Lyapunovljeva analiza stabilnosti

Opća teorija sustava

Sveučilište u Zagrebu
Fakultet strojarstva i brodogradnje

Sadržaj

Sadržaj

Definicije stabilnosti

Autonomni nelinearni dinamički sustav reprezentiran je sustavom nelinearnih diferencijalnih jednadžbi:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

gdje je
$\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ - nelinearna vektorska funkcija,
$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ - vektor stanja sustava.

Definicija 1. (Stabilnost) Za ravnotežno stanje $x = 0$ kažemo da je stabilno ako za neki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da iz $\|x(t_0)\| < \delta$, slijedi $\|x(t)\| < \varepsilon$ za sve $t \geq t_0$. Inače ravnotežno stanje je nestabilno.
Prethodnu definiciju možemo prikazati kompaktnije na slijedeći način

$$\forall \varepsilon > 0, \ \ \exists \delta > 0, \ \ \|x(t_0)\| < \delta \ \ \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \ \ t \geq 0.$$

Definicije stabilnosti

Definicija 2. (Asimptotska stabilnost) Za ravnotežno stanje kažemo da je asimptotski stabilno ako je zadovoljen dodatni uvjet da za neki $\delta > 0$ iz $\|x(t_0)\| < \delta$ slijedi da $x(t) \to 0$ kada $t \to \infty$.

$$\forall \delta > 0, \;\; \|x(t_0)\| < \delta \;\; \Rightarrow \|x(t)\| \to 0, \;\; t \to \infty.$$

Definicija 3. (Eksponencijalna stabilnost) Za ravnotežno stanje kažemo da je eksponencijalno stabilno ako postoje $\gamma, \varepsilon > 0$ takvi da za svaki $\delta > 0$ vrijedi $\|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon \|\mathbf{x}(t_0)\| e^{-\gamma(t-t_0)}$ za svaki $t > t_0$ kad god je $\|\mathbf{x}(t_0)\| < \delta$.
Prethodnu definiciju možemo prikazati kompaktnije na slijedeći način

$$\forall \delta > 0, \;\; \exists \gamma, \varepsilon > 0, \;\; \|x(t_0)\| < \delta \;\; \Rightarrow \|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon \|\mathbf{x}(t_0)\| e^{-\gamma(t-t_0)}, \;\; t > t_0$$

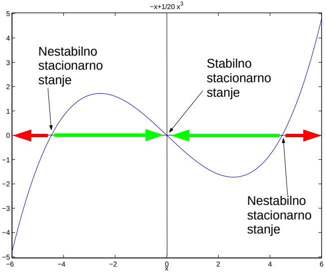
Pojam stabilnosti

Problem stabilnosti dinamičkih sustava $\rightarrow$ problem traženja asimptotskih rješanja diferencijalnih jednadžbi (kvalitativna rješenja diferencijalnih jednadžbi)

$$\dot{x} = f(x)$$

1. Stacionarno stanje: $\dot{x} = 0$, $\rightarrow$ $f(x) = 0$, $\rightarrow$ moguća rješenja: x_1^*, x_2^*, ...
2. Stabilnost pojedinih x_1^*, x_2^*, ...
3. Određivanje domene atrakcije oko pojedinih x_1^*, x_2^*, ...

Primjer: $\dot{x} = -x + \frac{1}{20}x^3$



Kako utvrditi stabilnost stacionarnih stanja?

Za sustave 1. reda ($x^* = 0$) ako $f(x)$ zadovoljava:

1. $x > 0$, $f(x) < 0 \rightarrow \dot{x} < 0$
2. $x < 0$, $f(x) > 0 \rightarrow \dot{x} > 0$
3. $x = 0$, $f(x) = 0 \rightarrow \dot{x} = 0$

ili skraćeno: $x \cdot f(x) \leq 0$

Stabilnost nelinearnih sustava prvog reda

Dinamički sustav ($x \in \mathbb{R}$)

$$\dot{x} = f(x)$$

Uvjet stabilnosti

$$x \cdot f(x) \leq 0$$

od diferencijalne forme ...

$$x \cdot \dot{x} = x \cdot f(x)$$

... do "uvjeta disipativnosti"

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}x^2\right) = x \cdot f(x) \leq 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}x^2\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x^2\right)\frac{dx}{dt} = x \cdot \dot{x}$$

Ako označimo: $\boxed{V(x) = \frac{1}{2}x^2}$ imamo $\boxed{\dot{V}(x) \leq 0}$

Svojstva funkcije $V(x)$

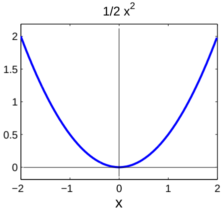
1. $V(x) > 0$ za $x \neq 0$
2. $V(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
3. $\min_x V(x) = 0$

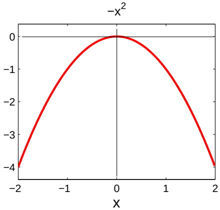
Posljedica $V(x) \geq 0$ i $\dot{V}(x) \leq 0$

$x \to 0$ za $t \to \infty$

Sustav je asimptotski stabilan!

1. Za bilo koji početni $x(0) = x_0 \neq 0$ imamo $V(x_0) > 0$ u $t = 0$.
2. Zbog $\dot{V}(x) \leq 0$ slijedi da će $V(x)$ kontinuirano opadati tijekom vremena prema minimalnoj mogućoj vrijednosti: $V(x) = 0$.
3. Posljedica $V(x) \to 0$ je $x \to 0$





Sadržaj

Karakterizacija stabilnosti primjenom Lyapunovljeve funkcije

Globalna stabilnost ($\dot{x} = f(x)$; $\quad x, f(x) \in \mathbb{R}^n$)

Ako imamo skalarnu funkciju $V(x)$ sa kontinuiranim parcijalnim derivacijama prvog reda tako da vrijedi

- $V(x)$ je pozitivno definitna ($V(x) > 0$ za $x > 0$; $V(x) = 0$ za $x = 0$)
- $\dot{V}$(x) je negativno (semi)definitna ($\dot{V}(x) \leq 0$ za $x > 0$; $\dot{V}(x) = 0$ za $x = 0$)
- $V(x) \to \infty$ kada $\|x\| \to \infty$ ($V(x)$ je *radijalno neograničena*)

tada je ravnotežno stanje $x = 0$ globalno stabilno. Ako je $\dot{V}(x)$ negativno definitna tada je ravnotežno stanje *globalno asimptotski stabilno*.

