Sveučilište u Zagrebu
Fakultet strojarstva i brodogradnje

Vježbe iz kolegija Računalna matematika

Aproksimacija i interpolacija

Andrej Jokić, Vladimir Milić
{ajokic, vmilic}@fsb.hr

Sadržaj

Ovo su nerecenzirani materijali za vježbe iz kolegija ***Računalna matematika****, a odnose se na rješavanje nekih problema aproksimacije i interpolacije primjenom programskih paketa MATLAB i R. Ovdje izneseni pojmovi iz aproksimacije i interpolacije najvećim dijelom se temelje na knjigama [1, 2, 3]. Stoga se čitatelji upućuju na navedenu literaturu u kojoj se mogu naći izvodi i dokazi koji ovdje nisu dani.*

Autori će biti zahvalni svakomu tko upozori na greške ili predloži dodatne i poboljšane zadatke.

1 Problem aproksimacije i interpolacije

Formulacija problema aproksimacije [1]: Poznate su određene informacije o funkciji $f(x)$, definiranoj na nekom skupu $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}$, potrebno je na osnovu tih informacija zamijeniti (aproksimirati) $f(x)$ nekom drugom funkcijom $\varphi(x)$ na skupu $\mathcal{X}$, tako da su f i φ bliske u nekom smislu. Skup $\mathcal{X}$ je najčešće interval oblika $[a,\ b]$ ili diskretni skup točaka.

Opći oblik linearne aproksimacijske funkcije je

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{m} c_i \varphi_i(x), \tag{1}$$

gdje su $\varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_m$ poznate funkcije.

Budući da je funkcija φ linearno ovisna o parametrima c_k, određivanje parametara c_k svodi se na rješavanje sustava linearnih algebarskih jednadžbi.

Pretpostavimo da imamo skup podataka $(x_k,\ f_k)$, $k = 1,\ 2,\ \ldots, n$, i da taj model želimo aproksimirati funkcijom oblika (1). Drugim riječima, želimo pronaći parametre c_k tako da podaci $(x_k,\ f_k)$ zadovoljavaju

$$f_k = \sum_{i=1}^{m} c_i \varphi_i(x_k), \quad k = 1,\ 2,\ \ldots, n. \tag{2}$$

Prethodne jednadžbe možemo zapisati u sljedećem matričnom obliku

$$\mathbf{A}\mathbf{c} = \mathbf{f}, \tag{3}$$

gdje su $\mathbf{A} = [a_{ki}] = [\varphi_i(x_k)]\,,\ \mathbf{c} = [c_i]\,,\ \mathbf{f} = [f_k]$. Ako je podataka više nego parametara, tj. ako je $n > m$, onda je ovaj sustav preodređen (engl. *overdetermined*).

Polinomi su najčešće korištene baze linearnih aproksimacijskih funkcija. U tom slučaju $\varphi(x)$ se može zapisati u sljedećem obliku

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{m} c_{i+1} x^{m-i}. \tag{4}$$

Najčešći oblici nelinearnih aproksimacijskih funkcija su eksponencijalne aproksimacije

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{m} c_i e^{b_i x} \tag{5}$$

te racionalne aproksimacije

$$\varphi(x) = \frac{\sum_{i=0}^{r} c_{i+1} x^{r-i}}{\sum_{i=0}^{s} b_{i+1} x^{s-i}}. \tag{6}$$

Formulacija problema interpolacije [1]: Funkcije $f(x)$ i $\varphi(x)$ trebaju se podudarati na nekom konačnom skupu argumenata (ili kraće točaka). Te točke se obično nazivaju čvorovima interpolacije. Ovom zahtjevu se može, ali i ne mora dodati zahtjev da se u čvorovima, osim funkcijskih vrijednosti, poklapaju i vrijednosti nekih derivacija.

