & 1 & 5 + 7i \\ 10 & -11 & 12 \end{bmatrix}$$

U linearnoj algebri postoje neke "posebne" vrste matrica, a najčešće se upotrebljavaju:

- nul-matrica kojoj su svi elementi nule, tj. $a_{ij} = 0$ (u MATLAB-u: `zeros()`),
- matrica jedinica kojoj su svi elementi jedinice, tj. $a_{ij} = 1$ (u MATLAB-u: `ones()`),
- dijagonalna matrica je kvadratna matrica kojoj su svi elementi izvan glavne dijagonale jednaki nuli, tj. $a_{ij} = 0$ ako $i \neq j$, $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ (u MATLAB-u: `diag()`),
- jedinična matrica je kvadratna matrica koja ima jedinice na glavnoj dijagonali, dok su ostali elementi nule. Obično se označava s \mathbf{I}_n gdje indeks n označava dimenziju matrice (u MATLAB-u: `eye()`).

Zadatak 1.2. Primjenom gore navedenih "posebnih" matrica u MATLAB-u kreirajte sljedeću matricu:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zadatak 1.3. Pomoću for petlji kreirajte Hilbertovu kvadratnu matricu čiji su elementi definirani izrazom $h_{ij} = 1/(i + j - 1)$. Na primjer ako je red Hilbertove matrice 5 tada je ona sljedećeg oblika:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.5000 & 0.3333 & 0.2500 & 0.2000 \\ 0.5000 & 0.3333 & 0.2500 & 0.2000 & 0.1667 \\ 0.3333 & 0.2500 & 0.2000 & 0.1667 & 0.1429 \\ 0.2500 & 0.2000 & 0.1667 & 0.1429 & 0.1250 \\ 0.2000 & 0.1667 & 0.1429 & 0.1250 & 0.1111 \end{bmatrix}$$

Rezultat usporedite s MATLABovom ugrađenom funkcijom hilb.

1.2 Transponiranje

Neka je $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Matrica \mathbf{A}^T se naziva transponirana matrica matrici \mathbf{A} , ako je svaki redak od \mathbf{A}^T jednak odgovarajućem stupcu matrice \mathbf{A} . Prema tome, transponiranu matricu dobivamo tako da stupce (retke) matrice zamijenimo njenim retcima (stupcima). Ako je

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{onda je} \quad \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Neka je $\mathbf{Z} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ i $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_1 + i\mathbf{Z}_2$, pri čemu su $\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2 \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Tada se $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_1 - i\mathbf{Z}_2$ naziva kompleksno konjugirana matrica i označava sa $\bar{\mathbf{Z}}$. Kompleksno transponirana ili hermitski adjungirana matrica \mathbf{Z} je matrica $\mathbf{Z}^* = \mathbf{Z}_1^T - i\mathbf{Z}_2^T$.

Zadatak 1.4. Za matrice iz zadatka 1.1 odredite \mathbf{M}_1^T , \mathbf{M}_2^T i \mathbf{M}_2^* .

Rješenje.

ans =

1 102 -5

```

    0    3    0
   -17  10   21

```

ans =

```

   7.0000   -2.0000 - 1.0000i   13.0000           10.0000
   8.0000           0           1.0000          -11.0000
   0 - 3.0000i   -5.0000           5.0000 + 7.0000i   12.0000

```

ans =

```

   7.0000   -2.0000 + 1.0000i   13.0000           10.0000
   8.0000           0           1.0000          -11.0000
   0 + 3.0000i   -5.0000           5.0000 - 7.0000i   12.0000

```

□

1.3 Zbrajanje matrica

Neka su $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Matricu $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ s elementima

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n,$$

zovemo zbrojem ili sumom matrica \mathbf{A} i \mathbf{B} i pišemo $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$. Zbrajanje je definirano za svaki par matrica iz $\mathbb{R}^{m \times n}$ i rezultat je uvijek u $\mathbb{R}^{m \times n}$.

Zadatak 1.5. U MATLAB-u definirajte sljedeće matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 \\ -7 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 7 & -9 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}.$$

Rješenje.

