

Sveučilište u Zagrebu  
Fakultet strojarstva i brodogradnje

Vježbe iz kolegija Računalna matematika

## Diferencijalne jednačbe

Andrej Jokić, Vladimir Milić, Filip Maletić

{ajokic, vmilic, fmaletić}@fsb.hr

### Sadržaj

<b>1</b>	<b>Obične diferencijalne jednačbe</b>	<b>3</b>
1.1	Problem početnih uvjeta . . . . .	3
1.2	Problem rubnih uvjeta . . . . .	5
1.3	Numerički postupci . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Zadaci u MATLABu</b>	<b>6</b>
	<b>Literatura</b>	<b>12</b>

*Ovo su nerecenzirani materijali za vježbe iz kolegija **Računalna matematika**, a odnose se na rješavanje diferencijalnih jednačbi primjenom programskog paketa MATLAB. Ovdje iznesena materija najvećim dijelom se temelji na knjigama [1, 2, 3, 4, 5, 6]. Stoga se čitatelji upućuju na navedenu literaturu u kojoj se mogu naći izvodi i dokazi koji ovdje nisu dani.*

*Autori će biti zahvalni svakomu tko upozori na greške ili predloži dodatne i poboljšane zadatke.*

# 1 Obične diferencijalne jednačbe

## 1.1 Problem početnih uvjeta

U ovim vježbama razmatraju se numeričke metode za aproksimaciju rješenja običnih diferencijalnih jednačbi prvog reda oblika

$$\dot{x}(t) = f(x, t), \quad (1)$$

pri čemu se pretpostavlja da je funkcija  $f(x, t)$  neprekidna na vremenskom intervalu  $t_0 \leq t \leq t_f$  i za  $-\infty \leq x \leq \infty$ . Analitičko rješenje jednačbe (1) je funkcija  $x(t)$ , te ako postoji mora zadovoljiti jednačbu  $\dot{x}(t) = f(x(t), t)$ . Općenito postoji beskonačno mnogo takvih funkcija. Uz uvjet

$$x(t_0) = x_0, \quad (2)$$

kao dodatni zahtjev, može se iz skupa rješenja izdvojiti jedno rješenje. U mnogim fizikalnim problemima varijabla  $t$  ima značenje vremena, pa se stoga (2) naziva početnim uvjetom, a  $t_0$  početnim trenutkom, dok je  $t_f$  konačni trenutak. Izrazi (1) i (2) zajedno čine *problem početnih uvjeta* ili *Cauchyev problem*.

Općenitiji problem je sustav od  $n$  običnih diferencijalnih jednačbi prvog reda

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, t), \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, t), \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t), \end{aligned} \quad (3)$$

za  $n$  nepoznatih realnih funkcija  $x_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Sustav jednačbi (3) možemo napisati u obliku analognom izrazu (1) koristeći vektorsku notaciju

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad (4)$$

gdje su

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \end{bmatrix},$$

dok zadani početni uvjet (2) sada ima oblik

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ \vdots \\ x_{n0} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Prema tome, za rješavanje sustava (4), uz početne uvjete (5), mogu se primjenjivati iste numeričke metode kao za rješavanje diferencijalne jednačbe (1), uz početni uvjet (2), vodeći računa o tome da se umjesto skalarnih funkcija  $x$  i  $f$  javljaju vektorske funkcije  $\mathbf{x}$  i  $\mathbf{f}$ .

U matematičkom opisu dinamičkih sustava pojavljuju se diferencijalne jednačbe višeg reda oblika

$$y^{(n)} = f(y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots, y^{(n-1)}, t), \quad y^{(i)}(t_0) = y_{i0}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1, \quad (6)$$

koje se svode na sustav diferencijalnih jednačbi prvog reda. Da bi se to postiglo potrebno je uvesti dodatne funkcije

$$\begin{aligned} x_1(t) &:= y(t), \\ x_2(t) &:= \dot{y}(t), \\ x_3(t) &:= \ddot{y}(t), \\ &\vdots \\ x_n(t) &:= y^{(n-1)}(t), \end{aligned}$$

čime se diferencijalna jednačba (6) transformira u ekvivalentni sustav diferencijalnih jednačbi prvog reda u vektorskom obliku

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \\ f(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \end{bmatrix}, \quad (7)$$

te se i u ovom slučaju mogu koristiti numeričke metode razvijene za rješavanje diferencijalne jednačbe (1).