Neka je funkcija f zadana na diskretnom skupu različitih točaka x_k, tj. imamo $f_k = f(x_k)$. Tada postoji jedinstveni interpolacijski polinom reda najviše n

$$\varphi(x) := p_n(x) = c_1 x^n + c_2 x^{n-1} + \cdots + c_n x + c_{n+1}, \tag{7}$$

za koji vrijedi

$$p_n(x_k) = f_k, \quad k = 1,\ \ldots,\ n+1. \tag{8}$$

Uvjet interpolacije (8) možemo raspisati u sljedeći oblik

$$\begin{aligned}
p_n(x_1) &= c_1 x_1^n + c_2 x_1^{n-1} + \cdots + c_n x_1 + c_{n+1} = f_1, \\
p_n(x_2) &= c_1 x_2^n + c_2 x_2^{n-1} + \cdots + c_n x_2 + c_{n+1} = f_2, \\
&\vdots \\
p_n(x_{n+1}) &= c_1 x_{n+1}^n + c_2 x_{n+1}^{n-1} + \cdots + c_n x_{n+1} + c_{n+1} = f_{n+1}
\end{aligned} \tag{9}$$

ili u matričnom obliku

$$\begin{bmatrix} x_1^n & x_1^{n-1} & \ldots & x_1 & 1 \\ x_2^n & x_2^{n-1} & \ldots & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{n+1}^n & x_{n+1}^{n-1} & \ldots & x_{n+1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n+1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Vc} = \mathbf{f}. \tag{10}$$

Matrica $\mathbf{V}$ se naziva Vandermondova matrica.

Interpolacija polinomima visokog stupnja može imati vrlo loša svojstva. Zbog toga se često koristi po dijelovima polinomna interpolacija (tzv. splajn interpolacija)

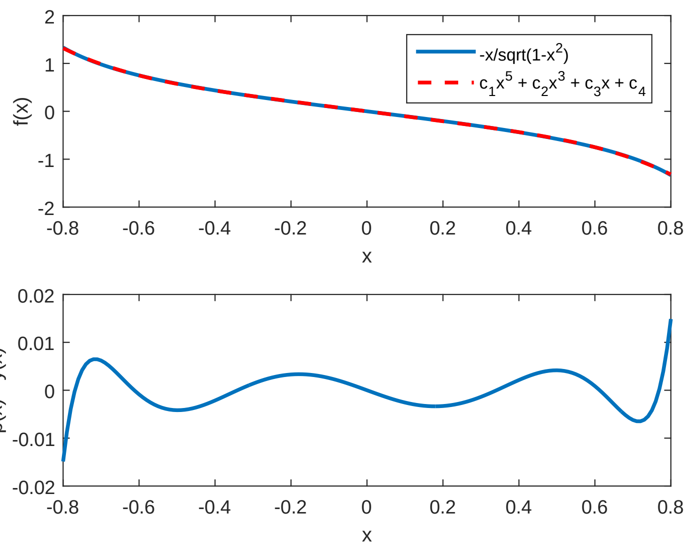
$$\varphi\,|_{[x_k,\ x_{k+1}]} = p_k, \quad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1. \tag{11}$$

2 Zadaci u MATLAB-u

Zadatak 2.1. *Odredite koeficijente polinoma* $p(x) = c_1x^5 + c_2x^3 + c_3x + c_4$ *kojim ćete aproksimirati funkciju* $y(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$ *na intervalu* $x \in [-4/5,\ 4/5]$ *tako da problem svedete na rješavanje sustava linearnih algebarskih jednadžbi.*

Rješenje.

```
ans =
   -1.2767
   -0.1501
   -1.0290
   -0.0000
```



Slika 1:

□

Najprije s korakom d diskretiziramo interval u kojem tražimo aproksimaciju tako da dobijemo n točaka $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ pri čemu je $n = \dfrac{x_n - x_1}{d} + 1$. Zatim izračunamo funkciju y u svakoj točki intervala, tj. izračunamo $y(x_k)$ za $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$.

Sada imamo skup diskretnih točaka $(x_k,\ y_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, koji želimo aproksimirati polinomom $p(x) = c_1x^5 + c_2x^3 + c_3x + c_4$. Uvedemo li vektore $\mathbf{c} = [c_1\ c_2\ c_3\ c_4]^{\mathrm{T}}$ i $\varphi(x) = [x^5\ x^3\ x\ x^0]^{\mathrm{T}}$ možemo polinom zapisati kao $p(x) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\,\varphi(x)$.

U zadatku je potrebno odredite parametre c_1, c_2, c_3, c_4 takve da je

$$\|p(x_k) - y(x_k)\|_2^2 \longrightarrow \min,$$

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m=4} c_i\,\varphi_i(x_k) - y(x_k) \right)^2 \longrightarrow \min,$$

što predstavlja linearni problem najmanjih kvadrata.

