Linearni multivarijabilni sustavi

Opća teorija sustava

Sveučilište u Zagrebu
Fakultet strojarstva i brodogradnje

Sadržaj

Sadržaj

Linearni vremenski-varijabilni kontinuirani dinamički sustavi

Jednadžbe stanja linearnih vremenski-varijabilnih sustava:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t), \qquad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \tag{1}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t), \tag{2}$$

$\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ - *vektor stanja*,
$\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ - *vektor upravljanja*,
$\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p$ - *vektor izlaza*.

$\mathbf{A}(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ - *matrica koeficijenata* sustava,
$\mathbf{B}(t) \in \mathbb{R}^{n\times m}$ - *matrica ulaza* sustava,
$\mathbf{C}(t) \in \mathbb{R}^{p\times n}$ - *matrica izlaza* sustava, a
$\mathbf{D}(t) \in \mathbb{R}^{p\times m}$ - *matrica prijenosa* sustava.

Linearni vremenski-invarijantni kontinuirani dinamički sustavi

Kada su matrice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ i $\mathbf{D}$ vremenski neovisne, tada imamo vremenski-invarijantni linearni kontinuirani sustav, prikazan slijedećim jednadžbama stanja

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \qquad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \tag{3}$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t), \tag{4}$$

U slučaju kada je $\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}$, govorimo o *autonomnom linearnom sustavu*

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \qquad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \tag{5}$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t), \tag{6}$$

Sadržaj

Rješenje homogenog sustava

Rješenje primjenom Taylorovog reda. Vektor stanja $\mathbf{x}(t)$ linearnog homogenog sustava

$$\boxed{\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)} \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \tag{7}$$

može se razviti u Taylorov red u okolišu točke $t = 0$,

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(0) + \dot{\mathbf{x}}(0)t + \ddot{\mathbf{x}}(0)\frac{t^2}{2!} + \ldots + \mathbf{x}^{(k)}(0)\frac{t^k}{k!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{x}^{(k)}(0)\frac{t^k}{k!}. \tag{8}$$

Ako sada uzastopno deriviramo jednadžbu $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ po vremenu dobivamo

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t), && (9)\\
\ddot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}^2\mathbf{x}(t), && (10)\\
\mathbf{x}^{(3)}(t) &= \mathbf{A}^2\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}^3\mathbf{x}(t), && (11)\\
&\vdots && (12)\\
\mathbf{x}^{(k)}(t) &= \mathbf{A}^k\mathbf{x}(t). && (13)
\end{aligned}$$

Rješenje homogenog sustava

U slučaju $t = 0$ dobivamo

$$\mathbf{x}^{(k)}(0) = \mathbf{A}^k \mathbf{x}(0), \tag{14}$$

za $k = 0, 1, \ldots, n, \ldots$. Ako sada izraz (14) uvrstimo u Taylorov razvoj (8), dobivamo

$$\mathbf{x}(t) = \left(\mathbf{I} + t\mathbf{A} + \frac{t^2 \mathbf{A}^2}{2!} + \ldots + \frac{t^k \mathbf{A}^k}{k!} + \ldots \right) \mathbf{x}(0). \tag{15}$$

Taylorov razvoj eksponencijalne funkcije s matricom kao argumentom

$$\boxed{e^{\mathbf{A}t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k \mathbf{A}^k}{k!}} \tag{16}$$

Izraz (15) možemo prikazati u slijedećem obliku

$$\boxed{\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0)} \tag{17}$$

što predstavlja rješenje homogene matrične linearne diferencijalne jednadžbe (7).

Matrica prijelaza

Ako je poznato stanje sustava u početnom trenutku $\mathbf{x}(0)$ i matrica $e^{\mathbf{A}t}$, tada možemo odrediti stanje sustava u bilo kojem kasnijem trenutku $\mathbf{x}(t)$.
Stoga matricu $e^{\mathbf{A}t}$ nazivamo još i *matrica prijelaza* ili *fundamentalna matrica*

$$\boxed{\mathbf{\Phi}(t) = e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + t\mathbf{A} + \frac{t^2\mathbf{A}^2}{2!} + \ldots + \frac{t^k\mathbf{A}^k}{k!} + \ldots} \tag{18}$$

Ako bi umjesto u trenutku $t = 0$, Taylorov red razvili oko točke $t = t_0$, dobili bi slijedeće rješenje

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{\Phi}(t - t_0)\mathbf{x}(t_0). \tag{19}$$

Rješenje razvojem u red potencija

Pretpostavimo rješenje homogene jednadžbe u obliku reda potencija po vremenu t

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 t + \mathbf{a}_2 t^2 + \ldots + \mathbf{a}_k t^k + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{a}_k t^k, \tag{20}$$

gdje su $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k \in \mathbb{R}^n$. Uvrštavanjem reda (20) u (7) dobivamo

$$\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 t + 3\mathbf{a}_3 t^2 + \ldots + k\mathbf{a}_k t^{k-1} + \ldots = \mathbf{A}(\mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 t + \mathbf{a}_2 t^2 + \ldots + \mathbf{a}_k t^k + \ldots) \tag{21}$$

Ako izjednačimo članove uz iste potencije, dobivamo

$$(\mathbf{a}_1 - \mathbf{A}\mathbf{a}_0) + (2\mathbf{a}_2 - \mathbf{A}\mathbf{a}_1)t + (3\mathbf{a}_3 - \mathbf{A}\mathbf{a}_2)t^2 + \ldots + (k\mathbf{a}_k - \mathbf{A}\mathbf{a}_{k-1})t^{k-1} + \ldots = 0$$

Da bi prethodni izraz bio zadovoljen za svaki t, izrazi u zagradama moraju biti jednaki nuli.

Rješenje razvojem u red potencija

... izrazi u zagradama moraju biti jednaki nuli:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= \mathbf{A}\mathbf{a}_0, && (22)\\ 2\mathbf{a}_2 &= \mathbf{A}\mathbf{a}_1 = \mathbf{A}\mathbf{A}\mathbf{a}_0 = \mathbf{A}^2\mathbf{a}_0, && (23)\\ 3\mathbf{a}_3 &= \mathbf{A}\mathbf{a}_2 = \mathbf{A}\frac{1}{2}\mathbf{A}^2\mathbf{a}_0 = \frac{1}{2}\mathbf{A}^3\mathbf{a}_0, && (24)\\ &\vdots && (25)\\ k\mathbf{a}_k &= \mathbf{A}\mathbf{a}_{k-1} = \frac{1}{(k-1)!}\mathbf{A}^k\mathbf{a}_0. && (26) \end{aligned}$$

Koeficijente reda (20) su u funkciji potencija matrice $\mathbf{A}$ i koeficijenta $\mathbf{a}_0$.
S obzirom da je u $t = 0$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, na osnovu (20) slijedi $\mathbf{a}_0 = \mathbf{x}(0)$.
Uvrštavanjem dobivenih koeficijenata u (20) dobivamo razvoj (15).

Rješenje primjenom metode sukcesivnih aproksimacija

Diferencijalnu jednadžbu $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ prebacimo u integralnu jednadžbu

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(0) + \int_0^t \mathbf{A}\mathbf{x}(\tau)d\tau. \tag{27}$$

Vidimo da se u navedenoj jednadžbi nepoznanica $\mathbf{x}(t)$ nalazi na lijevoj strani jednadžbe, kao i pod znakom integrala.
U prvoj aproksimaciji pretpostavimo rješenje (27) u obliku

$$\mathbf{x}_0(t) = \mathbf{x}(0), \qquad \forall t. \tag{28}$$

Navedeno aproksimativno rješenje ubacimo na desnu stranu jednadžbe (27) da bi dobili slijedeću aproksimaciju $\mathbf{x}_1(t)$ egzaktnog rješenja $\mathbf{x}(t)$

$$\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{x}(0) + \int_0^t \mathbf{A}\mathbf{x}_0(\tau)d\tau = \mathbf{x}(0) + \mathbf{A}t\mathbf{x}(0) = (\mathbf{I} + \mathbf{A}t)\mathbf{x}(0). \tag{29}$$

Rješenje primjenom metode sukcesivnih aproksimacija

Na sličan način, u drugoj aproksimaciji imamo

$$\mathbf{x}_2(t) = \mathbf{x}(0) + \int_0^t \mathbf{A}\mathbf{x}_1(\tau)d\tau = \left(\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \mathbf{A}^2\frac{t^2}{2}\right)\mathbf{x}(0). \qquad (30)$$

Ponavljanjem navedenog postupka, u k-toj iteraciji dobivamo

$$\mathbf{x}_k(t) = \mathbf{x}(0) + \int_0^t \mathbf{A}\mathbf{x}_{k-1}(\tau)d\tau = \left(\mathbf{I} + t\mathbf{A} + \frac{t^2\mathbf{A}^2}{2!} + \ldots + \frac{t^k\mathbf{A}^k}{k!}\right)\mathbf{x}(0). \qquad (31)$$

Konačno rješenje dobivamo kao limes prethodnog rješenja

$$\mathbf{x}(t) = \lim_{k\to\infty}\mathbf{x}_k(t) = \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k\mathbf{A}^k}{k!}\right)\mathbf{x}(0) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0). \qquad (32)$$

Sličan pristup primjenit ćemo za određivanje matrice prijelaza linearnih vremenski-varijabilnih sustava.

Rješenje primjenom Laplaceove transformacije

Primjenimo li Laplaceovu transformaciju na jednadžbu (7) dobivamo

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s), \tag{33}$$

gdje je $\mathbf{X}(s) = \mathcal{L}\{\mathbf{x}(t)\}$. Iz prethodne jednadžbe dobivamo

$$\mathbf{X}(s) = [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{x}(0). \tag{34}$$

Inverzna Laplaceovea transformacija: $\mathbf{x}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{X}(s)\}$, odnosno $\mathbf{x}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\}\mathbf{x}(0)$.
Da bi mogli izračunati navedeni izraz, prikazat ćemo $[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}$ u obliku beskonačnog reda, gdje ćemo primjeniti poznati razvoj $1/(1-x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$, za $|x| < 1$.
Za dovoljno veliki $|s|$ slijedi

$$[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} = \frac{1}{s}\left[\mathbf{I} - \frac{1}{s}\mathbf{A}\right]^{-1} = \frac{1}{s}\left[\mathbf{I} + \frac{1}{s}\mathbf{A} + \frac{1}{s^2}\mathbf{A}^2 + \frac{1}{s^3}\mathbf{A}^3 + \ldots\right] \tag{35}$$

Rješenje primjenom Laplaceove transformacije

Razvoj u beskonačni red potencija:

$$[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} = \frac{1}{s}\mathbf{I} + \frac{1}{s^2}\mathbf{A} + \frac{1}{s^3}\mathbf{A}^2 + \frac{1}{s^4}\mathbf{A}^3 + \dots \tag{36}$$

Ako sada primjenimo inverzni Laplaceov transformat na svaki član desne strane prethodnog izraza koristeći

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{k+1}}\right\} = \frac{t^k}{k!}, \tag{37}$$

dobivamo

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\right\} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{t^2}{2!}\mathbf{A}^2 + \frac{t^3}{3!}\mathbf{A}^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k \mathbf{A}^k}{k!} = e^{\mathbf{A}t}. \tag{38}$$

Na ovaj način smo dokazali važan identitet

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\left\{[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\right\} = e^{\mathbf{A}t}} \tag{39}$$

Svojstva matrice prijelaza

Matrica $\mathbf{\Phi}(t) = e^{\mathbf{A}t}$ nije nikada singularna,

$$\det \mathbf{\Phi}(t) \neq 0, \qquad \forall t. \tag{40}$$

Na osnovu definicije matrice prijelaza možemo izvesti slijedeće izraze

$$\mathbf{\Phi}(t_1)\mathbf{\Phi}(t_2) = e^{\mathbf{A}t_1} \cdot e^{\mathbf{A}t_2} = e^{\mathbf{A}(t_1+t_2)} = \mathbf{\Phi}(t_1 + t_2), \tag{41}$$

$$\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{\Phi}(-t) = e^{\mathbf{A}t} \cdot e^{-\mathbf{A}t} = \mathbf{\Phi}(0) = \mathbf{I}, \tag{42}$$

$$\mathbf{\Phi}(-t) = e^{-\mathbf{A}t} = \mathbf{\Phi}^{-1}(t), \tag{43}$$

koji definiraju tzv. *semigrupna* svojstva matrice prijelaza.
Derivacija matrice prijelaza:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{\Phi}(t) = A\mathbf{\Phi}(t). \tag{44}$$

Rješenje nehomogenog sustava $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$

Iz jednadžbi stanja slijedi: $\dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{A}\mathbf{x}(t) = \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$.
Nakon množenja sa $e^{-\mathbf{A}t}$ dobivamo

$$e^{-\mathbf{A}t}\dot{\mathbf{x}}(t) - e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{A}\mathbf{x}(t) = e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{B}\mathbf{u}(t), \tag{45}$$

odnosno

$$\frac{d}{dt}\left[e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{x}(t)\right] = e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{B}\mathbf{u}(t), \tag{46}$$

te nakon integracije

$$e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(0) = \int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau. \tag{47}$$

Pomnožimo li prethodni izraz s lijeve strane sa $e^{\mathbf{A}t}$, dobivamo

$$\boxed{\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau} \tag{48}$$

Rješenje nehomogenog sustava primjenom Laplaceove transformacije

Laplaceova transformacija jednadžbe $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$ je

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s) \tag{49}$$

gdje je $\mathbf{U}(s) = \mathcal{L}\{\mathbf{u}(t)\}$. Iz prethodne jednadžbe dobivamo

$$\boxed{\mathbf{X}(s) = [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{x}(0) + [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s)} \tag{50}$$

Teorem konvolucije:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)F_2(s)\} = \int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau, \tag{51}$$

gdje su $F_1(s) = \mathcal{L}\{f_1(t)\}$ i $F_2(s) = \mathcal{L}\{f_2(t)\}$. Primjenom izraza (51) i (39) slijedi

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\left\{[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s)\right\} = \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau} \tag{52}$$

Zbrojimo li rješenje homogenog i nehomogenog sustava dobijemo (48).

Matrica prijenosnih funkcija

Kada su početni uvjeti $\mathbf{x}(0)$ i matrica prijenosa $\mathbf{D}$ jednaki nuli, linearni vremenski-invarijantni sustav ima slijedeći oblik

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{0}, \tag{53}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t), \tag{54}$$

Laplaceovim transformatom navedenog sustava jednadžbi dobivamo izraz (50), koji uz $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$ postaje ($\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s)$):

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s). \tag{55}$$

Ako definiramo matricu prijenosnih funkcija

$$\boxed{\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{B}} \tag{56}$$

izraz (55) postaje

$$\boxed{\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{U}(s)} \tag{57}$$

Matrica prijenosnih funkcija - stabilnost linearnih sustava

Matricu prijenosnih funkcija (56) možemo prikazati kao

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}\frac{\mathrm{adj}[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]}{\det[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]}\mathbf{B}. \tag{58}$$

$\det[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]$ je skalar, polinom n-tog reda po s i naziva se *karakteristična jednadžba* sustava. Korijeni karakteristične jednadžbe

$$\det[s\mathbf{I} - \mathbf{A}] = 0 \tag{59}$$

predstavljaju *polove* sustava. Također, korijeni karakteristične jednadžbe istovremeno su i *svojstvene vrijednosti* matrice $\mathbf{A}$.

Stabilnost linearnih sustava:

- polovi matrice prijenosnih funkcija $\mathbf{G}(s)$, odnosno svojstvene vrijednosti matrice $\mathbf{A}$, smješteni na lijevoj polovini kompleksne s-ravnine
- realni dijelovi korijena $s_1, \ldots, s_n$ karakteristične jednadžbe (59) moraju biti negativni, $Re\{s_j\} < 0$ za $j = 1, \ldots, n$.
- možemo primjeniti analitičke kriterije stabilnosti (Routh ili Hurwitz)

Sadržaj

Vremenski-varijabilni sustavi

Vremenski varijabilni linearni kontinuirani sustavi:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t), \tag{60}$$

Rješenje homogene jednadžbe stanja dobivamo preko matrice prijelaza

$$\boxed{\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t, t_0)\mathbf{x}(t_0)} \tag{61}$$

s tom razlikom da matrica prijelaza $\mathbf{\Phi}(t, t_0)$ ovisi o vremenu t i početnom trenutku t_0, a ne samo o razlici $t - t_0$ kao kod vremenski invarijantnih sustava.

