Sveučilište u Zagrebu
Fakultet strojarstva i brodogradnje

Vježbe iz kolegija Računalna matematika

Aproksimacija i interpolacija

Andrej Jokić, Vladimir Milić, Filip Maletić
{ajokic, vmilic, fmaletic}@fsb.hr

Sadržaj

Ovo su nerecenzirani materijali za vježbe iz kolegija ***Računalna matematika****, a odnose se na rješavanje nekih problema aproksimacije i interpolacije primjenom programskog paketa MATLAB. Ovdje izneseni pojmovi iz aproksimacije i interpolacije najvećim dijelom se temelje na knjigama [1, 2, 3]. Stoga se čitatelji upućuju na navedenu literaturu u kojoj se mogu naći izvodi i dokazi koji ovdje nisu dani.*

Autori će biti zahvalni svakomu tko upozori na greške ili predloži dodatne i poboljšane zadatke.

1 Problem aproksimacije i interpolacije

Formulacija problema aproksimacije [1]: Poznate su određene informacije o funkciji $f(x)$, definiranoj na nekom skupu $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}$, potrebno je na osnovu tih informacija zamijeniti (aproksimirati) $f(x)$ nekom drugom funkcijom $\varphi(x)$ na skupu $\mathcal{X}$, tako da su f i φ bliske u nekom smislu. Skup $\mathcal{X}$ je najčešće interval oblika $[a,\ b]$ ili diskretni skup točaka.

Opći oblik linearne aproksimacijske funkcije je

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{m} c_i \varphi_i(x), \tag{1}$$

gdje su $\varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_m$ poznate funkcije.

Budući da je funkcija φ linearno ovisna o parametrima c_k, određivanje parametara c_k svodi se na rješavanje sustava linearnih algebarskih jednadžbi.

Pretpostavimo da imamo skup podataka $(x_k,\ f_k)$, $k = 1,\ 2,\ \ldots, n$, i da taj model želimo aproksimirati funkcijom oblika (1). Drugim riječima, želimo pronaći parametre c_k tako da podaci $(x_k,\ f_k)$ zadovoljavaju

$$f_k = \sum_{i=1}^{m} c_i \varphi_i(x_k), \quad k = 1,\ 2,\ \ldots, n. \tag{2}$$

Prethodne jednadžbe možemo zapisati u sljedećem matričnom obliku

$$\mathbf{A}\mathbf{c} = \mathbf{f}, \tag{3}$$

gdje su $\mathbf{A} = [a_{ki}] = [\varphi_i(x_k)]\,,\ \mathbf{c} = [c_i]\,,\ \mathbf{f} = [f_k]$. Ako je podataka više nego parametara, tj. ako je $n > m$, onda je ovaj sustav preodređen (engl. *overdetermined*).

Polinomi su najčešće korištene baze linearnih aproksimacijskih funkcija. U tom slučaju $\varphi(x)$ se može zapisati u sljedećem obliku

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{m} c_{i+1} x^{m-i}. \tag{4}$$

Najčešći oblici nelinearnih aproksimacijskih funkcija su eksponencijalne aproksimacije

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{m} c_i e^{b_i x} \tag{5}$$

te racionalne aproksimacije

$$\varphi(x) = \frac{\sum_{i=0}^{r} c_{i+1} x^{r-i}}{\sum_{i=0}^{s} b_{i+1} x^{s-i}}. \tag{6}$$

Formulacija problema interpolacije [1]: Funkcije $f(x)$ i $\varphi(x)$ trebaju se podudarati na nekom konačnom skupu argumenata (ili kraće točaka). Te točke se obično nazivaju čvorovima interpolacije. Ovom zahtjevu se može, ali i ne mora dodati zahtjev da se u čvorovima, osim funkcijskih vrijednosti, poklapaju i vrijednosti nekih derivacija.