LaSalleov princip invarijantnosti ($\dot{V}(x) \leq 0$)

Ako skup $\mathbf{R} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \dot{V}(x) = 0 \right\}$ ne sadrži druga rješenja osim ravnotežnog stanja $x = 0$, tada je ravnotežno stanje $x = 0$ *globalno asimptotski stabilno*.

Metodologija Lyapunovljeve analize stabilnosti

- Određivanje jednadžbi pogreške oko stacionarnog stanja $x = 0$
- Konstrukcija Lyapunovljeve funkcije $V(x)$
- Određivanje vremenske derivacije Lyapunovljeve funkcije $\dot{V}(x)$
- Određivanje kriterija stabilnosti
  - određivanje uvjeta pozitivne definitnosti Lyapunovljeve funkcije, $V(x) \geq 0$
  - određivanje uvjeta negativne (semi)definitnosti derivacije Lyapunovljeve funkcije, $\dot{V} \leq 0$
- Primjena LaSalleovog principa invarijantnosti za utvrđivanje asimptotske stabilnosti ako je $\dot{V}(x)$ samo negativno semidefinitna

Metodologija Lyapunovljeve analize stabilnosti

- Određivanje jednadžbi pogreške oko stacionarnog stanja $x = 0$
- Konstrukcija Lyapunovljeve funkcije $V(x)$
- Određivanje vremenske derivacije Lyapunovljeve funkcije $\dot{V}(x)$
- Određivanje kriterija stabilnosti
  - određivanje uvjeta pozitivne definitnosti Lyapunovljeve funkcije, $V(x) \geq 0$
  - određivanje uvjeta negativne (semi)definitnosti derivacije Lyapunovljeve funkcije, $\dot{V} \leq 0$
- Primjena LaSalleovog principa invarijantnosti za utvrđivanje asimptotske stabilnosti ako je $\dot{V}(x)$ samo negativno semidefinitna

Metodologija Lyapunovljeve analize stabilnosti

- Određivanje jednadžbi pogreške oko stacionarnog stanja $x = 0$
- Konstrukcija Lyapunovljeve funkcije $V(x)$
- Određivanje vremenske derivacije Lyapunovljeve funkcije $\dot{V}(x)$
- Određivanje kriterija stabilnosti
  - određivanje uvjeta pozitivne definitnosti Lyapunovljeve funkcije, $V(x) \geq 0$
  - određivanje uvjeta negativne (semi)definitnosti derivacije Lyapunovljeve funkcije, $\dot{V} \leq 0$
- Primjena LaSalleovog principa invarijantnosti za utvrđivanje asimptotske stabilnosti ako je $\dot{V}(x)$ samo negativno semidefinitna

Metodologija Lyapunovljeve analize stabilnosti

- Određivanje jednadžbi pogreške oko stacionarnog stanja $x = 0$
- Konstrukcija Lyapunovljeve funkcije $V(x)$
- Određivanje vremenske derivacije Lyapunovljeve funkcije $\dot{V}(x)$
- Određivanje kriterija stabilnosti
  - određivanje uvjeta pozitivne definitnosti Lyapunovljeve funkcije, $V(x) \geq 0$
  - određivanje uvjeta negativne (semi)definitnosti derivacije Lyapunovljeve funkcije, $\dot{V} \leq 0$
- Primjena LaSalleovog principa invarijantnosti za utvrđivanje asimptotske stabilnosti ako je $\dot{V}(x)$ samo negativno semidefinitna

Primjer: $\boxed{\dot{x} = -x + x^3}$, LF: $\boxed{V(x) = \frac{1}{2}x^2}$

$f(x) = -x + x^3$

$\dot{V}(x) = x\dot{x} = xf(x) = -x^2 + x^4 = x^2(x^2 - 1) \leq 0$

$(x^2 - 1) \leq 0$

$\boxed{-1 < x < 1}$ - domena atrakcije

- Analiza stabilnosti za nelinearne sustave prvog reda je jednostavna
- S povećanjem reda sustava analiza stabilnosti postaje sve složenija
- Ne postoji univerzalna "receptura" kao u slučaju linearnih sustava

Primjer 2:

$\dot{x}_1 = x_2$,

$\dot{x}_2 = -2x_1 - x_2$,

LF: $V(x) = 7x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2$, $V(x) \geq 0$???

$$2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - x_1^2 - x_2^2$$

$$V(x) = 7x_1^2 + 3x_2^2 + (x_1 + x_2)^2 - x_1^2 - x_2^2$$

$V(x) = 6x_1^2 + 2x_2^2 + (x_1 + x_2)^2 \geq 0$ - LF je pozitivno definitna

$$\dot{V}(x) = 14x_1\dot{x}_1 + 6x_2\dot{x}_2 + 2x_1\dot{x}_2 + 2\dot{x}_1x_2$$

$$\dot{V}(x) = 14x_1(x_2) + 6x_2(-2x_1 - x_2) + 2x_1(-2x_1 - x_2) + 2(x_2)x_2$$

$\dot{V}(x) = -4x_1^2 - 4x_2^2 \leq 0$ - derivacija LF je negativno definitna

Linearni prigušeni oscilator

Dinamički model linearnog prigušenog oscilatora

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = 0$$

Energija linearnog prigušenog oscilatora

$$E(x,\dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 \geq 0$$

Disipacija energije linearnog prigušenog oscilatora

$$\frac{dE(x,\dot{x})}{dt} = m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = \underbrace{(m\ddot{x} + kx)}_{-\gamma\dot{x}}\dot{x} = -\gamma\dot{x}^2 \leq 0$$

Hurwitzov kriterij stabilnosti

$$m > 0, \quad \gamma > 0, \quad k > 0$$

Nelinearni prigušeni oscilator (1)

Dinamički model nelinearnog prigušenog oscilatora (1)

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x}^3 + kx^3 = 0$$

nije moguća linearizacija!!!