Nadalje možemo uvesti matricu $\mathbf{V} = [v_{ki}] = [\varphi_i(x_k)]$

za $k = 1,\ \ i = 1, 2, 3, 4$ dobiva se:

$v_{11} = \varphi_1(x_1) = x_1^5,\ v_{12} = \varphi_2(x_1) = x_1^3,\ v_{13} = \varphi_3(x_1) = x_1,\ v_{14} = \varphi_4(x_1) = x_1^0$

za $k = 2,\ \ i = 1, 2, 3, 4$ dobiva se:

$v_{21} = \varphi_1(x_2) = x_2^5,\ v_{22} = \varphi_2(x_2) = x_2^3,\ v_{23} = \varphi_3(x_2) = x_2,\ v_{24} = \varphi_4(x_2) = x_2^0$

$\vdots$

za $k = n,\ \ i = 1, 2, 3, 4$ dobiva se:

$v_{n1} = \varphi_1(x_n) = x_n^5,\ v_{n2} = \varphi_2(x_n) = x_n^3,\ v_{23} = \varphi_3(x_n) = x_n,\ v_{n4} = \varphi_4(x_n) = x_n^0$

tj.

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} x_1^5 & x_1^3 & x_1 & x_1^0 \\ x_2^5 & x_2^3 & x_2 & x_2^0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^5 & x_n^3 & x_n & x_n^0 \end{bmatrix}$$

i vektor $\mathbf{y} = [y(x_1)\ y(x_2)\ \ \ldots\ \ y(x_n)]^{\mathrm{T}}$ čime dobivamo matričnu formulaciju problema najmanjih kvadrata

$$\min_{\mathbf{c}} \|\mathbf{V}\,\mathbf{c} - \mathbf{y}\|_2^2.$$

Dakle, možemo smatrati da imamo preodređeni sustav linearnih algebarskih jednadžbi

$$\mathbf{V}\,\mathbf{c} = \mathbf{y},\ \ \mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n\times m},\ \ \mathbf{c} \in \mathbb{R}^m,\ \ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n,$$

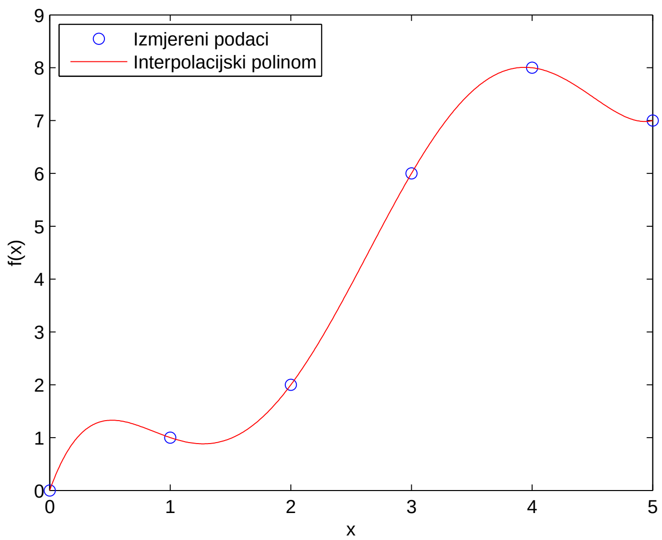
kojeg u MATLAB-u možemo riješiti primjenom operatora dijeljenja.

Zadatak 2.2. *Odredite koeficijente* $\mathbf{c}$ *polinoma kojim ćete interpolirati izmjerene podatke* $(x_k,\ f_k)$ *rješavanjem linearnog sustava* $\mathbf{Vc} = \mathbf{f}$*, gdje je* $\mathbf{f} = [f_k]$ *i* $\mathbf{V}$ *je Vandermondova matrica od* $\mathbf{x} = [x_k]$.

x_k	0	1	2	3	4	5
f_k	0	1	2	6	8	7

Rješenje.

```
c =
    0.1000
   -1.3333
    6.0000
  -10.1667
    6.4000
    0
```



Slika 2:

