Sveučilište u Zagrebu
Fakultet strojarstva i brodogradnje

Zadaci za vježbe iz kolegija

Opća teorija sustava

Josip Kasać, Vladimir Milić

Zagreb, 29. studenoga 2018.

Sadržaj

Uvodne napomene

U ovim podlogama su zadaci namijenjeni rješavanju na vježbama iz kolegija Opća teorija sustava za smjerove Mehatronika i robotika, te Računalno inženjerstvo. Ovdje su prikazani zadaci s gotovim rješenjima bez dodatnih objašnjenja, pa kao takvi služe samo kao nadopuna osnovnoj literaturi [1, 2]. Pojedini zadaci su i preuzeti iz navedene literature.

Za rješavanje zadataka potrebna su predznanja iz osnova matematičke analize, matrične algebre i automatskog upravljanja, zato se u svrhu ponavljanja gradiva studenti/ce upućuju na npr. [3, 4, 5, 6, 7]. Također, dobro će doći i poznavanje nekog od matematičkih programskih paketa.

Notacija koja se koristi je prilično standardna. Matrice su predstavljene velikim, masnim slovima. Svi vektori predstavljeni su malim masnim slovima. Skalarne veličine su predstavljene malim kosim slovima.

Prostor realnih vektora duljine n je označen s $\mathbb{R}^n$, dok je prostor realnih matrica dimenzije $m \times n$ označen s $\mathbb{R}^{m\times n}$. Komponente matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ označavamo s a_{ij} za $i = 1, 2, \ldots, m$ i $j = 1, 2, \ldots, n$.

Simbol $^{\mathrm{T}}$ označava transponiranje matrice ili vektora. $\mathbf{I}_n$ je jedinična matrica dimenzije $n\times n$, $\mathbf{1}_{m\times n}$ je matrica kojoj su svi elementi jednaki jedinici i $\mathbf{0}_{m\times n}$ je nul-matrica dimenzije $m \times n$, ili jednostavnije $\mathbf{I}$, $\mathbf{1}$ i $\mathbf{0}$ ako se dimenzije mogu trivijalno odrediti iz konteksta.

Euklidska (p-2) norma vektora je označena s $\|\mathbf{v}\|$, dijagonalna matrica je označena s $\mathrm{diag}(a_{11},\ a_{22},\ \ldots,\ a_{nn})$, determinanta matrice je označena s $|\mathbf{A}|$ ili $\det(\mathbf{A})$, adjungirana matrica označena je s $\mathrm{adj}(\mathbf{A})$, rang matrice je označen s $\mathrm{rank}(\mathbf{A})$.

Kroneckerov produkt matrica $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ i $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{p\times q}$ označen je s $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{mp\times nq}$. Operator $\mathrm{vec}(\cdot)$ prevodi matricu u vektor tako da stupce matrice postavlja jedan ispod drugog.

Autori će biti zahvalni svakomu tko upozori na greške ili predloži dodatne i poboljšane zadatke.

Fazne varijable stanja

1.1 Zadatak

Dinamika sustava opisana je sljedećom diferencijalnom jednadžbom

$$3\,\dddot{y}(t) + 7\,\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + 5\,y(t) = u(t). \tag{1.1}$$

Zapišite dinamiku sustava u obliku prostora stanja izborom faznih varijabli stanja.

Rješenje:

Dinamika sustava u obliku prostora stanja je:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{B}\,\mathbf{u}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\,\mathbf{x} + \mathbf{D}\,\mathbf{u}, \end{aligned} \tag{1.2}$$

gdje su:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} y & \dot{y} & \ddot{y} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{u} = [u], \\ \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{7}{3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{0}_{1\times 1}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

1.2 Zadatak

Prikažite matematički model sustava od N elastično spregnutih masa u obliku prostora stanja.

Rješenje:

Sustav od N elastično spregnutih masa možemo u općem slučaju opisati sljedećom diferencijalnom jednadžbom u matričnom obliku

$$\mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}\,\mathbf{y} = \mathbf{F}, \tag{1.4}$$

gdje su

$$\begin{aligned}
\mathbf{y} &= \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_N \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_N \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \\
\mathbf{M} &= \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & m_N \end{bmatrix}, \\
\mathbf{K} &= \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -k_N & k_N + k_{N+1} \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Prethodnu diferencijalnu jednadžbu možemo zapisati u obliku prostora stanja na sljedeći način:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{B}\,\mathbf{u}, \tag{1.6}$$

gdje su

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} &= \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_1 = \mathbf{y}, \quad \mathbf{x}_2 = \dot{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{u} = \mathbf{F}, \\
\mathbf{A} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{N\times N} & \mathbf{I}_{N\times N} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & \mathbf{0}_{N\times N} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{N\times N} \\ \mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{1.7}$$

1.3 Zadatak

Dinamiku sustava opisanu sljedećom diferencijalnom jednadžbom

$$\dot{y}(t) + 10\,y(t) = 10\,u(t) + 25\,\dot{u}(t), \tag{1.8}$$

zapišite u obliku prostora stanja.

Rješenje:

Dinamika sustava u obliku prostora stanja je:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{B}\,\mathbf{u}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\,\mathbf{x} + \mathbf{D}\,\mathbf{u}, \end{aligned} \tag{1.9}$$

gdje su:

$$\mathbf{x} = [x_1], \quad \mathbf{u} = [u], \quad \mathbf{A} = [-10], \quad \mathbf{B} = [1], \quad \mathbf{C} = [-240], \quad \mathbf{D} = [25]. \tag{1.10}$$

1.4 Zadatak

Dinamiku sustava opisanu sljedećom diferencijalnom jednadžbom

$$\ddot{y}(t) + y(t) = \ddot{u}(t) + \dot{u}(t), \tag{1.11}$$

zapišite u obliku prostora stanja.

Rješenje:

Dinamika sustava u obliku prostora stanja je:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{B}\,\mathbf{u}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\,\mathbf{x} + \mathbf{D}\,\mathbf{u}, \end{aligned} \tag{1.12}$$

gdje su:

$$\begin{aligned} &\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = [u], \\ &\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{1}_{1\times 1}, \end{aligned} \tag{1.13}$$

ili što je ekvivalentno

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{1}_{1\times 1}. \tag{1.14}$$

1.5 Zadatak

Dinamiku sustava opisanu sljedećom prijenosnom funkcijom

$$G(s) = \frac{s+3}{s(s^2+2\,s+2)}, \tag{1.15}$$

zapišite u obliku prostora stanja.

Rješenje:

Dinamika sustava u obliku prostora stanja je:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{B}\,\mathbf{u}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\,\mathbf{x} + \mathbf{D}\,\mathbf{u}, \end{aligned} \tag{1.16}$$

gdje su:

$$\begin{aligned} &\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = [u], \\ &\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{0}_{1\times 1}, \end{aligned} \tag{1.17}$$

ili što je ekvivalentno

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{0}_{1\times 1}. \tag{1.18}$$

1.6 Zadatak

Dinamiku sustava opisanu sljedećim diferencijalnim jednadžbama

$$
\begin{aligned}
\dddot{y}(t) + \dot{y}(t) + 3\,y(t) &= \ddot{u}_1(t) + \dot{u}_2(t) + u_1(t), \\
\ddot{z}(t) &= \dot{u}_1(t) + \dot{u}_2(t) + u_2(t),
\end{aligned}
\tag{1.19}
$$

zapišite u obliku prostora stanja.