Energija nelinearnog prigušenog oscilatora (1)

$$E(x,\dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{4}kx^4$$

Disipacija energije linearnog prigušenog oscilatora

$$\frac{dE(x,\dot{x})}{dt} = m\dot{x}\ddot{x} + kx^3\dot{x} = \underbrace{\left(m\ddot{x} + kx^3\right)}_{-\gamma\dot{x}^3}\dot{x} = -\gamma\dot{x}^4$$

Kriterij stabilnosti

$$m > 0, \qquad \gamma > 0, \qquad k > 0$$

Nelinearni prigušeni oscilator (2)

Dinamički model nelinearnog prigušenog oscilatora (2)

$$m\ddot{x} + f(x,\dot{x}) + g(x) = 0$$

Energija nelinearnog prigušenog oscilatora (2)

$$E(x,\dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \int_0^x g(\xi)d\xi$$

Disipacija energije linearnog prigušenog oscilatora

$$\frac{dE(x,\dot{x})}{dt} = m\dot{x}\ddot{x} + g(x)\dot{x} = \underbrace{(m\ddot{x} + g(x))}_{-f(x,\dot{x})}\dot{x} = -\dot{x}f(x,\dot{x})$$

Kriterij stabilnosti

$$m > 0, \quad \dot{x}f(x,\dot{x}) > 0, \quad xg(x) > 0$$

Linearni prigušeni oscilator - primjena pasivnosti u konstrukciji LF

Dinamički model linearnog prigušenog oscilatora

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = 0$$

izlazna varijabla $y = \dot{x}$

Kvadratna diferencijalna forma

$$\dot{x}(m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx) = m\ddot{x}\dot{x} + \gamma\dot{x}^2 + kx\dot{x} =$$
$$= m\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{x}^2\right) + \gamma\dot{x}^2 + k\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}x^2\right) =$$
$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2\right) + \gamma\dot{x}^2 = 0$$

Disipacija energije linearnog prigušenog oscilatora

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2\right)}_{E(x,\dot{x})} = -\gamma\dot{x}^2$$

Sadržaj

Lyapunovljeva analiza stabilnosti linearnih multivarijabilnih sustava

Dinamički model linearnih sustava

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \qquad \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \; \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

Lyapunovljeva funkcija

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{x}, \qquad \mathbf{P} = \mathbf{P}^T \geq 0$$

Derivacija Lyapunovljeve funkcije

$$\frac{dV(\mathbf{x})}{dt} = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{x}}^T\mathbf{P}\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{P}\dot{\mathbf{x}} = \frac{1}{2}\underbrace{(\mathbf{A}\mathbf{x})^T}_{\mathbf{x}^T\mathbf{A}^T}\mathbf{P}\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{P}(\mathbf{A}\mathbf{x}) =$$

$$= \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\left(\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}\right)\mathbf{x} = -\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x} \leq 0, \qquad \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T \geq 0$$

Kriterij stabilnosti: Linearna matrična nejednakost (LMI)

$$\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} = -\mathbf{Q} \leq 0$$

Egzistencija i jedinstvenost Lyapunovljeve funkcije

Teorem (Egzistencija i jedinstvenost Lyapunovljeve funkcije).
Sustav

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x},$$

je asimptotski stabilan ako za bilo koju pozitivno-definitnu simetričnu matricu $\mathbf{Q}$ postoji jedinstvena pozitivno definitna simetrična matrica $\mathbf{P}$ koja zadovoljava Lyapunovljevu jednadžbu

$$\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} = -\mathbf{Q}.$$

Stabilnost linearnih sustava određujemo primjenom Lyapunovljeve matrične jednadžbe na slijedeći način:

1. izabere se neka pozitivno definitna matrica $\mathbf{Q}$;
2. rješi se Lyapunovljeva jednadžba po matrici $\mathbf{P}$;
3. provjeri se da li je matrica $\mathbf{P}$ pozitivno definitna;

Kriterij pozitivne definitnosti matrice - Sylvesterov teorem

Algebarski kriterij pozitivne definitnosti matrice $\mathbf{A}$ daje nam Sylvesterov teorem:

sve vodeće subdeterminante (*leading principal minors*) matrice $\mathbf{A}$, moraju biti pozitivne

$$\Delta_1 = a_{11} > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0, \quad \ldots$$

do $\Delta_n = \det(\mathbf{A}) > 0$.

Navedeni uvjet ekvivalentan je zahtijevu da svojstvene vrijednosti matrice $\mathbf{A}$ budu pozitivne.

Definicije i svojstva vektorskih normi

Norma vektora $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ je funkcija koja preslikava vektorski prostor $\mathbb{R}^n$ u prostor nenegativnih realnih brojeva $\mathbb{R}_+$, odnosno $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$.

Funkcija $\|\cdot\|$ naziva se vektorska norma ako vrijede slijedeća svojstva

1. $\|\mathbf{x}\| \geq 0, \quad \forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$
2. $\|\mathbf{x}\| = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{0}$
3. $\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha|\,\|\mathbf{x}\|, \quad \forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R}$
4. $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|, \quad \forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ (nejednakost trokuta)

Vrijedi: $\boxed{\|\mathbf{x}^T\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|}$

L_p norma vektora

L_p norme vektora koje su definirane slijedećim izrazom

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \geq 1 \tag{1}$$

gdje je $\mathbf{x} = [x_1 \;\; x_2 \;\; \cdots \;\; x_n]^T$.

L_1 norma: $\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

L_2 norma: $\|\mathbf{x}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2} = \sqrt{\mathbf{x}^T\mathbf{x}}$

L_∞ norma: $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_i |x_i|$

Svojstva realnih simetričnih matrica

Svojstvene vrijednosti pozitivno-definitne simetrične matrice.
Svojstvene vrijednosti realne pozitivno-definitne simetrične matrice $\mathbf{A}$ su pozitivne.

Dokaz. Neka je λ_i svojstvena vrijednost matrice $\mathbf{A}$ dok je $\mathbf{u}_i$ pripadajući svojstveni vektor, odnosno: $\mathbf{A}\mathbf{u}_i = \lambda_i \mathbf{u}_i$.
Pomnožimo li navedenu jednadžbu (s lijeve strane) sa $\mathbf{u}_i^T$ dobivamo

$$\mathbf{u}_i^T \mathbf{A} \mathbf{u}_i = \lambda_i \mathbf{u}_i^T \mathbf{u}_i = \lambda_i \|\mathbf{u}_i\|^2.$$

S obzirom da je $\mathbf{A}$ pozitivno-definitna, $\mathbf{u}_i^T \mathbf{A} \mathbf{u}_i \geq 0$, te da vrijedi $\|\mathbf{u}_i\|^2 \geq 0$, direktno slijedi da mora biti zadovoljeno $\lambda_i > 0$. $\square$

Svojstva realnih simetričnih matrica

Svojstveni vektori simetrične matrice.
Svojstveni vektori realne simetrične matrice $\mathbf{A}$ međusobno su ortogonalni.

