Sveučilište u Zagrebu
Fakultet strojarstva i brodogradnje

Vježbe iz kolegija Računalna matematika
Optimizacija

Andrej Jokić, Vladimir Milić
{ajokic, vmilic}@fsb.hr

Sadržaj

Ovo su nerecenzirani materijali za vježbe iz kolegija ***Računalna matematika****, a odnose se na rješavanje optimizacijskih problema primjenom programskog paketa MATLAB. Ovdje iznesena materija najvećim dijelom se temelji na knjigama [1, 2, 3]. Stoga se čitatelji upućuju na navedenu literaturu u kojoj se mogu naći izvodi i dokazi koji ovdje nisu dani.*

Autori će biti zahvalni svakomu tko upozori na greške ili predloži dodatne i poboljšane zadatke.

1 Optimizacija

Optimizacija sadrži skup aktivnosti čiji je cilj pronaći „najbolje rješenje”, optimum, uz poštivanje zadanih ograničenja. Pojam „matematičko programiranje” često je korišten kao sinonim optimiranju, pa tako imamo i pojmove: linearno programiranje, kvadratno programiranje, nelinearno programiranje, semi-definitno programiranje itd. Optimizacija sadrži skup aktivnosti čiji je cilj pronaći „najbolje rješenje”, optimum, uz poštivanje zadanih ograničenja.

1.1 Formulacija problema optimizacije

Formulacija optimizacijskog problema zahtjeva definiranje:

- $\mathcal{X}$ projektnog skupa (skup projektnih varijabli, skup varijabli odluke, *engl. decision set*),
- $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{X}$ dozvoljenog skupa (*engl. feasible set, constraint set*),
- $f : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ funkcije cilja (*engl. objective function, cost function*).

Cilj je odrediti vrijednost projektnih varijabli $x \in \mathcal{F}$ za koju je funkcija cilja $f(x)$ minimalna.

Optimizacijski problem s ograničenjima:

$$\min_{\mathbf{x}} \; f(\mathbf{x}), \tag{1}$$

uz ograničenja

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}, \tag{2}$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \tag{3}$$

gdje su:
$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ projektne varijable,
$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcija cilja,
$\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ ograničenja tipa nejednakosti,
$\mathbf{h} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ograničenja tipa jednakosti.

Optimalno rješenje $\mathbf{x}^*$ je vektor projektnih varijabli koji, od svih vektora iz projektnog prostora koji zadovoljavaju ograničenja, ima najmanju vrijednost funkcije cilja f.

Vrijedi sljedeće svojstvo

$$\max_{\mathbf{x}} \; f(\mathbf{x}) \iff \min_{\mathbf{x}} \; -f(\mathbf{x}). \tag{4}$$

1.2 Linearno programiranje

Definicija problema linearnog programiranja:

$$\min_{\mathbf{x}} \quad \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}, \tag{5}$$

uz ograničenja

$$\mathbf{A}_{eq}\mathbf{x} = \mathbf{b}_{eq}, \tag{6}$$

$$\mathbf{A}_{in}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}_{in}, \tag{7}$$

gdje je $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ vektor projektnih varijabli. Funkcija cilja i ograničenja su linearne u projektnim varijablama.

1.3 Kvadratno programiranje

Definicija problema kvadratnog programiranja:

$$\min_{\mathbf{x}} \quad \frac{1}{2}\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}, \tag{8}$$

uz ograničenja

$$\mathbf{A}_{eq}\mathbf{x} = \mathbf{b}_{eq}, \tag{9}$$

$$\mathbf{A}_{in}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}_{in}, \tag{10}$$

gdje je $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ vektor projektnih varijabli. Funkcija cilja je kvadratna dok su ograničenja linearne funkcije u projektnim varijablama. Matrica $\mathbf{H}$ mora biti simetrična pozitivno definitna matrica jer tada imamo (striktnu) konveksnost i nužno konačan minimum.

