Sveučilište u Zagrebu
Fakultet strojarstva i brodogradnje

Vježbe iz kolegija Računalna matematika:

Osnove linearne algebre

Andrej Jokić, Vladimir Milić
{ajokic, vmilic}@fsb.hr

Ovo su nerecenzirani materijali za vježbe iz kolegija ***Računalna matematika****, a odnose se na rješavanje nekih problema iz linearne algebre primjenom programskog paketa MATLAB. Ovdje izneseni pojmovi iz linearne algebre najvećim dijelom se temelje na knjigama [1] i [2]. Stoga se čitatelji upućuju na navedenu literaturu u kojoj se mogu naći izvodi i dokazi koji ovdje nisu dani.*

Autori će biti zahvalni svakomu tko upozori na greške ili predloži dodatne i poboljšane zadatke.

Sadržaj

1 Osnovne operacije matrične algebre

1.1 Matrice

Matrica je matematički objekt koji se sastoji od (realnih ili kompleksnih) brojeva koji su raspoređeni u retke i stupce. Zapisuje se u obliku pravokutne sheme, a brojeve od kojih se sastoji zovemo elementima matrice. Matrica $\mathbf{A}$ sa m redaka, n stupaca i s elementima a_{ij} zapisuje se kao

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Takvu matricu zovemo $m \times n$ matrica ili matrica tipa (reda, dimenzije) $m \times n$. Ako vrijedi $m = n$, kažemo da je $\mathbf{A}$ kvadratna matrica reda n.

Matricu sa samo jednim retkom zovemo matrica redak ili jednoretčana matrica, a matricu sa samo jednim stupcem zovemo matrica stupac ili jednostupčana matrica. Jednostupčane i jednoretčane matrice kraće zovemo vektorima. Matricu, čiji su elementi realni brojevi, zovemo realna matrica, a matricu, čiji su elementi kako realni tako i kompleksni brojevi, zovemo kompleksna matrica. S $\mathbb{R}^{m\times n}$ ($\mathbb{C}^{m\times n}$) označavamo skup svih realnih (kompleksnih) $m \times n$ matrica.

Zadatak 1.1. *U MATLAB-u kreirajte sljedeće matrice:*

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -17 \\ 102 & 3 & 10 \\ -5 & 0 & 21 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} 7 & 8 & -3i \\ -2-i & 0 & -5 \\ 13 & 1 & 5+7i \\ 10 & -11 & 12 \end{bmatrix}$$

U linearnoj algebri postoje neke "posebne" vrste matrica, a najčešće se upotrebljavaju:

- nul-matrica kojoj su svi elementi nule, tj. $a_{ij} = 0$ (u MATLAB-u: `zeros()`),
- matrica jedinica kojoj su svi elementi jedinice, tj $a_{ij} = 1$ (u MATLAB-u: `ones()`),
- dijagonalna matrica je kvadratna matrica kojoj su svi elementi izvan glavne dijagonale jednaki nuli, tj. $a_{ij} = 0$ ako $i \neq j$, $\forall i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ (u MATLAB-u: `diag()`),
- jedinična matrica je kvadratna matrica koja ima jedinice na glavnoj dijagonali, dok su ostali elementi nule. Obično se označava s $\mathbf{I}_n$ gdje indeks n označava dimenziju matrice (u MATLAB-u: `eye()`).

Zadatak 1.2. *Primjenom gore navedenih "posebnih" matrica u MATLAB-u kreirajte sljedeću matricu:*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zadatak 1.3. *Pomoću* `for` *petlji kreirajte Hilbertovu kvadratnu matricu čiji su elementi definirani izrazom $h_{ij} = 1/(i+j-1)$. Na primjer ako je red Hilbertove matrice 5 tada je ona sljedećeg oblika:*

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.5000 & 0.3333 & 0.2500 & 0.2000 \\ 0.5000 & 0.3333 & 0.2500 & 0.2000 & 0.1667 \\ 0.3333 & 0.2500 & 0.2000 & 0.1667 & 0.1429 \\ 0.2500 & 0.2000 & 0.1667 & 0.1429 & 0.1250 \\ 0.2000 & 0.1667 & 0.1429 & 0.1250 & 0.1111 \end{bmatrix}$$

Rezultat usporedite s MATLABovom ugrađenom funkcijom `hilb`.