Dokaz. Neka su λ_i i λ_j dvije različite svojstvene vrijednosti matrice $\mathbf{A}$ dok su $\mathbf{u}_i$ i $\mathbf{u}_j$ pripadajući svojstveni vektori: $\mathbf{A}\mathbf{u}_i = \lambda_i \mathbf{u}_i$ i $\mathbf{A}\mathbf{u}_j = \lambda_j \mathbf{u}_j$.
Slijedi:

$$\mathbf{u}_i^T \mathbf{A}^T \mathbf{u}_j = \lambda_i \mathbf{u}_i^T \mathbf{u}_j.$$

$$\mathbf{u}_i^T \mathbf{A} \mathbf{u}_j = \lambda_j \mathbf{u}_i^T \mathbf{u}_j.$$

Zbog simetričnosti, $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$, oduzimanjem prethodnih jednadžbi dobivamo

$$(\lambda_j - \lambda_i)\mathbf{u}_i^T \mathbf{u}_j = 0.$$

S obzirom da vrijedi $\lambda_j \neq \lambda_i$ slijedi

$$\mathbf{u}_i^T \mathbf{u}_j = 0,$$

čime smo dokazali da svojstveni vektori simetrične matrice formiraju ortogonalnu bazu n-dimenzionalnog vektorskog prostora. □

Svojstva realnih simetričnih matrica

Modalna matrica pozitivno-definitne simetrične matrice.
Modalna matrica $\mathbf{P}$ pozitivno-definitne simetrične matrice $\mathbf{A}$ je ortogonalna matrica, odnosno $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^T$.
Dokaz. Modalnu matricu pozitivno-definitne simetrične matrice formiramo od ortonormiranih svojstvenih vektora matrice $\mathbf{A}$

$$\mathbf{P} = [\hat{\mathbf{u}}_1 \;\; \hat{\mathbf{u}}_2 \;\; \cdots \;\; \hat{\mathbf{u}}_n] \tag{2}$$

Na osnovu navedene definicije modalne matrice, treba provjeriti da li vrijedi svojstvo ortogonalne matrice $\mathbf{P}^T\mathbf{P} = \mathbf{I}$. Dobivamo

$$\mathbf{P}^T\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_1^T \\ \hat{\mathbf{u}}_2^T \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{u}}_n^T \end{bmatrix} [\hat{\mathbf{u}}_1 \;\; \hat{\mathbf{u}}_2 \;\; \cdots \;\; \hat{\mathbf{u}}_n] = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_1^T\hat{\mathbf{u}}_1 & \hat{\mathbf{u}}_1^T\hat{\mathbf{u}}_2 & \cdots & \hat{\mathbf{u}}_1^T\hat{\mathbf{u}}_n \\ \hat{\mathbf{u}}_2^T\hat{\mathbf{u}}_1 & \hat{\mathbf{u}}_2^T\hat{\mathbf{u}}_2 & \cdots & \hat{\mathbf{u}}_2^T\hat{\mathbf{u}}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\mathbf{u}}_n^T\hat{\mathbf{u}}_1 & \hat{\mathbf{u}}_n^T\hat{\mathbf{u}}_2 & \cdots & \hat{\mathbf{u}}_n^T\hat{\mathbf{u}}_n \end{bmatrix} = \mathbf{I}.$$

iz čega zaključujemo da je $\mathbf{P}$ ortogonalna matrica. □

Svojstva realnih simetričnih matrica

Transformacija kongruencije (congruent transformation).
S obzirom da je modalna matrica pozitivno-definitne simetrične matrice ortogonalna, slijedi da dijagonalizaciju matrice $\mathbf{A}$, primjenom transformacije sličnosti $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{\Lambda}$, možemo prikazati na slijedeći način

$$\mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{\Lambda}, \tag{3}$$

jer vrijedi $\mathbf{P}^T = \mathbf{P}^{-1}$.
Transformacija (3) naziva se *transformacija kongruencije* (*congruent transformation*).

Dijagonalizacija kvadratne forme

Kvadratnu formu $Q = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$, gdje je $\mathbf{A}$ pozitivno-definitna simetrična matrica, moguće je transformirati u oblik linearne kombinacije kvadratnih članova pomoću linearne transformacije $\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{y}$, gdje je $\mathbf{P}$ ortogonalna modalna matrica (2). Primjenimo li navedenu transformaciju dobivamo

$$Q = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}^T\mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{y} = \mathbf{y}^T\mathbf{\Lambda}\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i y_i^2, \qquad (4)$$

gdje su λ_i pozitivne svojstvene vrijednosti matrice $\mathbf{A}$.

Ocjena kvadratne forme

Ako su $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ vlastite vrijednosti realne simetrične matrice $\mathbf{A}$, dok su

$$\lambda_m\{\mathbf{A}\} = \min\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}, \qquad \lambda_M\{\mathbf{A}\} = \max\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\},$$

minimalna i maksimalna svojstvena vrijednost matrice $\mathbf{A}$, tada za svaki realni vektor x vrijedi

$$\boxed{\lambda_m\{\mathbf{A}\}\|\mathbf{x}\|^2 \leq \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \lambda_M\{\mathbf{A}\}\|\mathbf{x}\|^2} \tag{5}$$

gdje je $\|\mathbf{x}\|^2 = \mathbf{x}^T\mathbf{x}$ kvadrat Euklidske L_2 norme vektora.

Dokaz. Transformacija $\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{y}$, gdje je $\mathbf{P}$ ortogonalna modalna matrica (2), ima svojstvo

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \mathbf{x}^T\mathbf{x} = \mathbf{y}^T\mathbf{P}^T\mathbf{P}\mathbf{y} = \mathbf{y}^T\mathbf{y} = \|\mathbf{y}\|^2, \tag{6}$$

gdje smo iskoristili svojstvo unitarne matrice $\mathbf{P}^T\mathbf{P} = \mathbf{I}$.