## 1.2 Problem rubnih uvjeta

Opći oblik problema rubnih uvjeta (engl. *Boundary Value Problem* – BVP) u vektorskoj notaciji je

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{y}}(x) &= \mathbf{f}(x, \mathbf{y}(x), \mathbf{p}), & a \leq x \leq b, \\ \mathbf{r}(\mathbf{y}(a), \mathbf{y}(b)) &= \mathbf{0},\end{aligned}\tag{8}$$

gdje je  $\mathbf{p}$  vektor nepoznatih parametara sustava.

Tipični oblik problema je

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{y}} + \psi(x)\dot{\mathbf{y}} + \varphi(x)\mathbf{y} &= \mathbf{g}(x), & a \leq x \leq b, \\ \mathbf{y}(a) = \mathbf{y}_0, \quad \mathbf{y}(b) &= \mathbf{y}_1.\end{aligned}\tag{9}$$

## 1.3 Numerički postupci

Numerički postupci prikladni za programiranje na digitalnim računalima zasnivaju se na aproksimaciji rješenja sukcesivnim diskretnim točkama  $t_i$  vremenske varijable  $t$ , pri čemu  $i = 0, 1, \dots, N$ . Vremenski interval  $[t_0, t_f]$  u kojem se traži rješenje dijeli se na konačan broj koraka  $N$ . Ako su ti koraci jednaki, njihova veličina je

$$\tau = \frac{t_f - t_0}{N}.\tag{10}$$

Postupak sukcesivnog numeričkog rješavanja diferencijalnih jednadžbi svodi se na izračunavanje aproksimacije rješenja  $\mathbf{x}_{i+1}$  u točki  $t_{i+1}$  iz prethodno izračunatih vrijednosti za  $t_i, t_{i-1}, t_{i-p+1}$ . Ako se za izračunavanje  $\mathbf{x}_{i+1}$  upotrebljava samo prethodni korak tada je to *jednokoračni postupak*. Postupci koji se koriste rezultatima izračunatim u više prethodnih koraka su *višekoračni postupci*.

- i)* Numerički postupci za rješavanje problema oblika (4) s (5) ugrađeni su u MATLABove funkcije `ode45`, `ode23`, `ode113`, `ode15s`, `ode23s`
- ii)* Numerički postupci za rješavanje problema oblika (8) ugrađeni su u MATLABove funkcije `bvp4c`, `bvp5c`.

## 2 Zadaci u MATLABu

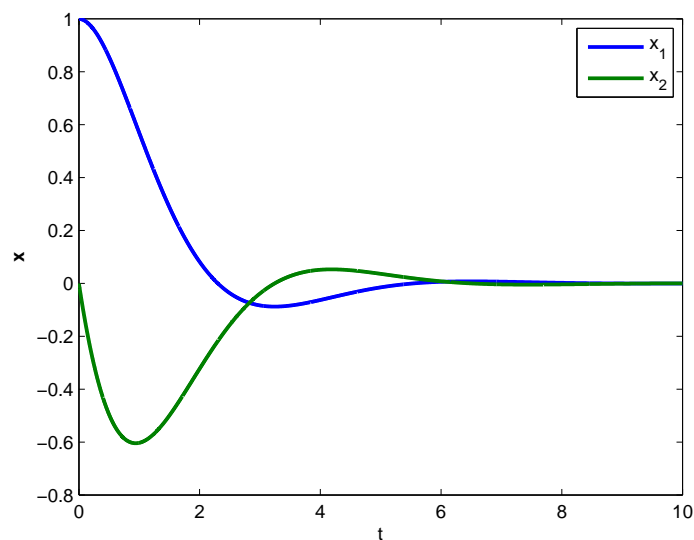
**Zadatak 2.1.** Odredite rješenje homogene linearne diferencijalne jednačbe primjenom MATLABove funkcije `expm()` na intervalu  $t \in [0, 10]$ .

$$\ddot{y}(t) + 1.5\dot{y}(t) + 1.5y(t) = 0, \quad y(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = 0. \quad (11)$$

Rješenja prikazite grafički kao na slici 1.