1.2 Transponiranje

Neka je $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Matrica $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ se naziva transponirana matrica matrici $\mathbf{A}$, ako je svaki redak od $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ jednak odgovarajućem stupcu matrice $\mathbf{A}$. Prema tome, transponiranu matricu dobivamo tako da stupce (retke) matrice zamijenimo njenim retcima (stupcima). Ako je

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{onda je} \quad \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Neka je $\mathbf{Z} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ i $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_1 + i\mathbf{Z}_2$, pri čemu su $\mathbf{Z}_1,\ \mathbf{Z}_2 \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Tada se $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_1 - i\mathbf{Z}_2$ naziva kompleksno konjugirana matrica i označava sa $\bar{\mathbf{Z}}$. Kompleksno transponirana ili hermitski adjungirana matrica $\mathbf{Z}$ je matrica $\mathbf{Z}^* = \mathbf{Z}_1^{\mathrm{T}} - i\mathbf{Z}_2^{\mathrm{T}}$.

Zadatak 1.4. *Za matrice iz zadatka 1.1 odredite* $\mathbf{M}_1^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{M}_2^{\mathrm{T}}$ *i* $\mathbf{M}_2^*$.

Rješenje.

```
ans =

     1   102    -5
```

```
     0     3     0
   -17    10    21


ans =
   7.0000        -2.0000 - 1.0000i  13.0000             10.0000
   8.0000         0                  1.0000            -11.0000
   0 - 3.0000i  -5.0000              5.0000 + 7.0000i   12.0000


ans =
   7.0000        -2.0000 + 1.0000i  13.0000             10.0000
   8.0000         0                  1.0000            -11.0000
   0 + 3.0000i  -5.0000              5.0000 - 7.0000i   12.0000
```

□

1.3 Zbrajanje matrica

Neka su $\mathbf{A},\ \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Matricu $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ s elementima

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad 1 \le i \le m, \quad 1 \le j \le n,$$

zovemo zbrojem ili sumom matrica $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ i pišemo $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$. Zbrajanje je definirano za svaki par matrica iz $\mathbb{R}^{m\times n}$ i rezultat je uvijek u $\mathbb{R}^{m\times n}$.

Zadatak 1.5. *U MATLAB-u definirajte sljedeće matrice*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 \\ -7 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 7 & -9 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}.$$

Rješenje.

```
C =
     1     2     9
    -5     7    -6
```

□

1.4 Množenje matrice sa skalarom

Ako su $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ i $c \in \mathbb{R}$, matricu $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ s elementima

$$b_{ij} = c a_{ij}, \quad 1 \le i \le m, \quad 1 \le j \le n,$$

zovemo umnožak ili produkt matrice $\mathbf{A}$ sa skalarom c i označavamo $\mathbf{B} = c\mathbf{A}$. Jasno je da za svaki realni skalar c i svaku matricu $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, mora $\mathbf{B} = c\mathbf{A}$ opet biti u $\mathbb{R}^{m\times n}$.

Zadatak 1.6. *Pomnožite matricu* $\mathbf{C}$ *iz zadatka 1.5 s 5.*

Rješenje.

```
ans =

     5    10    45
   -25    35   -30
```

□

1.5 Množenje matrica

Neka su $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ i $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times p}$. Umnožak ili produkt matrica $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ je matrica $\mathbf{C} = \mathbf{A}\,\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times p}$ kojoj su elementi određeni formulom

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}, \qquad 1 \le i \le m, \quad 1 \le j \le p.$$

Produkt matrica $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ definiran je samo onda kad je broj stupaca matrice $\mathbf{A}$ jednak broju redaka matrice $\mathbf{B}$.