Ocjena kvadratne forme

Nadalje, na osnovu (4) slijede nejednakosti

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 \leq \lambda_M\{\mathbf{A}\} \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \lambda_M\{\mathbf{A}\}\|\mathbf{y}\|^2, \tag{7}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 \geq \lambda_m\{\mathbf{A}\} \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \lambda_m\{\mathbf{A}\}\|\mathbf{y}\|^2, \tag{8}$$

odnosno

$$\lambda_m\{\mathbf{A}\}\|\mathbf{y}\|^2 \leq \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}^T\mathbf{\Lambda}\mathbf{y} \leq \lambda_M\{\mathbf{A}\}\|\mathbf{y}\|^2. \tag{9}$$

Uvrstimo li u prethodni izraz jednakost $\|\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2$ koja proizlazi iz (6), dobivamo

$$\lambda_m\{\mathbf{A}\}\|\mathbf{x}\|^2 \leq \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \lambda_M\{\mathbf{A}\}\|\mathbf{x}\|^2, \tag{10}$$

čime smo dokazali ocjenu kvadratne forme (5). □

Inducirana norma matrice

Induciranu normu matrice definiramo indirektno preko norme vektora. Pretpostavimo da imamo ovisnost dva vektora preko linearne transformacije, $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Kvadrat norme vektora $\mathbf{y}$ jednak je

$$\|\mathbf{y}\|^2 = \mathbf{y}^T\mathbf{y} = \mathbf{x}^T\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \lambda_M\left\{\mathbf{A}^T\mathbf{A}\right\}\|\mathbf{x}\|^2, \tag{11}$$

odnosno

$$\|\mathbf{y}\| \leq \sqrt{\lambda_M\left\{\mathbf{A}^T\mathbf{A}\right\}}\|\mathbf{x}\|. \tag{12}$$

Ako sa $\|\mathbf{A}\|_2$ označimo tzv. L_2 *induciranu normu matrice* $\mathbf{A}$

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{\lambda_M\left\{\mathbf{A}^T\mathbf{A}\right\}}, \tag{13}$$

imamo

$$\|\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{A}\|_2\|\mathbf{x}\|. \tag{14}$$

Definicija inducirane norme matrice

Ako imamo linearno preslikavanje $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, tada inducirana matrična L_p norma mora zadovoljavati

$$\boxed{\|\mathbf{y}\|_p \leq \|\mathbf{A}\|_p \|\mathbf{x}\|_p}. \tag{15}$$

Inducirana matrična norma možemo shvatiti kao maksimalno "pojačanje" linearnog operatora definiranog matricom $\mathbf{A}$.
Na osnovu prethodnog izraza možemo postaviti slijedeću definiciju

$$\|\mathbf{A}\|_p = \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_p}{\|\mathbf{x}\|_p} \tag{16}$$

Definicija inducirane norme matrice

Definicija inducirane norme može se pojednostaviti na slijedeći način.
Uvedimo normirani vektor

$$\hat{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{\alpha}, \qquad \alpha = \|\mathbf{x}\|,$$

tako da je $\mathbf{x} = \alpha\hat{\mathbf{x}}$.
Uvrstimo li navedeni izraz za $\mathbf{x}$ u (16), dobivamo

$$\|\mathbf{A}\|_p = \sup_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{A}\alpha\hat{\mathbf{x}}\|_p}{\|\alpha\hat{\mathbf{x}}\|_p} = \sup_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{|\alpha|\,\|\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}\|_p}{|\alpha|\,\|\hat{\mathbf{x}}\|_p} = \sup_{\hat{\mathbf{x}}\neq\mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}\|_p}{\|\hat{\mathbf{x}}\|_p} \tag{17}$$

S obzirom da je $\|\hat{\mathbf{x}}\|_p = 1$, definiciju (16) možemo prikazati na slijedeći način

$$\boxed{\|\mathbf{A}\|_p = \sup_{\|\mathbf{x}\|_p=1} \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_p} \tag{18}$$

Ako je $p = 2$ imamo L_2 normu, i određivanje inducirane norme po definiciji (18) možemo shvatiti kao maksimizaciju norme $\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|$ po jediničnoj kružnici $\|\mathbf{x}\| = 1$.

Standardne inducirane matrične norme

L_1 norma definirana je sa

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|, \tag{19}$$

odnosno, kao maksimum sume elemenata po stupcima (*max column sum*).

L_2 norma definirana je sa

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{\lambda_M \left\{\mathbf{A}^T \mathbf{A}\right\}}, \tag{20}$$

odnosno, kao korijen maksimalne svojstvene vrijednosti matrice $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$.

L_∞ norma definirana je sa

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|. \tag{21}$$

odnosno, kao maksimum sume elemenata po retcima (*max row sum*).

Standardne inducirane matrične norme

Tablica: Vektorske norme i odgovarajuće inducirane matrične norme

p	Vektorska norma	Inducirana matrična norma
1	$\lVert \mathbf{x} \rVert_1 = \sum_{i=1}^{n} \lvert x_i \rvert$	$\lVert \mathbf{A} \rVert_1 = \max_j \sum_{i=1}^{n} \lvert a_{ij} \rvert$
2	$\lVert \mathbf{x} \rVert_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} \lvert x_i \rvert^2 \right)^{1/2}$	$\lVert \mathbf{A} \rVert_2 = \sqrt{\lambda_M \{ \mathbf{A}^T \mathbf{A} \}}$
∞	$\lVert \mathbf{x} \rVert_\infty = \max_i \lvert x_i \rvert$	$\lVert \mathbf{A} \rVert_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} \lvert a_{ij} \rvert$

Standardne inducirane matrične norme

Inducirane matrične norme općenito zadovoljavaju slijedeća svojstva

- $\|\mathbf{Ax}\|_p \leq \|\mathbf{A}\|_p \|\mathbf{x}\|_p, \qquad \forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$
- $\|\mathbf{A}+\mathbf{B}\|_p \leq \|\mathbf{A}\|_p + \|\mathbf{B}\|_p$
- $\|\mathbf{AB}\|_p \leq \|\mathbf{A}\|_p \|\mathbf{B}\|_p$

gdje su matrice $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ odgovarajućih dimenzija.

- U analizi stabilnosti najčešće se koristi L_2 inducirana norma.
- Međutim, konkretno izračunavanje L_2 inducirane norme bitno je složenije od izračunavanja L_1 i L_∞ inducirane norme.
- Stoga su od interesa veze među različitim induciranim normama, koje omogućavaju jednostavniju ocjenu L_2 inducirane norme.

Jedna takva veza dana je slijedećim izrazom

$$\|\mathbf{A}\|_2 \leq \sqrt{\|\mathbf{A}\|_1 \|\mathbf{A}\|_\infty} \tag{22}$$

Ocjena konvergencije Lyapunovljeve funkcije

Za pozitivno definitne matrice $\mathbf{P}$ i $\mathbf{Q}$ vrijede slijedeće ocjene kvadratnih formi

$$\lambda_m\{\mathbf{P}\}\|\mathbf{x}\|^2 \leq \mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{x} \leq \lambda_M\{\mathbf{P}\}\|\mathbf{x}\|^2, \tag{23}$$

$$\lambda_m\{\mathbf{Q}\}\|\mathbf{x}\|^2 \leq \mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x} \leq \lambda_M\{\mathbf{Q}\}\|\mathbf{x}\|^2. \tag{24}$$