$\mathbf{C} =$

```

    1    2    9
   -5    7   -6

```

□

1.4 Množenje matrice sa skalarom

Ako su $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ i $c \in \mathbb{R}$, matricu $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ s elementima

$$b_{ij} = ca_{ij}, \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n,$$

zovemo umnožak ili produkt matrice \mathbf{A} sa skalarom c i označavamo $\mathbf{B} = c\mathbf{A}$. Jasno je da za svaki realni skalar c i svaku matricu $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, mora $\mathbf{B} = c\mathbf{A}$ opet biti u $\mathbb{R}^{m \times n}$.

Zadatak 1.6. Pomnožite matricu \mathbf{C} iz zadatka 1.5 s 5.

Rješenje.

ans =

$$\begin{array}{ccc} 5 & 10 & 45 \\ -25 & 35 & -30 \end{array}$$

□

1.5 Množenje matrica

Neka su $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ i $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times p}$. Umnožak ili produkt matrica \mathbf{A} i \mathbf{B} je matrica $\mathbf{C} = \mathbf{A}\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times p}$ kojoj su elementi određeni formulom

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}, \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq p.$$

Produkt matrica \mathbf{A} i \mathbf{B} definiran je samo onda kad je broj stupaca matrice \mathbf{A} jednak broju redaka matrice \mathbf{B} .

Zadatak 1.7. Za matrice \mathbf{A} i \mathbf{B} iz zadatka 1.5 odredite matricu $\mathbf{D} = \mathbf{A}\mathbf{B}^T$

Rješenje.

D =

$$\begin{array}{cc} 17 & -24 \\ 5 & -41 \end{array}$$

□

1.6 Potencije matrica

Ako je \mathbf{A} kvadratna matrica dimenzije $n \times n$ onda je

$$\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}_n.$$

Također vrijedi sljedeće

$$\mathbf{A}^p = \underbrace{\mathbf{A} \mathbf{A} \cdots \mathbf{A}}_{p \text{ puta}}.$$

Za potenciranje kvadratnih matrica vrijedi svojstvo asocijativnosti, npr.

$$\mathbf{A}^3 = \mathbf{A} \mathbf{A} \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{A}^2 = \mathbf{A}^2 \mathbf{A}.$$

Za nenegativne cijele brojeve r i s lako se pokaže da vrijedi

$$\mathbf{A}^r \mathbf{A}^s = \mathbf{A}^{r+s}, \quad (\mathbf{A}^r)^s = \mathbf{A}^{rs}.$$

Zadatak 1.8. Za matricu \mathbf{D} iz zadatka 1.7 primjenom `while` petlje izračunajte $\mathbf{D}^0, \mathbf{D}^1, \dots, \mathbf{D}^5$.

Rješenje.

\mathbf{D}^0 je

$$\begin{array}{cc} 1.00 & 0.00 \\ 0.00 & 1.00 \end{array}$$

\mathbf{D}^1 je

$$\begin{array}{cc} 17.00 & -24.00 \\ 5.00 & -41.00 \end{array}$$

\mathbf{D}^2 je

$$\begin{array}{cc} 169.00 & 576.00 \\ -120.00 & 1561.00 \end{array}$$

\mathbf{D}^3 je

$$\begin{array}{cc} 5753.00 & -27672.00 \\ 5765.00 & -61121.00 \end{array}$$

\mathbf{D}^4 je

$$\begin{array}{cc} -40559.00 & 996480.00 \\ -207600.00 & 2367601.00 \end{array}$$

\mathbf{D}^5 je

$$\begin{array}{cc} 4292897.00 & -39882264.00 \\ 8308805.00 & -92089241.00 \end{array}$$

□

1.7 Skalarni i vektorski produkt

Standardni skalarni produkt dva vektora u prostoru \mathbb{R}^n (\mathbb{C}^n) definiran je sljedećim izrazima

$$\mathbf{x}^T \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i \in \mathbb{R} \quad \text{i} \quad \mathbf{x}^* \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i y_i \in \mathbb{C}.$$

Vektorski produkt dva vektora je takvo množenje koje kao rezultat daje opet vektor. Ova operacija je posebnost trodimenzionalnog Euklidskog prostora, jer nema analogiju u dvodimenzionalnom prostoru, niti prikladne generalizacije u višim dimenzijama.