**Uputa:** Diferencijalnu jednačbu (11) zapišite kao sustav  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ ,  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$ , gdje je  $\mathbf{x} = [y \ \dot{y}]^T$ . Rješenje ovog sustava je

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0. \quad (12)$$



Slika 1:

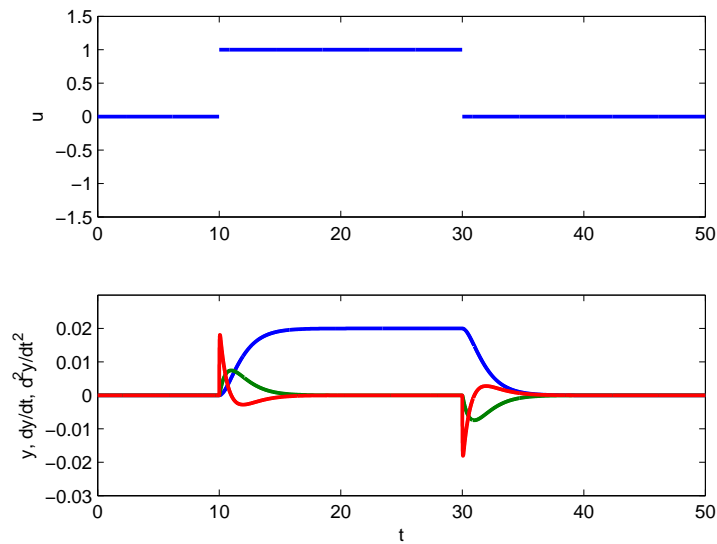
**Zadatak 2.2.** Dinamika sustava opisana je sljedećom diferencijalnom jednačbom

$$\ddot{y}(t) + 50\dot{y}(t) + 100y(t) = u(t). \quad (13)$$

Primjenom MATLABove funkcije `ode23()` simulirajte odziv sustava u intervalu  $t \in [0, 50]$  uz početne uvjete jednake 0 ako je

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 10 \\ 1, & 10 \leq t \leq 30 \\ 0, & t > 30 \end{cases} \quad (14)$$

Za definiranje pobude (14) koristite Heavisideovu funkciju. Prikazite rješenja kao na slici 2.

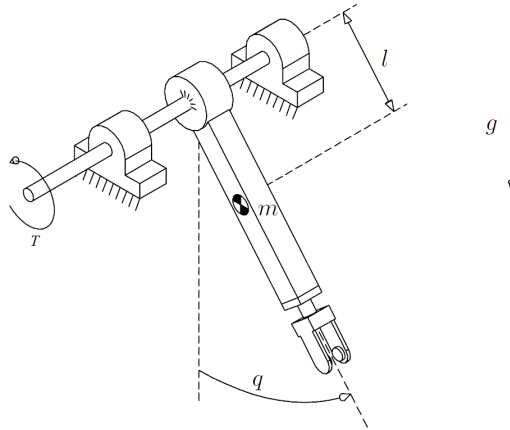


Slika 2:

**Zadatak 2.3.** Gibanje mehaničkog sustava prikazanog na slici 3 opisano je sljedećom diferencijalnom jednačbom

$$J \ddot{q}(t) + B \dot{q}(t) + m g l \sin(q(t)) = T, \quad (15)$$

gdje su  $q$  kut zakreta članka [rad],  $T$  ulazni moment [Nm],  $J$  ukupni moment tromosti oko osi koja prolazi zglobovima [kgm<sup>2</sup>],  $B$  koeficijent viskoznog prigušenja [Nms/rad], masa članka [kg],  $l$  udaljenost težišta od osi zgloba [m],  $g$  akceleracija sile teže [m/s<sup>2</sup>].



Slika 3: Preuzeto iz: R. Kelly, V. Santibanez and A. Loria: *Control of Robot Manipulators in Joint Space*, Springer-Verlag, London, 2005.

Ulazni moment  $T$  daje elektromotor prikazan na slici 4. Dinamika motora opisana je sljedećom diferencijalnom jednačbom:

$$R_a i_a(t) + L_a \frac{di_a(t)}{dt} + e = u_a, \quad (16)$$

gdje su  $u_a$  napon armature [V],  $i_a$  struja armature [A],  $R_a$  ukupni radni otpor armaturnog kruga [ $\Omega$ ],  $L_a$  ukupni induktivitet armaturnog kruga [H] i  $e$  protuelektromotorna sila [V].