Primjenimo li navedene ocjene na izraze

$$V = \mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{x}, \qquad \dot{V} = -\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x}$$

dobivamo

$$\dot{V} = -\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x} \leq -\lambda_m\{\mathbf{Q}\}\|\mathbf{x}\|^2 \leq -\frac{\lambda_m\{\mathbf{Q}\}}{\lambda_M\{\mathbf{P}\}}\mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{x} \leq -\gamma V, \tag{25}$$

gdje je

$$\gamma = \frac{\lambda_m\{\mathbf{Q}\}}{\lambda_M\{\mathbf{P}\}}. \tag{26}$$

Ocjena konvergencije Lyapunovljeve funkcije

Dobili smo skalarnu diferencijalnu nejednadžbu

$$\dot{V} \leq -\gamma V, \tag{27}$$

čije rješenje je

$$V(t) \leq V(0)e^{-\gamma t}. \tag{28}$$

Nadalje, na osnovu ocjene Lyapunovljeve funkcije (28), možemo naći ocjenu konvergencije norme vektora stanja $\|\mathbf{x}(t)\|$.
Primjenimo li ocjene (23) i (24) na izraz (28), dobivamo

$$\lambda_m\{\mathbf{P}\}\|\mathbf{x}\|^2 \leq V(t) \leq V(0)e^{-\gamma t} \leq \lambda_M\{\mathbf{P}\}\|\mathbf{x}(0)\|^2 e^{-\gamma t}, \tag{29}$$

odnosno

$$\|\mathbf{x}\| < \varepsilon\|\mathbf{x}(0)\|\, e^{-\frac{\gamma}{2}t} \tag{30}$$

gdje je

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\lambda_M\{\mathbf{P}\}}{\lambda_m\{\mathbf{P}\}}}. \tag{31}$$

Kriteriji eksponencijalna stabilnost

Dinamički sustav $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ je *eksponencijalno stabilan* ako postoji funkcija $V(\mathbf{x}, t)$ i neke pozitivne konstante α_1, α_2 i α_3, takvi da vrijedi

$$\alpha_1 \|\mathbf{x}\|^2 \leq V(\mathbf{x}, t) \leq \alpha_2 \|\mathbf{x}\|^2 \tag{32}$$

$$\dot{V}(\mathbf{x}, t) \leq -\alpha_3 \|\mathbf{x}\|^2. \tag{33}$$

Dokaz. Imamo

$$\dot{V} \leq -\frac{\alpha_3}{\alpha_2} V, \tag{34}$$

iz čega slijedi

$$V(\mathbf{x}, t) \leq V(\mathbf{x}(t_0), t_0) e^{-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}(t-t_0)}. \tag{35}$$

Usporedbom sa (36) dobivamo

$$\|\mathbf{x}(t)\|^2 \leq \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \|\mathbf{x}(t_0)\|^2 e^{-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}(t-t_0)}, \tag{36}$$

odnosno, stanje sustava konvergira eksponencijalno prema nuli. □

Analiza stabilnosti perturbiranog sustava

Pretpostavimo da je provedena analiza stabilnosti asimptotski stabilnog linearnog sustava

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

pomoću Lyapunovljeve funkcije

$$V = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$$

te da je matrica $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T \geq 0$ određena rješavanjem Lyapunovljeve jednadžbe

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} = -\mathbf{Q}$$

gdje je $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T \geq 0$.

Navedena analiza stabilnosti provedena je uz pretpostavku potpunog poznavanja modela sustava, reprezentiranog matricom $\mathbf{A}$.

Analiza stabilnosti perturbiranog sustava

Pretpostavimo da je realni dinamički model sustava opisan slijedećim jednadžbama stanja

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x}), \tag{37}$$

gdje je $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ neka nepoznata funkcija (koja reprezentira nemodeliranu dinamiku sustava) za koju je poznata samo ocjena

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\| \leq k\|\mathbf{x}\|, \tag{38}$$

gdje je k neki poznati konstantni parametar.

Postavlja se pitanje pod kojim uvjetima će sustav biti asimptotski stabilan, ako znamo matrice $\mathbf{A}$, $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$, ta parametar k kojim preko (38) ocjenjujemo nepoznatu funkciju $\mathbf{f}(\mathbf{x})$.

Analiza stabilnosti perturbiranog sustava

Uzmimo Lyapunovljevu funkciju $V = \mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{x}$, te odredimo $\dot{V}$

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \dot{\mathbf{x}}^T\mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{x}^T\mathbf{P}\dot{\mathbf{x}} \\ &= [\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x})]^T\mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{x}^T\mathbf{P}[\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x})] \\ &= \mathbf{x}^T(\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A})\mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x})^T\mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ &= -\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x} + 2\mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{f}(\mathbf{x}).\end{aligned} \tag{39}$$

Vidimo da je prvi član na desnoj strani negativno definitan, međutim, drugi član je indefinitan i moramo ga ocjeniti primjenom vektorskih normi.

Ocjena prvog člana na desnoj strani:

$$\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x} \geq \lambda_m\{\mathbf{Q}\}\|\mathbf{x}\|^2, \quad \Rightarrow \quad -\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x} \leq -\lambda_m\{\mathbf{Q}\}\|\mathbf{x}\|^2. \tag{40}$$

Ocjena drugog člana na desnoj strani:

$$\mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{f}(\mathbf{x}) \leq \|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{P}\mathbf{f}(\mathbf{x})\| \leq \|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{P}\|_2\,\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\| \leq k\|\mathbf{P}\|_2\,\|\mathbf{x}\|^2. \tag{41}$$

Analiza stabilnosti perturbiranog sustava

Uvrstimo li ocjene (41) i (40) u (39), dobivamo

$$\dot{V} \leq -(\lambda_m\{\mathbf{Q}\} - 2k\|\mathbf{P}\|_2)\|\mathbf{x}\|^2. \tag{42}$$

Da bi sustav bio stabilan, mora biti $\dot{V} \leq 0$, odnosno

$$\lambda_m\{\mathbf{Q}\} - 2k\|\mathbf{P}\|_2 > 0, \tag{43}$$

iz čega proizlazi konačni uvjet stabilnosti

$$k < \frac{\lambda_m\{\mathbf{Q}\}}{2\,\|\mathbf{P}\|_2}. \tag{44}$$

S obzirom da je matrica $\mathbf{P}$ simetrična i pozitivno definitna, vrijedi $\|\mathbf{P}\|_2 = \lambda_M\,\{\mathbf{P}\}$, odnosno

$$k < \frac{1}{2}\frac{\lambda_m\{\mathbf{Q}\}}{\lambda_M\,\{\mathbf{P}\}}. \tag{45}$$

Sadržaj

Stabilnost nelinearnih perturbiranih sustava

Razmotrimo nelinearni neautonomni sustav opisan jednadžbama stanja

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{g}(\mathbf{x}, t), \tag{46}$$

gdje

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \tag{47}$$

predstavlja nominalnu dinamiku sustava dok perturbacijski član $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$ reprezentira nemodeliranu dinamiku, i/ili poremečaje koji egzistiraju u realnim sustavima.