Rješenje:

Dinamika sustava u obliku prostora stanja je:

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{B}\,\mathbf{u}, \\
\mathbf{y} &= \mathbf{C}\,\mathbf{x} + \mathbf{D}\,\mathbf{u},
\end{aligned}
\tag{1.20}
$$

gdje su:

$$
\begin{gathered}
\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \\
\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{0}_{2\times 2}.
\end{gathered}
\tag{1.21}
$$

1.7 Zadatak

Dinamiku sustava opisanu sljedećim diferencijalnim jednadžbama

$$
\begin{aligned}
\dddot{y}(t) - 3\,\ddot{z}(t) &= \dddot{u}_1(t) - 2\,\dot{u}_1(t) + u_2(t), \\
\dddot{z}(t) + 3\,\ddot{y}(t) &= \dddot{u}_2(t) + 2\,\ddot{u}_2(t) - u_1(t),
\end{aligned}
\tag{1.22}
$$

zapišite u obliku prostora stanja.

Rješenje:

Dinamika sustava u obliku prostora stanja je:

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{B}\,\mathbf{u}, \\
\mathbf{y} &= \mathbf{C}\,\mathbf{x} + \mathbf{D}\,\mathbf{u},
\end{aligned}
\tag{1.23}
$$

gdje su:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}},$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \\ 0 & 3 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}, \tag{1.24}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1.8 Zadatak

Dinamiku sustava opisanu sljedećim diferencijalnim jednadžbama

$$\begin{aligned} \dddot{y}(t) + 4\,\dot{y}(t) + z(t) &= \ddot{u}_2(t) + 2\,u_1(t), \\ \dot{z}(t) + y(t) &= \dot{u}_1(t) + u_1(t), \end{aligned} \tag{1.25}$$

zapišite u obliku prostora stanja. Također, odredite matricu prijenosnih funkcija.

Rješenje:

Dinamika sustava u obliku prostora stanja je:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{B}\,\mathbf{u}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\,\mathbf{x} + \mathbf{D}\,\mathbf{u}, \end{aligned} \tag{1.26}$$

gdje su:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}},$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{1.27}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matrica prijenosnih funkcija je:

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{s-1}{s^4+4s^2-1} & \dfrac{s^3}{s^4+4s^2-1} \\ \dfrac{s^4+s^3+4s^2+4s-2}{s^4+4s^2-1} & \dfrac{-s^2}{s^4+4s^2-1} \end{bmatrix}. \tag{1.28}$$

Kanonske varijable stanja

2.1 Zadatak

Dinamiku sustava opisanu sljedećom prijenosnom funkcijom

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2\,s + 1}{s^2 + 3\,s + 2}, \tag{2.1}$$

zapišite u obliku prostora stanja izborom kanonskih varijabli stanja.

Rješenje:

Izraz (2.1) možemo zapisati u sljedećem obliku:

$$Y(s) = -\frac{U(s)}{s+1} + 3\,\frac{U(s)}{s+2}. \tag{2.2}$$

Dinamika sustava u obliku prostora stanja je:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{B}\,\mathbf{u}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\,\mathbf{x} + \mathbf{D}\,\mathbf{u}, \end{aligned} \tag{2.3}$$

gdje su:

$$\begin{aligned} &\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = [u], \\ &\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{1}_{2\times 1}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{0}_{1\times 1}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

2.2 Zadatak

Dinamiku sustava opisanu sljedećom prijenosnom funkcijom

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2\,s^2 + 3\,s + 2}{(s+1)(s+2)^2}, \tag{2.5}$$

zapišite u obliku prostora stanja izborom kanonskih varijabli stanja.

Rješenje:

Izraz (2.5) možemo zapisati u sljedećem obliku:

$$Y(s) = \frac{U(s)}{s+1} + \frac{U(s)}{s+2} - 4\,\frac{U(s)}{(s+2)^2}. \tag{2.6}$$

Dinamika sustava u obliku prostora stanja je:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{B}\,\mathbf{u}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\,\mathbf{x} + \mathbf{D}\,\mathbf{u}, \end{aligned} \tag{2.7}$$

gdje su:

$$\begin{aligned} &\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = [u], \\ &\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{0}_{1\times 1}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

2.3 Zadatak

Dinamiku sustava opisanu sljedećim diferencijalnim jednadžbama

$$\begin{aligned} \ddot{z}_1(t) + 4\,\dot{z}_1(t) + 3\,z_1(t) &= u(t), \\ \ddot{z}_2(t) + 6\,\dot{z}_2(t) + 8\,z_2(t) &= z_1(t), \end{aligned} \tag{2.9}$$

zapišite u obliku prostora stanja izborom kanonskih varijabli stanja. Izlazna varijabla je $y(t) = z_2(t)$.

Rješenje:

Budući da je izlazna varijabla $y(t) = z_2(t)$ dobivamo sljedeće:

$$Y(s) = Z_2(s), \tag{2.10}$$
$$Y(s) = \frac{1}{(s^2 + 6\,s + 8)(s^2 + 4\,s + 3)}\,U(s), \tag{2.11}$$
$$Y(s) = -\frac{1}{2}\,\frac{U(s)}{s+2} - \frac{1}{6}\,\frac{U(s)}{s+4} + \frac{1}{6}\,\frac{U(s)}{s+1} + \frac{1}{2}\,\frac{U(s)}{s+3}. \tag{2.12}$$

Dinamika sustava u obliku prostora stanja je:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{B}\,\mathbf{u}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\,\mathbf{x} + \mathbf{D}\,\mathbf{u}, \end{aligned} \tag{2.13}$$

gdje su:

$$\begin{aligned} &\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{u} = [u], \\ &\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{1}_{4\times 1}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{0}_{1\times 1}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

2.4 Zadatak

Dinamiku sustava opisanu sljedećim diferencijalnim jednadžbama

$$\begin{aligned} \ddot{z}_1(t) + 4\,\dot{z}_1(t) + 3\,z_1(t) &= \dot{u}(t) + 2\,u(t), \\ \ddot{z}_2(t) + 6\,\dot{z}_2(t) + 8\,z_2(t) &= \dot{u}(t) + u(t), \end{aligned} \tag{2.15}$$

zapišite u obliku prostora stanja izborom kanonskih varijabli stanja. Izlazna varijabla je $y(t) = z_1(t) + z_2(t)$.

