1 Rješavanje sustava nelinearnih jednadžbi primjenom Newtonove metode

Za rješavanje ovog zadatka najprije je potrebno proširiti koračnu kompleksnu metodu (vidjeti dodatni zadatak na webu Vježbe 03: Upravljanje tijekom programa) za računanje derivacija vektorske funkcije više varijabli, tj. za računanje matrice Jacobijan. To znači da je sada $\mathbf{f} : S \to \mathbb{R}^m$, $m \geq 2$, $S \subset \mathbb{R}^n$ vektorska funkcija s varijablama $\mathbf{x} = [x_1\, x_2\, \ldots\, x_n]^\mathrm{T}$. Jacobijan vektorske funkcije $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ je matrica čiji su elementi $\frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, tj.

$$\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{f} = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{x}} f_1(\mathbf{x}) \\ \nabla_{\mathbf{x}} f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \nabla_{\mathbf{x}} f_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Nadalje, u zadatku je potrebno proširiti Newtonovu metodu (vidjeti dodatni zadatak na webu Vježbe 04: Vlastite funkcije) na vektorske funkcije više varijabli, tj. za rješavanje sustava nelinearnih jednadžbi:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0, \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0, \\ &\vdots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Iteracijski postupak Newtonove metode je sada definiran u matričnom obliku na sljedeći način

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \left[\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}_k)}{\partial \mathbf{x}_k} \right]^{-1} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}_k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{3}$$

pri čemu su

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}, \tag{4}$$

dok je $\left[\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}_k)}{\partial \mathbf{x}_k}\right]^{-1}$ inverz Jacobijeve matrice definirane izrazom (1) uz $m = n$.

Dakle, u zadatku je potrebno načiniti M-funkciju (npr. imena `multinewton.m`) u kojoj će biti implementirana Newtonova metoda (3) za rješavanje sustava (2) te će imati tri ulazna parametra. Prvi ulazni parametar neka bude M-funkcija u kojoj će biti definiran sustav nelinearnih jednadžbi (2). Drugi ulazni argument neka bude vektor početne iteracije, npr. imena `x0`. Treći ulazni argument neka bude željena tolerancija pogreške, npr. imena `tol`. Kriterij zaustavljanja iteracijskog postupka neka bude $\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k\| \leq$ `tol` i pri tome koristiti MATLABovu ugrađenu funkciju `norm()`. Derivacije $\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}_k)}{\partial \mathbf{x}_k}$ je potrebno računati M-funkcijom u kojoj je implementirana koračna kompleksna metoda. Inverz matrice ne računati direktno nego primjenom MATLABove operacije \.

Program ispitati na rješavanju sustava:

$$\begin{aligned} 3x_1 - \cos(x_2 x_3) - \frac{1}{2} &= 0, \\ x_1^2 - 81(x_2 + 0.1)^2 + \sin(x_3) + 1.06 &= 0, \\ e^{-x_1 x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3} &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Za početne iteracije `x0 = [0.1; 0.1; -0.1]` i `tol=1e-5` rješenja su $x_1 = 0.5$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0.52359877$.