Zadatak 1.9. *Provjerite da li su vektori $\mathbf{v} = [8 \ 4 \ 3]$ i $\mathbf{w} = [-2 \ 1 \ 4]$ okomiti.*

Zadatak 1.10. *Provjerite da li su vektori $\mathbf{v} = [-7 \ 2 \ 8]$ i $\mathbf{w} = [3.5 \ -1 \ -4]$ paralelni.*

Zadatak 1.11. *Izračunajte mehanički rad W ako su komponente vektora sile $\mathbf{F} = [2 \ -1 \ 1]$, a komponente vektora pomaka $\mathbf{d} = [3 \ -2 \ 4]$.*

Rješenje.

$$W = \\ 12$$

□

Zadatak 1.12. *Izračunajte komponente vektora momenta \mathbf{M} sile $\mathbf{F} = [8 \ 5 \ 7]$, ako su komponente vektora kraka sile $\mathbf{r} = [1 \ 3 \ 9]$.*

Rješenje.

$$\mathbf{M} = \\ -24 \quad 65 \quad -19$$

□

2 Determinanta, rang, inverz i trag matrice

2.1 Determinanta matrice

Determinanta je funkcija $|\cdot|$ definirana na skupu svih kvadratnih matrica, a poprima vrijednosti iz skupa skalara. Determinanta matrice definira se induktivno, tj. determinanta matrice n -tog reda definira se pomoću determinante matrice $(n - 1)$ -og reda

$$|\mathbf{A}| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} a_{k1} |\mathbf{A}_{k1}|,$$

gdje \mathbf{A}_{k1} označava matricu \mathbf{A} bez k -tog retka i prvog stupca.

2.2 Rang matrice

Svaku matricu $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ možemo promatrati kao niz njenih vektora-redaka ili kao niz njenih vektora stupaca. Skup vektora-redaka (vektora stupaca) matrice \mathbf{A} razapinje vektorski potprostor od $\mathbb{R}^{1 \times n}$ koji zovemo retčani (stupčani) potprostor od \mathbf{A} . Važno svojstvo tih potprostora je da imaju istu dimenziju. Broj linearno nezavisnih vektora redaka matrice \mathbf{A} naziva se retčani rang matrice \mathbf{A} . Broj linearno nezavisnih vektora stupaca matrice \mathbf{A} naziva se stupčani rang matrice \mathbf{A} . Kako se radi o istom broju izbacuje se pridjev retčani ili stupčani, pa se broj linearno nezavisnih vektora redaka (stupaca) matrice \mathbf{A} naziva rang matrice \mathbf{A} i označava s $r(\mathbf{A})$. Matrica \mathbf{A} je punog (stupčanog ili retčanog) ranga, ako je $r(\mathbf{A})$ jednak broju stupaca ili redaka matrice \mathbf{A} . Za matricu \mathbf{A} uvijek vrijedi

$$r(\mathbf{A}) \leq \{m, n\}.$$

2.3 Inverz matrice

Za kvadratnu matricu \mathbf{A} dimenzije $n \times n$, matrica \mathbf{B} dimenzije $n \times n$ koja zadovoljava uvjete

$$\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{I}_n \quad \text{i} \quad \mathbf{B}\mathbf{A} = \mathbf{I}_n,$$

zove se inverz matrice \mathbf{A} i označava se sa $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$. Matrice za koje postoji inverz obično se nazivaju invertibilne, regularne ili nesingularne. Kvadratne matrice koje nisu regularne nazivaju se singularne.

U nekim slučajevima je za pravokutne matrice moguće definirati tzv. poopćeni inverz. Ako je matrica \mathbf{A} dimenzije $m \times n$ i $r(\mathbf{A}) = n$ tada matrica \mathbf{A} ima lijevi inverz

$$\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^* \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^* \quad \text{odnosno} \quad \mathbf{A}^+ \mathbf{A} = \mathbf{I}_n,$$

a ako je $r(\mathbf{A}) = m$ tada matrica \mathbf{A} ima desni inverz

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^* (\mathbf{A}\mathbf{A}^*)^{-1} \quad \text{odnosno} \quad \mathbf{A}\mathbf{A}^+ = \mathbf{I}_m.$$

2.4 Trag matrice

Trag kvadratne matrice \mathbf{A} reda n je suma njezinih elemenata na glavnoj dijagonali

$$\text{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

Zadatak 2.1. *Definirajte matricu*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 25.3 & 100 & 45 \\ 11.9 & 12.8 & 99 \\ 7.1 & 4.2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Izračunajte: determinantu, rang, inverz i trag matrice \mathbf{A} .