□

U ovom zadatku imamo skup od šest izmjerenih podataka $(x_k,\ f_k = f(x_k))$ što znači da postoji jedinstveni interpolacijski polinom petog stupnja

$$p(x) = c_1 x^5 + c_2 x^4 + c_3 x^3 + c_4 x^2 + c_5 x + c_6,$$

od kojeg zahtijevamo da prolazi točkama $(x_k,\ f_k)$, tj. mora vrijediti uvjet

$$p(x_k) = f_k, \quad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ 6.$$

Prethodni uvjet interpolacije možemo raspisati u sljedeći oblik

$$\begin{aligned}
p(x_1) &= c_1 x_1^5 + c_2 x_1^4 + c_3 x_1^3 + c_4 x_1^2 + c_5 x_1 + c_6, = f_1, \\
p(x_2) &= c_1 x_2^5 + c_2 x_2^4 + c_3 x_2^3 + c_4 x_2^2 + c_5 x_2 + c_6, = f_2, \\
&\vdots \\
p(x_6) &= c_1 x_6^5 + c_2 x_6^4 + c_3 x_6^3 + c_4 x_6^2 + c_5 x_6 + c_6, = f_6,
\end{aligned}$$

ili u matričnom obliku

$$\begin{bmatrix} x_1^5 & x_1^4 & x_1^3 & x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^5 & x_2^4 & x_2^3 & x_2^2 & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_6^5 & x_6^4 & x_6^3 & x_6^2 & x_6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}\mathbf{c} = \mathbf{f}.$$

Matrica $\mathbf{V}$ se naziva Vandermondova matrica.

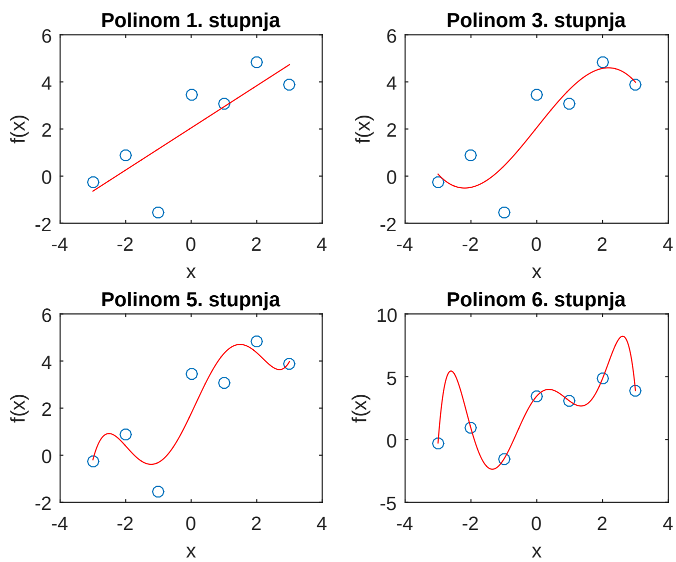
Dakle, imamo sustav od šest linearnih algebarskih jednadžbi sa šest nepoznanica, a budući da su čvorovi interpolacije različiti rang matrice $\mathbf{V}$ je jednak šest pa sustav ima jedinstveno rješenje.

Zadatak 2.3. *Odredite koeficijente polinoma 1., 3., 5. i 6. stupnja kojima ćete aproksimirati skup izmjerenih podataka* $(x_k,\ f_k)$ *primjenom MATLABove ugrađene funkcije* `polyfit()`.

x_k	-3	-2	-1	0	1	2	3
f_k	-0.2774	0.8958	-1.5651	3.4565	3.0601	4.8568	3.8982

Rješenje.

```
p1 =

    0.8955    2.0464

p3 =

   -0.1225   -0.0025    1.7531    2.0563

p5 =

    0.0477   -0.0272   -0.6795    0.2576    2.9443    1.7769

p6 =

   -0.1078    0.0477    1.3935   -0.6795   -3.9948    2.9443    3.4565
```



Slika 3:

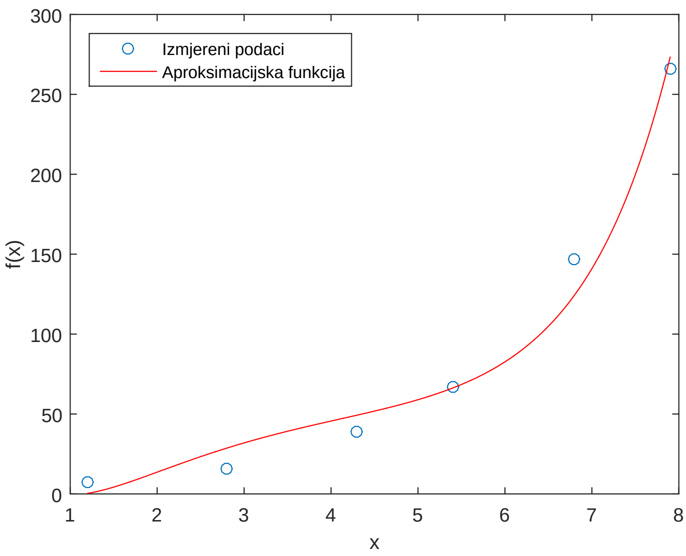
□

Zadatak 2.4. *Odredite koeficijente* c_1, c_2 *i* c_3 *rješavanjem sustava linearnih algebarskih jednadžbi tako da funkcija* $f(x) = c_1 e^x + c_2 x e^{-x} + c_3$ *aproksimira podatke* $(x_k,\ f_k)$.

x_k	1.2	2.8	4.3	5.4	6.8	7.9
f_k	7.5	16.1	38.9	67.0	146.6	266.2

Rješenje.

```
ans =
    0.0824
 -142.3003
   51.5242
```



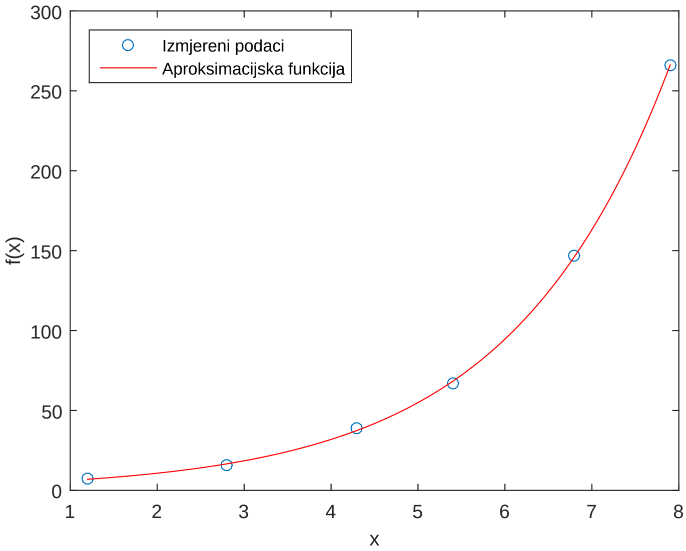
Slika 4:

□

Zadatak 2.5. *Primjenom MATLABove ugrađene funkcije* `lsqcurvefit()` *odredite koeficijente* a *i* b *funkcije* ae^{bx} *kojom ćete aproksimirati podatke* $(x_k,\ f_k)$ *iz zadatka 2.4.*

Rješenje.

```
a =

    3.6137


b =

    0.5442
```



Slika 5:

□

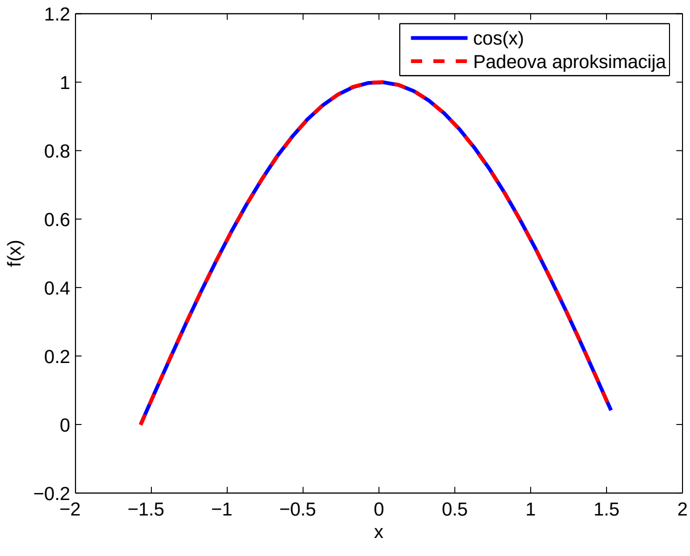
Zadatak 2.6. *Primjenom MATLABove ugrađene funkcije* `lsqcurvefit()` *odredite Pade-ovu aproksimaciju oblika*