Rješenje:

Budući da je izlazna varijabla $y(t) = z_1(t) + z_2(t)$ dobivamo sljedeće

$$Y(s) = Z_1(s) + Z_2(s), \tag{2.16}$$
$$Y(s) = \frac{s+2}{s^2 + 4\,s + 3}\,U(s) + \frac{s+1}{s^2 + 6\,s + 8}\,U(s), \tag{2.17}$$
$$Y(s) = \frac{1}{2}\,\frac{U(s)}{s+1} + \frac{1}{2}\,\frac{U(s)}{s+3} - \frac{1}{2}\,\frac{U(s)}{s+2} + \frac{3}{2}\,\frac{U(s)}{s+4}. \tag{2.18}$$

Dinamika sustava u obliku prostora stanja je:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{B}\,\mathbf{u}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\,\mathbf{x} + \mathbf{D}\,\mathbf{u}, \end{aligned} \tag{2.19}$$

gdje su:

$$\begin{aligned} &\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{u} = [u], \\ &\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{1}_{4\times 1}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{0}_{1\times 1}. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Rješenja linearnih sustava

3.1 Zadatak

Odredite rješenje linearnog sustava za opće početne uvjete $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} x_{10} & x_{20} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \omega\, x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\omega\, x_1. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Rješenje:

Rješenje sustava $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ je:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= e^{\mathbf{A}\,t}\,\mathbf{x}(0), \\ \mathbf{x}(t) &= \begin{bmatrix} \cos(\omega\,t) & \sin(\omega\,t) \\ -\sin(\omega\,t) & \cos(\omega\,t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{x}(t) &= \begin{bmatrix} x_{10}\,\cos(\omega\,t) + x_{20}\,\sin(\omega\,t) \\ -x_{10}\,\sin(\omega\,t) + x_{20}\,\cos(\omega\,t) \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

3.2 Zadatak

Odredite matricu prijelaza sustava ako je matrica koeficijenata

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}. \tag{3.3}$$

Rješenje:

Matrica prijelaza sustava je:

$$e^{\mathbf{A}\,t} = \begin{bmatrix} \cos(t)+\sin(t) & -2\,\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t)-\sin(t) \end{bmatrix}. \tag{3.4}$$

3.3 Zadatak

Odredite rješenje linearnog sustava za opće početne uvjete $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} x_{10} & x_{20} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a\,x_1 + b\,x_2, \\ \dot{x}_2 &= a\,x_2. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Rješenje:

Rješenje sustava $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ je:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= e^{\mathbf{A}\,t}\,\mathbf{x}(0), \\ \mathbf{x}(t) &= \begin{bmatrix} e^{a\,t} & b\,t\,e^{a\,t} \\ 0 & e^{a\,t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{x}(t) &= \begin{bmatrix} x_{10}\,e^{a\,t} + x_{20}\,b\,t\,e^{a\,t} \\ x_{20}\,e^{a\,t} \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

3.4 Zadatak

Odredite rješenje linearnog sustava za početne uvjete $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} x_{10} & x_{20} & x_{30} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -2\,x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 &= -2\,x_2, \\ \dot{x}_3 &= x_1 - x_2. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Rješenje:

Rješenje sustava $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ je:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} e^{-2\,t} + t\,e^{-2\,t} \\ e^{-2\,t} \\ \frac{9}{4} - \frac{1}{4}\,e^{-2\,t} - \frac{1}{2}\,t\,e^{-2\,t} \end{bmatrix}. \tag{3.8}$$

3.5 Zadatak

Odredite rješenje linearnog sustava za opće početne uvjete $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} x_{10} & x_{20} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ primjenom Cayley-Hamiltonovog teorema.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 5\,x_1 + \sqrt{2}\,x_2, \\ \dot{x}_2 &= \sqrt{2}\,x_1 + 4\,x_2. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Rješenje:

Svojstvene vrijednosti matrice koeficijenata sustava $\mathbf{A}$ su:

$$\det(\lambda\,\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_1 = 6,\; \lambda_2 = 3, \tag{3.10}$$

na osnovu kojih se dobivaju

$$\begin{bmatrix} \alpha_0(t) \\ \alpha_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^{6\,t} + 2\,e^{3\,t} \\ \frac{1}{3}\,e^{6\,t} - \frac{1}{3}\,e^{3\,t} \end{bmatrix}, \tag{3.11}$$

pa je konačno rješenje $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= e^{\mathbf{A}\,t}\,\mathbf{x}(0) = [\alpha_0(t)\,\mathbf{I} + \alpha_1(t)\,\mathbf{A}]\;\mathbf{x}(0), \\ \mathbf{x}(t) &= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2\,e^{6\,t} + e^{3\,t} & \sqrt{2}\,e^{6\,t} - \sqrt{2}\,e^{3\,t} \\ \sqrt{2}\,e^{6\,t} - \sqrt{2}\,e^{3\,t} & e^{6\,t} + 2\,e^{3\,t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{x}(t) &= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} x_{10}\,(2\,e^{6\,t} + e^{3\,t}) + x_{20}\,(\sqrt{2}\,e^{6\,t} - \sqrt{2}\,e^{3\,t}) \\ x_{10}\,(\sqrt{2}\,e^{6\,t} - \sqrt{2}\,e^{3\,t}) + x_{20}\,(e^{6\,t} + 2\,e^{3\,t}) \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

3.6 Zadatak

Odredite rješenje linearnog sustava za opće početne uvjete $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} x_{10} & x_{20} & x_{30} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ primjenom Cayley-Hamiltonovog teorema.

$$\dddot{y}(t) + 5\,\dot{y} = 0. \tag{3.13}$$

Rješenje:

Svojstvene vrijednosti matrice koeficijenata sustava $\mathbf{A}$ su:

$$\det(\lambda\,\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_1 = 0,\; \lambda_2 = i\,\sqrt{5},\; \lambda_3 = -i\,\sqrt{5}. \tag{3.14}$$

na osnovu kojih se dobivaju

$$\begin{bmatrix} \alpha_0(t) \\ \alpha_1(t) \\ \alpha_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{\sqrt{5}}\,\sin(t\,\sqrt{5}) \\ \frac{1}{5}\,(1-\cos(t\,\sqrt{5})) \end{bmatrix}, \tag{3.15}$$

pa je konačno rješenje $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} y(t) & \dot{y}(t) & \ddot{y}(t) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(t) &= e^{\mathbf{A}\,t}\,\mathbf{x}(0) = \left[\alpha_0(t)\,\mathbf{I} + \alpha_1(t)\,\mathbf{A} + \alpha_2(t)\,\mathbf{A}^2\right]\,\mathbf{x}(0), \\
\mathbf{x}(t) &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{5}}\,\sin(t\,\sqrt{5}) & \frac{1}{5}\,(1-\cos(t\,\sqrt{5})) \\ 0 & \cos(t\,\sqrt{5}) & \frac{1}{\sqrt{5}}\,\sin(t\,\sqrt{5}) \\ 0 & -\sqrt{5}\,\sin(t\,\sqrt{5}) & \cos(t\,\sqrt{5}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ x_{30} \end{bmatrix}, \\
\mathbf{x}(t) &= \begin{bmatrix} x_{10} + x_{20}\,\frac{1}{\sqrt{5}}\,\sin(t\,\sqrt{5}) + x_{30}\,\frac{1}{5}\,(1-\cos(t\,\sqrt{5})) \\ x_{20}\,\cos(t\,\sqrt{5}) + x_{30}\,\frac{1}{\sqrt{5}}\,\sin(t\,\sqrt{5}) \\ -x_{20}\,\sqrt{5}\,\sin(t\,\sqrt{5}) + x_{30}\,\cos(t\,\sqrt{5}) \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