Vidimo da je nepoznata dinamika reprezentirana kao aditivni član izraza (46).

To je uvijek moguće za nepoznatu dinamiku koja ne mijenja red sustava.

Funkcija $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$ je nepoznata ali je poznata gornja granica na $\|\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)\|$

Stabilnost nelinearnih perturbiranih sustava

Pretpostavimo da vrijedi $\mathbf{g}(\mathbf{0}, t) = \mathbf{0}$ i da je $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ eksponencijalno stabilno ravnotežno stanje nominalnog sustava (47), s Lyapunovljevom funkcijom $V(\mathbf{x}, t)$ koja zadovoljava

$$\alpha_1 \|\mathbf{x}\|^2 \leq V(\mathbf{x}, t) \leq \alpha_2 \|\mathbf{x}\|^2 \tag{48}$$

$$\dot{V}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \leq -\alpha_3 \|\mathbf{x}\|^2, \tag{49}$$

$$\left\| \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \right\| \leq \alpha_4 \|\mathbf{x}\|. \tag{50}$$

dok nemodelirani dinamički član zadovoljava

$$\|\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)\| \leq \gamma \|\mathbf{x}\|. \tag{51}$$

Ideja: iskoristiti već postojeću Lyapunovljevu funkciju $V(\mathbf{x}, t)$ neperturbiranog sustava (47) da bi dobili uvijete stabilnosti perturbiranog sustava (46).

Stabilnost nelinearnih perturbiranih sustava

Vremenska derivacija Lyapunovljeve funkcije $V(\mathbf{x},t)$ je

$$\dot{V}(\mathbf{x},t)=\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}\dot{\mathbf{x}}=\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x},t)+\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{g}(\mathbf{x},t). \tag{52}$$

Primjenjujući svojstva (49)-(50), prethodni izraz možemo ocjeniti sa

$$\dot{V}(\mathbf{x},t)\le-\alpha_3\|\mathbf{x}\|^2+\left\|\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}\right\|\|\mathbf{g}(\mathbf{x},t)\|\le-\alpha_3\|\mathbf{x}\|^2+\alpha_4\gamma\|\mathbf{x}\|^2=-(\alpha_3-\alpha_4\gamma)\|\mathbf{x}\|^2,$$

što je negativno definitna funkcija ako je zadovoljen uvijet $\alpha_3-\alpha_4\gamma>0$, odnosno

$$\gamma<\frac{\alpha_3}{\alpha_4}. \tag{53}$$

Eksponencijalna stabilnost ravnotežnog stanja robusna je na klasu perturbacija koje zadovoljavaju uvijet (51) i (53).

Stabilnost složenih sustava

- Kod analize stabilnosti nelinearnih dinamičkih sustava, složenost analize rapidno raste s povečanjem dimenzije sustava.
- Ako neki složeni dinamički sustav možemo modelirati kao međusobno spregnute podsustave nižih dimenzija, tada analizu stabilnosti možemo podijeliti u dvije faze.
- U prvoj fazi analiziramo stabilnost izoliranih podsustava.
- U drugoj fazi koristimo razultate prve faze u kombinaciji s informacijama o međusobnim spregama, da bi došli do zaključka o stabilnosti spregnutog sustava.

Stabilnost složenih sustava primjenom M-matrice

Razmotrimo slijedeći složeni sustav koji se sastoji od m međusobno spregnutih podsustava,

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i, t) + \mathbf{g}_i(\mathbf{x}, t), \qquad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{54}$$

gdje je:

- $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ vektor stanja i-tog podsustava,
- $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_m$ je dimenzija spregnutog sustava,
- $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1 \ \ \mathbf{x}_2 \ \ \cdots \ \ \mathbf{x}_m]^T$ je vektor stanja spregnutog sustava.

$\mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i, t)$ reprezentira internu dinamiku podsustava
$\mathbf{g}_i(\mathbf{x}, t)$ reprezentira sprege među podsustavima.
Vrijedi: $\mathbf{f}_i(\mathbf{0}, t) = \mathbf{0}$ i $\mathbf{g}_i(\mathbf{0}, t) = \mathbf{0}$; $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ je ravnotežno stanje sustava.
Ako ignoriramo međusobne sprege, dobivamo sustav od m izoliranih podsustava

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i, t), \qquad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{55}$$

koji imaju ravnotežno stanje $\mathbf{x}_i = \mathbf{0}$.

Stabilnost složenih sustava primjenom M-matrice

Pretpostavimo da znamo Lyapunovljeve funkcije izoliranih podsustava $V_i(\mathbf{x}, t)$ čije vremenske derivacije su negativno definitne, te da vrijede ocijene

$$c_{1i}\|\mathbf{x}_i\|^2 \leq V_i(\mathbf{x}_i, t) \leq c_{2i}\|\mathbf{x}_i\|^2, \tag{56}$$

$$\dot{V}_i(\mathbf{x}_i, t) = \frac{\partial V_i}{\partial t} + \frac{\partial V_i}{\partial \mathbf{x}_i}\mathbf{f}_i(\mathbf{x}, t) \leq -\alpha_i\|\mathbf{x}_i\|^2, \tag{57}$$

$$\left\|\frac{\partial V_i}{\partial \mathbf{x}_i}\right\| \leq \beta_i\|\mathbf{x}_i\|, \tag{58}$$

gdje su c_{1i}, c_{2i}, α_i i β_i neke pozitivne konstante.
Nadalje, pretpostavimo da član koji definira spregu među podsustavima zadovoljava ocjenu

$$\|\mathbf{g}_i(\mathbf{x}, t)\| \leq \sum_{j=1}^{m} \gamma_{ij}\|\mathbf{x}_j\|. \tag{59}$$

Stabilnost složenih sustava primjenom M-matrice

Kompozitna Lyapunovljeva funkcija:

$$V(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^{m} d_i V(\mathbf{x}_i, t), \qquad d_i > 0. \tag{60}$$