$$p(x) = \frac{\sum_{i=1}^{4} a_i x^{i-1}}{\sum_{i=1}^{4} b_i x^{i-1}}$$

funkcije $\cos(x)$ *na intervalu* $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Rješenje. Za početne uvjete $a_1 = 1$, $a_2 = a_3 = a_4 = 0$, $b_1 = 1$, $b_2 = b_3 = b_4 = 0$ i levenberg-marquardtov algoritam:

```
a1 =

    0.8861

a2 =

    0.5285

a3 =

   -0.3602

a4 =

   -0.2149

b1 =

    0.8856

b2 =

    0.5287

b3 =

    0.0876

b4 =

    0.0516
```



Slika 6:

□

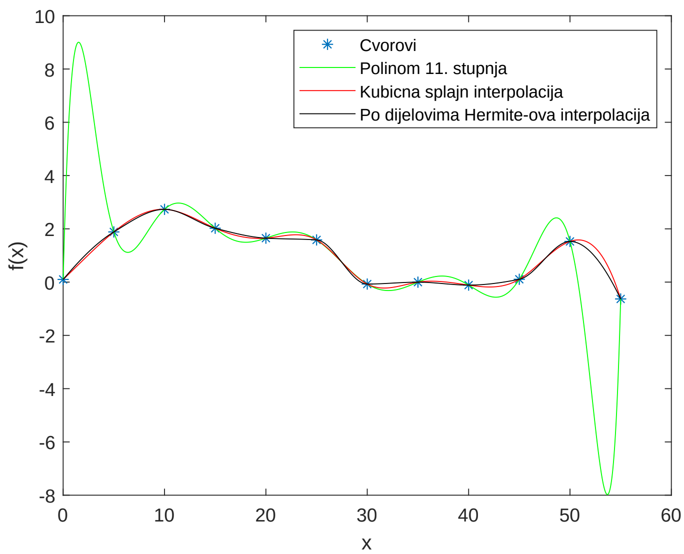
Zadatak 2.7. *Primjenom MATLABovih ugrađenih funkcija* `spline()` *i* `interp1()` *podatke interpolirajte kubičnim splajnom i po dijelovima Hermite-ovim polinomom.*

x_k	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55
f_k	0.1	1.884	2.732	2.022	1.65	1.5838	-0.073	-0.002	-0.1122	0.106	1.5265	-0.6321

Ispišite koeficijente kubičnog splajna.

Rješenja.

```
ans =
   -0.0018    0.0086    0.3594    0.1000
   -0.0018   -0.0187    0.3087    1.8840
    0.0041   -0.0460   -0.0150    2.7320
    0.0005    0.0158   -0.1660    2.0220
   -0.0064    0.0234    0.0299    1.6500
    0.0099   -0.0726   -0.2164    1.5838
   -0.0068    0.0763   -0.1981   -0.0730
    0.0019   -0.0252    0.0573   -0.0020
    0.0034    0.0028   -0.0546   -0.1122
   -0.0083    0.0533    0.2259    0.1060
   -0.0083   -0.0716    0.1342    1.5265
```



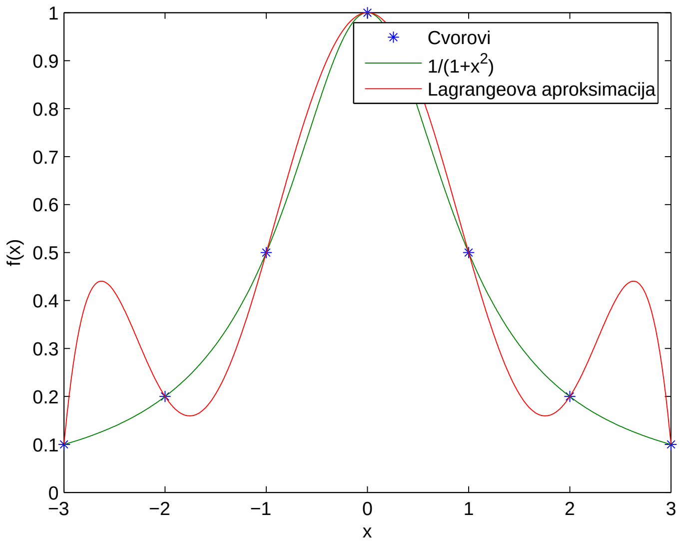
Slika 7:

□

Zadatak 2.8. *Napravite* `.m` *funkciju* `lagrangeapprox.m` *koja će računati Lagrangeove polinome. Unutar* `lagrangeapprox.m` *za računanje lagrangeove baze koristite operaciju konvolucije. Primijenite* `lagrangeapprox.m` *za aproksimaciju funkcije* $\frac{1}{1+x^2}$ *u čvorovima* $x_k = -3,\ -2,\ \ldots,\ 3,\ f_k = \frac{1}{1+x_k^2}$.