Neka je funkcija f zadana na diskretnom skupu različitih točaka x_k, tj. imamo $f_k = f(x_k)$. Tada postoji jedinstveni interpolacijski polinom reda najviše n

$$\varphi(x) := p_n(x) = c_1 x^n + c_2 x^{n-1} + \cdots + c_n x + c_{n+1}, \tag{7}$$

za koji vrijedi

$$p_n(x_k) = f_k, \quad k = 1,\ \ldots,\ n+1. \tag{8}$$

Uvjet interpolacije (8) možemo raspisati u sljedeći oblik

$$\begin{aligned} p_n(x_1) &= c_1 x_1^n + c_2 x_1^{n-1} + \cdots + c_n x_1 + c_{n+1} = f_1, \\ p_n(x_2) &= c_1 x_2^n + c_2 x_2^{n-1} + \cdots + c_n x_2 + c_{n+1} = f_2, \\ &\vdots \\ p_n(x_{n+1}) &= c_1 x_{n+1}^n + c_2 x_{n+1}^{n-1} + \cdots + c_n x_{n+1} + c_{n+1} = f_{n+1} \end{aligned} \tag{9}$$

ili u matričnom obliku

$$\begin{bmatrix} x_1^n & x_1^{n-1} & \ldots & x_1 & 1 \\ x_2^n & x_2^{n-1} & \ldots & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{n+1}^n & x_{n+1}^{n-1} & \ldots & x_{n+1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n+1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Vc} = \mathbf{f}. \tag{10}$$

Matrica $\mathbf{V}$ se naziva Vandermondova matrica.

Interpolacija polinomima visokog stupnja može imati vrlo loša svojstva. Zbog toga se često koristi po dijelovima polinomna interpolacija (tzv. splajn interpolacija)

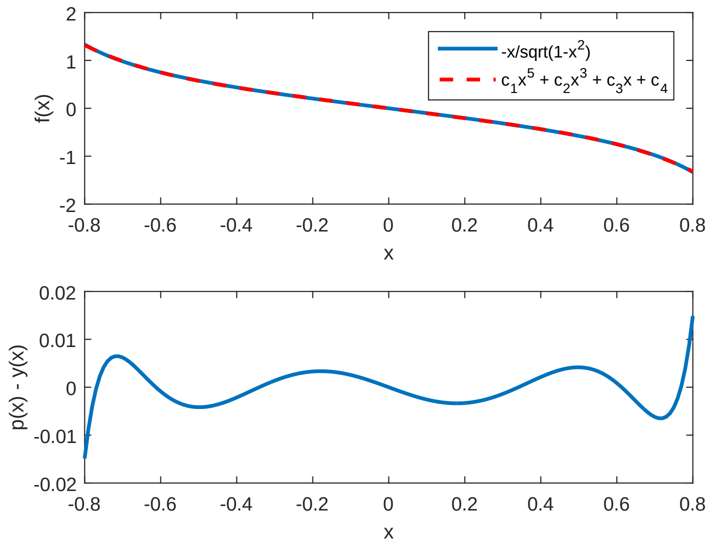
$$\varphi\mid_{[x_k,\, x_{k+1}]} = p_k, \quad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1. \tag{11}$$

2 Zadaci u MATLAB-u

Zadatak 2.1. *Odredite koeficijente polinoma* $p(x) = c_1x^5 + c_2x^3 + c_3x + c_4$ *kojim ćete aproksimirati funkciju* $y(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$ *na intervalu* $x \in [-4/5,\ 4/5]$ *tako da problem svedete na rješavanje sustava linearnih algebarskih jednadžbi.*

Rješenje.

```
ans =

   -1.2767

   -0.1501

   -1.0290

   -0.0000
```



Slika 1:

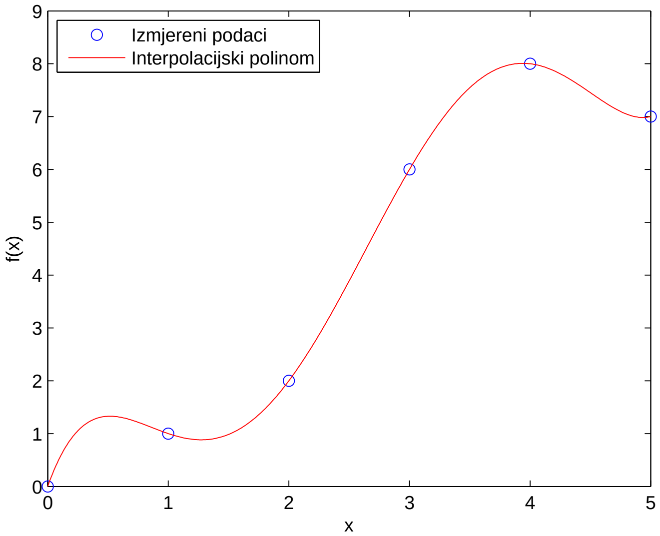
□

Zadatak 2.2. *Odredite koeficijente* $\mathbf{c}$ *polinoma kojim ćete interpolirati izmjerene podatke* $(x_k,\ f_k)$ *rješavanjem linearnog sustava* $\mathbf{Vc} = \mathbf{f}$*, gdje je* $\mathbf{f} = [f_k]$ *i* $\mathbf{V}$ *je Vandermondova matrica od* $\mathbf{x} = [x_k]$*.*

x_k	0	1	2	3	4	5
f_k	0	1	2	6	8	7

Rješenje.

```
c =
    0.1000
   -1.3333
    6.0000
  -10.1667
    6.4000
    0
```



Slika 2:

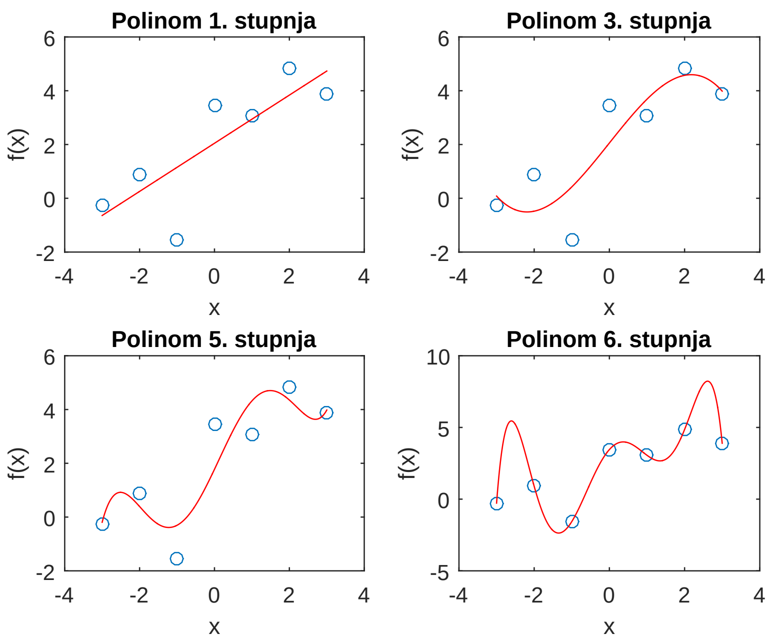
□

Zadatak 2.3. *Odredite koeficijente polinoma 1., 3., 5. i 6. stupnja kojima ćete aproksimirati skup izmjerenih podataka* $(x_k,\ f_k)$ *primjenom MATLABove ugrađene funkcije* `polyfit()`.

x_k	-3	-2	-1	0	1	2	3
f_k	-0.2774	0.8958	-1.5651	3.4565	3.0601	4.8568	3.8982

Rješenje.

```
p1 =

    0.8955    2.0464

p3 =

   -0.1225   -0.0025    1.7531    2.0563

p5 =

    0.0477   -0.0272   -0.6795    0.2576    2.9443    1.7769

p6 =

   -0.1078    0.0477    1.3935   -0.6795   -3.9948    2.9443    3.4565
```



Slika 3:

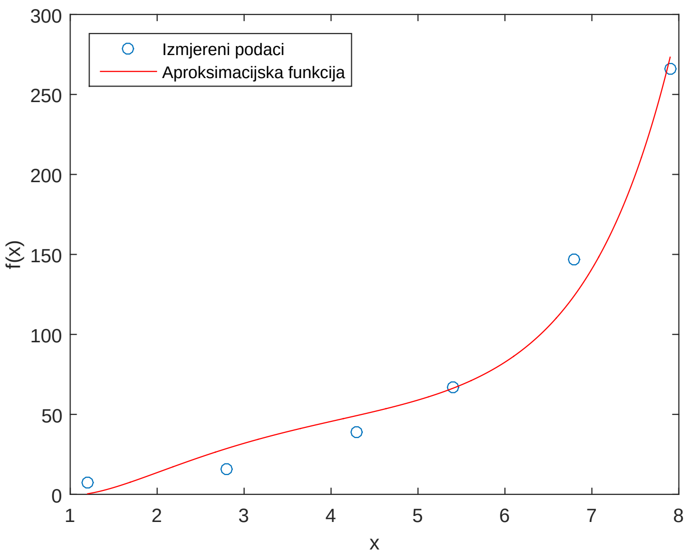
□

Zadatak 2.4. *Odredite koeficijente c_1, c_2 i c_3 rješavanjem sustava linearnih algebarskih jednadžbi tako da funkcija $f(x) = c_1 e^x + c_2 x e^{-x} + c_3$ aproksimira podatke $(x_k,\ f_k)$.*

x_k	1.2	2.8	4.3	5.4	6.8	7.9
f_k	7.5	16.1	38.9	67.0	146.6	266.2

Rješenje.

```
ans =
     0.0824
  -142.3003
    51.5242
```



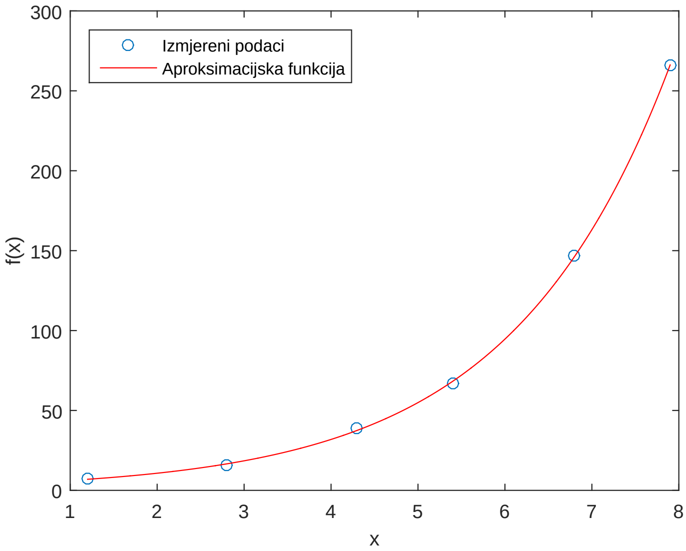
Slika 4:

□

Zadatak 2.5. *Primjenom MATLABove ugrađene funkcije* `lsqcurvefit()` *odredite koeficijente* a *i* b *funkcije* ae^{bx} *kojom ćete aproksimirati podatke* $(x_k,\ f_k)$ *iz zadatka 2.4.*

Rješenje.

```
a =

    3.6137


b =

    0.5442
```



Slika 5:

□

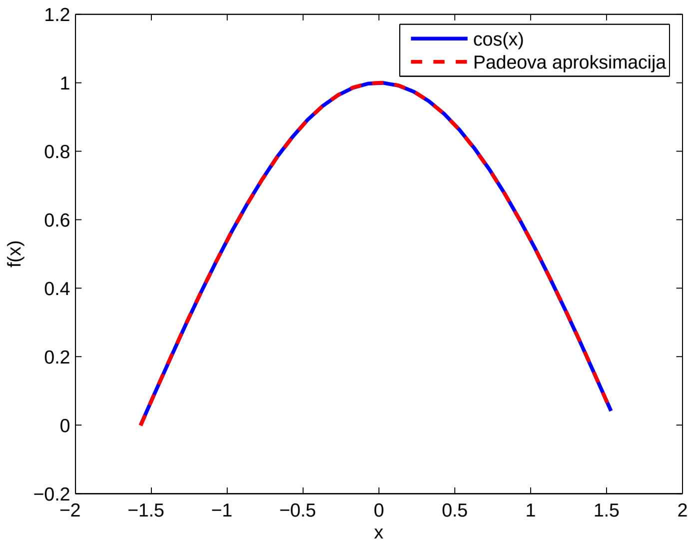
Zadatak 2.6. *Primjenom MATLABove ugrađene funkcije* `lsqcurvefit()` *odredite koeficijente racionalne aproksimacije oblika*