Nadalje imamo,

$$e = K_e \Phi_n \omega_m = K_v \omega_m \longrightarrow \text{protuelektromotorna sila}, \quad (17)$$

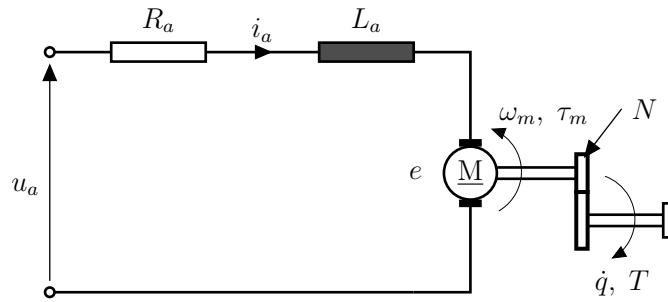
$$\tau_m = K_t i_a \longrightarrow \text{moment motora uz } \Phi_n = \text{const.}, \quad (18)$$

pri čemu su  $K_e$  konstrukcijska konstanta motora,  $\Phi_n$  nazivna vrijednost glavnog magnetskog toka po polu [Vs],  $K_v$  naponska konstanta motora [Vs],  $\omega_m$  mehanička brzina vrtnje [ $s^{-1}$ ] i  $K_t$  momentna konstanta motora [Nm/A].

Uzimajući u obzir prijenosni omjer  $N$ , imamo relacije

$$T = N \tau_m = N K_t i_a, \quad \omega_m = N \dot{q}, \quad (19)$$





Slika 4: Istosmjerni motor s nezavisnom i konstantnom uzбудom.

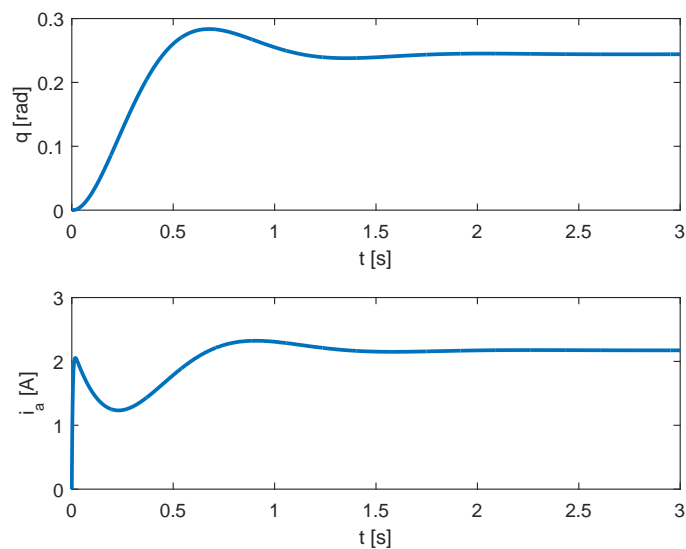
pa je ukupni sustav opisan sljedećim diferencijalnim jednadžbama

$$J \ddot{q} + B \dot{q} + m g l \sin(q) = N K_t i_a, \quad (20)$$

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + K_v N \dot{q} = u_a. \quad (21)$$

Primjenom MATLABove funkcije `ode45` simulirajte odziv sustava opisanog jednadžbama (20) i (21) ako je  $u_a = 5 \text{ V}$  u vremenskom intervalu  $t \in [0, 3]$  za početne uvjete  $q(0) = 0$ ,  $\dot{q}(0) = 0$ ,  $i_a(0) = 0$ . Numeričke vrijednosti parametara sustava su:  $J = 0.923 \text{ kgm}^2$ ,  $B = 1.02 \text{ Nms/rad}$ ,  $m = 5.5 \text{ kg}$ ,  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ ,  $l = 0.5 \text{ m}$ ,  $L_a = 9.6 \cdot 10^{-3} \text{ H}$ ,  $R_a = 2.3 \text{ } \Omega$ ,  $K_v = 0.3 \text{ Vs}$ ,  $K_t = K_v$ ,  $N = 10$ .

Prikažite vremenske dijagrame varijabli  $q(t)$  i  $i_a(t)$ .