2 Zadaci u MATLABu

Zadatak 2.1. *Maksimizirajte linearnu funkciju $f(\mathbf{x})$:*

$$f(\mathbf{x}) = 4x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 8x_4 \quad \to max$$

s ograničenjima

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 950 \\ x_4 &\geq 400 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 7x_4 &\leq 4600 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 &\leq 5000 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Koristite MATLABovu funkciju `linprog()`*, a među opcijama odaberite* `interior-point algorithm`*.*

Rješenje.

```
Minimum found that satisfies the constraints.

Optimization completed because the objective function is non-decreasing in
feasible directions, to within the selected value of the function tolerance, and
constraints are satisfied to within the selected value of the
constraint tolerance.

x_optimalno =
     0
   400.0000
   150.0000
   400.0000

f_max =
  -6650
```

□

Kako bi prethodno opisani problem riješili u MATLABu primjenom funkcije `linprog()` zapisat ćemo ga u matričnom obliku:

- funkcija cilja:

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

- ograničenja:

$$\text{jednakosti: } \mathbf{A}_{eq}\mathbf{x} = \mathbf{b}_{eq} \quad \longrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 950 \end{bmatrix}$$

$$\text{nejednakosti: } \mathbf{A}_{in}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}_{in} \quad \longrightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 4600 \\ 5000 \end{bmatrix}$$

$$\text{granice opt. varijable : } \quad \mathbf{l}_b \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{u}_b \quad \longrightarrow \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 400 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

Zadatak 2.2. *Minimizirajte kvadratnu funkciju $f(x)$:*

$$f(x) = \frac{3}{2}x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 - x_1 - 2x_2 - 3x_3 \quad \to min$$

s ograničenjima

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &\leq 2.5 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 1 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Koristite MATLABovu funkciju `quadprog()`, *a među opcijama odaberite prikaz iteracija rješavanja.*

Rješenje.

```
Iter          Fval  Primal Infeas    Dual Infeas  Complementarity
0    -5.000000e-01   3.500000e+00   2.775934e+00     1.000000e+00
1    -1.861231e+00   1.750000e-03   1.387967e-03     2.377112e-01
2    -1.901943e+00   2.354301e-05   1.867252e-05     3.100151e-02
3    -1.918596e+00   1.177150e-08   9.336260e-09     4.215082e-03
4    -1.921400e+00   5.885958e-12   4.668156e-12     4.479546e-04
5    -1.921808e+00   2.442491e-15   2.544311e-15     1.047179e-05
6    -1.921818e+00   4.440892e-16   1.186172e-16     5.565736e-09

Minimum found that satisfies the constraints.

Optimization completed because the objective function is non-decreasing in
feasible directions, to within the default value of the optimality tolerance,
and constraints are satisfied to within the default value of the constraint tolerance.

x_optimalno =
   0.5818
   1.1182
   0.3182

f_min =
  -1.9218
```

□

Kako bi prethodno opisani problem riješili u MATLABu primjenom funkcije `quadprog()` zapisat ćemo ga u matričnom obliku:

- funkcija cilja:

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}^{\mathrm{T}} \succ \mathbf{0},$$

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

- ograničenja:

$$\text{jednakosti: } \mathbf{A}_{eq}\mathbf{x} = \mathbf{b}_{eq} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{nejednakosti: } \mathbf{A}_{in}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}_{in} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 2.5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Zadatak 2.3. *Minimizirajte nelinearnu funkciju $f(x)$:*

$$f(x) = e^{x_1}\left(4x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_1x_2 + 2x_2 + 1\right) \quad \to min$$

s ograničenjima

$$\begin{aligned} 1.5 + x_1x_2 - x_1 - x_2 &\leq 0 \\ -x_1x_2 &\leq 10 \end{aligned}$$

Početni uvjeti su: $x_0 = [-1 \quad -1]^T$. *Koristite MATLABovu funkciju* `fmincon()`.

Rješenje.

```
Local minimum found that satisfies the constraints.

Optimization completed because the objective function is non-decreasing in
feasible directions, to within the default value of the optimality tolerance,
and constraints are satisfied to within the default value of the constraint tolerance.

x_optimalno =
   -9.5473
    1.0474

f_min =
   0.0236
```

□

Literatura

[1] Drmač, Z., Hari, V., Marušić, M., Rogina, M., Singer, S., Singer, S. *Numerička analiza; Poglavlje 11: Optimizacija*. Sveučilište u Zagrebu, PMF - Matematički odjel, 2003. Dostupno na: `http://web.math.pmf.unizg.hr/~singer/num_anal/num_anal.pdf`

[2] Beck, A., *Introduction to Nonlinear Optimization. Theory, Algorithms, and Applications with MATLAB*. SIAM, Philadelphia, PA, USA, 2014.

[3] Venkataraman, P., *Applied Optimization with MATLAB Programming. Second Edition.* Wiley, Hoboken, NJ, USA, 2009.