Rješenje homogenog vremenski-varijabilnog sustava

Matricu $\mathbf{\Phi}(t, t_0)$ odredit ćemo na osnovu homogene diferencijalne jednadžbe $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t)$.
Uvrštavanjem pretpostavljenog rješenja (61) u homogenu diferencijalnu jednadžbu dobivamo

$$\dot{\mathbf{\Phi}}(t, t_0) = \mathbf{A}(t)\mathbf{\Phi}(t, t_0), \tag{62}$$

što je diferencijalna jednadžba matrice prijelaza.
Nadalje, na osnovu definicije (61), direktno slijedi $\mathbf{\Phi}(t_0, t_0) = \mathbf{I}$.
Također, vrijede slijedeća svojstva matrice prijelaza

$$\mathbf{\Phi}(t_2, t_0) = \mathbf{\Phi}(t_2, t_1)\mathbf{\Phi}(t_1, t_0), \tag{63}$$

$$\mathbf{\Phi}(t_1, t_2) = \mathbf{\Phi}^{-1}(t_2, t_1), \tag{64}$$

$$\mathbf{\Phi}(t_2, t_1)\mathbf{\Phi}(t_1, t_2) = \mathbf{I}. \tag{65}$$

Princip kauzalnosti dinamičkih sustava

Svojstvo (63) posljedica je principa kauzalnosti dinamičkih sustava.
Pretpostavimo da je stanje sustava u trenutku t_1 određeno početnim stanjem $\mathbf{x}(t_0)$ i matricom prijelaza $\mathbf{\Phi}(t_1, t_0)$,

$$\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{\Phi}(t_1, t_0)\mathbf{x}(t_0). \tag{66}$$

Zatim stanje $\mathbf{x}(t_1)$ uzmemo kao početni uvjet za određivanje stanja $\mathbf{x}(t_2)$ u vremenskom trenutku $t_2 > t_1$. U tom slučaju imamo

$$\mathbf{x}(t_2) = \mathbf{\Phi}(t_2, t_1)\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{\Phi}(t_2, t_1)\mathbf{\Phi}(t_1, t_0)\mathbf{x}(t_0). \tag{67}$$

S druge strane, stanje $\mathbf{x}(t_2)$ možemo odrediti izravno na osnovu početnog uvjeta $\mathbf{x}(t_0)$,

$$\mathbf{x}(t_2) = \mathbf{\Phi}(t_2, t_0)\mathbf{x}(t_0). \tag{68}$$

Usporedbom (67) i (68) direktno proizlazi svojstvo (63).
Svojstva (64) i (65) direktno slijede iz (63).

Rješenje nehomogenog vremenski-varijabilnog sustava

Najprije ćemo odrediti izraz za vremensku derivaciju inverzne matrice prijelaza. Na osnovu (64) i (65) slijedi

$$\mathbf{\Phi}^{-1}(t, t_0)\mathbf{\Phi}(t, t_0) = \mathbf{I}. \tag{69}$$

Deriviranjem po vremenu izraza (69) dobivamo

$$\frac{d\mathbf{\Phi}^{-1}(t, t_0)}{dt}\mathbf{\Phi}(t, t_0) + \mathbf{\Phi}^{-1}(t, t_0)\dot{\mathbf{\Phi}}(t, t_0) = \mathbf{0}. \tag{70}$$

Uvrštavanjem izraza (62) u (70) te množenjem s desne strane matricom $\mathbf{\Phi}^{-1}(t, t_0)$, konačno dobivamo

$$\frac{d\mathbf{\Phi}^{-1}(t, t_0)}{dt} = -\mathbf{\Phi}^{-1}(t, t_0)\mathbf{A}(t). \tag{71}$$

Iz jednadžbi stanja (60) slijedi: $\dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) = \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t)$.
Pomnožimo li navedenu jednadžbu, s lijeve strane, matricom $\mathbf{\Phi}^{-1}(t, t_0)$, dobivamo

$$\mathbf{\Phi}^{-1}(t, t_0)\dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{\Phi}^{-1}(t, t_0)\mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}^{-1}(t, t_0)\mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t), \tag{72}$$

odnosno

$$\frac{d}{dt}\left[\mathbf{\Phi}^{-1}(t, t_0)\mathbf{x}(t)\right] = \mathbf{\Phi}^{-1}(t, t_0)\mathbf{B}\mathbf{u}(t), \tag{73}$$

te nakon integracije

$$\mathbf{\Phi}^{-1}(t, t_0)\mathbf{x}(t) - \mathbf{\Phi}^{-1}(t_0, t_0)\mathbf{x}(0) = \int_0^t \mathbf{\Phi}^{-1}(\tau, t_0)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau. \tag{74}$$

Pomnožimo li prethodni izraz s lijeve strane sa $\mathbf{\Phi}(t, t_0)$, te imajući u vidu $\mathbf{\Phi}^{-1}(t_0, t_0) = \mathbf{I}$ i $\mathbf{\Phi}^{-1}(t, t_0)\mathbf{\Phi}(t, t_0) = \mathbf{I}$, na kraju dobivamo izraz

$$\boxed{\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t, t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{\Phi}(t, \tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau} \tag{75}$$

Matrica prijelaza vremenski-varijabilnih sustava - Neumannov razvoj

Diferencijalna jednadžba $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) \rightarrow$ integralna jednadžba:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{A}(\tau)\mathbf{x}(\tau)d\tau. \tag{76}$$

U nultoj aproksimaciji pretpostavimo rješenje (76) u obliku $\mathbf{x}_0(t) = \mathbf{x}(t_0)$.
Prva aproksimacija:

$$\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{A}(\tau)\mathbf{x}(t_0)d\tau = \left(\mathbf{I} + \int_{t_0}^{t} \mathbf{A}(\tau)d\tau\right)\mathbf{x}(t_0). \tag{77}$$

Druga aproksimacija:

$$\mathbf{x}_2(t) = \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{A}(\tau)\mathbf{x}_1(\tau)d\tau = \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{A}(\tau_1)\left(\mathbf{I} + \int_{t_0}^{\tau_1} \mathbf{A}(\tau_2)d\tau_2\right)\mathbf{x}(t_0)d\tau_1$$

odnosno nakon sređivanja

$$\mathbf{x}_2(t) = \left[\mathbf{I} + \int_{t_0}^{t} \mathbf{A}(\tau)d\tau + \int_{t_0}^{t} \mathbf{A}(\tau_1)\left(\int_{t_0}^{\tau_1} \mathbf{A}(\tau_2)d\tau_2\right)d\tau_1\right]\mathbf{x}(t_0). \tag{78}$$

Matrica prijelaza vremenski-varijabilnih sustava - Neumannov razvoj

Navedenu proceduru možemo ponavljati do proizvoljnog reda, tako da konačan izraz za matricu prijelaza možemo prikazati u obliku Neumannovog reda

$$\begin{aligned}\mathbf{\Phi}(t,t_0) &= \mathbf{I} + \int_{t_0}^{t} \mathbf{A}(\tau)d\tau + \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{\tau_1} \mathbf{A}(\tau_1)\mathbf{A}(\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 + \\ &+ \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{\tau_1}\int_{t_0}^{\tau_2} \mathbf{A}(\tau_1)\mathbf{A}(\tau_2)\mathbf{A}(\tau_3)d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 + \dots \end{aligned} \qquad (79)$$

Navedeni razvoj može se koncizније prikazati uvođenjem notacije

$$\boxed{\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \int_{t_0}^{t} \mathbf{A}(\tau)d\tau} \qquad (80)$$

U tom slučaju, Neumannov red (79) može biti prikazan u obliku

$$\boxed{\mathbf{\Phi}(t,t_0) = \mathbf{I} + \mathcal{R}(\mathbf{A}) + \mathcal{R}(\mathbf{A}\mathcal{R}(\mathbf{A})) + \mathcal{R}(\mathbf{A}\mathcal{R}(\mathbf{A}\mathcal{R}(\mathbf{A}))) + \dots} \qquad (81)$$

koji je pogodan za rekurzivno (i simboličko) izračunavanje.

Sadržaj

Linearni diskretni sustavi

- diskretne jednadžbe stanja - u obliku matričnih diferencijskih jednadžbi
- vremenska diskretizacija kontinuranih jednadžbi stanja
- diskretna aproksimacija se bazira na podjeli vremenske osi na diskretne intervale, $t = kT$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, gdje je T period sempliranja.
- pretpostavljamo da je upravljačka varijabla diskretizirana primjenom impulsnog formatora nultog reda (*zero order hold*), što znači da je $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(kT)$, za $kT \leq t < (k+1)T$.

Promotrimo diferencijalnu jednadžbu stanja linearnog kontinuiranog sustava

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \tag{82}$$

kojoj odgovara diferencijska jednadžba

$$\boxed{\mathbf{x}[(k+1)T] = \mathbf{E}(T)\mathbf{x}(kT) + \mathbf{F}(T)\mathbf{u}(kT)} \tag{83}$$

ili samo: $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{E}\mathbf{x}(k) + \mathbf{F}\mathbf{u}(k)$

Eulerova diskretizacija kontinuiranih jednadžbi stanja

Eulerova diskretizacija je najjednostavnija metoda diskretizacije

$$\dot{\mathbf{x}}(t) \cong \frac{\mathbf{x}(t+T) - \mathbf{x}(t)}{T}. \tag{84}$$

Uvrštavanjem navedene aproksimacije u jednadžbu (82), uz $t = kT$, dobivamo

$$\mathbf{x}[(k+1)T] = (T\mathbf{A} + \mathbf{I})\mathbf{x}(kT) + T\mathbf{B}\mathbf{u}(kT), \tag{85}$$

iz čega slijede matrice $\mathbf{E}(T)$ i $\mathbf{F}(T)$:

$$\mathbf{E}(T) = T\mathbf{A} + \mathbf{I}, \qquad \mathbf{F}(T) = T\mathbf{B}. \tag{86}$$

Navedena metoda diskretizacije prvog reda je jednostavna, ali nije dovoljno precizna.
Točnost metode može se povečavati jedino smanjenjem perioda sempliranja T, što može biti problem kod *real-time* implementacije.

Diskretizacija jednadžbi stanja primjenom egzaktnog rješenja

Matrice $\mathbf{E}(T)$ i $\mathbf{F}(T)$ odredit ćemo korištenjem rješenja jednadžbe (82) u obliku

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{x}(t_0) + e^{\mathbf{A}t}\int_{t_0}^{t} e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau. \tag{87}$$

Razmotrimo sada prijelaz sustava iz početnog stanja u trenutku $t_0 = kT$ u konačno stanje u trenutku $t = (k+1)T$. Primjenom izraza (87) dobivamo

$$\mathbf{x}[(k+1)T] = e^{\mathbf{A}T}\mathbf{x}(kT) + e^{\mathbf{A}(k+1)T}\int_{kT}^{(k+1)T} e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(kT)d\tau. \tag{88}$$

Uvođenjem nove podintegralne varijable $s = (k+1)T - \tau$, prethodni izraz postaje

$$\mathbf{x}[(k+1)T] = e^{\mathbf{A}T}\mathbf{x}(kT) + \int_{0}^{T} e^{\mathbf{A}s}\mathbf{B}\mathbf{u}(kT)ds, \tag{89}$$

iz čega slijede matrice $\mathbf{E}(T)$ i $\mathbf{F}(T)$:

$$\mathbf{E}(T) = e^{\mathbf{A}T}, \qquad \mathbf{F}(T) = \int_{0}^{T} e^{\mathbf{A}s}\mathbf{B}ds, \tag{90}$$

Ako je matrica $\mathbf{A}$ nesingularna, tada izraz za $\mathbf{F}(T)$ definiran integralom u (90) možemo dobiti analitički. Razvijemo li funkciju $e^{\mathbf{A}s}$ u red potencija, dobivamo

$$\mathbf{F}(T) = \int_0^T e^{\mathbf{A}s}\mathbf{B}ds = \int_0^T \left(\mathbf{I} + s\mathbf{A} + \frac{s^2\mathbf{A}^2}{2!} + \ldots + \frac{s^k\mathbf{A}^k}{k!} + \ldots\right)\mathbf{B}ds \quad (91)$$

Integriranjem svih članova u razvoju dobivamo

$$\mathbf{F}(T) = \left(\mathbf{I}T + \frac{T^2\mathbf{A}}{2!} + \frac{T^3\mathbf{A}^2}{3!} + \ldots + \frac{T^{k+1}\mathbf{A}^k}{(k+1)!} + \ldots\right)\mathbf{B}. \quad (92)$$

Ako sada prethodni izraz pomnožimo s lijeva sa $\mathbf{A}$ te zbrojimo sa $\mathbf{B}$, dobivamo

$$\mathbf{A}\mathbf{F}(T) + \mathbf{B} = e^{\mathbf{A}T}\mathbf{B}, \quad (93)$$

iz čega slijedi konačno rješenje

$$\mathbf{F}(T) = \mathbf{A}^{-1}[e^{\mathbf{A}T} - \mathbf{I}]\mathbf{B}. \quad (94)$$

Navedena metoda diskretizacije bitno je točnija od Eulerove metode.

Rješenje diskretnih vremenski-invarijantnih sustava

Iterativnom primjenom diferencijskih jednadžbi $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{E}\mathbf{x}(k) + \mathbf{F}\mathbf{u}(k)$ dobivamo

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}(1) &= \mathbf{E}\mathbf{x}(0) + \mathbf{F}\mathbf{u}(0), \\
\mathbf{x}(2) &= \mathbf{E}\mathbf{x}(1) + \mathbf{F}\mathbf{u}(1) = \mathbf{E}[\mathbf{E}\mathbf{x}(0) + \mathbf{F}\mathbf{u}(0)] + \mathbf{F}\mathbf{u}(1) = \\
&= \mathbf{E}^2\mathbf{x}(0) + \mathbf{E}\mathbf{F}\mathbf{u}(0) + \mathbf{F}\mathbf{u}(1), \\
\mathbf{x}(3) &= \mathbf{E}\mathbf{x}(2) + \mathbf{F}\mathbf{u}(2) = \\
&= \mathbf{E}^3\mathbf{x}(0) + \mathbf{E}^2\mathbf{F}\mathbf{u}(0) + \mathbf{E}\mathbf{F}\mathbf{u}(1) + \mathbf{F}\mathbf{u}(2), \\
&\vdots \\
\mathbf{x}(k) &= \mathbf{E}^k\mathbf{x}(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{E}^{k-j-1}\mathbf{F}\mathbf{u}(j).
\end{aligned}
\tag{95}
$$

Izraz (95) daje nam vrijednost vektora stanja u diskretnim vremenskim trenucima $t = kT$, $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, u ovisnosti o početnom stanju $\mathbf{x}(0)$.

Rješenje diskretnih vremenski-invarijantnih sustava

Ako za matrice $\mathbf{E}(T)$ i $\mathbf{F}(T)$ uzmemo izraze (90), dobivamo

$$\boxed{\mathbf{x}(kT) = e^{\mathbf{A}kT}\mathbf{x}(0) + \sum_{j=0}^{k-1} e^{\mathbf{A}(k-j-1)T}\mathbf{F}(T)\mathbf{u}(jT)} \tag{96}$$

U slučaju autonomnih sustava, $\mathbf{u}(jT) = \mathbf{0}$, na osnovu prethodnog izraza slijedi $\mathbf{x}(kT) = e^{\mathbf{A}kT}\mathbf{x}(0)$, što znači da metoda diskretizacije (90) daje egzaktno rješenje u diskretnim vremenskim trenucima $t = kT$.

Matrica prijelaza diskretnih vremenski-invarijantnih sustava

Rješenje diskretnih jednadžbi stanja vremenski-invarijantnih sustava možemo također prikazati primjenom matrice prijelaza

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{\Phi}(k)\mathbf{x}(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{\Phi}(k-j-1)\mathbf{F}\mathbf{u}(j), \tag{97}$$

gdje je

$$\mathbf{\Phi}(k) = \mathbf{E}^k. \tag{98}$$

Diskretna matrica prijelaza posjeduje slična svojstva kao kontinuirana matrica prijelaza

$$\mathbf{\Phi}(k_1)\mathbf{\Phi}(k_2) = \mathbf{E}^{k_1} \cdot \mathbf{E}^{k_2} = \mathbf{E}^{k_1+k_2} = \mathbf{\Phi}(k_1+k_2), \tag{99}$$

$$\mathbf{\Phi}(k)\mathbf{\Phi}(-k) = \mathbf{E}^{k} \cdot \mathbf{E}^{-k} = \mathbf{E}^{0} = \mathbf{\Phi}(0) = \mathbf{I}, \tag{100}$$

$$\mathbf{\Phi}(-k) = \mathbf{E}^{-k} = [\mathbf{E}^{k}]^{-1} = \mathbf{\Phi}^{-1}(k). \tag{101}$$

Diskretni vremenski-varijabilni sustavi

Kod diskretnih vremenski-varijabilnih sustava, matrice $\mathbf{E}$ i $\mathbf{F}$ su promjenjive u svakom diskretnom trenutku vremena $t = kT$,

$$\mathbf{x}[(k+1)T] = \mathbf{E}(kT)\mathbf{x}(kT) + \mathbf{F}(kT)\mathbf{u}(kT). \tag{102}$$

Notacija: period diskretizacije T izostavljamo kao argument vektorskih i matričnih veličina ($kT \rightarrow k$), tako da prethodni izraz kompaktnije možemo prikazati kao:

$$\boxed{\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{E}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{F}(k)\mathbf{u}(k)} \tag{103}$$

Rješenje homogenih jednadžbi stanja

Razmotrimo prvo rješenje homogene jednadžbe stanja: $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{E}(k)\mathbf{x}(k)$. Iterativnom primjenom navedene jednadžbe dobivamo

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}(1) &= \mathbf{E}(0)\mathbf{x}(0), \\
\mathbf{x}(2) &= \mathbf{E}(1)\mathbf{x}(1) = \mathbf{E}(1)\mathbf{E}(0)\mathbf{x}(0), \\
\mathbf{x}(3) &= \mathbf{E}(2)\mathbf{x}(2) = \mathbf{E}(2)\mathbf{E}(1)\mathbf{E}(0)\mathbf{x}(0), \\
&\vdots \\
\mathbf{x}(k) &= \mathbf{E}(k-1)\mathbf{E}(k-2)\ldots\mathbf{E}(2T)\mathbf{E}(1)\mathbf{E}(0)\mathbf{x}(0), \qquad (104)
\end{aligned}
$$

odnosno

$$
\mathbf{x}(k) = \left(\prod_{j=0}^{k-1} \mathbf{E}(j)\right) \mathbf{x}(0) \qquad (105)
$$