Rješenje.

determinanta =

5.3599e+004

rang =

3

inverz =

-0.0066 -0.0058 0.1740

0.0120 -0.0036 -0.0367

-0.0008 0.0113 -0.0162

trag =

43.1000

□

Zadatak 2.2. *Napravite M-funkciju za računanje desnog, lijevog, Moore-Penrose pseudoinverza pravokutnih i singularnih matrica. Koristite sljedeći algoritam: ako je matrica punog retčanog ranga ($r(\cdot) = m$) tada računaj desni inverz, također ako je matrica punog stupčanog ranga ($r(\cdot) = n$) tada računaj lijevi inverz, inače računaj Moore-Penrose pseudoinverz. Neka se na ekran ispisuje poruka o kojem se inverzu radi (desni, lijevi ili Moore-Penrose).*

Algoritam ispitajte na sljedećim matricama:

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_3 = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}.$$

Rješenje.

Za matricu \mathbf{M}_1 :

Desni inverz je

ans =

```
0.5000  0
0        1.0000
0.5000  0
```

Za matricu \mathbf{M}_2 :

Lijevi inverz je

ans =

```
-1.1667  -0.1667   0.8333
0.6667   0.1667  -0.3333
```

Za matricu \mathbf{M}_3 :

Moore - Penrose pseudoinverz je

ans =

```
0.0320  0.0640
0.0240  0.0480
```

□

Zadatak 2.3. *Odredite matricu \mathbf{X} tako da vrijedi $\mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}$, gdje su*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Rješenje.

$\mathbf{X} =$

$$\begin{array}{cc} 2 & 4 \\ -1 & -2 \\ 3 & 3 \end{array}$$

□

3 Sustavi linearnih algebarskih jednadžbi

Jedna od najvažnijih primjena linearne algebre jest rješavanje sustava linearnih algebarskih jednadžbi

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\&\vdots \\a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m.\end{aligned}$$

Uvođenjem matrice sustava $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, vektora rješenja $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ i vektora desne strane sustava $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

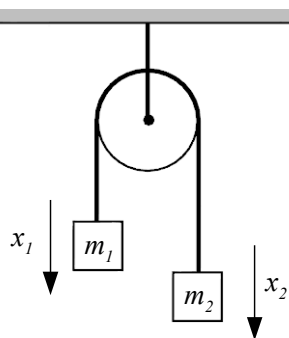
sustav prelazi u matrični problem

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}.$$

Ako je matrica \mathbf{A} kvadratna tj. $m = n$ i punog ranga tada rješenje možemo pisati kao

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}.$$

Zadatak 3.1. Za sustav s dvije mase prikazan na slici 1 potrebno je odrediti silu u užetu F i akceleracije \ddot{x}_1 i \ddot{x}_2 . Zadano je: $m_1 = 2 \text{ kg}$, $m_2 = 4 \text{ kg}$ i $g = 9.81 \text{ m/s}^2$.



Slika 1:

Rješenje. Primjenom Newton-ovog zakona gibanja dobivaju se jednačbe

$$m_1 \ddot{x}_1 = m_1 g - F, \quad m_2 \ddot{x}_2 = m_2 g - F.$$

Nadalje, vrijedi i "očuvanje" duljine užeta $x_1 + x_2 = C$, pa je sustav linearnih jednačbi

$$m_1 \ddot{x}_1 + F = m_1 g,$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + F = m_2 g,$$

$$\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 = 0.$$

Rjesenja =

Akceleracija_mase_1: -3.2700

Akceleracija_mase_2: 3.2700

Sila_u_uzetu: 26.1600

□

4 Svojstvene vrijednosti i vektori

Neka je $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$, $\mathbf{x} \neq 0$ je vlastiti vektor od \mathbf{A} ako postoji takav skalar λ da je

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \quad \text{odnosno} \quad (\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = 0.$$

U tom slučaju, λ je vlastita vrijednost, a par (\mathbf{x}, λ) je vlastiti par matrice \mathbf{A} .