Rješenje.

```
pl =

   -0.0100    0.0000    0.1500    0.0000   -0.6400   -0.0000    1.0000
```



Slika 8:

□

Lagrangeov interpolacijski polinom je polinom koji prolazi kroz točke $(x_k,\ f_k)$ i definiran je izrazom

$$p_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k \ell_k(x), \quad \ell_k(x) = \prod_{i=1,\, i\neq k}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} p_n(x) = f_1 \frac{(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots(x_1-x_n)} + f_2 \frac{(x-x_1)(x-x_3)\cdots(x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\cdots(x_2-x_n)} + \cdots \\ + f_n \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1})}. \end{aligned} \tag{13}$$

Operacija konvolucije vremenski diskretnih signala definirana je izrazom:

$$z(k) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} u(j)\, v(k-j). \tag{14}$$

Ako $u(j)$ i $v(k-j)$ promatramo kao komponente konačno dimenzionalnih vektora $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ i $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ te uzimajući u obzir MATLABovu sintaksu, operaciju konvolucije možemo napisati u sljedećem obliku

$$z(k) = \sum_{j=1}^{m} u(j)\, v(k-j+1), \tag{15}$$

za $k = 1, 2, \ldots, m+n-1$.

Primjer:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 0 \end{bmatrix}, \quad m = 4, \quad n = 3, \quad j = 1,2,3,4, \quad k = 1,2,3,4,5,6$$

za $k = 1$:

$z(1) = u(1)\, v(1) + u(2)\, v(0) + u(3)\, v(-1) + u(4)\, v(-2) = 4,$

za $k = 2$:

$z(2) = u(1)\, v(2) + u(2)\, v(1) + u(3)\, v(0) + u(4)\, v(-1) = 16,$

za $k = 3$:

$z(3) = u(1)\, v(3) + u(2)\, v(2) + u(3)\, v(1) + u(4)\, v(0) = 13,$

za $k = 4$:

$z(4) = u(1)\, v(4) + u(2)\, v(3) + u(3)\, v(2) + u(4)\, v(1) = 23,$

za $k = 5$:

$z(5) = u(1)\, v(5) + u(2)\, v(4) + u(3)\, v(3) + u(4)\, v(2) = 7,$

za $k = 6$:

$z(6) = u(1)\, v(6) + u(2)\, v(5) + u(3)\, v(4) + u(4)\, v(3) = 0,$

Dakle, operacija konvolucije vektora **u** i **v** (obično se označava s $\mathbf{u} * \mathbf{v}$) daje vektor $\mathbf{z}$ = [4 16 13 23 7 0]. Ako vektore **u** i **v** prema MATLABovoj sintaksi promatramo kao polinome tj. $u(x) = 2x^3 + x^2 + 3x + 1$ i $v(x) = 2x^2 + 7x$ onda se može vidjeti da je $(2x^3 + x^2 + 3x + 1) \cdot (2x^2 + 7x) = (4x^5 + 16x^4 + 13x^3 + 23x^2 + 7x)$ što bi se u MATLABovoj sintaksi predstavilo upravo vektorom [4 16 13 23 7 0].

Literatura

[1] Drmač, Z., Hari, V., Marušić, M., Rogina, M., Singer, S., Singer, S. *Numerička analiza; Poglavlje 7: Aproksimacija i interpolacija*. Sveučilište u Zagrebu, PMF - Matematički odjel, 2003. Dostupno na: http://web.math.pmf.unizg.hr/~singer/num_anal/num_anal.pdf

[2] Phillips, G. M. *Interpolation and Approximation by Polynomials*. Springer-Verlag, New York, 2003.

[3] Davis, P. J. *Interpolation and Approximation*, Dover Publications, New York, 1975.