Rješenje homogenih jednadžbi stanja

Ako označimo matricu prijelaza diskretnih vremenski-varijabilnih sustava sa

$$\mathbf{\Phi}(k,k_0) = \prod_{j=k_0}^{k-1} \mathbf{E}(j), \tag{106}$$

izraz (105) možemo prikazati na slijedeći način

$$\boxed{\mathbf{x}(k) = \mathbf{\Phi}(k,k_0)\mathbf{x}(k_0)} \tag{107}$$

Rješenje nehomogenih jednadžbi stanja

Rješenje nehomogenih jednadžbi stanji nači ćemo također primjenom iterativne procedure na $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{E}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{F}(k)\mathbf{u}(k)$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(1) &= \mathbf{E}(0)\mathbf{x}(0) + \mathbf{F}(0)\mathbf{u}(0),\\
\mathbf{x}(2) &= \mathbf{E}(1)\mathbf{x}(1) + \mathbf{F}(1)\mathbf{u}(1) = \mathbf{E}(1)\mathbf{E}(0)\mathbf{x}(0) + \mathbf{E}(1)\mathbf{F}(0)\mathbf{u}(0) + \mathbf{F}(1)\mathbf{u}(1),\\
\mathbf{x}(3) &= \mathbf{E}(2)\mathbf{x}(2) + \mathbf{F}(2)\mathbf{u}(2) =\\
&= \mathbf{\Phi}(3,0)\mathbf{x}(0) + \mathbf{\Phi}(3,1)\mathbf{F}(0)\mathbf{u}(0) + \mathbf{\Phi}(3,2)\mathbf{F}(1)\mathbf{u}(1) + \mathbf{\Phi}(3,3)\mathbf{F}(2)\mathbf{u}(2),\\
&\vdots
\end{aligned}$$

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{\Phi}(k,0)\mathbf{x}(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{\Phi}(k,j+1)\mathbf{F}(j)\mathbf{u}(j), \tag{108}$$

U slučaju početnog uvjeta u proizvoljnom trenutku k_0T, imamo:

$$\boxed{\mathbf{x}(k) = \mathbf{\Phi}(k,k_0)\mathbf{x}(k_0) + \sum_{j=k_0}^{k-1} \mathbf{\Phi}(k,j+1)\mathbf{F}(j)\mathbf{u}(j)} \tag{109}$$

Sadržaj

Karakteristična jednadžba matrice

Svojstvene vrijednosti matrice matrice $\mathbf{A}$ nalazimo rješavanjem jednadžbe

$$\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}, \tag{110}$$

odnosno

$$(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = 0. \tag{111}$$

Navedeni sustav jednadžbi ima netrivijalno rješenje jedino ako vrijedi

$$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0. \tag{112}$$

Karakteristična jednadžba matrice. Razvojem determinante (112) dobivamo polinom n-tog reda po λ koji zovemo *karakterističnom jednadžbom matrice* $\mathbf{A}$

$$p(\lambda) = \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0. \tag{113}$$

Rješavanjem jednadžbe $p(\lambda) = 0$ dobivamo n karakterističnih vrijednosti (korijena) $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Ako poznajemo korijene sustava, tada karakteristični polinom (113) možemo faktorizirati na slijedeći način

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n). \tag{114}$$

Cayley-Hamiltonov teorem

Svaka matrica $\mathbf{A}$ zadovoljava vlastitu karakterističnu jednadžbu:

$$p(\mathbf{A}) = \mathbf{0}, \tag{115}$$

gdje je karakteristični polinom $p(\lambda)$ definiran sa (113). □

Dokaz. Prikažimo karakteristični polinom $p(\lambda)$ u faktoriziranom obliku (114), te nađemo matrični polinom $p(\mathbf{A})$,

$$p(\mathbf{A}) = (\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I}) \cdots (\mathbf{A} - \lambda_n \mathbf{I}). \tag{116}$$

S obzirom da su $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ svojstvene vrijednosti matrice $\mathbf{A}$, na osnovu definicije (111) slijedi da je svaki član $(\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{I})$, $j = 1, \ldots, n$, jednak nuli, iz čega direktno slijedi Cayley-Hamiltonov teorem (115). □

Cayley-Hamiltonova metoda redukcije polinoma

Ako je $p(\mathbf{A})$ karakteristični polinom n-tog reda matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, a $f(\mathbf{A})$ matrični polinom k-tog reda $(k > n)$ kojeg trebamo reducirati, tada je $f(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A})$, gdje je $r(\lambda)$ ostatak dijeljenja polinoma $f(\lambda)$ i $p(\lambda)$. $\square$

Dokaz. Dijeljenje polinoma $f(\lambda)$ i $p(\lambda)$ možemo prikazati kao

$$\frac{f(\lambda)}{p(\lambda)} = q(\lambda) + \frac{r(\lambda)}{p(\lambda)}, \tag{117}$$

gdje je $q(\lambda)$ polinom reda $k-n$, a $r(\lambda)$ polinom reda $n-1$, odnosno

$$f(\lambda) = q(\lambda)p(\lambda) + r(\lambda). \tag{118}$$

Stoga matrični polinom $f(\mathbf{A})$ ima slijedeći oblik

$$f(\mathbf{A}) = q(\mathbf{A})p(\mathbf{A}) + r(\mathbf{A}). \tag{119}$$

Na osnovu Cayley-Hamiltonovog teorema, $p(\mathbf{A}) = 0$, dobivamo

$$f(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}), \quad \square \tag{120}$$

Cayley-Hamiltonova metoda redukcije polinoma

Na osnovu prethodnog teorema direktno slijedi da se svaki matrični polinom ili svaka matrična funkcija $f(\mathbf{A})$, u obliku beskonačnog reda potencija, može prikazati kao matrični polinom reda $n-1$,

$$\boxed{f(\mathbf{A}) = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j \mathbf{A}^j} \tag{121}$$

Izraz (121) je od fundamentalnog značaja, kako za izračunavanje matrične eksponencijalne funkcije, tako i za izvod uvjeta kontrolabilnosti kontinuiranih sustava.

Koeficijente polinoma (121), $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}$, možemo odrediti na temelju svojstvenih vrijednosti matrice $\mathbf{A}$.

Funkciju $f(\lambda)$ možemo primjenom (118) prikazati na slijedeći način

$$f(\lambda) = q(\lambda)p(\lambda) + \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j \lambda^j. \tag{122}$$

Cayley-Hamiltonova metoda redukcije polinoma

S obzirom da je karakteristični polinom $p(\lambda)$ jednak nuli za svojstvene vrijednosti, $p(\lambda_1) = 0, \dots, p(\lambda_n) = 0$, slijedi da je

$$f(\lambda_i) = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j \lambda_i^j, \qquad i = 1, 2, \dots, n. \tag{123}$$

Izraz (123) predstavlja sustav od n linearnih jednadžbi po koeficijentima $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$. Stoga navedeni sustav možemo prikazati u matričnom obliku

$$\begin{bmatrix} f(\lambda_1) \\ f(\lambda_2) \\ \vdots \\ f(\lambda_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \end{bmatrix}. \tag{124}$$

Matrica na desnoj strani prethodnog izraza naziva se Vandermondova matrica.

Primjena Cayley-Hamiltonovog teorema na računanje $e^{\mathbf{A}t}$

S obzirom da se svak matrična funkcija može reprezentirati matričnim polinomom reda $n-1$, gdje je n dimenzija kvadratne matrice $\mathbf{A}$, slijedi

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j(t)\mathbf{A}^j, \tag{125}$$

gdje su koeficijenti polinoma funkcije vremena t.
Koeficijente određujemo primjenom Vandermondove matrice,

$$\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0(t) \\ \alpha_1(t) \\ \vdots \\ \alpha_{n-1}(t) \end{bmatrix}. \tag{126}$$

Vektor koeficijenata $\alpha_0(t), \dots, \alpha_{n-1}(t)$, dobivamo množenjem prethodnog izraza s lijeve strane sa inverznom Vandermondovom matricom.

Sylvesterov teorem

Ako je $f(\mathbf{A})$ matrična funkcija i ako matrica $\mathbf{A}$ ima n različitih svojstvenih vrijednosti, tada matričnu funkciju $f(\mathbf{A})$ možemo prikazati na slijedeći način

$$f(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i) \prod_{j=1;\ j\neq i}^{n} \frac{\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{I}}{\lambda_i - \lambda_j}, \tag{127}$$

gdje su $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ svojstvene vrijednosti matrice $\mathbf{A}$. □

Izračunavanje matrične eksponencijalne funkcije $f(\mathbf{A}) = e^{\mathbf{A}t}$.
Na osnovu (127) imamo

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i t} \prod_{j=1;\ j\neq i}^{n} \frac{(\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{I})}{(\lambda_i - \lambda_j)}. \tag{128}$$

Primjenom Sylvesterovog teorema dobivamo također rješenje u zatvorenoj formi kao i kod primjene Cayley-Hamiltonovog teorema, ali je nužno poznavati svojstvene vrijednosti matrice $\mathbf{A}$.

Sadržaj

Transformacija varijabli stanja linearnih sustava

Linearna transformacija varijabli stanja ima slijedeći oblik

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{P}\mathbf{z}(t), \tag{129}$$

$\mathbf{P}$ - matrica transformacije,
$\mathbf{z}(t)$ - kanonski vektor stanja

Matrica transformacije $\mathbf{P}$ mora biti nesingularna da bi bila moguća obrnuta transformacija $\mathbf{z}(t) = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}(t)$.

S obzirom da vrijedi $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{P}\dot{\mathbf{z}}(t)$, uvrštavanjem transformacije (129) u jednadžbe stanja dobivamo

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{z}(t) + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(t), \qquad \mathbf{z}(t_0) = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}_0, \tag{130}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{z}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t). \tag{131}$$

Transformacija varijabli stanja linearnih sustava

Uvedemo li slijedeću notaciju

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}, \quad \hat{\mathbf{B}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}, \quad \hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{P}, \quad \hat{\mathbf{D}} = \mathbf{D}, \tag{132}$$

jednadžbe stanja (130)-(131) postaju

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{z}(t) + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t), \qquad \mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}_0, \tag{133}$$
$$\mathbf{y}(t) = \hat{\mathbf{C}}\mathbf{z}(t) + \hat{\mathbf{D}}\mathbf{u}(t). \tag{134}$$

- Transformacija $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ naziva se *transformacija sličnosti*
- Za matrice $\mathbf{A}$ i $\hat{\mathbf{A}}$ kažemo da su *slične matrice* (oznaka: $\mathbf{A} \sim \hat{\mathbf{A}}$)
- Transformacija sličnosti ne mjenja svojstvene vrijednosti matrica $\mathbf{A}$ i $\hat{\mathbf{A}}$
- Svojstvene vrijednosti matrice $\mathbf{A}$ invarijantne su na operaciju sličnosti $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$

Invarijantnost svojstvenih vrijednosti

Da bi matrice $\mathbf{A}$ i $\hat{\mathbf{A}}$ imale iste svojstvene vrijednosti, moraju imati iste karakteristične jednadžbe

$$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}). \tag{135}$$

Drugi član prethodnog izraza možemo prikazati kao

$$\det(\lambda\mathbf{P}^{-1}\mathbf{I}\mathbf{P} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}) = \det[\mathbf{P}^{-1}(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{P}]. \tag{136}$$

Primjenom svojstva determinanti: $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B})$, prethodni izraz postaje

$$\det\left(\mathbf{P}^{-1}\right)\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\det(\mathbf{P}) = \det\left(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}\right)\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \det(\mathbf{I})\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}).$$

S obzirom da je $\det(\mathbf{I}) = 1$, proizlazi jednakost (135), čime je dokaz završen. Invarijantnost svojstvenih vrijednosti znači da svojstva stabilnosti originalnog sustava ostaju nepromjenjena nakon transformacije varijabli stanja.

Modalna transformacija linearnih sustava

Varijabla stanja $\mathbf{z}(t)$ je *kanonska varijabla* ako transformirana matrica $\hat{\mathbf{A}}$ ima dijagonalni oblik

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{\Lambda} = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}, \tag{137}$$

gdje su $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ međusobno različite svojstvene vrijednosti matrice $\mathbf{A}$.

Modalna matrica predstavlja matricu transformacije varijabli stanja koja sustav ne-kanonske forme prevodi u kanonsku (dijagonalnu) formu (137).

Modalnu matricu dobivamo rješavanjem matrične jednadžbe

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{\Lambda}, \tag{138}$$

po matrici transformacije $\mathbf{P}$, gdje je $\mathbf{\Lambda} = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$.

Modalna transformacija linearnih sustava

Pomnožimo li $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{\Lambda}$ s matricom $\mathbf{P}$ s desne strane dobivamo

$$\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}. \tag{139}$$

Ako nadalje matricu $\mathbf{P}$ prikažemo na slijedeći način

$$\mathbf{P} = [\mathbf{p}_1 \;\; \mathbf{p}_2 \;\; \cdots \;\; \mathbf{p}_n] \tag{140}$$

gdje vektor $\mathbf{p}_k$ predstavlja k-ti stupac matrice $\mathbf{P}$, tada jednadžbu $\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}$ možemo prikazati na slijedeći način

$$\mathbf{A}\,[\mathbf{p}_1 \;\; \mathbf{p}_2 \;\; \cdots \;\; \mathbf{p}_n] = [\mathbf{p}_1 \;\; \mathbf{p}_2 \;\; \cdots \;\; \mathbf{p}_n]\,\mathrm{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}, \tag{141}$$

odnosno

$$[\mathbf{A}\mathbf{p}_1 \;\; \mathbf{A}\mathbf{p}_2 \;\; \cdots \;\; \mathbf{A}\mathbf{p}_n] = [\lambda_1\mathbf{p}_1 \;\; \lambda_2\mathbf{p}_2 \;\; \cdots \;\; \lambda_n\mathbf{p}_n]\,. \tag{142}$$

Modalna transformacija linearnih sustava

Matrična jednakost

$$[\mathbf{A}\mathbf{p}_1 \;\; \mathbf{A}\mathbf{p}_2 \;\; \cdots \;\; \mathbf{A}\mathbf{p}_n] = [\lambda_1\mathbf{p}_1 \;\; \lambda_2\mathbf{p}_2 \;\; \cdots \;\; \lambda_n\mathbf{p}_n]\,. \tag{143}$$

vrijedi ako je svaki stupac matrice na lijevoj strani jednakosti jednak odgovarajućem stupcu matrice na desnoj strani, odnosno

$$\mathbf{A}\mathbf{p}_i = \lambda_i\mathbf{p}_i, \qquad i = 1, \ldots, n \tag{144}$$

iz čega zaključujemo da se stupci matrice transformacije (modalne matrice) $\mathbf{P}$

$$\mathbf{P} = [\mathbf{p}_1 \;\; \mathbf{p}_2 \;\; \cdots \;\; \mathbf{p}_n] \tag{145}$$

sastoje od svojstvenih vektora matrice $\mathbf{A}$.

Rješenje kanonskog sustava

Kanonski sustav nakon modalne transformacije ima slijedeći oblik

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{\Lambda z}(t) + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{Bu}(t). \tag{146}$$

Rješenje ne-kanonskog sustava (3) je

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{Bu}(\tau)d\tau. \tag{147}$$

dok je rješenje kanonskog sustava (146)

$$\mathbf{z}(t) = e^{\mathbf{\Lambda}t}\mathbf{z}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{\Lambda}(t-\tau)}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{Bu}(\tau)d\tau. \tag{148}$$

Rješenje kanonskog sustava

S obzirom da je $\mathbf{\Lambda}$ dijagonalna matrica, $\mathbf{\Lambda} = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, bilo koja njena potencija također je dijagonalna matrica, $\mathbf{\Lambda}^k = \mathrm{diag}\{\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k\}$, tako da je:

$$e^{\mathbf{\Lambda} t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}. \tag{149}$$

Na osnovu navedenog rješenja možemo dobit rješenje ne-kanonskog sustava (3) primjenom transformacije $\mathbf{x}(t) = \mathbf{P}\mathbf{z}(t)$

$$\boxed{\mathbf{x}(t) = \mathbf{P}e^{\mathbf{\Lambda} t}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}(0) + \int_0^t \mathbf{P}e^{\mathbf{\Lambda}(t-\tau)}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau} \tag{150}$$

Usporedbom izraza (150) sa (147) dobivamo:

$$\boxed{e^{\mathbf{A} t} = \mathbf{P}e^{\mathbf{\Lambda} t}\mathbf{P}^{-1}} \tag{151}$$

Transformacija u kanonski oblik preko Vandermondove matrice

Transformacija SISO sustava u prostor stanja.
Ako želimo SISO sustav n-tog reda

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1\dot{y} + a_0 y = u, \tag{152}$$

prevesti u prostor stanja uvodimo slijedeće (tzv. fazne) varijable stanja:
$x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$, …, $x_n = y^{(n-1)}$.
Deriviranjem po vremenu navedenih varijabli stanja dobivamo slijedeći sustav od n diferencijalnih jednadžbi prvog reda

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2, \\
\dot{x}_2 &= x_3, \\
&\ldots \\
\dot{x}_k &= x_{k+1}, \\
&\ldots \\
\dot{x}_n &= -a_0x_1 - a_1x_2 - \ldots - a_{n-1}x_n + u.
\end{aligned}$$

Transformacija u kanonski oblik preko Vandermondove matrice

Uvedemo li vektor stanja $\mathbf{x} = [x_1 \;\; x_2 \;\; \cdots \;\; x_n]^T$ tada navedeni sustav diferencijalnih jednadžbi možemo prikazati u matričnom obliku

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \tag{153}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t), \tag{154}$$

gdje matrice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ i $\mathbf{D}$ imaju slijedeći oblik

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \tag{155}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}. \tag{156}$$

Matrica $\mathbf{A}$ iz (155) naziva se Frobeniusova matrica.