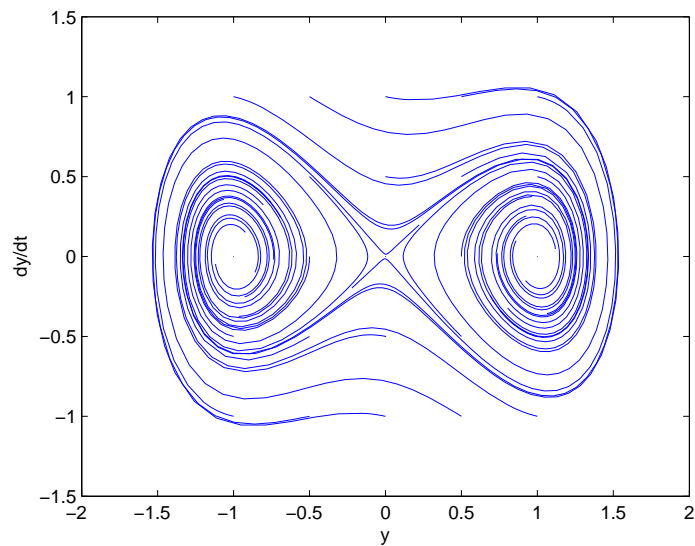
Slika 5:

**Zadatak 2.4.** Diferencijalna jednačba nepobuđenog Duffing-ovog oscilatora je

$$\ddot{y} + \delta \dot{y} + \beta y + \alpha y^3 = 0, \quad (22)$$

gdje su  $\alpha = 1$ ,  $\beta = -1$  i  $\delta = 0.2$ .

Primjenom ugniježđenih for petlji nacrtajte fazne portrete za različite početne uvijete kao što je prikazano na slici 6. Za numeričko rješavanje jednačbe (22) koristite MATLABovu funkciju `ode15s()`.



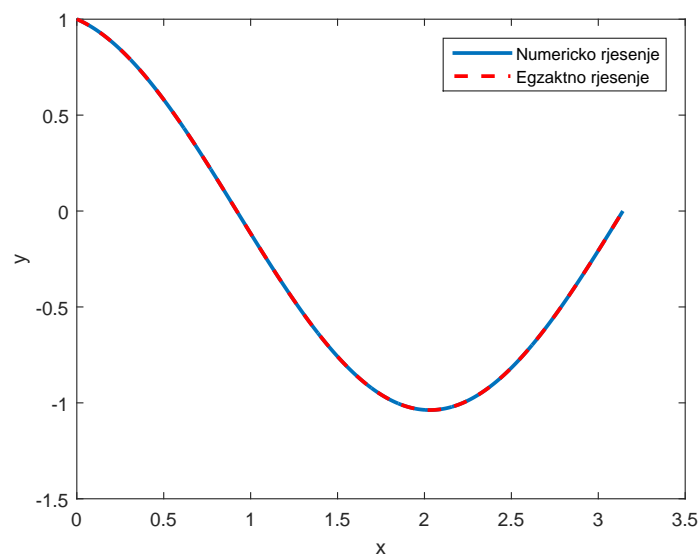
Slika 6:

**Zadatak 2.5.** *Primjenom MATLABove ugrađene funkcije `bvp4c` numerički riješite problem rubnih uvjeta opisan sljedećom jednačbom*

$$\ddot{y}(x) + 2y(x) = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(\pi) = 0, \quad (23)$$

*Grafički usporedite numeričko i egzaktno rješenje koje je*

$$y(x) = \cos(\sqrt{2}x) - \sin(\sqrt{2}x) \cdot \cot(\sqrt{2}\pi). \quad (24)$$



Slika 7:

## Literatura

- [1] Drmač, Z., Hari, V., Marušić, M., Rogina, M., Singer, S., Singer, S. *Numerička analiza; Poglavlje 10: Obične diferencijalne jednačbe*. Sveučilište u Zagrebu, PMF - Matematički odjel, 2003. Dostupno na: [http://web.math.pmf.unizg.hr/~singer/num\\_anal/num\\_anal.pdf](http://web.math.pmf.unizg.hr/~singer/num_anal/num_anal.pdf)
- [2] Hairer, E. and Wanner, G. and Nøsett, S. P. *Solving Ordinary Differential Equations I. Nonstiff Problems*. Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [3] Lapidus, L. and Seinfeld, J. H. *Numerical Solution of Ordinary Differential Equations*, Academic Press, New York, 1971.
- [4] Butcher, J. C. *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*. John Wiley and Sons Ltd, Chichester, 2008.
- [5] Hunt, B. R., Lipsman, R. L., Osborn, J. E., Rosenberg, J. M. *Differential Equations with MATLAB. Third Edition*. Wiley, Hoboken, NJ, USA, 2012.
- [6] Stanoyevitch, A. *Introduction to Numerical Ordinary and Partial Differential Equations Using MATLAB*. Wiley, Hoboken, NJ, USA, 2005.