Zadatak 1.7. *Za matrice* $\mathbf{A}$ *i* $\mathbf{B}$ *iz zadatka 1.5 odredite matricu* $\mathbf{D} = \mathbf{A}\mathbf{B}^T$

Rješenje.

```
D =

    17   -24
     5   -41
```

□

1.6 Potencije matrica

Ako je $\mathbf{A}$ kvadratna matrica dimenzije $n \times n$ onda je

$$\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}_n.$$

Također vrijedi sljedeće

$$\mathbf{A}^p = \underbrace{\mathbf{A}\,\mathbf{A}\,\cdots\,\mathbf{A}}_{p \text{ puta}}.$$

Za potenciranje kvadratnih matrica vrijedi svojstvo asocijativnosti, npr.

$$\mathbf{A}^3 = \mathbf{A}\,\mathbf{A}\,\mathbf{A} = \mathbf{A}\,\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}^2\,\mathbf{A}.$$

Za nenegativne cijele brojeve r i s lako se pokaže da vrijedi

$$\mathbf{A}^r\,\mathbf{A}^s = \mathbf{A}^{r+s}, \quad (\mathbf{A}^r)^s = \mathbf{A}^{rs}.$$

Zadatak 1.8. *Za matricu* $\mathbf{D}$ *iz zadatka 1.7 primjenom* `while` *petlje izračunajte* $\mathbf{D}^0$, $\mathbf{D}^1$, ..., $\mathbf{D}^5$.

Rješenje.

```
D^0 je
          1.00          0.00
          0.00          1.00


D^1 je
         17.00        -24.00
          5.00        -41.00


D^2 je
        169.00        576.00
       -120.00       1561.00


D^3 je
       5753.00     -27672.00
       5765.00     -61121.00


D^4 je
     -40559.00     996480.00
    -207600.00    2367601.00


D^5 je
    4292897.00  -39882264.00
    8308805.00  -92089241.00
```

□

1.7 Skalarni i vektorski produkt

Standardni skalarni produkt dva vektora u prostoru $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$) definiran je sljedećim izrazima

$$\mathbf{x}^T\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \in \mathbb{R} \quad \text{i} \quad \mathbf{x}^*\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i y_i \in \mathbb{C}.$$

Vektorski produkt dva vektora je takvo množenje koje kao rezultat daje opet vektor. Ova operacija je posebnost trodimenzionalnog Euklidskog prostora, jer nema analogiju u dvodimenzionalnom prostoru, niti prikladne generalizacije u višim dimenzijama.

Zadatak 1.9. *Provjerite da li su vektori* $\mathbf{v} = [8\ \ 4\ \ 3]$ *i* $\mathbf{w} = [-2\ \ 1\ \ 4]$ *okomiti.*

Zadatak 1.10. *Provjerite da li su vektori* $\mathbf{v} = [-7\ \ 2\ \ 8]$ *i* $\mathbf{w} = [3.5\ \ -1\ \ -4]$ *paralelni.*

Zadatak 1.11. *Izračunajte mehanički rad* W *ako su komponente vektora sile* $\mathbf{F} = [2\ \ -1\ \ 1]$*, a komponente vektora pomaka* $\mathbf{d} = [3\ \ -2\ \ 4]$*.*

Rješenje.

```
W =
  12
```

$\square$

Zadatak 1.12. *Izračunajte komponente vektora momenta* $\mathbf{M}$ *sile* $\mathbf{F} = [8\ 5\ \ 7]$*, ako su komponente vektora kraka sile* $\mathbf{r} = [1\ 3\ \ 9]$*.*

Rješenje.

```
M =
  -24    65    -19
```

$\square$

2 Determinanta, rang, inverz i trag matrice

2.1 Determinanta matrice

Determinanta je funkcija $|\cdot|$ definirana na skupu svih kvadratnih matrica, a poprima vrijednosti iz skupa skalara. Determinanta matrice definira se induktivno, tj. determinanta matrice n-tog reda definira se pomoću determinante matrice $(n-1)$-og reda

$$|\mathbf{A}| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{k1} |\mathbf{A}_{k1}|,$$

gdje A_{k1} označava matricu $\mathbf{A}$ bez k-tog retka i prvog stupca.