Transformacija u kanonski oblik preko Vandermondove matrice

Dijagonalizacija Frobeniusove matrice.
Dijagonalizacija Frobeniusove matrice $\mathbf{A}$, definirane sa (155), svodi se na riješavanje matrične jednadžbe $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{\Lambda}$ po matrici transformacije $\mathbf{P}$.
Pomnožimo li $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{\Lambda}$ sa $\mathbf{P}$ dobivamo $\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}$, odnosno

$$\mathbf{A}\begin{bmatrix}\mathbf{p}_1 & \cdots & \mathbf{p}_k & \cdots & \mathbf{p}_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{p}_1 & \cdots & \mathbf{p}_k & \cdots & \mathbf{p}_n\end{bmatrix}\mathrm{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \ldots, \lambda_n\},$$

gdje je $\mathbf{p}_k$ k-ti stupac matrice $\mathbf{P}$.
Prethodni izraz je zadovoljen ako je svaki stupac s lijeve strane jednakosti jednak odgovarajućem stupcu s desne strane jednakosti.
Izjednačimo li k-ti stupac s lijeve strane s k-tim stupcom s desne strane, dobivamo

$$\begin{bmatrix}p_{2k} & p_{3k} & \cdots & p_{nk} & -(a_0 p_{1k} + a_1 p_{2k} + \ldots + a_{n-1} p_{nk})\end{bmatrix}^T = \lambda_k \mathbf{p}_k. \qquad (157)$$

Izjednačimo li sada svaki element vektora na lijevoj strani s odgovarajućim elementom vektora na desnoj strani, dobivamo

Transformacija u kanonski oblik preko Vandermondove matrice

Izjednačimo li sada svaki element vektora na lijevoj strani s odgovarajućim elementom vektora na desnoj strani, dobivamo

$$
\begin{aligned}
p_{2k} &= \lambda_k p_{1k}, && (158)\\
p_{3k} &= \lambda_k p_{2k} = \lambda_k^2 p_{1k}, && (159)\\
&\vdots && (160)\\
p_{nk} &= \lambda_k^{n-1} p_{1k}, && (161)\\
-(a_0 p_{1k} + a_1 p_{2k} + \ldots + a_{n-1} p_{nk}) &= \lambda_k p_{nk} = \lambda_k^n p_{1k}. && (162)
\end{aligned}
$$

Sada na desnoj strani izraza (162), zamjenimo elemente $p_{2k}, p_{3k}, \ldots, p_{nk}$ sa izrazima (158)-(161), tako da dobijemo

$$\left(a_0 + a_1\lambda_k + a_2\lambda_k^2 + \ldots + a_{n-1}\lambda_k^{n-1} + \lambda_k^n\right) p_{1k} = 0. \tag{163}$$

Vidimo da izraz u zagradi predstavlja karakteristični polinom sustava (152), odnosno matrice $\mathbf{A}$ koji je jednak nuli za svojstvene vrijednosti λ_k, pri bilo kojoj vrijednost elementa p_{1k}.

Transformacija u kanonski oblik preko Vandermondove matrice

Na osnovu navedenog te izraza (158)-(161), zaključujemo da vektor $\mathbf{p}_k$ mora imati slijedeći oblik

$$\mathbf{p}_k = p_{1k} \begin{bmatrix} 1 & \lambda_k & \lambda_k^2 & \cdots & \lambda_k^{n-1} \end{bmatrix}^T, \qquad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{164}$$

Na kraju konačni oblik matrice transformacije $\mathbf{P}$ je

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \lambda_3^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \cdot \mathrm{diag}\{p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{1n}\}, \tag{165}$$

odnosno

$$\mathbf{P} = \mathbf{V} \cdot \mathrm{diag}\{p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{1n}\}, \tag{166}$$

gdje je $\mathbf{V}$ Vandermondova matrica.

Vektorski prostori. Rang matrice

Linearno nezavisni vektori. Za skup od m vektora $\mathbf{x}_i$, $(i = 1, \ldots, m)$, koji imaju n komponenti

$$\mathbf{x}_i = [x_{1i} \;\; x_{2i} \;\; \cdots \;\; x_{ni}]^T \tag{167}$$

kažemo da je *linearno nezavisan* ako ne postoji skup konstanti $k_1, k_2, \ldots, k_m$ (od kojih je barem jedan različit od nule) takav da

$$k_1\mathbf{x}_1 + k_2\mathbf{x}_2 + \cdots + k_m\mathbf{x}_m = \mathbf{0}. \tag{168}$$

- Ako postoje konstante $k_1, k_2, \ldots, k_m$ (od kojih je barem jedan različit od nule) takve da je izraz (168) zadovoljen, tada kažemo da su vektori $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m$ *linearno zavisni*.
- Vektori $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m$ mogu biti linearno nezavisni samo ako je broj vektora m manji ili jednak dimenziji vektorskog prostora n, odnosno $m \leq n$.

Vektorski prostori. Rang matrice

Rang matrice. Formirajmo matricu čiji su stupci jednaki vektorima $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m$,

$$\mathbf{H} = [\mathbf{x}_1 \;\; \mathbf{x}_2 \;\; \cdots \;\; \mathbf{x}_m] = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nm} \end{bmatrix} \tag{169}$$

gdje je $m \leq n$.

- Kažemo da matrica $\mathbf{H}$ ima rang r ako ima r linearno nezavisnih stupaca (odnosno vektora $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m$).
- Na ovaj način je ispitivanje linearne nazivisnosti vektora $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m$ ekvivalentno ispitivanju ranga matrice $\mathbf{H}$.
- Da bi skup vektora $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m$ bio linearno nezavisan, rang matrice $\mathbf{H}$ mora biti jednak m.

Vektorski prostori. Rang matrice

Gramian (Gramova determinanta). Da bi konkretno utvrdili linearnu (ne)zavisnost vektora $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m$, trebamo odrediti konstante $k_1, k_2, \ldots, k_m$. Navedene konstante možemo odrediti sukcesivnim množenjem jednadžbe (168) sa vektorima $\mathbf{x}_i^T$, $(i = 1, \ldots, m)$,

$$\begin{aligned}
&k_1\left(\mathbf{x}_1^T\mathbf{x}_1\right) + k_2\left(\mathbf{x}_1^T\mathbf{x}_2\right) + \cdots + k_m\left(\mathbf{x}_1^T\mathbf{x}_m\right) = 0,\\
&k_1\left(\mathbf{x}_2^T\mathbf{x}_1\right) + k_2\left(\mathbf{x}_2^T\mathbf{x}_2\right) + \cdots + k_m\left(\mathbf{x}_2^T\mathbf{x}_m\right) = 0,\\
&\vdots\\
&k_1\left(\mathbf{x}_m^T\mathbf{x}_1\right) + k_2\left(\mathbf{x}_m^T\mathbf{x}_2\right) + \cdots + k_m\left(\mathbf{x}_m^T\mathbf{x}_m\right) = 0.
\end{aligned} \tag{170}$$

Navedeni sustav homogenih linearnih jednadžbi možemo prikazati u matričnom obliku

$$\mathbf{Gk} = \mathbf{0}. \tag{171}$$

Vektorski prostori. Rang matrice

Navedeni sustav homogenih linearnih jednadžbi možemo prikazati u matričnom obliku $\mathbf{G}\mathbf{k} = \mathbf{0}$, gdje je
$\mathbf{k} = [k_1 \;\; k_2 \;\; \cdots \;\; k_m]^T$,
dok je

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} (\mathbf{x}_1^T \mathbf{x}_1) & (\mathbf{x}_1^T \mathbf{x}_2) & \cdots & (\mathbf{x}_1^T \mathbf{x}_m) \\ (\mathbf{x}_2^T \mathbf{x}_1) & (\mathbf{x}_2^T \mathbf{x}_2) & \cdots & (\mathbf{x}_2^T \mathbf{x}_m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\mathbf{x}_m^T \mathbf{x}_1) & (\mathbf{x}_m^T \mathbf{x}_2) & \cdots & (\mathbf{x}_m^T \mathbf{x}_m) \end{bmatrix}. \tag{172}$$

Sustav homogenih linearnih jednadžbi (171) ima netrivijalno riješenje za koeficijentima $k_1, k_2, \ldots, k_m$ jedino ako determinanta

$$G = \det(\mathbf{G}) = 0, \tag{173}$$

iščezava. Navedena determinanta naziva se *Gramian* ili *Gramova determinanta*.
Ako su vektori $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m$ linearno zavisni, tada je Gramian jednak nuli.

Baza vektorskog prostora

Ako imamo skup od n linearno nezavisnih vektora $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ unutar n-dimenzionalnog vektorskog prostora, tada te vektore možemo iskoristiti kao bazu tog vektorskog prostora.
Drugim riječima, svaki vektor $\mathbf{y}$ tog vektorskog prostora možemo na jedinstven način prikazati kao linearnu kombinaciju baznih vektora $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$,

$$\mathbf{y} = k_1\mathbf{x}_1 + k_2\mathbf{x}_2 + \cdots + k_n\mathbf{x}_n. \tag{174}$$

Stoga, dimenzija vektorskog prostora definirana je maksimalnim brojem linearno nezavisnih vektora unutar tog vektorskog prostora.

Recipročna baza vektorskog prostora

Ortonormirana baza vektorskog prostora. Ako n-dimenzionalni vektori $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$, osim linearne nezavisnosti zadovoljavaju svojstvo

$$\mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_j = \delta_{ij}, \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n, \tag{175}$$

gdje je δ_{ij} Kroneckerov delta simbol,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ako je} \quad i = j \\ 0 & \text{ako je} \quad i \neq j \end{cases} \tag{176}$$

kažemo da su vektori *ortonormirani* (ortogonalni i normirani).
Recipročna baza vektorskog prostora. Pretpostavimo da imamo bazu vektorskog prostora $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$. Skup linearno nezavisnih vektora $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_n$ nazivamo *recipročnom bazom* ako vrijedi

$$\mathbf{r}_i^T \mathbf{x}_j = \delta_{ij}, \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n. \tag{177}$$

U slučaju kada je baza $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ ortonormirana tada je recipročna baza jednaka originalnoj bazi, $\mathbf{r}_i = \mathbf{x}_i$.

Dekompozicija vektora po bazi vektorskog prostora

Slučaj 1: Ortonormirana baza. Ako je baza ortonormirana, tada sukcesivnim množenjem izraza (174) sa $\mathbf{x}_i^T$, $i = 1, \ldots, n$ dobivamo

$$k_i = \mathbf{x}_i^T \mathbf{y}. \tag{178}$$

Uvrstimo li (178) u (174) dobivamo slijedeću dekompoziciju vektora $\mathbf{y}$

$$\mathbf{y} = \left(\mathbf{x}_1^T \mathbf{y}\right) \mathbf{x}_1 + \left(\mathbf{x}_2^T \mathbf{y}\right) \mathbf{x}_2 + \cdots + \left(\mathbf{x}_n^T \mathbf{y}\right) \mathbf{x}_n = \sum_{i=1}^{n} \left(\mathbf{x}_i^T \mathbf{y}\right) \mathbf{x}_i. \tag{179}$$

Slučaj 2: Primjena recipročne baze. Ako baza $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ nije ortonormirana, tada sukcesivnim množenjem izraza (174) sa $\mathbf{r}_i^T$, $i = 1, \ldots, n$ dobivamo

$$k_i = \mathbf{r}_i^T \mathbf{y}. \tag{180}$$

Uvrstimo li (180) u (174) dobivamo slijedeću dekompoziciju vektora $\mathbf{y}$

$$\mathbf{y} = \left(\mathbf{r}_1^T \mathbf{y}\right) \mathbf{x}_1 + \left(\mathbf{r}_2^T \mathbf{y}\right) \mathbf{x}_2 + \cdots + \left(\mathbf{r}_n^T \mathbf{y}\right) \mathbf{x}_n = \sum_{i=1}^{n} \left(\mathbf{r}_i^T \mathbf{y}\right) \mathbf{x}_i. \tag{181}$$

Dekompozicija vektora po bazi vektorskog prostora

Slučaj 3: Primjena Gramove matrice. Ako baza $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ nije ortonormirana tada sukcesivnim množenjem izraza (174) sa $\mathbf{x}_i^T$, $i = 1, \ldots, n$ dobivamo

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{x}_1^T\mathbf{y}) \\ (\mathbf{x}_2^T\mathbf{y}) \\ \vdots \\ (\mathbf{x}_n^T\mathbf{y}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{x}_1^T\mathbf{x}_1) & (\mathbf{x}_1^T\mathbf{x}_2) & \cdots & (\mathbf{x}_1^T\mathbf{x}_n) \\ (\mathbf{x}_2^T\mathbf{x}_1) & (\mathbf{x}_2^T\mathbf{x}_2) & \cdots & (\mathbf{x}_2^T\mathbf{x}_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\mathbf{x}_n^T\mathbf{x}_1) & (\mathbf{x}_n^T\mathbf{x}_2) & \cdots & (\mathbf{x}_n^T\mathbf{x}_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix}. \tag{182}$$

- S obzirom da su vektori $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ linearno nezavisni, Gramova matrica $\mathbf{G}$ je nesingularna, što znači da ju možemo invertirati te nači vektor $\mathbf{k} = [k_1 \;\; k_2 \;\; \cdots \;\; k_n]^T$.

Modalna dekompozicija vektora stanja

- Pretpostavimo da matrica $\mathbf{A}$ ima različite svojstvene vrijednosti $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ s pripadajućim svojstvenim vektorima $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$.
- Pretpostavimo da su svojstveni vektori normalizirani, $\|\mathbf{u}_i\| = \sqrt{\mathbf{u}_i^T \mathbf{u}_i} = 1$.

Za linearni autonomni sustav

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \tag{183}$$

svojstveni vektori $\mathbf{u}_i$ definirani su sa

$$\mathbf{A}\mathbf{u}_i = \lambda_i \mathbf{u}_i, \qquad \mathbf{u}_i^T \mathbf{u}_i = 1, \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{184}$$

S obzirom da su korijeni različiti, svojstveni vektori su linearno nezavisni. Stoga $\mathbf{x}(t)$ možemo jedinstveno reprezentirati linearnom kombinacijom svojstvenih vektora

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(t) \mathbf{u}_i. \tag{185}$$

Modalna dekompozicija vektora stanja

Funkcije $\alpha_i(t)$ možemo odrediti tako da izraz (185) uvrstimo u (183)

$$\sum_{i=1}^{n} \dot{\alpha}_i(t)\mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(t)\mathbf{A}\mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(t)\lambda_i\mathbf{u}_i, \tag{186}$$

odnosno

$$\sum_{i=1}^{n} [\dot{\alpha}_i(t) - \lambda_i\alpha_i(t)]\mathbf{u}_i = 0, \tag{187}$$

što je zadovoljeno jedino ako vrijedi $\dot{\alpha}_i(t) = \lambda_i\alpha_i(t)$ za $i = 1, \ldots, n$, iz čega slijedi

$$\alpha_i(t) = c_i e^{\lambda_i t}, \qquad c_i = \alpha_i(0). \tag{188}$$

Uvrštavanjem (188) u (185) dobivamo slijedeću modalnu dekompoziciju vektora stanja

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{\lambda_i t}\mathbf{u}_i. \tag{189}$$

Modalna dekompozicija vektora stanja

Konstante c_i možemo odrediti korištenjem *recipročne baze* $\mathbf{r}_i$ definirane izrazima

$$\mathbf{r}_i^T \mathbf{u}_j = \delta_{ij}, \qquad (i, j = 1, \ldots, n). \tag{190}$$

gdje je δ_{ij} Kroneckerov delta simbol ($\delta_{ij} = 1$ ako je $i = j$; $\delta_{ij} = 0$ ako je $i \neq j$). Ako razvijemo (189) oko $t = 0$, dobivamo

$$\mathbf{x}(0) = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{u}_i. \tag{191}$$

Pomnožimo li prethodni izraz s lijeve strane recipročnim vektorima $\mathbf{r}_i^T$, dobivamo da je

$$c_i = \mathbf{r}_i^T \mathbf{x}(0). \tag{192}$$

Konačno, primjenom prethodnog izraza, modalnu dekompoziciju vektora stanja možemo prikazati kao

$$\boxed{\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} \left[\mathbf{r}_i^T \mathbf{x}(0)\right] e^{\lambda_i t} \mathbf{u}_i} \tag{193}$$

Modalna dekompozicija vektora stanja

$$\boxed{\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} \left[\mathbf{r}_i^T \mathbf{x}(0)\right] e^{\lambda_i t} \mathbf{u}_i} \tag{194}$$

- Skalarni produkt $\mathbf{r}_i^T \mathbf{x}(0)$ predstavlja jakost pobude i-tog moda sustava uvjetovan početnim uvjetima.
- Ako početni uvjeti leže duž i-tog svojstvenog vektora, tada je pobuđen samo i-ti mod sustava ...
- ... jer je $\mathbf{x}(0) = k\mathbf{u}_i$ te stoga $\mathbf{r}_i^T \mathbf{x}(0) = k\mathbf{r}_i^T \mathbf{u}_i = k$, gdje je k neki skalar.