Navedeni sustav jednadžbi ima netrivialno rješenje jedino ako vrijedi

$$|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0.$$

Razvojem gornje determinante dobiva se polinom n -tog reda koji se naziva karakterističnim polinomom matrice \mathbf{A} .

Zadatak 4.1. *Definirajte matricu*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 25.3 & 100 & 45 \\ 11.9 & 12.8 & 99 \\ 7.1 & 4.2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Izračunajte svojstvene vektore i svojstvene vrijednosti matrice \mathbf{A} .

Rješenje.

vek =

0.9170	0.8916	0.8916
0.3804	-0.3215 + 0.2703i	-0.3215 - 0.2703i
0.1198	-0.0798 - 0.1493i	-0.0798 + 0.1493i

vr =

72.6671	0	0
0	-14.7836 + 22.7825i	0
0	0	-14.7836 - 22.7825i

□

Zadatak 4.2. *Izračunajte Euklidske norme svojstvenih vektora matrice \mathbf{A} .*

Rješenje.

ans =

1.0000	1.0000	1.0000
--------	--------	--------

□

Zadatak 4.3. *Odredite karakteristični polinom matrice **A**. Također odredite korijene tog polinoma.*

Rješenje.

p =

```
1.0e+004 *  
0.0001 -0.0043 -0.1411 -5.3599
```

kor =

```
72.6671  
-14.7836 +22.7825i  
-14.7836 -22.7825i
```

□

5 Vektorske i matrice norme

Norma realnog ili kompleksnog vektor \mathbf{x} dimenzije n je funkcija $\|\cdot\|$ koja preslikava vektorski prostor u prostor nenegativnih realnih brojeva. Najčešće se koriste p -norme (ili ℓ_p norme) definirane sljedećim izrazom

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \geq 1.$$

Tako za $p = 1$ dobivamo 1-normu (ili ℓ_1 normu)

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|,$$

za $p = 2$ dobivamo 2-normu (ili ℓ_2 normu) ili Euclidsku normu

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2},$$

za $p = \infty$ dobivamo ∞ -normu (ili ℓ_∞ normu)

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

Matrične norme možemo dobiti kao operatorske (inducirane) norme iz odgovarajućih vektorskih normi korištenjem sljedećeg izraza

$$\|\mathbf{A}\| = \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|.$$

Kada se u gornji izraz uvrste odgovarajuće vektorske norme, dobivaju se matrična 1-norma (ili maksimalna stupčana norma)

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|,$$

matrična 2-norma (ili spektralna norma)

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}},$$

gdje je λ_{max} najveća svojstvena vrijednost matrice $\{\mathbf{A}^* \mathbf{A}\}$, te matrična ∞ -norma (ili

maksimalna retčana norma)

$$\|\mathbf{A}\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

Zadatak 5.1. *Neka su zadani*

$$\mathbf{x} = [-2 \ 4 \ 0 \ 10], \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & -6 & 9 \end{bmatrix}.$$

Pomoću for petlje naćinite matricu Norme kojoj će prvi stupac biti 1-norma, 2-norma i ∞ -norma vektora \mathbf{x} , a drugi stupac odgovarajuće inducirane norme matrice \mathbf{A} .

Rješenje.

Norme =

16.0000	9.0000
10.9545	11.9543
10.0000	20.0000

□

Literatura

- [1] Drmač, Z., Hari, V., Marušić, M., Rogina, M., Singer, S., Singer, S. *Numerička analiza; Poglavlje 2: Kratki uvod u linearnu algebru*. Sveučilište u Zagrebu, PMF - Matematički odjel, 2003. Dostupno na: http://web.math.pmf.unizg.hr/~singer/num_anal/num_anal.pdf
- [2] Meyer, C. D. *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*. SIAM, Philadelphia, 2000.
- [3] Hahn, B. H., Valentine, D. T. *Essential MATLAB for Engineers and Scientists. Fifth Edition*. Academic Press Elsevier, Waltham, MA, USA, 2013.
- [4] Dianat, S. A., Saber, E. S. *Advanced Linear Algebra for Engineers with MATLAB*. CRC Press, Boca Raton, FL, USA, 2009.
- [5] William F. *Numerical Linear Algebra with Applications Using MATLAB*. Academic Press Elsevier, Waltham, MA, USA, 2015.