3.7 Zadatak

Odredite rješenja $y(t)$, $z(t)$, $w(t)$ sustava diferencijalnih jednadžbi za početne uvjete $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 1$, $z(0) = 2$, $w(0) = 3$ primjenom Cayley-Hamiltonovog teorema.

$$\begin{aligned} \ddot{y}(t) + \dot{y}(t) - 6\,y(t) &= 0, \\ \dot{z}(t) - 5\,z(t) &= 0, \\ \ddot{w}(t) &= z(t)\,y(t). \end{aligned} \tag{3.17}$$

Rješenje:

Prve dvije diferencijalne jednadžbe iz sustava su linearne u kojima imamo samo po jednu zavisnu varijablu $y(t)$ i $z(t)$, pa ih možemo riješiti svaku zasebno.

Svojstvene vrijednosti matrice koeficijenata $\mathbf{A}$ sustava opisanog prvom jednadžbom su:

$$\det(\lambda\,\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_1 = 2,\; \lambda_2 = -3. \tag{3.18}$$

na osnovu kojih se dobivaju

$$\begin{bmatrix} \alpha_0(t) \\ \alpha_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5}\,e^{2\,t} + \frac{2}{5}\,e^{-3\,t} \\ \frac{1}{5}\,e^{2\,t} - \frac{1}{5}\,e^{-3\,t} \end{bmatrix}, \tag{3.19}$$

pa je konačno rješenje $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} y(t) & \dot{y}(t) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ prve jednadžbe za početne uvjete $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} x_{10} & x_{20} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} y(0) & \dot{y}(0) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= e^{\mathbf{A}\,t}\,\mathbf{x}(0) = [\alpha_0(t)\,\mathbf{I} + \alpha_1(t)\,\mathbf{A}]\;\mathbf{x}(0), \\ \mathbf{x}(t) &= \begin{bmatrix} \frac{3}{5}\,e^{2\,t} + \frac{2}{5}\,e^{-3\,t} & \frac{1}{5}\,e^{2\,t} - \frac{1}{5}\,e^{-3\,t} \\ \frac{6}{5}\,e^{2\,t} - \frac{6}{5}\,e^{-3\,t} & \frac{2}{5}\,e^{2\,t} + \frac{3}{5}\,e^{-3\,t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ y(t) &= x_1(t) = \frac{1}{5}\,e^{2\,t} - \frac{1}{5}\,e^{-3\,t}. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Rješenje druge diferencijalne jednadžbe iz sustava za početni uvjet $z(0) = 2$ lako se dobiva:

$$z(t) = 2e^{5\,t}. \tag{3.21}$$

Sada treća diferencijalna jednadžba sustava postaje

$$\ddot{w}(t) = z(t)\,y(t) = \frac{2}{5}\,e^{7\,t} - \frac{2}{5}\,e^{2\,t}, \tag{3.22}$$

čije je rješenje za jedan zadani početni uvjet $w(0) = 3$ sljedeće:

$$w(t) = \frac{303}{98} + \frac{1}{7}\,t + t\,\dot{w}(0) - \frac{1}{10}\,e^{2\,t} + \frac{2}{245}\,e^{7\,t}. \tag{3.23}$$

3.8 Zadatak

Odredite rješenja homogenog linearnog sustava primjenom Cayley-Hamiltonovog teorema za opće početne uvjete $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} x_{10} & x_{20} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ ako je matrica koeficijenata:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}. \tag{3.24}$$

Rješenje:

Svojstvene vrijednosti matrice koeficijenata sustava $\mathbf{A}$ su:

$$\det(\lambda\,\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_1 = \lambda_2 = -2, . \tag{3.25}$$

na osnovu kojih se dobivaju

$$\begin{bmatrix} \alpha_0(t) \\ \alpha_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-2\,t} + 2\,t\,e^{-2\,t} \\ t\,e^{-2\,t} \end{bmatrix}, \tag{3.26}$$

pa je konačno rješenje $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(t) &= e^{\mathbf{A}\,t}\,\mathbf{x}(0) = [\alpha_0(t)\,\mathbf{I} + \alpha_1(t)\,\mathbf{A}]\;\mathbf{x}(0), \\
\mathbf{x}(t) &= \begin{bmatrix} e^{-2\,t} + t\,e^{-2\,t} & -t\,e^{-2\,t} \\ t\,e^{-2\,t} & e^{-2\,t} - t\,e^{-2\,t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}, \\
\mathbf{x}(t) &= \begin{bmatrix} x_{10}\,(e^{-2\,t} + t\,e^{-2\,t}) - x_{20}\,t\,e^{-2\,t} \\ x_{10}\,t\,e^{-2\,t} + x_{20}\,(e^{-2\,t} - t\,e^{-2\,t}) \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Transformacija stanja linearnih sustava

4.1 Zadatak

Dinamički sustav opisan matricama u prostoru stanja

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -20 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{4.1}$$

prevedite u kanonsku formu

Rješenje:

Svojstvene vrijednosti matrice koeficijenata sustava $\mathbf{A}$ su:

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0 \ \Rightarrow \ \lambda_1 = 2, \ \lambda_2 = -2, \ \lambda_3 = 5. \tag{4.2}$$

Za stupce modalne matrice $\mathbf{P}$ odabiremo svojstvene vektore matrice $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 5 \\ 4 & 4 & 25 \end{bmatrix}, \ \mathbf{P}^{-1} = \frac{\mathrm{adj}(\mathbf{P})}{\det(\mathbf{P})} = -\frac{1}{84} \begin{bmatrix} -70 & -21 & 7 \\ -30 & 21 & -3 \\ 16 & 0 & -4 \end{bmatrix}. \tag{4.3}$$

Dobro je uočiti da je matrica $\mathbf{P}$ u Vandermomdovoj formi svojstvenih vrijednosti matrice $\mathbf{A}$.

Transformacije matrica sustava u kanonsku formu su:

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{P}^{-1}\,\mathbf{A}\,\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix},\quad \hat{\mathbf{B}} = \mathbf{P}^{-1}\,\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{19}{12} & \frac{13}{12} \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{28} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{4}{21} \end{bmatrix},$$
$$\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\,\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 5 \end{bmatrix},\quad \hat{\mathbf{D}} = \mathbf{D}. \tag{4.4}$$

4.2 Zadatak

Dinamički sustav opisan matricama u prostoru stanja

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -4 \end{bmatrix},\quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix},\quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix},\quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{4.5}$$

prevedite u kanonsku formu.

Rješenje:

Svojstvene vrijednosti matrice koeficijenata sustava $\mathbf{A}$ su: $\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = -3,\ \lambda_3 = -4$.