Modalna dekompozicija vektora stanja - Linearni nehomogeni sustav

Za linearni neautonomni sustav

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \tag{195}$$

primjenit ćemo sličnu proceduru. Odredimo prvo modalnu dekompoziciju vektora $\mathbf{B}\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ preko svojstvenih, linearno nezavisnih, vektora $\mathbf{u}_i$

$$\mathbf{B}\mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i(t)\mathbf{u}_i, \tag{196}$$

gdje je $f_i(t) = \mathbf{r}_i^T \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$. Ako sada primjenimo rješenje nehomogenog linearnog vremenski varijabilnog sustava, dobivamo

$$\boxed{\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} \left[\mathbf{r}_i^T \mathbf{x}(0)\right] e^{\lambda_i t}\mathbf{u}_i + \int_0^t \sum_{i=1}^{n} \left[\mathbf{r}_i^T \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)\right] e^{\lambda_i (t-\tau)}\mathbf{u}_i d\tau} \tag{197}$$

Modalna dekompozicija vektora stanja - Linearni nehomogeni sustav

$$\boxed{\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} \left[\mathbf{r}_i^T \mathbf{x}(0)\right] e^{\lambda_i t} \mathbf{u}_i + \int_0^t \sum_{i=1}^{n} \left[\mathbf{r}_i^T \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)\right] e^{\lambda_i (t-\tau)} \mathbf{u}_i d\tau} \qquad (198)$$

- Možemo identificirati utjecaj upravljačkog vektora na svaki mod sustava posebno.
- Jakost pobude i-tog moda sustava u ovisnosti o upravljačkom vektoru određen je sa

$$\int_0^t \left[\mathbf{r}_i^T \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)\right] e^{-\lambda_i \tau} d\tau. \qquad (199)$$

- Ako je upravljački vektor $\mathbf{u}(t)$ izabran tako da $\mathbf{B}\mathbf{u}(t)$ leži duž svojstvenog vektora $\mathbf{u}_i$, tada je pobuđen jedino i-ti mod sustava.
- Izraz (198) bitan je također kod modalne interpretacije kontrolabilnosti linearnih sustava.

Određivanje recipročne baze

- Modalna dekompozicija vektora stanja ovisi o određivanju svojstvenih vektora $\mathbf{u}_j$ kao i vektora recipročne baze $\mathbf{r}_i$, koji su međusobno povezani izrazima $\mathbf{r}_i^T \mathbf{u}_j = \delta_{ij}$.
- Modalna matrica $\mathbf{P}$ koja dijagonalizira matricu sustava $\mathbf{A}$ sadrži stupce koji predstavljaju svojstvene vektore matrice $\mathbf{A}$

$$\mathbf{P} = [\mathbf{u}_1 \ \ \mathbf{u}_2 \ \ \cdots \ \ \mathbf{u}_n] \,. \tag{200}$$

- Matrica $\mathbf{P}$ je nesingularna (jer su vektori $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ linearno nezavisni), te postoji njena inverzna matrica $\mathbf{R} = \mathbf{P}^{-1}$:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1^T \\ \mathbf{r}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{r}_n^T \end{bmatrix} , \tag{201}$$

gdje su $\mathbf{r}_1^T, \dots, \mathbf{r}_n^T$ vektori-retci matrice $\mathbf{R}$.

Određivanje recipročne baze

S obzirom da vrijedi

$$\mathbf{RP} = \mathbf{I}, \tag{202}$$

odnosno

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}_1^T \\ \mathbf{r}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{r}_n^T \end{bmatrix} [\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{u}_n] = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1^T\mathbf{u}_1 & \mathbf{r}_1^T\mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{r}_1^T\mathbf{u}_n \\ \mathbf{r}_2^T\mathbf{u}_1 & \mathbf{r}_2^T\mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{r}_2^T\mathbf{u}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{r}_n^T\mathbf{u}_1 & \mathbf{r}_n^T\mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{r}_n^T\mathbf{u}_n \end{bmatrix} = \mathbf{I}.$$

Usporedbom matrice dobivene vanjskim produktom (*outer product*; *dyadic produkt*) dva vektora sa jediničnom matricom slijedi da mora biti zadovoljeno

$$\mathbf{r}_i^T\mathbf{u}_j = \delta_{ij}, \qquad (i, j = 1, \ldots, n). \tag{203}$$

Usporedbom definicije recipročne baze (190) sa dobivenim uvjetom (203) zaključujemo da su *vektori recipročne baze jednaki (transponiranim) retcima inverzne modalne matrice*.

Dekompozicija vektora stanja primjenom kanonskog rješenja

Rješenje autonomnog linearnog sustava možemo dobiti primjenom modalne transformacije

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{P}e^{\mathbf{\Lambda}t}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}(0). \tag{204}$$

S obzirom da vrijedi,

$$\mathbf{P} = [\mathbf{u}_1 \;\; \mathbf{u}_2 \;\; \cdots \;\; \mathbf{u}_n], \qquad \mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1^T \\ \mathbf{r}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{r}_n^T \end{bmatrix}, \tag{205}$$

imamo

$$\mathbf{P}e^{\mathbf{\Lambda}t} = \left[e^{\lambda_1 t}\mathbf{u}_1 \;\; e^{\lambda_2 t}\mathbf{u}_2 \;\; \cdots \;\; e^{\lambda_n t}\mathbf{u}_n\right], \qquad \mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} \left[\mathbf{r}_1^T\mathbf{x}(0)\right] \\ \left[\mathbf{r}_2^T\mathbf{x}(0)\right] \\ \vdots \\ \left[\mathbf{r}_n^T\mathbf{x}(0)\right] \end{bmatrix}. \tag{206}$$

Dekompozicija vektora stanja primjenom kanonskog rješenja

Uvrstimo li (206) u $\mathbf{x}(t) = \mathbf{P}e^{\mathbf{\Lambda}t}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}(0)$, na kraju dobivamo

$$\mathbf{x}(t) = \left[e^{\lambda_1 t}\mathbf{u}_1 \;\; e^{\lambda_2 t}\mathbf{u}_2 \;\; \cdots \;\; e^{\lambda_n t}\mathbf{u}_n\right] \begin{bmatrix} \left[\mathbf{r}_1^T\mathbf{x}(0)\right] \\ \left[\mathbf{r}_2^T\mathbf{x}(0)\right] \\ \vdots \\ \left[\mathbf{r}_n^T\mathbf{x}(0)\right] \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n}\left[\mathbf{r}_i^T\mathbf{x}(0)\right]e^{\lambda_i t}\mathbf{u}_i. \tag{207}$$

Usporedimo li izraz (207) sa dekompozicijom (189) vidimo da smo dobili identičan izraz.

Spektralna reprezentacija matrice $\mathbf{A}$

Slično kao (202), vrijedi

$$\mathbf{P}\mathbf{R} = \mathbf{I}, \tag{208}$$

odnosno

$$[\mathbf{u}_1 \;\; \mathbf{u}_2 \;\; \cdots \;\; \mathbf{u}_n] \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1^T \\ \mathbf{r}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{r}_n^T \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \left(\mathbf{u}_i \mathbf{r}_i^T\right) = \mathbf{I}, \tag{209}$$

gdje je $\mathbf{u}_i \mathbf{r}_i^T$ vanjski produkt (*outer product*) vektora.
Pomnožimo li prethodni izraz s matricom $\mathbf{A}$ dobivamo

$$\boxed{\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(\mathbf{u}_i \mathbf{r}_i^T\right)} \tag{210}$$

gdje smo primjenili $\mathbf{A}\mathbf{u}_i = \lambda_i \mathbf{u}_i$.
Jednadžba (210) predstavlja spektralnu reprezentaciju matrice $\mathbf{A}$.

Sadržaj

Definicija kontrolabilnosti (upravljivosti)

Potpuna kontrolabilnost stanja.

Sustav je potpuno kontrolabilan po stanjima, u zatvorenom vremenskom intervalu $[t_0, t_1]$, ako je moguće za zadani t_0 i t_1, svako početno stanje $\mathbf{x}(t_0)$ prevesti u svako željeno konačno stanje $\mathbf{x}(t_1)$ preko vektora upravljanja $\mathbf{u}(t)$ u konačnom vremenskom intervalu $t_0 \leq t \leq t_1 \leq \infty$.

Pri tome se pretpostavlja da na vektor upravljanja nisu nametnuta nikakva dodatna ograničenja.

Termin 'potpuna' znači da su sva stanja (svaka komponenta vektora stanja) upravljiva.

Definicija kontrolabilnosti (upravljivosti)

Potpuna kontrolabilnost izlaza.

Sustav je potpuno kontrolabilan po izlazima, u zatvorenom vremenskom intervalu $[t_0, t_1]$, ako je moguće za zadani t_0 i t_1, svaki početni izlaz sustava $\mathbf{y}(t_0)$ prevesti u svako željeni konačni izlaz $\mathbf{y}(t_1)$ preko (neograničenog) vektora upravljanja $\mathbf{u}(t)$ u konačnom vremenskom intervalu $t_0 \leq t \leq t_1 \leq \infty$.

Termin 'potpuna' znači da je svaka komponenta vektora izlaza upravljiva.

Potpuna kontrolabilnost diskretnih sustava

Razmatramo linearni diskretni vremenski-invarijantni sustav

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{E}\mathbf{x}(k) + \mathbf{F}\mathbf{u}(k), \tag{211}$$

čije rješenje je dano slijedećim izrazom

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{E}^k\mathbf{x}(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{E}^{k-j-1}\mathbf{F}\mathbf{u}(j). \tag{212}$$

Ako je sustav potpuno kontrolabilan, tada ga je moguće prevesti iz proizvoljnog početnog stanja $\mathbf{x}(0)$ u proizvoljno konačno stanje $\mathbf{x}(k)$. Drugim riječima, ako je sustav potpuno kontrolabilan, tada postoji skup upravljačkih vektora $\mathbf{u}(0), \mathbf{u}(1), \mathbf{u}(2), \ldots, \mathbf{u}(k-1)$ koji će zadovoljiti uvijet

$$\mathbf{x}(k) - \mathbf{E}^k\mathbf{x}(0) = \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{E}^{k-j-1}\mathbf{F}\mathbf{u}(j). \tag{213}$$

Potpuna kontrolabilnost diskretnih sustava

Nadalje, na osnovu svojstava matričnog množenja vrijedi slijedeći izraz

$$\mathbf{F}\mathbf{u}(j) = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{f}_i u_i(j), \tag{214}$$

gdje je $\mathbf{f}_i$ i-ti stupac matrice $\mathbf{F}$, a $u_i(j)$ je i-ta komponenta vektora upravljanja u j-tom diskretnom vremenskom trenutku. Uvrstimo li (214) u (213) dobivamo

$$\mathbf{x}(k) - \mathbf{E}^k \mathbf{x}(0) = \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=1}^{m} \mathbf{E}^{k-j-1} \mathbf{f}_i u_i(j). \tag{215}$$

Ako u prethodnom izrazu razvijemo sumu po diskretnim vremenskim trenucima, dobivamo

$$\mathbf{x}(k) - \mathbf{E}^k \mathbf{x}(0) = \sum_{i=1}^{m} \left[u_i(0)\mathbf{E}^{k-1}\mathbf{f}_i + \ldots + u_i(k-2)\mathbf{E}\mathbf{f}_i + u_i(k-1)\mathbf{f}_i \right].$$

- na lijevoj strani dobivenog izraza imamo n-dimenzionalni vektor $\mathbf{x}(k) - \mathbf{E}^k\mathbf{x}(0)$ koji može biti proizvoljan
- na desnoj strani imamo linearnu kombinaciju n-dimenzionalnih vektora $\mathbf{E}^{k-1}\mathbf{f}_i, \mathbf{E}^{k-2}\mathbf{f}_i, \ldots, \mathbf{E}\mathbf{f}_i, \mathbf{f}_i$, za $i = 1, 2, \ldots, m$.
- koeficijenti te linearne kombinacije su komponente upravljačkog vektora u diskretnim vremenskim trenucima, $u_i(0)$, $u_i(1)$, …, $u_i(k-2)$, $u_i(k-1)$
- da bi proizvoljni vektor $\mathbf{x}(k) - \mathbf{E}^k\mathbf{x}(0)$ mogao biti prikazan preko linearne kombinacije od $m \cdot k$ vektora $\mathbf{E}^{k-1}\mathbf{f}_i, \mathbf{E}^{k-2}\mathbf{f}_i, \ldots, \mathbf{E}\mathbf{f}_i, \mathbf{f}_i$, mora n vektora biti linearno nezavisno
- tih n linearno-nezavisnih vektora čini bazu n-dimenzionalnog vektorskog prostora, što znači da je svaki proizvoljni vektor moguće prikazati kao linearnu kombinaciju baznih vektora
- s obzirom da su koeficijenti te linearne kombinacije komponente vektora upravljanja, slijedi da je takav sustav potpuno kontrolabilan po stanjima

Kriterij kontrolabilnosti diskretnih sustava

Linearnu nezavisnost vektora $\mathbf{E}^{k-1}\mathbf{f}_i, \mathbf{E}^{k-2}\mathbf{f}_i, \ldots, \mathbf{E}\mathbf{f}_i, \mathbf{f}_i$, za $i = 1, 2, \ldots, m$, možemo ispitati preko ranga matrice čiji stupci su formirani od navedenih vektora.

S obzirom da m stupaca $\mathbf{E}^j\mathbf{f}_i$, za $i = 1, 2, \ldots, m$ i $j = 0, 1, \ldots, k-1$, možemo prikazati matricom $\mathbf{E}^j\mathbf{F}$, slijedi uvijet linearne nezavisnosti vektora

$$\boxed{\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\mathbf{E}^{k-1}\mathbf{F} & \mathbf{E}^{k-2}\mathbf{F} & \cdots & \mathbf{E}^2\mathbf{F} & \mathbf{E}\mathbf{F} & \mathbf{F}\end{bmatrix} = n} \tag{216}$$

što je ujedno i uvijet potpune kontrolabilnosti po stanjima linearnih diskretnih sustava.

Matrica u (216) je dimenzije $n \times mk$.

Kriterij kontrolabilnosti diskretnih sustava

Na osnovu Cayley-Hamiltonovog teorema (121) slijedi da je svaku potenciju matrice $\mathbf{E}^j$, za $j > n$ moguće prikazati kao matrični polinom po $\mathbf{E}$ reda $n-1$,

$$\mathbf{E}^j = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \mathbf{E}^i, \qquad j > n. \tag{217}$$

Nema smisla računati matrice $\mathbf{E}^j\mathbf{F}$, za potencije $j > n$, jer se mogu izraziti kao linearna kombinacija matrica $\mathbf{E}^j\mathbf{F}$, za $j < n$, a to znači da nemaju utjecaja na rang matrice u izrazu (216).

Stoga uvjet kontrolabilnosti (216) možemo reducirati na

$$\boxed{\mathrm{rank}\begin{bmatrix}\mathbf{E}^{n-1}\mathbf{F} & \mathbf{E}^{n-2}\mathbf{F} & \cdots & \mathbf{E}^2\mathbf{F} & \mathbf{E}\mathbf{F} & \mathbf{F}\end{bmatrix} = n} \tag{218}$$

Kontrolabilnost diskretnih sustava s jednim ulazom

Linearni diskretni sustav s jednim upravljačkim signalom:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{E}\mathbf{x}(k) + \mathbf{f}u(k), \tag{219}$$

gdje je $u(k)$ skalarna upravljačka varijabla u k-tom diskretnom vremenskom trenutku a $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ je konstantna matrica (vektor) ulaza.

Rješenje sustava (219) je

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{E}^k\mathbf{x}(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{E}^{k-j-1}\mathbf{f}u(j). \tag{220}$$

Razmotrimo problem određivanja upravljačke varijable koja će sustav prebaciti iz proizvoljnog početnog stanja $\mathbf{x}(0)$ u proizvoljno konačno stanje $\mathbf{x}(n)$ (gdje je n dimenzija vektora stanja).

Kontrolabilnost diskretnih sustava s jednim ulazom

Drugim riječima trebamo odrediti upravljačku varijablu u prvih n diskretnih vremenskih trenutaka, $u(0), u(1), u(2), \ldots, u(n-1)$, tako da bude:

$$\mathbf{x}(n) - \mathbf{E}^n \mathbf{x}(0) = \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{E}^{n-j-1} \mathbf{f} u(j). \tag{221}$$

Desnu stranu prethodnog izraza možemo prikazati kao umnožak dvije matrice

$$\mathbf{x}(n) - \mathbf{E}^n \mathbf{x}(0) = \mathbf{S}\mathbf{w}, \tag{222}$$

gdje smo označili

$$\mathbf{S} = \left[\mathbf{E}^{n-1}\mathbf{f} \quad \mathbf{E}^{n-2}\mathbf{f} \quad \cdots \quad \mathbf{E}^2\mathbf{f} \quad \mathbf{E}\mathbf{f} \quad \mathbf{f} \right], \qquad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ \vdots \\ u(n-2) \\ u(n-1) \end{bmatrix}. \tag{223}$$

Kontrolabilnost diskretnih sustava s jednim ulazom

Matrica $\mathbf{S}$ je $n \times n$ kvadratna matrica. Vektor $\mathbf{w}$ možemo dobiti invertiranjem matrice $\mathbf{S}$, odnosno

$$\mathbf{w} = \mathbf{S}^{-1}[\mathbf{x}(n) - \mathbf{E}^n\mathbf{x}(0)]. \tag{224}$$

Da bi inverzija matrice bila moguća nužno je da matrica $\mathbf{S}$ bude nesingularna.

Nužan uvjet da kvadratna matrica $\mathbf{S}$ bude nesingularna je da rang matrice bude jednak broju stupaca odnosno redaka matrice, $\mathrm{rank}\,\mathbf{S} = n$, odnosno

$$\boxed{\mathrm{rank}\begin{bmatrix}\mathbf{E}^{n-1}\mathbf{f} & \mathbf{E}^{n-2}\mathbf{f} & \cdots & \mathbf{E}^2\mathbf{f} & \mathbf{E}\mathbf{f} & \mathbf{f}\end{bmatrix} = n} \tag{225}$$

Na osnovu izraza (224) moguće je jednoznačno odrediti upravljačku varijablu, odnosno $u(0), u(1), u(2), \ldots, u(n-1)$.