2.2 Rang matrice

Svaku matricu $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ možemo promatrati kao niz njenih vektora-redaka ili kao niz njenih vektora stupaca. Skup vektora-redaka (vektora stupaca) matrice $\mathbf{A}$ razapinje vektorski potprostor od $\mathbb{R}^{1\times n}$ koji zovemo retčani (stupčani) potprostor od $\mathbf{A}$. Važno svojstvo tih potprostora je da imaju istu dimenziju. Broj linearno nezavisnih vektora redaka matrice $\mathbf{A}$ naziva se retčani rang matrice $\mathbf{A}$. Broj linearno nezavisnih vektora stupaca matrice $\mathbf{A}$ naziva se stupčani rang matrice $\mathbf{A}$. Kako se radi o istom broju izbacuje se pridjev retčani ili stupčani, pa se broj linearno nezavisnih vektora redaka (stupaca) matrice $\mathbf{A}$ naziva rang matrice $\mathbf{A}$ i označava s $r(\mathbf{A})$. Matrica $\mathbf{A}$ je punog (stupčanog ili retčanog) ranga, ako je $r(\mathbf{A})$ jednak broju stupaca ili redaka matrice $\mathbf{A}$. Za matricu $\mathbf{A}$ uvijek vrijedi

$$r(\mathbf{A}) \leq \{m,\ n\}.$$

2.3 Inverz matrice

Za kvadratnu matricu $\mathbf{A}$ dimenzije $n \times n$, matrica $\mathbf{B}$ dimenzije $n \times n$ koja zadovoljava uvjete

$$\mathbf{A}\,\mathbf{B} = \mathbf{I}_n \quad \text{i} \quad \mathbf{B}\,\mathbf{A} = \mathbf{I}_n,$$

zove se inverz matrice $\mathbf{A}$ i označava se sa $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$. Matrice za koje postoji inverz obično se nazivaju invertibilne, regularne ili nesingularne. Kvadratne matrice koje nisu regularne nazivaju se singularne.

U nekim slučajevima je za pravokutne matrice moguće definirati tzv. poopćeni inverz. Ako je matrica $\mathbf{A}$ dimenzije $m \times n$ i $r(\mathbf{A}) = n$ tada matrica $\mathbf{A}$ ima lijevi inverz

$$\mathbf{A}^{+} = \left(\mathbf{A}^{*}\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^{*} \quad \text{odnosno} \quad \mathbf{A}^{+}\mathbf{A} = \mathbf{I}_n,$$

a ako je $r(\mathbf{A}) = m$ tada matrica $\mathbf{A}$ ima desni inverz

$$\mathbf{A}^{+} = \mathbf{A}^{*}\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^{*}\right)^{-1} \quad \text{odnosno} \quad \mathbf{A}\mathbf{A}^{+} = \mathbf{I}_m.$$

2.4 Trag matrice

Trag kvadratne matrice $\mathbf{A}$ reda n je suma njezinih elemenata na glavnoj dijagonali

$$tr(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Zadatak 2.1. *Definirajte matricu*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 25.3 & 100 & 45 \\ 11.9 & 12.8 & 99 \\ 7.1 & 4.2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Izračunajte: determinantu, rang, inverz i trag matrice $\mathbf{A}$.

