

Sveučilište u Zagrebu  
Fakultet strojarstva i brodogradnje

Vježbe iz kolegija Računalna matematika

# Optimizacija

Andrej Jokić, Vladimir Milić

{ajokic, vmilic}@fsb.hr

## Sadržaj

<b>1</b>	<b>Optimizacija</b>	<b>3</b>
1.1	Formulacija problema optimizacije . . . . .	3
1.2	Linearno programiranje . . . . .	4
1.3	Kvadratno programiranje . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Zadaci u MATLABu</b>	<b>5</b>
	<b>Literatura</b>	<b>8</b>

*Ovo su nerecenzirani materijali za vježbe iz kolegija **Računalna matematika**, a odnose se na rješavanje optimizacijskih problema primjenom programskog paketa MATLAB. Ovdje iznesena materija najvećim dijelom se temelji na knjigama [1, 2, 3]. Stoga se čitatelji upućuju na navedenu literaturu u kojoj se mogu naći izvodi i dokazi koji ovdje nisu dani.*

*Autori će biti zahvalni svakomu tko upozori na greške ili predloži dodatne i poboljšane zadatke.*

# 1 Optimizacija

Optimizacija sadrži skup aktivnosti čiji je cilj pronaći „najbolje rješenje”, optimum, uz poštivanje zadanih ograničenja. Pojam „matematičko programiranje” često je korišten kao sinonim optimiranju, pa tako imamo i pojmove: linearno programiranje, kvadratno programiranje, nelinearno programiranje, semi-definitno programiranje itd. Optimizacija sadrži skup aktivnosti čiji je cilj pronaći „najbolje rješenje”, optimum, uz poštivanje zadanih ograničenja.

## 1.1 Formulacija problema optimizacije

Formulacija optimizacijskog problema zahtjeva definiranje:

- $\mathcal{X}$  projektnog skupa (skup projektnih varijabli, skup varijabli odluke, *engl. decision set*),
- $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{X}$  dozvoljenog skupa (*engl. feasible set, constraint set*),
- $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$  funkcije cilja (*engl. objective function, cost function*).

Cilj je odrediti vrijednost projektnih varijabli  $x \in \mathcal{F}$  za koju je funkcija cilja  $f(x)$  minimalna.

Optimizacijski problem s ograničenjima:

$$\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}), \tag{1}$$

uz ograničenja

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}, \tag{2}$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \tag{3}$$

gdje su:

$\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$  projektne varijable,

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija cilja,

$\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  ograničenja tipa nejednakosti,

$\mathbf{h} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  ograničenja tipa jednakosti.

Optimalno rješenje  $\mathbf{x}^*$  je vektor projektnih varijabli koji, od svih vektora iz projektnog prostora koji zadovoljavaju ograničenja, ima najmanju vrijednost funkcije cilja  $f$ .

Vrijedi sljedeće svojstvo

$$\max_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \iff \min_{\mathbf{x}} -f(\mathbf{x}). \tag{4}$$

## 1.2 Linearno programiranje

Definicija problema linearnog programiranja:

$$\min_{\mathbf{x}} \mathbf{c}^T \mathbf{x}, \quad (5)$$

uz ograničenja

$$\mathbf{A}_{eq} \mathbf{x} = \mathbf{b}_{eq}, \quad (6)$$

$$\mathbf{A}_{in} \mathbf{x} \leq \mathbf{b}_{in}, \quad (7)$$

gdje je  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  vektor projektnih varijabli. Funkcija cilja i ograničenja su linearne u projektnim varijablama.

## 1.3 Kvadratno programiranje

Definicija problema kvadratnog programiranja:

$$\min_{\mathbf{x}} \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{H} \mathbf{x} + \mathbf{c}^T \mathbf{x}, \quad (8)$$

uz ograničenja

$$\mathbf{A}_{eq} \mathbf{x} = \mathbf{b}_{eq}, \quad (9)$$

$$\mathbf{A}_{in} \mathbf{x} \leq \mathbf{b}_{in}, \quad (10)$$

gdje je  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  vektor projektnih varijabli. Funkcija cilja je kvadratna dok su ograničenja linearne funkcije u projektnim varijablama. Matrica  $\mathbf{H}$  mora biti simetrična pozitivno definitna matrica jer tada imamo (striktnu) konveksnost i nužno konačan minimum.