Kontrolabilnost kontinuiranih sustava

Razmotrimo sada problem kontrolabilnosti linearnih kontinuiranih vremenski-invarijantnih sustava reprezentiranih jednadžbama stanja

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t). \tag{226}$$

Rješavanjem matrične diferencijalne jednadžbe (226) možemo odrediti vektor stanja u vremenskom trenutku t_1

$$\mathbf{x}(t_1) = e^{\mathbf{A}t_1}\mathbf{x}(0) + \int_0^{t_1} e^{\mathbf{A}(t_1-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau. \tag{227}$$

Množenjem prethodnog izraza s $e^{-\mathbf{A}t_1}$ te prebacivanjem $\mathbf{x}(0)$ na lijevu stranu dobivamo

$$e^{-\mathbf{A}t_1}\mathbf{x}(t_1) - \mathbf{x}(0) = \int_0^{t_1} e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau. \tag{228}$$

Kontrolabilnost kontinuiranih sustava

Na osnovu Cayley-Hamiltonovog teorema slijedi da matričnu funkciju $e^{-\mathbf{A}\tau}$ možemo razviti u polinom reda $n-1$ po matrici $\mathbf{A}$,

$$e^{-\mathbf{A}\tau} = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j(\tau)\mathbf{A}^j. \tag{229}$$

Nadalje, $\mathbf{Bu}(t)$ možemo dekomponirati na slijedeći način

$$\mathbf{Bu}(\tau) = \sum_{k=1}^{m} \mathbf{b}_k u_k(\tau), \tag{230}$$

gdje $\mathbf{b}_k$ predstavlja k-ti stupac matrice $\mathbf{B}$. Uvrštavanjem (230) i (229) u (228), dobivamo

$$e^{-\mathbf{A}t_1}\mathbf{x}(t_1) - \mathbf{x}(0) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{A}^j\mathbf{b}_k \int_0^{t_1} \alpha_j(\tau)u_k(\tau)d\tau. \tag{231}$$

Kriterij kontrolabilnosti kontinuiranih sustava

Označimo li integral na desnoj strani sa

$$v_{jk} = \int_0^{t_1} \alpha_j(\tau) u_k(\tau) d\tau, \tag{232}$$

izraz (231) postaje

$$e^{-\mathbf{A}t_1}\mathbf{x}(t_1) - \mathbf{x}(0) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=0}^{n-1} v_{jk} \mathbf{A}^j \mathbf{b}_k. \tag{233}$$

Dobiveni izraz možemo interpretirati kao dekompoziciju proizvoljnog n-dimenzionalnog vektora $e^{-\mathbf{A}t_1}\mathbf{x}(t_1) - \mathbf{x}(0)$ po vektorima $\mathbf{A}^j\mathbf{b}_k$.

Da bi navedena dekompozicija bila moguća, od nm vektora $\mathbf{A}^j\mathbf{b}_k$, njih n mora biti linearno nezavisno, odnosno imamo uvjet kontrolabilnosti

$$\boxed{\mathrm{rank}\begin{bmatrix}\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} & \mathbf{A}^{n-2}\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \mathbf{A}\mathbf{B} & \mathbf{B}\end{bmatrix} = n} \tag{234}$$

Kontrolabilnost kontinuiranih sustava s jednim ulazom

Linearni kontinuirani sustav s jednim ulazom:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t), \tag{235}$$

gdje je $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ matrica (vektor) ulaza sustava, a $u(t)$ je skalarna upravljačka varijabla. Rješenje sustava (235) je

$$\mathbf{x}(t_1) = e^{\mathbf{A}t_1}\mathbf{x}(0) + \int_0^{t_1} e^{\mathbf{A}(t_1-\tau)}\mathbf{b}u(\tau)d\tau. \tag{236}$$

Slijedeći sličnu proceduru kao u slučaju s više ulaza, dobivamo ekvivalentni izraz jednadžbi (233)

$$e^{-\mathbf{A}t_1}\mathbf{x}(t_1) - \mathbf{x}(0) = \sum_{j=0}^{n-1} v_j \mathbf{A}^j \mathbf{b}, \tag{237}$$

gdje je

$$v_j = \int_0^{t_1} \alpha_j(\tau)u(\tau)d\tau. \tag{238}$$

Kontrolabilnost kontinuiranih sustava s jednim ulazom

Desnu stranu izraza (237) možemo prikazati kao matrični produkt

$$e^{-\mathbf{A}t_1}\mathbf{x}(t_1) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{S}\mathbf{v}, \tag{239}$$

gdje smo označili

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b} & \mathbf{A}^{n-2}\mathbf{b} & \cdots & \mathbf{A}^{2}\mathbf{b} & \mathbf{A}\mathbf{b} & \mathbf{b} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_{n-1} \\ v_{n-2} \\ \vdots \\ v_1 \\ v_0 \end{bmatrix}. \tag{240}$$

Da bi mogli riješiti matričnu jednadžbu (239), $n \times n$ kvadratna matrica $\mathbf{S}$ mora biti invertibilna, odnosno nesingularna, što izražavamo uvjetom

$$\boxed{\mathrm{rank}\begin{bmatrix} \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b} & \mathbf{A}^{n-2}\mathbf{b} & \cdots & \mathbf{A}^{2}\mathbf{b} & \mathbf{A}\mathbf{b} & \mathbf{b} \end{bmatrix} = n} \tag{241}$$

Kontrolabilnost kontinuiranih sustava s jednim ulazom

Ako je matrica $\mathbf{S}$ nesingularna, odnosno vrijedi uvjet (241), tada vektor koeficijenata $\mathbf{v}$ možemo odrediti jednoznačno:

$$\mathbf{v} = \mathbf{S}^{-1}\left(e^{-\mathbf{A}t_1}\mathbf{x}(t_1) - \mathbf{x}(0)\right). \tag{242}$$

Na osnovu poznavanja n komponenti vektora $\mathbf{v}$ $(v_0, v_1, \ldots, v_{n-1})$ imamo n integralnih jednadžbi (238) koje simultano treba zadovoljiti jedna upravljačka varijabla $u(t)$ u vremenskom intervalu $0 < t < t_1$.

Može se pokazati da postoji beskonačno mnogo upravljačkih funkcija $u(t)$ koje simultano zadovoljavaju konačan broj integralnih jednadžbi tipa (238).

Ovdje ćemo samo skicirati 'dokaz':

Kontrolabilnost kontinuiranih sustava s jednim ulazom

Diskretizirajmo po vremenu jednadžbu (238), gdje smo za korak integracije uzeli $T = t_1/n$, tako da je $\tau_i = iT$

$$v_j = T \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_j(iT)u(iT). \tag{243}$$

Dobiveni sustav jednadžbi možemo prikazati u matričnom obliku

$$\begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_{n-1} \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} \alpha_0(0) & \alpha_0(T) & \cdots & \alpha_0((n-1)T) \\ \alpha_1(0) & \alpha_1(T) & \cdots & \alpha_1((n-1)T) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \alpha_{n-1}(0) & \alpha_{n-1}(T) & \cdots & \alpha_{n-1}((n-1)T) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(0) \\ u(T) \\ \vdots \\ u((n-1)T) \end{bmatrix}$$

S obzirom da je kvadratna matrica na desnoj strani nesingularna (u slučaju različitih svojstvenih vrijednosti matrice $\mathbf{A}$), možemo ju invertirati i naći upravljačku varijablu u diskretnim vremenskim trenucima, $u(0), u(T), u(2T), \ldots, u((n-1)T)$ kao funkciju koeficijenata $v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}$

Kontrolabilnost kontinuiranih sustava s jednim ulazom

- numerički smo odredili upravljačku varijablu $u(t)$, u diskretnim vremenskim intervalima, koja simultano zadovoljava diskretiziranu verziju n integralnih jednadžbi (238)
- ako korak diskretizacije T smanjujemo, odnosno povećavamo broj diskretnih intervala, sustav jednadžbi (243) postaje predefiniran po upravljačkoj varijabli $u(0), u(T)$, $u(2T), \ldots, u(kT)$, gdje je $k > n$, što znači da postoji beskonačno mnogo rješenja navedene jednadžbe
- u slučaju kada je zadovoljen uvjet kontrolabilnosti (241) tada uvijek postoje upravljački vektori koji će (preko izraza (238) i (237)) sustav prebaciti iz proizvoljnog početnog stanja u proizvoljno konačno stanje

Uvjet potpune kontrolabilnosti izlaza

Ako je izlaz sustava definiran izrazom

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$$

, tada množenjem izraza (233) s matricom $\mathbf{C}$ te ponavljanjem analogne procedure kao u slučaju uvjeta potpune kontrolabilnosti stanja, dobivamo slijedeći uvjet potpune kontrolabilnosti izlaza sustava

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} & \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-2}\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{C}\mathbf{A}^{2}\mathbf{B} & \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{B} & \mathbf{C}\mathbf{B}\end{bmatrix} = p. \tag{244}$$

Također, *potpuna kontrolabilnost izlaza* biti će zadovoljena ukoliko je zadovoljena *potpuna kontrolabilnost stanja* (234) i uvjet: $\operatorname{rank} \mathbf{C} = p$.

Primjena Gramove matrice

Označimo li sa

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} & \mathbf{A}^{n-2}\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{A}^{2}\mathbf{B} & \mathbf{A}\mathbf{B} & \mathbf{B} \end{bmatrix}, \tag{245}$$

gdje je $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n \times nm}$, tada kriterij (234) postaje

$$\operatorname{rank} \mathbf{M} = n. \tag{246}$$

- **Gramova matrica** $\mathbf{G}$ definirana je za neku matricu $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ sa $\mathbf{G} = \mathbf{K}\mathbf{K}^T$.
- Važnost Gramove matrice proizlazi iz činjenice da je $\mathbf{G}$ *nesingularna ako i samo ako je* $\operatorname{rank} \mathbf{K} = n$.
- Ako za matricu $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n \times nm}$ formiramo Gramovu matricu $\mathbf{G} = \mathbf{M}\mathbf{M}^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tada je uvjet kontrolabilnosti (246) ekvivalentan zahtijevu da matrica $\mathbf{G}$ bude nesingularna, odnosno $\det(\mathbf{G}) \neq \mathbf{0}$.

Modalna interpretacija kontrolabilnosti primjenom dekompozicije vektora stanja

Primjenimo li izraz za modalnu dekompoziciju vektora stanja (197) u kombinaciji sa izrazom za dekompoziciju vektora $\mathbf{Bu}(\tau)$, (230), dobivamo

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} \left[\mathbf{r}_i^T \mathbf{x}(0)\right] e^{\lambda_i t}\mathbf{u}_i + \int_0^t \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \left[\mathbf{r}_i^T \mathbf{b}_k\right] u_k(\tau) e^{\lambda_i (t-\tau)}\mathbf{u}_i d\tau. \tag{247}$$

gdje je $u_k(\tau)$ k-ta komponenta upravljačkog vektora $\mathbf{u}(\tau)$, dok je $\mathbf{u}_i$ svojstveni vektor matrice $\mathbf{A}$.

Ako za i-ti mod skalarni produkt $\mathbf{r}_i^T \mathbf{b}_k$ zadovoljava

$$\mathbf{r}_i^T \mathbf{b}_k = 0, \quad \text{za } \forall\, k = 1, 2, \ldots, m, \tag{248}$$

to znači da upravljačke varijable $u_1(\tau), u_2(\tau), \ldots, u_m(\tau)$ nemaju nikakvog utjecaja na i-ti mod sustava i da nema načina da upravljačkim varijablama kontroliramo taj mod gibanja.

Stoga, u modalnoj interpretaciji, uvjet potpune kontrolabilnosti je da skalarni produkt $\mathbf{r}_i^T \mathbf{b}_k$ ne iščezava za sve $k = 1, 2, \ldots, m$.

Modalna interpretacija primjenom kanonskih jednadžbi stanja

Kanonske jednadžbe stanja, nakon primjene modalne transformacije, imaju slijedeći oblik

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{\Lambda}\mathbf{z}(t) + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t), \tag{249}$$

gdje je $\mathbf{P}$ je modalna matrica transformacije,

$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$,

$\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}$,

S obzirom da nema sprege između kanonskih varijabli stanja, možemo odmah zaključiti da je nužan uvjet kontrolabilnosti da matrica $\hat{\mathbf{B}}$ ne smije imati nul-retke.

Ako bi i-ti redak matrice $\hat{\mathbf{B}}$ bio nul-redak, tada bi i-ti redak matrične diferencijalne jednadžbe (249) imao oblik: $\dot{z}_i = \lambda_i z_i$.

Drugim riječima, i-ti mod bio bi potpuno neupravljiv.

Modalna interpretacija primjenom kanonskih jednadžbi stanja

Ako primjenimo notaciju (205) te dekompoziciju (230), matričnu diferencijalnu jednadžbu (249) možemo raspisati po komponentama

$$\dot{z}_i = \lambda_i z_i + \sum_{k=1}^{m} \left[\mathbf{r}_i^T \mathbf{b}_k\right] u_k(t), \tag{250}$$

iz čega slijedi uvjet potpune kontrolabilnosti:
skalarni produkt $\mathbf{r}_i^T \mathbf{b}_k$ ne smije iščezavati za sve $k = 1, 2, \ldots, m$.

Drugim riječima, mora biti zadovoljeno: $\mathbf{r}_i^T \mathbf{b}_k \neq 0$ za barem jedan $k = 1, 2, \ldots, m$.

Uvjet kontrolabilnosti u kompleksnoj domeni

U kompleksnoj domeni veza između vektora stanja i ulaza,

$$\mathbf{X}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{U}(s)$$

definirana je matricom prijenosnih funkcija

$$\mathbf{G}(s) = [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{B} = \frac{\mathrm{adj}[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]\mathbf{B}}{\det[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]}. \tag{251}$$

Može se pokazati da će sustav biti potpuno kontrolabilan po stanjima ukoliko brojnik prijenosne funkcije

$$\mathrm{adj}[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]\mathbf{B}$$

nema zajedničkih faktora sa

$$\det[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]$$

odnosno, ukoliko nema skračivanja polova i nula.

Kontrolabilnost vremenski-varijabilnih sustava

Linearni vremenski-varijabilni sustavi:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t), \tag{252}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t). \tag{253}$$

Znamo da rješenje jednadžbe stanja (252) možemo prikazati na slijedeći način

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t, t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{\Phi}(t, \tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau. \tag{254}$$

gdje je $\mathbf{\Phi}(t, t_0)$ matrica prijelaza sustava.

Bilo koje početno stanje $\mathbf{x}(t_0)$ može biti prebačeno u bilo koje konačno stanje $\mathbf{x}(t_1)$ ako postoji upravljački vektor $\mathbf{u}(t) : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^m$, takav da vrijedi

$$\mathbf{x}(t_1) - \mathbf{\Phi}(t_1, t_0)\mathbf{x}(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{\Phi}(t_1, \tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau. \tag{255}$$

Kontrolabilnost vremenski-varijabilnih sustava

Pretpostavimo sada upravljački vektor $\mathbf{u}(t)$ u slijedećem obliku

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{B}^T(t)\mathbf{\Phi}^T(t_1, t)\mathbf{p}, \tag{256}$$

gdje je $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ neki konstantni vektor. Uvrstimo li (256) u (255), dobivamo

$$\mathbf{x}(t_1) - \mathbf{\Phi}(t_1, t_0)\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{W}(t_0, t_1)\mathbf{p}, \tag{257}$$

gdje je $\mathbf{W}(t_0, t_1) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *Gramova matrica* ili *Gramian kontrolabilnosti* definiran sa

$$\boxed{\mathbf{W}(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{\Phi}(t_1, \tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{B}^T(\tau)\mathbf{\Phi}^T(t_1, \tau)d\tau} \tag{258}$$

Kriterij kontrolabilnosti vremenski-varijabilnih sustava

Određivanje upravljačkog vektora $\mathbf{u}(t)$ svodi se na određivanje konstantnog vektora $\mathbf{p}$ (koji zadovoljava matričnu algebarsku jednadžbu (257)).

Da bi mogli odrediti vektor $\mathbf{p}$, matrica $\mathbf{W}(t_0, t_1)$ mora biti nesingularna, $\det[\mathbf{W}(t_0, t_1)] \neq 0$.

U tom slučaju sustav je potpuno kontrolabilan, a upravljački vektor koji transformira početno stanje $\mathbf{x}(t_0)$ u bilo koje konačno stanje $\mathbf{x}(t_1)$ dan je izrazom

$$\boxed{\mathbf{u}(t) = \mathbf{B}^T(t)\boldsymbol{\Phi}^T(t_1, t)\mathbf{W}^{-1}(t_0, t_1)\left[\mathbf{x}(t_1) - \boldsymbol{\Phi}(t_1, t_0)\mathbf{x}(t_0)\right]} \tag{259}$$

Gramian kontrolabilnosti vremenski-invarijantnih sustava

Navedeni kriterij kontrolabilnosti može poslužiti kao alternativa kriterijima kontrolabilnosti linearnih vremenski-invarijantnih sustava.

Matrica prijelaza ima oblik $\mathbf{\Phi}(t_1, \tau) = e^{\mathbf{A}(t_1-\tau)}$, a Gramian kontrolabilnosti je

$$\mathbf{W}(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} e^{\mathbf{A}(t_1-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T(t_1-\tau)} d\tau. \tag{260}$$

Smjenom granica integracije, $t_1 \to t$ i $t_0 \to 0$, te smjenom varijabli integracije $t_1 - \tau \to \tau$, dobivamo standardnu reprezentaciju Gramiana kontrolabilnosti linearnih vremenski-invarijantnih sustava

$$\boxed{\mathbf{W}_c(t) = \int_0^t e^{\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T\tau} d\tau} \tag{261}$$

U tom slučaju, uvjet potpune kontrolabilnosti linearnih vremenski-invarijantnih sustava je nesingularnost matrice $\mathbf{W}_c(t)$.