Rješenje.

```
determinanta =
   5.3599e+004

rang =
   3

inverz =
  -0.0066   -0.0058    0.1740
   0.0120   -0.0036   -0.0367
  -0.0008    0.0113   -0.0162

trag =
   43.1000
```

□

Zadatak 2.2. *Napravite M-funkciju za računanje desnog, lijevog, Moore-Penrose pseudoinverza pravokutnih i singularnih matrica. Koristite sljedeći algoritam: ako je matrica punog retčanog ranga ($r(\cdot) = m$) tada računaj desni inverz, također ako je matrica punog stupčanog ranga ($r(\cdot) = n$) tada računaj lijevi inverz, inače računaj Moore-Penrose pseudoinverz. Neka se na ekran ispisuje poruka o kojem se inverzu radi (desni, lijevi ili Moore-Penrose).*

Algoritam ispitajte na sljedećim matricama:

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_3 = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}.$$

Rješenje.
Za matricu $\mathbf{M}_1$:

```
Desni inverz je
ans =
    0.5000  0
    0       1.0000
    0.5000  0
```

Za matricu $\mathbf{M}_2$:

```
Lijevi inverz je
ans =
   -1.1667   -0.1667    0.8333
    0.6667    0.1667   -0.3333
```

Za matricu $\mathbf{M}_3$:

```
Moore - Penrose pseudoinverz je
ans =
    0.0320    0.0640
    0.0240    0.0480
```

□

Zadatak 2.3. *Odredite matricu* $\mathbf{X}$ *tako da vrijedi* $\mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}$, *gdje su*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Rješenje.

```
X =

   2     4
  -1    -2
   3     3
```

$\square$

3 Sustavi linearnih algebarskih jednadžbi

Jedna od najvažnijih primjena linearne algebre jest rješavanje sustava linearnih algebarskih jednadžbi

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m.
\end{aligned}
$$

Uvođenjem matrice sustava $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, vektora rješenja $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ i vektora desne strane sustava $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$,

$$
\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}
$$

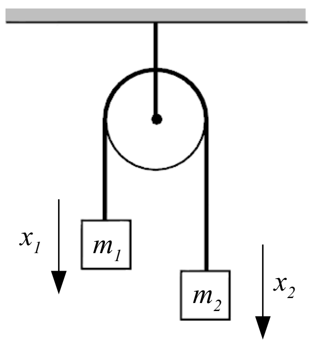
sustav prelazi u matrični problem

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}.$$

Ako je matrica $\mathbf{A}$ kvadratna tj. $m = n$ i punog ranga tada rješenje možemo pisati kao

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}.$$

Zadatak 3.1. *Za sustav s dvije mase prikazan na slici 1 potrebno je odrediti silu u užetu F i akceleracije $\ddot{x}_1$ i $\ddot{x}_2$. Zadano je: $m_1 = 2$ kg, $m_2 = 4$ kg i $g = 9.81$ m/s^2.*



Slika 1:

Rješenje. Primjenom Newton-ovog zakona gibanja dobivaju se jednadžbe

$$m_1\,\ddot{x}_1 = m_1\,g - F, \quad m_2\,\ddot{x}_2 = m_2\,g - F.$$

Nadalje, vrijedi i "očuvanje" duljine užeta $x_1 + x_2 = C$, pa je sustav linearnih jednadžbi

$$\begin{aligned} m_1\,\ddot{x}_1 + F &= m_1\,g, \\ m_2\,\ddot{x}_2 + F &= m_2\,g, \\ \ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 &= 0. \end{aligned}$$

```
Rjesenja =
   Akceleracija_mase_1: -3.2700
   Akceleracija_mase_2: 3.2700
          Sila_u_uzetu: 26.1600
```

□

4 Svojstvene vrijednosti i vektori

Neka je $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$, $\mathbf{x} \neq 0$ je vlastiti vektor od $\mathbf{A}$ ako postoji takav skalar λ da je

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \quad \text{odnosno} \quad (\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\,\mathbf{x} = 0.$$

U tom slučaju, λ je vlastita vrijednost, a par $(\mathbf{x},\ \lambda)$ je vlastiti par matrice $\mathbf{A}$.

Navedeni sustav jednadžbi ima netrivijalno rješenje jedino ako vrijedi

$$|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0.$$

Razvojem gornje determinante dobiva se polinom n-tog reda koji se naziva karakterističnim polinomom matrice $\mathbf{A}$.