## 2 Zadaci u MATLABu

**Zadatak 2.1.** *Maksimirajte linearnu funkciju  $f(x)$ :*

$$f(x) = 4x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 8x_4 \rightarrow \max$$

*s ograničenjima*

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 950$$

$$x_4 \geq 400$$

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 7x_4 \leq 4600$$

$$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 \leq 5000$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

*Koristite MATLABovu funkciju `linprog()`, a među opcijama odaberite interior-point algorithm.*

*Rješenje.*

Minimum found that satisfies the constraints.

Optimization completed because the objective function is non-decreasing in feasible directions, to within the selected value of the function tolerance, and constraints are satisfied to within the selected value of the constraint tolerance.

`x_optimalno =`

`0`

`400.0000`

`150.0000`

`400.0000`

`f_max =`

`-6650`

□

**Zadatak 2.2.** *Minimizirajte kvadratnu funkciju  $f(x)$ :*

$$f(x) = \frac{3}{2}x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 - x_1 - 2x_2 - 3x_3 \rightarrow \min$$

*s ograničenjima*

$$x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 2.5$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

*Koristite MATLABovu funkciju `quadprog()`, a među opcijama odaberite prikaz iteracija rješavanja.*

*Rješenje.*

Iter	Fval	Primal Infeas	Dual Infeas	Complementarity
0	-5.000000e-01	3.500000e+00	2.775934e+00	1.000000e+00
1	-1.861231e+00	1.750000e-03	1.387967e-03	2.377112e-01
2	-1.901943e+00	2.354301e-05	1.867252e-05	3.100151e-02
3	-1.918596e+00	1.177150e-08	9.336260e-09	4.215082e-03
4	-1.921400e+00	5.885958e-12	4.668156e-12	4.479546e-04
5	-1.921808e+00	2.442491e-15	2.544311e-15	1.047179e-05
6	-1.921818e+00	4.440892e-16	1.186172e-16	5.565736e-09

Minimum found that satisfies the constraints.

Optimization completed because the objective function is non-decreasing in feasible directions, to within the default value of the optimality tolerance, and constraints are satisfied to within the default value of the constraint tolerance.

`x_optimalno =`

0.5818

1.1182

0.3182

`f_min =`

-1.9218

□

**Zadatak 2.3.** *Minimizirajte nelinearnu funkciju  $f(x)$ :*

$$f(x) = e^{x_1} (4x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_1x_2 + 2x_2 + 1) \rightarrow \min$$

*s ograničenjima*

$$1.5 + x_1x_2 - x_1 - x_2 \leq 0$$

$$-x_1x_2 \leq 10$$

*Početni uvjeti su:  $x_0 = [-1 \quad -1]^T$ . Koristite MATLABovu funkciju `fmincon()`.*

*Rješenje.*

Local minimum found that satisfies the constraints.

Optimization completed because the objective function is non-decreasing in feasible directions, to within the default value of the optimality tolerance, and constraints are satisfied to within the default value of the constraint tolerance.

`x_optimalno =`

`-9.5474`

`1.0474`

`f_min =`

`0.0236`

□

## Literatura

- [1] Drmač, Z., Hari, V., Marušić, M., Rogina, M., Singer, S., Singer, S. *Numerička analiza; Poglavlje 11: Optimizacija*. Sveučilište u Zagrebu, PMF - Matematički odjel, 2003. Dostupno na: [http://web.math.pmf.unizg.hr/~singer/num\\_anal/num\\_anal.pdf](http://web.math.pmf.unizg.hr/~singer/num_anal/num_anal.pdf)
- [2] Beck, A., *Introduction to Nonlinear Optimization. Theory, Algorithms, and Applications with MATLAB*. SIAM, Philadelphia, PA, USA, 2014.
- [3] Venkataraman, P., *Applied Optimization with MATLAB Programming. Second Edition*. Wiley, Hoboken, NJ, USA, 2009.