Sadržaj

Definicija observabilnosti (mjerljivosti)

Potpuna observabilnost (mjerljivost) stanja.

Sustav je potpuno observabilan po stanjima (uz $\mathbf{u} = \mathbf{0}$), u zatvorenom vremenskom intervalu $[t_0, t_1]$, ako je moguće za zadani t_0 i t_1, svako početno stanje $\mathbf{x}(t_0)$ egzaktno odrediti na osnovu poznavanja (mjerenja) vektora izlata $\mathbf{y}(t)$ u intervalu $[t_0, t_1]$.

Termin 'potpuna' znači da su sva stanja (svaka komponenta vektora stanja) observabilna (mjerljiva).

Sustav je potpuno observabilan ako se svaka promjena stanja sustava odražava na izlaznim varijablama.

Potpuna observabilnost diskretnih sustava

Razmatramo linearni diskretni vremenski-invarijantni sustav, uz $\mathbf{u}(k) = \mathbf{0}$, opisan matričnim sustavom diferencijskih jednadžbi

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{E}\mathbf{x}(k), \tag{262}$$

čije rješenje je dano slijedećim izrazom

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{E}^k \mathbf{x}(0), \tag{263}$$

odnosno, izlazna varijabla $\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k)$ je

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{E}^k \mathbf{x}(0). \tag{264}$$

Definicija observabilnosti: zahtijeva se da je na osnovu mjerenja izlaza $\mathbf{y}(0)$, $\mathbf{y}(1)$, $\mathbf{y}(2), \ldots$, $\mathbf{y}(N)$ moguće odrediti n nepoznatih početnih uvjeta $x_1(0), x_2(0), \ldots, x_n(0)$.

Potpuna observabilnost diskretnih sustava

Za to određivanje dovoljan broj diskretnih vremenskih intervala je $N = n - 1$. Detaljnim raspisivanjem jednadžbi (264) dobivamo

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(0) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(0), \\ \mathbf{y}(1) &= \mathbf{C}\mathbf{E}\mathbf{x}(0), \\ \mathbf{y}(2) &= \mathbf{C}\mathbf{E}^2\mathbf{x}(0), \\ &\vdots \\ \mathbf{y}(n-1) &= \mathbf{C}\mathbf{E}^{n-1}\mathbf{x}(0), \end{aligned}$$

ili u matričnom obliku

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}(0) \\ \mathbf{y}(1) \\ \mathbf{y}(2) \\ \vdots \\ \mathbf{y}(n-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{E} \\ \mathbf{C}\mathbf{E}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{E}^{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{x}(0). \tag{265}$$

Kriterij observabilnosti diskretnih sustava

- dobili smo sustav od nm jednadžbi s n nepoznanica $x_1(0), x_2(0), \ldots, x_n(0)$
- da bi taj sustav bio riješiv, dovoljno je da postoji n linearno nezavisnih jednadžbi unutar ukupnog sustava od nm jednadžbi
- da bi postojao sustav od n linearno nezavisnih jednadžbi, rang matrice na desnoj strani izraza mora biti jednak n, odnosno,

$$\boxed{\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\mathbf{C}^T & \mathbf{E}^T\mathbf{C}^T & (\mathbf{E}^T)^2\mathbf{C}^T & \cdots & (\mathbf{E}^T)^{n-1}\mathbf{C}^T\end{bmatrix} = n} \tag{266}$$

Observabilnost diskretnih sustava s jednim izlazom

Ako imamo samo jednu skalarnu izlaznu varijablu, $y(k) = \mathbf{c}^T\mathbf{x}(k)$, gdje je $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, sustav jednadžbi (265) postaje

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(n-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T\mathbf{E} \\ \mathbf{c}^T\mathbf{E}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{c}^T\mathbf{E}^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{bmatrix}. \tag{267}$$

Dobili smo sustav od n jednadžbi s n nepoznanica $x_1(0), x_2(0), \ldots, x_n(0)$ koje možemo jednoznačno odrediti invertiranjem $n \times n$ kvadratne matrice na desnoj strani izraza.

Da bi matrica bila invertibilna, mora biti nesingularna, odnosno imati rang n,

$$\boxed{\mathrm{rank}\left[\mathbf{c} \quad \mathbf{E}^T\mathbf{c} \quad (\mathbf{E}^T)^2\mathbf{c} \quad \cdots \quad (\mathbf{E}^T)^{n-1}\mathbf{c}\right] = n} \tag{268}$$

Potpuna observabilnost kontinuiranih sustava

Razmatramo kontinuirani homogeni linearni sustav ($\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}$) opisan matričnim sustavom diferencijalnih jednadžbi

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \tag{269}$$

čije rješenje je dano slijedećim izrazom

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0), \tag{270}$$

odnosno, izlazna varijabla $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$ je

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0). \tag{271}$$

Na osnovu Cayley-Hamiltonovog teorema slijedi da matričnu funkciju $e^{\mathbf{A}\tau}$ možemo razviti u polinom reda $n-1$ po matrici $\mathbf{A}$,

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t)\mathbf{A}^k. \tag{272}$$

Potpuna observabilnost kontinuiranih sustava

Uvrstimo li izraz (272) u (271) dobivamo

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t)\mathbf{C}\mathbf{A}^k\mathbf{x}(0). \tag{273}$$

ili u matričnoj interpretaciji

$$\mathbf{y}(t) = [\alpha_0(t)\mathbf{I} \;\; \alpha_1(t)\mathbf{I} \;\; \alpha_2(t)\mathbf{I} \;\; \cdots \;\; \alpha_{n-1}(t)\mathbf{I}] \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{x}(0). \tag{274}$$

gdje je $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{p \times p}$ jedinična matrica.
Ako je sustav potpuno observabilan, tada je na bazi promatranja (mjerenja) vektora izlaza $\mathbf{y}(t)$, tijekom konačnog vremenskog intervala $0 \leq t \leq t_N$, moguće odrediti početno stanje $\mathbf{x}(0)$.

Potpuna observabilnost kontinuiranih sustava

Pretpostavimo da imamo N mjerenja izlaznog vektora $\mathbf{y}(t)$ u N različitih vremenskih trenutaka $t_1, t_2, \ldots, t_N$. U tom slučaju imamo

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}(t_1) \\ \mathbf{y}(t_2) \\ \vdots \\ \mathbf{y}(t_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_0(t_1)\mathbf{I} & \cdots & \alpha_{n-1}(t_1)\mathbf{I} \\ \alpha_0(t_2)\mathbf{I} & \cdots & \alpha_{n-1}(t_2)\mathbf{I} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_0(t_N)\mathbf{I} & \cdots & \alpha_{n-1}(t_N)\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{bmatrix}$$

Dimenzija prve matrice je $Np \times np$; dimenzija druge matrice je $np \times n$.

Da bi na osnovu dobivenog sustava od Np jednadžbi odredili početne uvjete $x_1(0), \ldots, x_n(0)$, potrebno je da n jednadžbi bude linearno nezavisno.

Da bi n jednadžbi bilo linearno nezavisno, druga matrica na desnoj strani mora imati rang n,

$$\boxed{\text{rank}\left[\mathbf{C}^T \quad \mathbf{A}^T\mathbf{C}^T \quad (\mathbf{A}^T)^2\mathbf{C}^T \quad \cdots \quad (\mathbf{A}^T)^{n-1}\mathbf{C}^T\right] = n} \qquad (275)$$

Observabilnost kontinuiranih sustava s jednim izlazom

Ako imamo samo jednu skalarnu izlaznu varijablu, $y(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t)$, gdje je $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, te broj mjerenja $N = n$, prethodni sustav jednadžbi postaje

$$\begin{bmatrix} y(t_1) \\ y(t_2) \\ \vdots \\ y(t_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_0(t_1) & \alpha_1(t_1) & \cdots & \alpha_{n-1}(t_1) \\ \alpha_0(t_2) & \alpha_1(t_2) & \cdots & \alpha_{n-1}(t_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_0(t_n) & \alpha_1(t_n) & \cdots & \alpha_{n-1}(t_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{bmatrix}$$

Na desnoj strani jednadžbe imamo umnožak dvije kvadratne $n \times n$ matrice.

Da bi mogli odrediti vektor početnih uvjeta, navedene patrice moraju biti invertibilne, odnosno njihov rang mora biti jednak n.

Prva matrica koeficijenata ima rang n (svojstvene vrijednosti matrice $\mathbf{A}$ različite). Ostaje uvjet na rang druge matrice

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{c} & \mathbf{A}^T\mathbf{c} & (\mathbf{A}^T)^2\mathbf{c} & \cdots & (\mathbf{A}^T)^{n-1}\mathbf{c} \end{bmatrix} = n. \tag{276}$$

Invertiranjem matrica možemo jednoznačno odrediti vektor početnih uvjeta.

Modalna interpretacija observabilnosti primjenom dekompozicije vektora stanja

Na osnovu izraza (193) koji opisuje pobuđivanje dinamičkih modova uvjetovano početnim uvjetima, slijedi izraz za dekompoziciju vektora izlaza po modovima

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\sum_{i=1}^{n}\left[\mathbf{r}_i^T\mathbf{x}(0)\right]e^{\lambda_i t}\mathbf{u}_i. \tag{277}$$

$\mathbf{u}_i$ - svojstveni vektori matrice $\mathbf{A}$; $\mathbf{r}_i$ - vektori recipročne baze. Vrijedi

$$\mathbf{C}\mathbf{u}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1^T \\ \mathbf{c}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{c}_p^T \end{bmatrix}\mathbf{u}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1^T\mathbf{u}_i \\ \mathbf{c}_2^T\mathbf{u}_i \\ \vdots \\ \mathbf{c}_p^T\mathbf{u}_i \end{bmatrix}, \tag{278}$$

$\mathbf{c}_k^T$ - k-ti redak matrice $\mathbf{C}$.

Modalna interpretacija observabilnosti primjenom dekompozicije vektora stanja

Izraz (277) možemo prikazati po komponentama

$$y_k(t) = \sum_{i=1}^{n} \left[\mathbf{r}_i^T \mathbf{x}(0)\right] \left(\mathbf{c}_k^T \mathbf{u}_i\right) e^{\lambda_i t}, \qquad k = 1, 2, \ldots, p. \tag{279}$$

Uvjet da i-ti mod iščezava u svakoj izlaznoj varijabli je

$$\mathbf{c}_k^T \mathbf{u}_i = 0, \qquad \text{za } \forall\, k = 1, 2, \ldots, p. \tag{280}$$

Da bi sustav bio observabilan mora (za svaki i) vrijediti: $\mathbf{c}_k^T \mathbf{u}_i \neq 0$, za barem jedan $k = 1, 2, \ldots, p$.

Modalna interpretacija observabilnosti primjenom kanonskih jednadžbi

Kanonske jednadžbe stanja imaju slijedeći oblik

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{\Lambda}\mathbf{z}(t) + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t) \tag{281}$$

$$\mathbf{y}(t) = \hat{\mathbf{C}}\mathbf{z}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \tag{282}$$

gdje je $\mathbf{P}$ modalna matrica transformacije, dok je
$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$,
$\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}$,
$\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{P}$,

U kanonskoj reprezentaciji, svaka komponenta vektora stanja $\mathbf{z}(t)$ reprezentira jedan mod sustava.

U ovom obliku uvjet observabilnosti postaje očigledan: matrica $\hat{\mathbf{C}}$ ne smije imati nul-stupac.

Ako je i-ti stupac matrice $\hat{\mathbf{C}}$ jednak nuli, to znači da se i-ti mod sustava ne pojavljuje ni u jednoj izlaznoj varijabli.

Modalna interpretacija observabilnosti primjenom kanonskih jednadžbi

Na osnovu (278) te svojstava modalne matrice slijedi

$$\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{CP} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1^T \\ \mathbf{c}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{c}_p^T \end{bmatrix} [\mathbf{u}_1 \;\; \mathbf{u}_2 \;\; \cdots \;\; \mathbf{u}_n] = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1^T\mathbf{u}_1 & \mathbf{c}_1^T\mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{c}_1^T\mathbf{u}_n \\ \mathbf{c}_2^T\mathbf{u}_1 & \mathbf{c}_2^T\mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{c}_2^T\mathbf{u}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{c}_p^T\mathbf{u}_1 & \mathbf{c}_p^T\mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{c}_p^T\mathbf{u}_n \end{bmatrix}.$$

Ako je i-ti stupac jednak nuli tada mora biti zadovoljen uvjet

$$\mathbf{c}_k^T\mathbf{u}_i = 0, \qquad \text{za } \forall\, k = 1, 2, \ldots, p. \tag{283}$$

Uvjet observabilnosti: da bi sustav bio observabilan mora (za svaki i) vrijediti:

$$\mathbf{c}_k^T\mathbf{u}_i \neq 0$$

za barem jedan $k = 1, 2, \ldots, p$.

Uvjet observabilnosti u kompleksnoj domeni

U kompleksnoj domeni veza između vektora izlaza i vektora početnih uvjeta, uz $\mathbf{U}(s) = \mathbf{0}$, dana je slijedećim izrazom

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{x}(0) = \frac{\mathbf{C}\mathrm{adj}[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]}{\det[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]}\mathbf{x}(0). \tag{284}$$

Vidjeli smo da ne-observabilnost ima za posljedicu izostanak jednog ili više modova sustava u izlaznom vektoru.
Na osnovu toga možemo zaključiti da kriterij observabilnosti u kompleksnoj ravnini podrazumjeva da

$$\mathbf{C}\mathrm{adj}[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]$$

nema zajedničkih faktora sa

$$\det[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]$$

odnosno da nema skračivanja polova i nula.

Sadržaj

Regulacija po vektoru stanja

Ako je kompletni vektor stanja mjerljiv, tada je moguće zatvoriti direktnu regulacijsku petlju po vektoru stanja

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) + \mathbf{w}(t), \tag{285}$$

gdje je $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ matrica pojačanja, a $\mathbf{w}(t) \in \mathbb{R}^m$ je referentni vektor vođenja.

Uvrstimo li zakon upravljanja (285) u jednadžbe stanja linearnih vremenski-invarijantnih sustava (3)-(4), dobivamo

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{w}(t), \tag{286}$$

$$\mathbf{y}(t) = (\mathbf{C} - \mathbf{D}\mathbf{K})\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{w}(t), \tag{287}$$

Regulacija po vektoru stanja

U kompleksnoj domeni vezu između izlaznog i ulaznog vektora možemo izraziti preko matrice prijenosnih funkcija, $\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{W}(s)$,

$$\mathbf{G}(s) = \frac{(\mathbf{C} - \mathbf{DK})\mathrm{adj}[s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}]\mathbf{B}}{\det[s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}]} + \mathbf{D}, \tag{288}$$

gdje je $\det[s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}]$ *karakteristični polinom*, a $\det[s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}] = 0$ *karakteristična jednadžba* sustava.

Problem sinteze regulatora metodom podešavanja polova svodi se na određivanje matrice pojačanja $\mathbf{K}$, tako da rješenja karakteristične jednadžbe $\det[s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}] = 0$ budu neke, unaprijed zadane, svojstvene vrijednosti $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Regulatorom stanja moguće je podesiti sve polove sustava, pod uvjetom da je sustav potpuno kontrolabilan.

Regulacija po vektoru izlaza

Ako vektor stanja nije direktno mjerljiv, tada je moguće zatvoriti regulacijsku petlju po vektoru izlaza

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{y}(t) + \mathbf{w}(t), \tag{289}$$

gdje je $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{m\times p}$ matrica pojačanja, a $\mathbf{w}(t) \in \mathbb{R}^{m}$ je referentni vektor vođenja.

Uvrstimo li zakon upravljanja (289) u jednadžbe stanja linearnih vremenski-invarijantnih sustava (3)-(4), uz $\mathbf{D} = \mathbf{0}$, dobivamo

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{C})\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{w}(t), \tag{290}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t), \tag{291}$$

Regulacija po vektoru izlaza

U kompleksnoj domeni, vezu između izlaznog i ulaznog vektora možemo izraziti preko matrice prijenosnih funkcija, $\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{W}(s)$,

$$\mathbf{G}(s) = \frac{\mathbf{C}\mathrm{adj}[s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BKC}]\mathbf{B}}{\det[s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BKC}]}, \tag{292}$$

gdje je $\det[s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BKC}]$ *karakteristični polinom*, a $\det[s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BKC}] = 0$ *karakteristična jednadžba* sustava.

- Preko regulatora izlaza nije moguće uvijek podesiti sve polove sustava (bez obzira na potpunu kontrolabilnost sustava).
- U tom slučaju primjenjuje se *observer stanja* za estimaciju vektora stanja.
- Preko estimiranog vektora stanja $\hat{\mathbf{x}}(t)$ realizira se regulator stanja $\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{w}(t)$ za kojeg se može provesti sinteza metodom podešavanja polova sustava.

Utjecaj povratne veze na osobine sustava

- Povratna veza nema utjecaja na kontrolabilnost sustava.
- Rang matrice $\mathbf{M}$ sustava bez povratne veze, definirane sa (245), jednak je rangu matrice $\tilde{\mathbf{M}}$ sustava s povratnom vezom

$$\tilde{\mathbf{M}} = \left[(\mathbf{A}-\mathbf{BK})^{n-1}\mathbf{B} \quad \cdots \quad (\mathbf{A}-\mathbf{BK})^{2}\mathbf{B} \quad (\mathbf{A}-\mathbf{BK})\mathbf{B} \quad \mathbf{B}\right]. \tag{293}$$

- Na osnovu izraza (287) vidimo da u slučaju $\mathbf{C} = \mathbf{DK}$ sustav postaje neobservabilan, jer se gubi veza između stanja sustava i izlaza.
- Ako je $\mathbf{D} = \mathbf{0}$, tada povratna veza nema utjecaja na svojstvo observabilnosti sustava.