Za stupce modalne matrice $\mathbf{P}$ odabiremo ne-nul stupce matrice $\mathrm{adj}(\lambda_i\,\mathbf{I} - \mathbf{A})$:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix},\quad \mathbf{P}^{-1} = \frac{\mathrm{adj}(\mathbf{P})}{\det(\mathbf{P})} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}. \tag{4.6}$$

Transformacije matrica sustava u kanonsku formu su:

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{P}^{-1}\,\mathbf{A}\,\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix},\quad \hat{\mathbf{B}} = \mathbf{P}^{-1}\,\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 3 & 6 & 1 \\ 1 & \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix},$$
$$\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\,\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 7 & -1 & 1 \\ 12 & -3 & 2 \end{bmatrix},\quad \hat{\mathbf{D}} = \mathbf{D}. \tag{4.7}$$

4.3 Zadatak

Ako je matrica koeficijenata sustava:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \tag{4.8}$$

odredite matricu koeficijenata u kanonskoj formi i modalnu matricu.

Rješenje:

Svojstvene vrijednosti matrice koeficijenata sustava $\mathbf{A}$ su:

$$\det(\lambda\,\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1. \tag{4.9}$$

Transformacija matrice $\mathbf{A}$ u kanonsku (Jordanovu) formu je:

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{P}^{-1}\,\mathbf{A}\,\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{4.10}$$

Provjera: Budući da je $r = \mathrm{rank}(\lambda_1\,\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 2$, broj jedinica iznad glavne dijagonale matrice $\hat{\mathbf{A}}$ treba biti $k + r - n = 2$, gdje je $k = 3$ broj ponavljanja svojstvenih vrijednosti, a $n = 3$ red sustava. ✓

Budući da se svojstvene vrijednosti ponavljaju, stupce modalne matrice $\mathbf{P}$ odabiremo iz $\mathrm{adj}(\lambda\,\mathbf{I} - \mathbf{A})$ i $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\,\mathrm{adj}(\lambda\,\mathbf{I} - \mathbf{A})$, te rješavanjem jednadžbe $\mathbf{A}\,\mathbf{P} = \mathbf{P}\,\hat{\mathbf{A}}$:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}^{-1} = \frac{\mathrm{adj}(\mathbf{P})}{\det(\mathbf{P})} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{4.11}$$

4.4 Zadatak

Odredite modalne matrice ako su matrice koeficijenata sustava:

a)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}, \tag{4.12}$$

b)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -12 & -6 \end{bmatrix}. \tag{4.13}$$

Rješenje:

Budući da su matrice koeficijenata u Frobeniusovoj formi modalnu matricu možemo izabrati u Vandermondovoj formi.
Svojstvene vrijednosti matrice pod a) su $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -2,\ \lambda_3 = -3$, pa za modalnu matricu možemo izabrati

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}. \tag{4.14}$$

Svojstvene vrijednosti matrice pod b) su $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -2$, pa ćemo za stupce modalne matrice izabrati $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 & \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{p}_1}{\mathrm{d}\lambda_1} & \dfrac{1}{2!}\dfrac{\mathrm{d}^2\mathbf{p}_1}{\mathrm{d}\lambda_1^{(2)}} \end{bmatrix}$, gdje je $\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & 1 & 0 \\ \lambda_1^2 & 2\,\lambda_1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & -4 & 1 \end{bmatrix}. \tag{4.15}$$

4.5 Zadatak

Neka je zadana matrica koeficijenata sustava $\mathbf{A}$ dimenzije 3×3 kojoj su svojstvene vrijednosti $\lambda_1 = \sigma + i\,\omega$, $\lambda_2 = \sigma - i\,\omega$ i $\lambda_3 \in \mathbb{R}$. Izvedite izraze za matrice sustava u kanonskoj formi koje će biti u prostoru realnih matrica.

Rješenje:

Transformirana matrica koeficijenata u prostoru $\mathbb{C}^{3\times 3}$ ima sljedeći oblik:

$$\hat{\mathbf{A}}^* = \begin{bmatrix} \sigma + i\,\omega & 0 & 0 \\ 0 & \sigma - i\,\omega & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \mathbf{P}^{-1}\,\mathbf{A}\,\mathbf{P}. \tag{4.16}$$

Modalna matrica sustava je također $\mathbf{P} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$. Kako bi dobili matricu $\hat{\mathbf{A}} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ potrebno je provesti sljedeću transformaciju:

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{K}^{-1}\,\hat{\mathbf{A}}^*\,\mathbf{K}, \;\; \text{gdje je} \;\; \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{i}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{4.17}$$

Ako uvedemo $\mathbf{T} = \mathbf{P}\,\mathbf{K}$ koja je $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tada možemo pisati:

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\,\mathbf{A}\,\mathbf{T}, \;\; \hat{\mathbf{B}} = \mathbf{T}^{-1}\,\mathbf{B}, \;\; \hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\,\mathbf{T}, \;\; \hat{\mathbf{D}} = \mathbf{D}, \tag{4.18}$$

čime sve matrice postaju realne.

Upravljivost i osmotrivost stanja linearnih sustava

5.1 Zadatak

Za koje vrijednosti parametra a sustav opisan jednadžbama

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -a\,x_1 + 3\,x_2 + u, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + 3a\,x_2 + 2a\,u, \\ y &= a\,x_1 - x_2, \end{aligned} \tag{5.1}$$

nema potpuno: a) upravljiva[1] stanja, b) osmotriva[2] stanja.

Rješenje:

Matrice koeficijenata, ulaza i izlaza sustava su:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -a & 3 \\ -1 & 3a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} a & -1 \end{bmatrix}. \tag{5.2}$$

Matrica upravljivosti stanja sustava je

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5a \\ 2a & 6a^2 - 1 \end{bmatrix}. \tag{5.3}$$

Sustav ima potpuno upravljiva stanja ako je $\text{rank}(\mathbf{E}) = n$, gdje je n red sustava. Budući da je $\mathbf{E}$ kvadratna matrica imamo $\text{rank}(\mathbf{E}) = n$ ako i samo ako $\det(\mathbf{E}) \neq 0$, pa sustav neće imati potpuno upravljiva stanja za

$$\det(\mathbf{E}) = -4a^2 - 1 = 0 \;\Rightarrow\; a_{1,2} = \pm\frac{i}{2}. \tag{5.4}$$

[1]engl. *Controllability*
[2]engl. *Observability*

Matrica osmotrivosti stanja sustava je

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -1 \\ 1-a^2 & 0 \end{bmatrix}. \tag{5.5}$$

Sustav ima potpuno osmotriva stanja ako je $\mathrm{rank}(\mathbf{H}) = n$, gdje je n red sustava. Budući da je $\mathbf{H}$ kvadratna matrica imamo $\mathrm{rank}(\mathbf{H}) = n$ ako i samo ako $\det(\mathbf{H}) \neq 0$, pa sustav neće imati potpuno osmotriva stanja za

$$\det(\mathbf{H}) = 1 - a^2 = 0 \ \Rightarrow \ a_{1,2} = \pm 1. \tag{5.6}$$

5.2 Zadatak

Za koje kombinacije vrijednosti parametara a i b sustav opisan matricama u prostoru stanja

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 2 & -4 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a & b \\ 4 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} a & 3 & 2 \\ b & 2 & 6 \end{bmatrix}, \ \mathbf{D} = \mathbf{0}_{2\times 2}, \tag{5.7}$$

nema potpuno: a) upravljiva stanja, b) osmotriva stanja.