Zadatak 4.1. *Definirajte matricu*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 25.3 & 100 & 45 \\ 11.9 & 12.8 & 99 \\ 7.1 & 4.2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Izračunajte svojstvene vektore i svojstvene vrijednosti matrice $\mathbf{A}$.

Rješenje.

```
vek =
    0.9170              0.8916              0.8916
    0.3804             -0.3215 + 0.2703i  -0.3215 - 0.2703i
    0.1198             -0.0798 - 0.1493i  -0.0798 + 0.1493i


vr =
   72.6671              0                   0
    0            -14.7836 +22.7825i         0
    0                   0           -14.7836 -22.7825i
```

□

Zadatak 4.2. *Izračunajte Euklidske norme svojstvenih vektora matrice* $\mathbf{A}$.

Rješenje.

```
ans =
    1.0000    1.0000    1.0000
```

□

Zadatak 4.3. *Odredite karakteristični polinom matrice* **A**. *Također odredite korijene tog polinoma.*

Rješenje.

```
p =
  1.0e+004 *
    0.0001   -0.0043   -0.1411   -5.3599

kor =
    72.6671
   -14.7836 +22.7825i
   -14.7836 -22.7825i
```

□

5 Vektorske i matrične norme

Norma realnog ili kompleksnog vektor $\mathbf{x}$ dimenzije n je funkcija $\|\cdot\|$ koja preslikava vektorski prostor u prostor nenegativnih realnih brojeva. Najčešće se koriste p-norme (ili ℓ_p norme) definirane sljedećim izrazom

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \geq 1.$$

Tako za $p = 1$ dobivamo 1-normu (ili ℓ_1 normu)

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|,$$

za $p = 2$ dobivamo 2-normu (ili ℓ_2 normu) ili Euclidsku normu

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2},$$

za $p = \infty$ dobivamo ∞-normu (ili ℓ_∞ normu)

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|.$$

Matrične norme možemo dobiti kao operatorske (inducirane) norme iz odgovarajućih vektorskih normi korištenjem sljedećeg izraza

$$\|\mathbf{A}\| = \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|.$$

Kada se u gornji izraz uvrste odgovarajuće vektorske norme, dobivaju se matrična 1-norma (ili maksimalna stupčana norma)

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|,$$

matrična 2-norma (ili spektralna norma)

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}},$$

gdje je λ_{max} najveća svojstvena vrijednost matrice $\{\mathbf{A}^*\mathbf{A}\}$, te matrična ∞-norma (ili maksimalna retčana norma)

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{1\le i\le m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Zadatak 5.1. *Neka su zadani*

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 0 & 10 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & -6 & 9 \end{bmatrix}.$$

Pomoću `for` *petlje načinite matricu* `Norme` *kojoj će prvi stupac biti 1-norma, 2-norma i* ∞*-norma vektora* $\mathbf{x}$*, a drugi stupac odgovarajuće inducirane norme matrice* $\mathbf{A}$*.*

Rješenje.

```
Norme =
   16.0000    9.0000
   10.9545   11.9543
   10.0000   20.0000
```

□

Literatura

[1] Drmač, Z., Hari, V., Marušić, M., Rogina, M., Singer, S., Singer, S. *Numerička analiza; Poglavlje 2: Kratki uvod u linearnu algebru.* Sveučilište u Zagrebu, PMF - Matematički odjel, 2003. Dostupno na: `http://web.math.pmf.unizg.hr/~singer/num_anal/num_anal.pdf`

[2] Meyer, C. D. *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra.* SIAM, Philadelphia, 2000.

[3] Hahn, B. H., Valentine, D. T. *Essential MATLAB for Engineers and Scientists. Fifth Edition.* Academic Press Elsevier, Waltham, MA, USA, 2013.

[4] Dianat, S. A., Saber, E. S. *Advanced Linear Algebra for Engineers with MATLAB.* CRC Press, Boca Raton, FL, USA, 2009.

[5] William F. *Numerical Linear Algebra with Applications Using MATLAB.* Academic Press Elsevier, Waltham, MA, USA, 2015.