Sinteza regulatora podešavanjem polova sustava

Problem sinteze regulatora podešavanjem polova sustava možemo formulirati na slijedeći način:

Za unaprijed zadane (jednostruke) polove sustava s povratnom vezom

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$$

koji su identični svostvenim vrijednostima matrice

$$\mathbf{A}_r = \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}$$

treba odrediti matricu pojačanja

$$\mathbf{K}$$

uz pretpostavku da je sustav potpuno kontrolabilan.

Sinteza regulatora primjenom modalne transformacije

Uvedemo li oznaku $\mathbf{A}_r = \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}$, jednadžba (286) postaje

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_r\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{w}(t). \tag{294}$$

Primjenimo li sada modalnu transformaciju $\mathbf{x}(t) = \mathbf{P}\mathbf{z}(t)$, jednadžba (294) postaje

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{\Lambda}\mathbf{z}(t) + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{w}(t), \tag{295}$$

gdje je

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}_r\mathbf{P} = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$$

$$\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}$$

S obzirom da operacija sličnosti matrica ne mijenja svojstvene vrijednosti, slijedi da su svojstvene vrijednosti matrice $\mathbf{A}_r$ (ili polovi) jednaki svojstvenim vrijednostima (dijagonalnim elementima) matrice Λ.

Sinteza regulatora primjenom modalne transformacije

Na osnovu izraza $\mathbf{A}_r = \mathbf{A} - \mathbf{BK}$ i $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}_r\mathbf{P}$ dobivamo

$$\mathbf{A} - \mathbf{BK} = \mathbf{P\Lambda P}^{-1}. \tag{296}$$

Nakon množenja s desne strane matricom $\mathbf{P}$ izraz (296) postaje

$$\mathbf{AP} - \mathbf{BKP} = \mathbf{P\Lambda}. \tag{297}$$

Uvedemo li sada oznaku $\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{KP}$, te nakon prebacivanja pojedinih članova, izraz (297) postaje

$$\mathbf{AP} - \mathbf{P\Lambda} = \mathbf{B}\hat{\mathbf{K}}, \tag{298}$$

dok je

$$\mathbf{K} = \hat{\mathbf{K}}\mathbf{P}^{-1}. \tag{299}$$

Izraz (298) predstavlja linearnu matričnu jednadžbu po nepoznatoj matrici $\mathbf{P}$ dok su matrice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{\Lambda}$ i $\hat{\mathbf{K}}$ unaprijed zadane.

Sinteza regulatora primjenom modalne transformacije

Jednadžbu (298) prikazat ćemo preko vektora stupaca:

$$\mathbf{A}[\mathbf{p}_1 \;\; \mathbf{p}_2 \;\; \cdots \;\; \mathbf{p}_n] - [\mathbf{p}_1 \;\; \mathbf{p}_2 \;\; \cdots \;\; \mathbf{p}_n]\mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\} = \mathbf{B}\hat{\mathbf{K}}, \tag{300}$$

odnosno

$$[\mathbf{A}\mathbf{p}_1 \;\; \mathbf{A}\mathbf{p}_2 \;\; \cdots \;\; \mathbf{A}\mathbf{p}_n] - [\lambda_1\mathbf{p}_1 \;\; \lambda_2\mathbf{p}_2 \;\; \cdots \;\; \lambda_n\mathbf{p}_n] = [\mathbf{B}\hat{\mathbf{k}}_1 \;\; \mathbf{B}\hat{\mathbf{k}}_2 \;\; \cdots \;\; \mathbf{B}\hat{\mathbf{k}}_n], \tag{301}$$

gdje je $\mathbf{p}_i$ i-ti stupac matrice $\mathbf{P}$, dok je $\hat{\mathbf{k}}_i$ i-ti stupac matrice $\hat{\mathbf{K}}$.

Matrična jednadžba (301) zadovoljena je ako je i-ti stupac na lijevoj strani jednakosti jednak i-tom stupcu na desnoj strani, odnosno

$$\mathbf{A}\mathbf{p}_i - \lambda_i\mathbf{p}_i = \mathbf{B}\hat{\mathbf{k}}_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{302}$$

Na osnovu prethodnog izraza možemo odrediti i-ti stupac matrice $\mathbf{P}$,

$$\boxed{\mathbf{p}_i = (\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{I})^{-1}\mathbf{B}\hat{\mathbf{k}}_i} \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{303}$$

Sinteza regulatora primjenom modalne transformacije

- Određivanjem svih stupaca $\mathbf{p}_i$ pomoću izraza (303), odredili smo matricu $\mathbf{P}$,

$$\mathbf{P} = [\mathbf{p}_1 \ \ \mathbf{p}_2 \ \ \cdots \ \ \mathbf{p}_n]$$

  a na osnovu nje, primjenom izraza (299),

$$\boxed{\mathbf{K} = \hat{\mathbf{K}}\mathbf{P}^{-1}}$$

  direktno dobivamo matricu pojačanja $\mathbf{K}$.

- Na osnovu izraza (303) zaključujemo da se željene svojstvene vrijednosti zatvorenog regulacijskog kruga moraju razlikovati od svojstvenih vrijednosti matrice $\mathbf{A}$, jer bi inače matrica $(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{I})$ bila singularna.
- Sinteza regulatora primjenom navedene metode nije jednoznačna jer matricu $\hat{\mathbf{K}}$ možemo izabrati proizvoljno.
- Od više mogućih izbora proizvoljne matrice $\hat{\mathbf{K}}$ bolji je onaj koji ima za posljedicu manja pojačanja (elemente) matrice $\mathbf{K}$.

Sinteza regulatora primjenom karakteristične jednadžbe

Slijedeći pristup sintezi regulatora podešavanjem polova zatvorenog regulacijskog kruga baziran je na primjeni karakteristične jednadžbe regulacijskog sustava (294),

$$\hat{d}(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}) = 0. \tag{304}$$

Cilj sinteze regulatora je određivanje matrice pojačanja $\mathbf{K}$, tako da rješenja karakteristične jednadžbe (304) budu željeni korijeni (polovi) sustava $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Karakteristični polinom u (304) možemo prikazati na slijedeći način

$$\begin{aligned} \hat{d}(\lambda) &= \det\{(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})[\mathbf{I} + (\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{K}]\} = \\ &= \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) \det[\mathbf{I} + (\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{K}], \end{aligned} \tag{305}$$

gdje $d(\lambda) = \lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}$ predstavlja karakteristični polinom sustava u otvorenoj povratnoj vezi.

Sinteza regulatora primjenom karakteristične jednadžbe

Ako označimo $\mathbf{\Phi}(\lambda) = (\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ tada izraz (305) možemo prikazati kao

$$\hat{d}(\lambda) = d(\lambda)\,\mathrm{det}[\mathbf{I} + \mathbf{\Phi}(\lambda)\mathbf{B}\mathbf{K}]. \tag{306}$$

Primjenom svojstva determinanti: $\mathrm{det}(\mathbf{A}\mathbf{B}) = \mathrm{det}(\mathbf{A})\,\mathrm{det}(\mathbf{B})$, te definicijom pseudoinverza matrice $\mathbf{K}$,

$$\mathbf{K}^{\dagger} = \mathbf{K}^{T}\left(\mathbf{K}\mathbf{K}^{T}\right)^{-1} \tag{307}$$

sa svojstvom $\mathbf{K}\mathbf{K}^{\dagger} = \mathbf{I}$, možemo izvesti slijedeći identitet

$$\begin{aligned}
\mathrm{det}[\mathbf{I} + \mathbf{\Phi}(\lambda)\mathbf{B}\mathbf{K}] &= \mathrm{det}(\mathbf{K}\mathbf{K}^{\dagger})\,\mathrm{det}[\mathbf{I} + \mathbf{\Phi}(\lambda)\mathbf{B}\mathbf{K})] = \\
&= \mathrm{det}(\mathbf{K})\,\mathrm{det}[\mathbf{I} + \mathbf{\Phi}(\lambda)\mathbf{B}\mathbf{K}]\,\mathrm{det}(\mathbf{K}^{\dagger}) = \\
&= \mathrm{det}\left\{\mathbf{K}[\mathbf{I} + \mathbf{\Phi}(\lambda)\mathbf{B}\mathbf{K}]\mathbf{K}^{\dagger}\right\} = \\
&= \mathrm{det}\,[\mathbf{I} + \mathbf{K}\mathbf{\Phi}(\lambda)\mathbf{B}],
\end{aligned} \tag{308}$$

Sinteza regulatora primjenom karakteristične jednadžbe

Jednadžba (306) postaje

$$\hat{d}(\lambda) = d(\lambda)\,\mathrm{det}[\mathbf{I} + \mathbf{K}\mathbf{\Phi}(\lambda)\mathbf{B}]. \tag{309}$$

Matricu $\mathbf{K}$ treba odrediti iz uvjeta $\hat{d}(\lambda) = 0$ za svako λ_i,

$$\mathrm{det}[\mathbf{I} + \mathbf{K}\mathbf{\Phi}(\lambda_i)\mathbf{B}] = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{310}$$

pri čemu se željene svojstvene vrijednosti zatvorenog regulacijskog kruga moraju razlikovati od svojstvenih vrijednosti matrice $\mathbf{A}$ (jer bi inaće bilo $d(\lambda_i) = 0$).

Uvjet (310) možemo postići izjednačavanjem sa nulom svih elemenata jednog stupca determinante.
Ako označimo j-ti stupac jedinične matrice $\mathbf{I}$ sa $\mathbf{e}_j$, a j-ti stupac matrice $\mathbf{F}(\lambda_i) = \mathbf{\Phi}(\lambda_i)\mathbf{B}$ sa $\mathbf{f}_j(\lambda_i)$, tada izjednačavanje j-tog stupca s nulom u izrazu (310) možemo prikazati kao

$$\mathbf{K}\mathbf{f}_j(\lambda_i) = -\mathbf{e}_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, m \tag{311}$$

- Jednadžba (311) nije dovoljna za određivanje matrice pojačanja $\mathbf{K}$.
- Potrebno je da postoji n linearno nezavisnih jednadžbi za svaki λ_i.

Moguće je pronaći n linearno nezavisnih stupaca

$$\mathbf{f}_{j_1}(\lambda_1), \mathbf{f}_{j_2}(\lambda_2), \ldots, \mathbf{f}_{j_n}(\lambda_n)$$

unutar $n \times nm$ matrice

$$[\mathbf{F}(\lambda_1) \;\; \mathbf{F}(\lambda_2) \;\; \ldots \;\; \mathbf{F}(\lambda_n)]$$

gdje su indeksi $j_1, j_2, \ldots, j_n \in \{1, 2, \ldots, m\}$.

U tom slučaju, n vektorskih jednadžbi (311) može se prikazati u obliku

$$\mathbf{K}[\mathbf{f}_{j_1}(\lambda_1) \;\; \mathbf{f}_{j_2}(\lambda_2) \;\; \ldots \;\; \mathbf{f}_{j_n}(\lambda_n)] = -[\mathbf{e}_{j_1} \;\; \mathbf{e}_{j_2} \;\; \ldots \;\; \mathbf{e}_{j_n}], \tag{312}$$

iz koje dobivamo konačan izraz za matricu pojačanja

$$\boxed{\mathbf{K} = -[\mathbf{e}_{j_1} \;\; \mathbf{e}_{j_2} \;\; \ldots \;\; \mathbf{e}_{j_n}] \cdot [\mathbf{f}_{j_1}(\lambda_1) \;\; \mathbf{f}_{j_2}(\lambda_2) \;\; \ldots \;\; \mathbf{f}_{j_n}(\lambda_n)]^{-1}} \tag{313}$$

Sinteza regulatora primjenom Ackermannove formule

Karakteristična jednadžba zatvorenog regulacijskog kruga ima slijedeći oblik

$$\begin{aligned}\hat{d}(\lambda) &= \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}_r) = \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n) = \\ &= \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0. \qquad (314)\end{aligned}$$

Prema Cayley-Hamiltonovom teoremu matrica $\mathbf{A}_r$ zadovoljava svoju karakterističnu jednadžbu

$$\hat{d}(\mathbf{A}_r) = \mathbf{A}_r^n + a_{n-1}\mathbf{A}_r^{n-1} + a_{n-2}\mathbf{A}_r^{n-2} + \ldots + a_1\mathbf{A}_r + a_0 = 0. \qquad (315)$$

Ako sada u prethodnu jednadžbu uvrstimo potencije matrice $\mathbf{A}_r = \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}$ (zbog jednostavnosti razmatramo slučaj za $n = 3$)

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_r &= \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}, & (316)\\ \mathbf{A}_r^2 &= (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})^2 = \mathbf{A}^2 - \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{K} - \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{A}_r, & (317)\\ \mathbf{A}_r^3 &= (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})^3 = \mathbf{A}^3 - \mathbf{A}^2\mathbf{B}\mathbf{K} - \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{A}_r - \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{A}_r^2. & (318)\end{aligned}$$

Sinteza regulatora primjenom Ackermannove formule

...dobivamo slijedeći izraz

$$\begin{aligned}
\hat{d}(\mathbf{A}_r) &= a_0\mathbf{I} + a_1\mathbf{A}_r + a_2\mathbf{A}_r^2 + \mathbf{A}_r^3 = \\
&= a_0\mathbf{I} + a_1(\mathbf{A} - \mathbf{BK}) + a_2(\mathbf{A}^2 - \mathbf{ABK} - \mathbf{BKA}_r) + \\
&+ \mathbf{A}^3 - \mathbf{A}^2\mathbf{BK} - \mathbf{ABKA}_r - \mathbf{BKA}_r^2 = \\
&= a_0\mathbf{I} + a_1\mathbf{A} + a_2\mathbf{A}^2 + \mathbf{A}^3 - a_1\mathbf{BK} - a_2\mathbf{ABK} - a_2\mathbf{BKA}_r - \\
&- \mathbf{A}^2\mathbf{BK} - \mathbf{ABKA}_r - \mathbf{BKA}_r^2 \\
&= d(\mathbf{A}) - a_1\mathbf{BK} - a_2\mathbf{ABK} - a_2\mathbf{BKA}_r - \mathbf{A}^2\mathbf{BK} - \mathbf{ABKA}_r - \mathbf{BKA}_r^2,
\end{aligned}$$

gdje smo označili

$$d(\mathbf{A}) = \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = a_0\mathbf{I} + a_1\mathbf{A} + a_2\mathbf{A}^2 + \mathbf{A}^3. \tag{319}$$

Sinteza regulatora primjenom Ackermannove formule

S obzirom da vrijedi $\hat{d}(\mathbf{A}_r) = 0$, imamo

$$d(\mathbf{A}) = a_1\mathbf{BK} + a_2\mathbf{ABK} + a_2\mathbf{BKA}_r + \mathbf{A}^2\mathbf{BK} + \mathbf{ABKA}_r + \mathbf{BKA}_r^2. \quad (320)$$

odnosno, nakon sređivanja dobivamo

$$d(\mathbf{A}) = \mathbf{B}(a_1\mathbf{K} + a_2\mathbf{KA}_r + \mathbf{KA}_r^2) + \mathbf{AB}(a_2\mathbf{K} + \mathbf{KA}_r) + \mathbf{A}^2\mathbf{BK}. \quad (321)$$

Prethodni izraz možemo prikazati u matričnom obliku

$$d(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1\mathbf{K} + a_2\mathbf{KA}_r + \mathbf{KA}_r^2 \\ a_2\mathbf{K} + \mathbf{KA}_r \\ \mathbf{K} \end{bmatrix} \quad (322)$$

Sinteza regulatora primjenom Ackermannove formule

Ukoliko imamo jednu ulaznu varijablu, odnosno $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, tada je matrica

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix}\mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2\mathbf{B}\end{bmatrix} \tag{323}$$

kvadratna. Ako je $\mathrm{rank}\mathbf{M} = n$, matrica je nesingularna i sustav je kontrolabilan.

Ako sada jednadžbu (322) pomnožimo s lijeve strane sa izrazom $[0\ \ 0\ \ 1]\mathbf{M}^{-1}$, dobivamo matricu pojačanja

$$\mathbf{K} = [0\ \ 0\ \ 1]\begin{bmatrix}\mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2\mathbf{B}\end{bmatrix}^{-1} d(\mathbf{A}). \tag{324}$$

U slučaju proizvoljnog n-dimenzionalnog sustava, izraz (324) možemo generalizirati na slijedeći način

$$\boxed{\mathbf{K} = [0\ \ 0\ \ \cdots\ \ 0\ \ 1]\begin{bmatrix}\mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}\end{bmatrix}^{-1} d(\mathbf{A})} \tag{325}$$

Izraz (325) naziva se *Ackermannova formula*.

MATLABove funkcije za sintezu linearnih sustava

ACKER - Pole placement gain selection using Ackermann's formula.

K = ACKER(A,B,P) calculates the feedback gain matrix K such that the single input system

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

with a feedback law of $u = -Kx$ has closed loop poles at the values specified in vector P, i.e., $P = \mathrm{eig}(A - B * K)$.

PLACE - Pole placement technique.

K = PLACE(A,B,P) computes a state-feedback matrix K such that the eigenvalues of $A - B * K$ are those specified in vector P. No eigenvalue should have a multiplicity greater than the number of inputs.