Rješenje:

Zadatak ćemo riješiti primjenom modalne analize. Za stupce modalne matrice $\mathbf{P}$ ćemo izabrati normirane svojstvene vektore matrice $\mathbf{A}$. Svojstvene vrijednosti matrice $\mathbf{A}$ su: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -3$, $\lambda_3 = -4$. Rješavanjem svojstvene zadaće $\mathbf{A}\,\mathbf{v}_i = \lambda_i\,\mathbf{v}_i$ za $i = 1,2,3$ dobivamo normirane svojstvene vektore

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \ \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \ \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{5.8}$$

Modalna matrica je:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{5.9}$$

Transformirana matrica ulaza je:

$$\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{P}^{-1}\,\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \dfrac{a\sqrt{3}}{2} - 2\sqrt{3} & \dfrac{b\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{a\sqrt{3}}{2} + 2\sqrt{3} & \dfrac{b\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \\ 4-a & 5-b \end{bmatrix}. \tag{5.10}$$

Uvjet potpune upravljivosti stanja je da matrica $\hat{\mathbf{B}}$ nema niti jedan nul-redak iz čega slijedi da sustav nema potpuno upravljiva stanja za sljedeće kombinacije parametara:

$$\begin{aligned} &a = 4 \text{ i } b = 5, \\ &a = 4 \text{ i } b = 3, \\ &a = -4 \text{ i } b = -3. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Transformirana matrica izlaza je:

$$\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\,\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \dfrac{a\sqrt{3}}{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{3} & \dfrac{a\sqrt{3}}{3} + \dfrac{5\sqrt{3}}{3} & 3 \\ \dfrac{b\sqrt{3}}{3} - \dfrac{4\sqrt{3}}{3} & \dfrac{b\sqrt{3}}{3} + \dfrac{8\sqrt{3}}{3} & 2 \end{bmatrix}. \tag{5.12}$$

Uvjet potpune osmotrivosti stanja je da matrica $\hat{\mathbf{C}}$ nema niti jedan nul-stupac iz čega slijedi da sustav nema potpuno osmotriva stanja za sljedeće kombinacije parametara:

$$\begin{aligned} &a = -1 \text{ i } b = 4, \\ &a = -5 \text{ i } b = -8. \end{aligned} \tag{5.13}$$

5.3 Zadatak

Za koje kombinacije vrijednosti parametara a i b sustav opisan matricama u prostoru stanja

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 \\ a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & b \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{0}_{1\times 1}, \tag{5.14}$$

nema potpuno: a) upravljiva stanja, b) osmotriva stanja.

Rješenje:

Analizu upravljivosti i osmotrivosti provest ćemo u kompleksnoj (Laplaceovoj) domeni. Za analizu upravljivosti potrebna nam je matrica prijenosnih funkcija između vektora ulaza i vektora stanja sustava

$$
\begin{aligned}
\mathbf{X}(s) &= \mathbf{G}_s(s)\,\mathbf{U}(s), \\
\mathbf{G}_s(s) &= (s\,\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \dfrac{3s+3a+6}{s^2+3s-4} \\ \dfrac{as+a+6}{s^2+3s-4} \end{bmatrix}.
\end{aligned}
\tag{5.15}
$$

Ako u matrici prijenosnih funkcija između ulaza i stanja $\mathbf{G}_s(s)$ nema kraćenja polova i nula, tada sustav ima potpuno upravljiva stanja. U dobivenoj matrici prijenosnih funkcija doći će do kraćenja nula i polova, tj. sustav neće imati potpuno upravljiva stanja za sljedeće kombinacije parametra a:

$$
a = 2 \text{ ili } a = -3. \tag{5.16}
$$

Za analizu osmotrivosti potrebna nam je veza između vektora izlaza i vektora početnih uvjeta stanja sustava

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Y}(s) &= \mathbf{G}_y(s)\,\mathbf{X}_0, \\
\mathbf{G}_y(s) &= \mathbf{C}\,(s\,\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{s+2b+2}{s^2+3s-4} & \dfrac{bs+b+6}{s^2+3s-4} \end{bmatrix}.
\end{aligned}
\tag{5.17}
$$

Ako u matrici $\mathbf{G}_y(s)$ nema kraćenja polova i nula, tada sustav ima potpuno osmotriva stanja. U dobivenoj matrici doći će do kraćenja nula i polova, tj. sustav neće imati potpuno osmotriva stanja za sljedeće kombinacije parametra b:

$$
b = 1 \text{ ili } b = -\frac{3}{2}. \tag{5.18}
$$

Sinteza regulatora stanja linearnih sustava

6.1 Zadatak

Provedite sintezu statičkog regulatora stanja za sustav u matričnoj formi

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \tag{6.1}$$

tako da svojstvene vrijednosti matrice koeficijenata zatvorenog sustava (polovi sustava) budu $\lambda_{d1} = -1$, $\lambda_{d2} = -2$, $\lambda_{d3} = -4$, a stacionarno stanje varijable x_1 bude $x_1^* = 1$.

Rješenje:

Linearni statički regulator za zadani sustav opisan je sljedećim zakonom upravljanja

$$u = -\mathbf{K}\,\mathbf{x} + w, \tag{6.2}$$

gdje su $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix}$ matrica konstantnih pojačanja i w referentni vektor vođenja. Matrica koeficijenata zatvorenog sustava je

$$\mathbf{A}_{cl} = \mathbf{A} - \mathbf{B}\,\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -k_1 & -k_2 & 2-k_3 \end{bmatrix}. \tag{6.3}$$

Željeni karakteristični polinom zatvorenog sustava je:

$$(\lambda - \lambda_{d1})\,(\lambda - \lambda_{d2})\,(\lambda - \lambda_{d3}) = \lambda^3 + 7\,\lambda^2 + 14\,\lambda + 8, \tag{6.4}$$

dok je karakteristični polinom matrice $\mathbf{A}_{cl}$

$$\det(\lambda\,\mathbf{I}-\mathbf{A}_{cl}) = \lambda^3 + (k_3-2)\,\lambda^2 + (k_2-1)\,\lambda + k_1 + k_2 - k_3 + 2. \tag{6.5}$$

Izjednačavanjem (6.5) sa (6.4) dobivaju se:

$$k_1 = 0, \quad k_2 = 15, \quad k_3 = 9. \tag{6.6}$$

Jednadžba stacionarnog stanja zatvorenog sustava je

$$\mathbf{A}_{cl}\,\mathbf{x}^* = -\mathbf{B}\,w, \tag{6.7}$$

čijim se rješavanjem dobiva referentni vektor vođenja kojim se ostvaruje željeno stacionarno stanje $x_1^* = 1$, $w = 8$, pa zakon upravljanja u konačnom obliku glasi:

$$u = -\begin{bmatrix} 0 & 15 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + 8. \tag{6.8}$$

6.2 Zadatak

Provedite sintezu statičkog regulatora stanja za sustav opisan matricama u prostoru stanja

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{6.9}$$

tako da svojstvene vrijednosti matrice koeficijenata zatvorenog sustava (polovi sustava) budu $\lambda_{d1} = -1$, $\lambda_{d2} = -2$, $\lambda_{d3} = -3$, a stacionarna stanja izlaznih varijabli budu 1.