$$p(x) = \frac{\sum_{i=1}^{4} a_i x^{i-1}}{\sum_{i=1}^{4} b_i x^{i-1}}$$

funkcije $\cos(x)$ *na intervalu* $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Rješenje. Za početne uvjete $a_1 = 1$, $a_2 = a_3 = a_4 = 0$, $b_1 = 1$, $b_2 = b_3 = b_4 = 0$ i levenberg-marquardtov algoritam:

```
a1 =

    0.8861

a2 =

    0.5285

a3 =

   -0.3602

a4 =

   -0.2149

b1 =

    0.8856

b2 =

    0.5287

b3 =

    0.0876

b4 =

    0.0516
```



Slika 6:

□

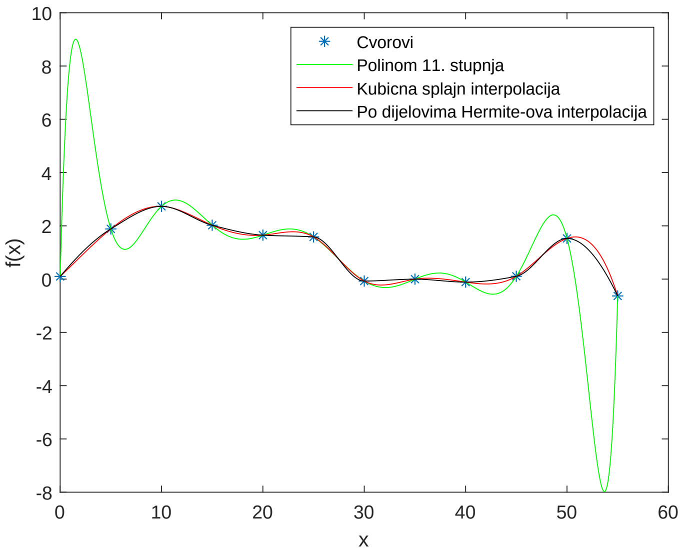
Zadatak 2.7. *Primjenom MATLABovih ugrađeni funkcija* `spline()` *i* `interp1()` *podatke interpolirajte kubičnim splajnom i po dijelovima Hermite-ovim polinomom. Ispišite*

x_k	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55
f_k	0.1	1.884	2.732	2.022	1.65	1.5838	-0.073	-0.002	-0.1122	0.106	1.5265	-0.6321

koeficijente kubičnog splajna.

Rješenja.

```
ans =
   -0.0018    0.0086    0.3594    0.1000
   -0.0018   -0.0187    0.3087    1.8840
    0.0041   -0.0460   -0.0150    2.7320
    0.0005    0.0158   -0.1660    2.0220
   -0.0064    0.0234    0.0299    1.6500
    0.0099   -0.0726   -0.2164    1.5838
   -0.0068    0.0763   -0.1981   -0.0730
    0.0019   -0.0252    0.0573   -0.0020
    0.0034    0.0028   -0.0546   -0.1122
   -0.0083    0.0533    0.2259    0.1060
   -0.0083   -0.0716    0.1342    1.5265
```



Slika 7:

□

Literatura

[1] Drmač, Z., Hari, V., Marušić, M., Rogina, M., Singer, S., Singer, S. *Numerička analiza; Poglavlje 7: Aproksimacija i interpolacija*. Sveučilište u Zagrebu, PMF - Matematički odjel, 2003. Dostupno na: `http://web.math.pmf.unizg.hr/~singer/num_anal/num_anal.pdf`

[2] Phillips, G. M. *Interpolation and Approximation by Polynomials*. Springer-Verlag, New York, 2003.

[3] Davis, P. J. *Interpolation and Approximation*, Dover Publications, New York, 1975.