Vremenska derivacija Lyapunovljeve funkcije (60) dana je sa

$$\dot{V}(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^{m} d_i \left[\frac{\partial V_i}{\partial t} + \frac{\partial V_i}{\partial \mathbf{x}_i} \mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i, t) \right] + \sum_{i=1}^{m} d_i \frac{\partial V_i}{\partial \mathbf{x}_i} \mathbf{g}_i(\mathbf{x}, t). \tag{61}$$

Prvi član na desnoj strani je negativno definitan zbog (57), dok je drugi član općenito nedefinitan.
S obzirom da znamo ocjene svih članova prethodnog izraza, imamo

$$\dot{V}(\mathbf{x}, t) \leq \sum_{i=1}^{m} d_i \left[-\alpha_i \|\mathbf{x}_i\|^2 + \sum_{j=1}^{m} \beta_i \gamma_{ij} \|\mathbf{x}_i\| \|\mathbf{x}_j\| \right]. \tag{62}$$

Stabilnost složenih sustava primjenom M-matrice

Dobiveni izraz možemo prikazati matrično u obliku kvadratne forme po funkcijama $\|\mathbf{x}_i\|$,

$$\dot{V}(\mathbf{x},t) \leq -\frac{1}{2}\phi^T(\mathbf{DS}+\mathbf{S}^T\mathbf{D})\phi, \tag{63}$$

gdje su

$$\phi = [\|\mathbf{x}_1\| \ \ \|\mathbf{x}_2\| \ \ \cdots \ \ \|\mathbf{x}_m\|]^T, \qquad \mathbf{D} = \mathrm{diag}\{d_1, d_2, \ldots, d_m\}, \tag{64}$$

a matrica $\mathbf{S}$ je $m \times m$ matrica čiji elementi su definirani sa

$$s_{ij} = \begin{cases} \alpha_i - \beta_i\gamma_{ii}, & i = j \\ -\beta_i\gamma_{ij}, & i \neq j \end{cases}. \tag{65}$$

Da bi $\dot{V}(\mathbf{x},t)$ bila negativno definitna mora postojati pozitivna dijagonalna matrica $\mathbf{D}$, takva da vrijedi

$$\mathbf{DS}+\mathbf{S}^T\mathbf{D} > 0. \tag{66}$$

Stabilnost složenih sustava primjenom M-matrice

Stoga, dovoljan uvijet asimptotske stabilnosti ravnotežnog stanja spregnutog sustava je postojanje pozitivne dijagonalne matrice $\mathbf{D}$ takve da je $\mathbf{DS} + \mathbf{S}^T\mathbf{D}$ pozitivno definitna matrica.
Matrica $\mathbf{S}$ je specifična po tome što su njeni nedijagonalni elementi negativni. Za navedeni tip matrica vrijedi slijedeća lema.

Lema (M-matrica). Postoji pozitivna dijagonalna matrica $\mathbf{D}$ takve da je $\mathbf{DS} + \mathbf{S}^T\mathbf{D}$ pozitivno definitna ako i samo ako je $\mathbf{S}$ tzv. M-matrica; odnosno da su sve glavne subdeterminante matrice $\mathbf{S}$ pozitivne

$$\det \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1k} \\ s_{21} & s_{22} & \cdots & s_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{k1} & s_{k2} & \cdots & s_{kk} \end{bmatrix} > 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, m. \tag{67}$$

Stabilnost složenih sustava - direktan pristup

Provjera stabilnosti primjenom M-matrica može biti računski zahtijevna kako broj podsustava raste (a time i dimenzija M-matrice).
Ovdje ćemo prikazati drugi pristup analizi stabilnosti složenih sustava, bez primjene M-matrice.
Sve pretpostavke navedene u prethodnom podpoglavlju su iste, osim ocjene (59), koja u ovom slučaju ima oblik

$$\|\mathbf{g}(\mathbf{x},t)\| \leq \gamma\|\mathbf{x}\|, \tag{68}$$

gdje je

$$\mathbf{g}(\mathbf{x},t) = [\mathbf{g}_1(\mathbf{x},t) \;\; \mathbf{g}_2(\mathbf{x},t) \;\; \cdots \;\; \mathbf{g}_m(\mathbf{x},t)]^T$$

Stabilnost složenih sustava - direktan pristup

Ključna razlika je u drugačijem tretiranju nedefinitnih članova u izrazu za vremensku derivaciju Lyapunovljeve funkcije (61).
Navedeni član (uz $d_i = 1$) možemo ocijeniti na slijedeći način

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial V_i}{\partial \mathbf{x}_i} \mathbf{g}_i(\mathbf{x}, t) \leq \left\| \begin{bmatrix} \frac{\partial V_1}{\partial \mathbf{x}_1} & \frac{\partial V_2}{\partial \mathbf{x}_2} & \cdots & \frac{\partial V_m}{\partial \mathbf{x}_m} \end{bmatrix} \right\| \|\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)\| \tag{69}$$

gdje smo primjenili svojstvo skalarnog produkta vektora, $\mathbf{z}^T \mathbf{y} \leq \|\mathbf{z}\| \, \|\mathbf{y}\|$.
Primjenom definicije vektorske norme te svojstva (68), izraz (69) postaje

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial V_i}{\partial \mathbf{x}_i} \mathbf{g}_i(\mathbf{x}, t) &\leq \gamma \left(\sum_{i=1}^{m} (\beta_i \|\mathbf{x}_i\|)^2 \right)^{1/2} \|\mathbf{x}\| \leq \\ &\leq \gamma \beta_{\max} \left(\sum_{i=1}^{m} \|\mathbf{x}_i\|^2 \right)^{1/2} \|\mathbf{x}\| = \gamma \beta_{\max} \|\mathbf{x}\|^2, \end{aligned} \tag{70}$$

Stabilnost složenih sustava - direktan pristup

...tako da izraz (61) konačno postaje

$$\dot{V}(\mathbf{x},t) \leq -\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \|\mathbf{x}_i\|^2 + \gamma\beta_{\max}\|\mathbf{x}\|^2 \leq$$
$$\leq -\alpha_{\min}\|\mathbf{x}\|^2 + \gamma\beta_{\max}\|\mathbf{x}\|^2 = -(\alpha_{\min} - \gamma\beta_{\max})\|\mathbf{x}\|^2, \qquad (71)$$

gdje su

$$\alpha_{\min} = \min\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\}, \qquad \beta_{\max} = \max\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m\}. \qquad (72)$$

Da bi derivacija Lyapunovljeve funkcije (71) bila negativno-definitna mora biti zadovoljen uvjet

$$\alpha_{\min} - \gamma\beta_{\max} > 0, \qquad (73)$$

koji je bitno jednostavniji od uvjeta za ispitivanje M-matrice.