Rješenje:

Linearni statički regulator za zadani sustav opisan je sljedećim zakonom upravljanja

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\,\mathbf{x} + \mathbf{w}, \tag{6.10}$$

gdje su matrica konstantnih pojačanja

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \end{bmatrix}, \tag{6.11}$$

i $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ referentni vektor vođenja.

Opisani sustav možemo podijeliti na dva podsustava s obzirom na upravljačke varijable, tj. sintezu zakona upravljanja u_1 možemo provesti za podsustav kojeg opisuju varijable x_1 i x_2 uz odgovarajuću eliminaciju varijable x_3, dok sintezu zakona upravljanja u_2 možemo provesti za podsustav kojeg opisuje varijabla x_3 uz odgovarajuću eliminaciju varijable x_1.

Matrice podsustava kojeg opisuju varijable x_1 i x_2 su

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{6.12}$$

Upravljački zakon za podsustav kojeg opisuju varijable x_1 i x_2 je

$$u_1 = -\underbrace{\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}_1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + w_1 - k_{13}x_3. \tag{6.13}$$

Za eliminaciju varijable x_3 iz prvog podsustava potrebno je da bude $k_{13} = 1$. Karakteristični polinom prvog podsustava je

$$\det(\lambda\,\mathbf{I} - (\mathbf{A}_1 - \mathbf{B}\mathbf{K}_1)). \tag{6.14}$$

Ako za željene svojstvene vrijednosti prvog podsustava uzmemo $\lambda_{d1} = -1$, $\lambda_{d2} = -2$ tada se dobivaju pojačanja $k_{11} = 6$ i $k_{12} = 5$.

Upravljački zakon za podsustav kojeg opisuje varijabla x_3 je

$$u_2 = -k_{21}x_1 - k_{22}x_2 - k_{23}x_3 + w_2. \tag{6.15}$$

Za eliminaciju varijable x_1 iz drugog podsustava treba biti $k_{21} = -1$, dok je $k_{22} = 0$. Budući da za svojstvenu vrijednost (pol) drugog podsustava sada uzimamo $\lambda_{d3} = -3$ direktno dobivamo $k_{23} = 2$.

Željena stacionarna stanja $x_1^* = 1$ i $x_3^* = 1$ bit će ostvarena za $w_1 = 2$ i $w_2 = 3$, pa zakon upravljanja u konačnom obliku glasi:

$$\mathbf{u} = -\begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}. \tag{6.16}$$

6.3 Zadatak

Provedite sintezu statičkog regulatora stanja za sustav opisan matricama u prostoru stanja

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{6.17}$$

tako da svojstvene vrijednosti matrice koeficijenata zatvorenog sustava (polovi sustava) budu $\lambda_{d1} = -2$, $\lambda_{d2} = -3$, $\lambda_{d3} = -4$, a stacionarna stanja varijabli budu 1.

Rješenje:

Linearni statički regulator za zadani sustav opisan je sljedećim zakonom upravljanja

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\,\mathbf{x} + \mathbf{w}, \tag{6.18}$$

gdje su matrica konstantnih pojačanja

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix}, \tag{6.19}$$

i referentni vektor vođenja

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}. \tag{6.20}$$

Treba uočiti da je matrica $\mathbf{B}$ gornje trokusta i da su joj na glavnoj dijagonali svi elementi različiti od 0, pa prema tome je regularna, tj. postoji $\mathbf{B}^{-1}$. Za matricu koeficijenata zatvorenog sustava možemo odabrati

$$\mathbf{A}_{cl} = \mathrm{diag}(\lambda_{d1},\ \lambda_{d2},\ \lambda_{d3}) = \mathrm{diag}(-2,\ -3,\ -4). \tag{6.21}$$

Sada matricu pojačanja $\mathbf{K}$ možemo direktno dobiti rješavanjem matrične jednadžbe

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{cl} &= \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}, \\ \mathbf{K} &= \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{A} - \mathbf{A}_{cl}) = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 11 \\ 2 & -2 & -13 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{6.22}$$

Referentni vektor vođenja kojim se ostvaruje željeno stacionarno stanje možemo direktno dobiti rješavanjem matrične jednadžbe

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{cl}\mathbf{x}^* &= -\mathbf{B}\mathbf{w}, \\ \mathbf{w} = -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_{cl}\mathbf{x}^* &= \begin{bmatrix} 7 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{6.23}$$

Zakon upravljanja u konačnom obliku glasi:

$$\mathbf{u} = -\begin{bmatrix} 0 & 3 & 11 \\ 2 & -2 & -13 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix}. \tag{6.24}$$

6.4 Zadatak

Dinamika sustava opisana je u prostoru stanja

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_2 \end{bmatrix} u, \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{6.25}$$

Provedite sintezu linearnog regulatora stanja koji će omogućiti asimptotsko slijeđenje kontinuirane referentne trajektorije $y_d(t)$.

Rješenje:

Definirajmo pogrešku slijeđenja kao razliku izlazne varijable i referentne trajektorije

$$e(t) = y(t) - y_d(t). \tag{6.26}$$

Zakon upravljanja treba omogućiti da $e(t)$ asimptotski konvergira prema nuli. Kako bi odredili takav zakon upravljanja potrebno je jednadžbu pogreške (6.26) derivirati sve dok se u njoj ne pojavi upravljačka varijabla. Druga derivacije pogreške je

$$\ddot{e}(t) = (a_{11}^2 + a_{12}a_{21})x_1 + (a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22})x_2 + a_{12}b_2u - \ddot{y}_d(t). \tag{6.27}$$

Izraz (6.27) predstavlja diferencijalnu jednadžbu dinamike pogreške koja da bi imala rješenje $e(t)$ koje asimptotski konvergira prema nuli treba biti u obliku

$$\ddot{e}(t) + k_D\dot{e}(t) + k_P e(t) = 0, \quad \text{za} \;\; k_P > 0, \;\; k_D > 0. \tag{6.28}$$

Upravljačka varijabla koja iz (6.27) daje (6.28) je

$$\begin{aligned}
u &= -\frac{1}{a_{12}b_2}\left[(a_{11}^2 + a_{12}a_{21})x_1 + (a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22})x_2 - \ddot{y}_d(t) + k_D\dot{e} + k_P e\right], \\
u &= -\underbrace{\frac{a_{11}^2 + a_{12}a_{21} + k_D a_{11} + k_P}{a_{12}b_2}}_{k_1} x_1 - \underbrace{\frac{a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22} + k_D a_{12}}{a_{12}b_2}}_{k_2} x_2 + \underbrace{\frac{\ddot{y}_d + k_D\dot{y}_d + k_P y_d}{a_{12}b_2}}_{w}, \\
u &= -\begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + w.
\end{aligned} \tag{6.29}$$

6.5 Zadatak

Na kolica mase 2 kg djeluje horizontalna upravljačka sila. Trenje i elastične sile su zanemarive. Provedite sintezu linearnog statičkog regulatora koji će osigurati asimptotski stabilno pozicioniranje kolica na udaljenosti 1 m. Polovi sustava neka budu $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$.

Rješenje:

Dinamika sustava opisana je sljedećom diferencijalnom jednadžbom

$$m\ddot{y}(t) = F. \tag{6.30}$$

Ako izaberemo $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$, $u = F$ tada je dinamika sustava u obliku prostora stanja

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u, \\
y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{6.31}$$

Definirajmo pogrešku pozicioniranja kao razliku izlazne varijable i referentne pozicije

$$e(t) = y(t) - y_d(t) = x_1 - 1. \tag{6.32}$$

Druga derivacija pogreške je

$$\ddot{e}(t) = \frac{1}{m}u. \tag{6.33}$$

Za stabilno asimptotsko pozicioniranje diferencijalna jednadžba pogreške treba biti oblika

$$\ddot{e}(t) + k_D\dot{e}(t) + k_P e(t) = 0, \quad \text{za} \;\; k_P > 0, \;\; k_D > 0. \tag{6.34}$$

Zakon upravljanja kojim se to ostvaruje je

$$\begin{aligned}
u &= -2k_D\dot{e} - 2k_P e, \\
u &= -2k_P x_1 - 2k_D x_2 + 2k_p, \\
u &= -\begin{bmatrix} 2k_P & 2k_D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + 2k_P.
\end{aligned} \tag{6.35}$$

Matrica koeficijenata zatvorenog sustava je Frobeniusovoj formi

$$\mathbf{A}_{cl} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_P & -k_D \end{bmatrix}, \tag{6.36}$$

koja mora imati karateristični polinom $(\lambda + 1)(\lambda + 2) = \lambda^2 + 3\lambda + 2$, tako da direktno slijede iznosi pojačanja $k_P = 2$, $k_D = 3$.

Ljapunovljeva analiza stabilnosti

7.1 Zadatak

Pokažite da je ravnotežno stanje sustava

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2,\\ \dot{x}_2 &= -x_1^3 - x_2^3,\end{aligned} \tag{7.1}$$

globalno asimptotski stabilno u smislu Ljapunova. Kandidata za Ljapunovljevu funkciju uzmite

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}x_1^4 + \frac{1}{2}x_2^2. \tag{7.2}$$

Rješenje:

Derivacija Ljapunovljeve funkcije je:

$$\begin{aligned}\dot{V}(\mathbf{x}) &= \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix}\frac{\partial V}{\partial x_1} & \frac{\partial V}{\partial x_2}\end{bmatrix} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}),\\ \dot{V}(\mathbf{x}) &= \begin{bmatrix}x_1^3 & x_2\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}x_2\\ -x_1^3 - x_2^3\end{bmatrix} = -x_2^4 \leq 0.\end{aligned} \tag{7.3}$$

Budući da je derivacija Ljapunovljeve funkcije negativno semidefinitna, kako bi pokazali globalnu asimptotsku stabilnost trebamo LaSalleov princip invarijantnosti, tj. korolar koji slijedi iz njega:

Ako skup $\Omega \triangleq \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \dot{V}(\mathbf{x}) = 0\right\}$ ne sadrži druga rješenja osim trivijalnog $\mathbf{x}(t) \equiv 0$, tada je ravnotežno stanje globalno asimptotski stabilno.

Treba primijetiti da $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$ implicira $x_2 = 0$, dakle imamo $\Omega \triangleq \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | x_2 = 0\}$. Neka je $\mathbf{x}(t)$ rješenje koje istovjetno pripada u Ω:

$$x_2(t) \equiv 0 \;\Rightarrow\; \dot{x}_2(t) \equiv 0 \;\Rightarrow\; x_1^3(t) \equiv 0 \;\Rightarrow\; x_1(t) \equiv 0. \tag{7.4}$$

Prema tome, jedino rješenje koje može ostati istovjetno u Ω je trivijalno $\mathbf{x}(t) \equiv 0$. Dakle, možemo zaključiti da je ravnotežno stanje globalno asimptotski stabilno.

7.2 Zadatak

Komentirajte stabilnost ravnotežnog stanja sustava

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -x_1 + 2x_1^2 x_2 \\ -x_2 \end{bmatrix}, \tag{7.5}$$

u smislu Ljapunova. Kandidata za Ljapunovljevu funkciju uzmite

$$V(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2. \tag{7.6}$$

Rješenje:

Derivacija Ljapunovljeve funkcije je:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}) &= \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} & \frac{\partial V}{\partial x_2} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -x_1 + 2x_1^2 x_2 \\ -x_2 \end{bmatrix}, \\ \dot{V}(\mathbf{x}) &= -2x_1^2 + 4x_1^3 x_2 - 2x_2^2 = -2x_2^2 - 2x_1^2(1 - 2x_1 x_2). \end{aligned} \tag{7.7}$$

Derivacija Ljapunovljeve funkcije bit će negativno definitna za

$$1 - 2x_1 x_2 > 0 \;\Rightarrow\; x_1 x_2 < \frac{1}{2}. \tag{7.8}$$

Prema tome imamo

$$V(\mathbf{x}) > 0,\ \dot{V}(\mathbf{x}) < 0,\ \forall \mathbf{x} \in D \setminus \{0\},\ D \triangleq \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 | x_1 x_2 < \frac{1}{2} \right\}, \tag{7.9}$$

iz čega zaključujemo da je ravnotežno stanje lokalno asimptotski stabilno.

7.3 Zadatak

Dinamika sustava opisana je sljedećim diferencijalnim jednadžbama

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 &= \sin(x_1) + x_1^2 + u. \end{aligned} \tag{7.10}$$

Odredite zakon upravljanja $u = \alpha(x_1, x_2)$ koji će omogućiti stabilizaciju sustava u okolini ravnotežnog stanja u smislu Ljapunova. Kandidata za Ljapunovljevu funkciju uzmite

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2. \tag{7.11}$$

Rješenje:

Derivacija Ljapunovljeve funkcije je:

$$\begin{aligned}\dot{V}(\mathbf{x}) &= \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} & \frac{\partial V}{\partial x_2} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -x_1 + x_2 \\ \sin(x_1) + x_1^2 + u \end{bmatrix}, \\ \dot{V}(\mathbf{x}) &= -x_1^2 + x_2\left(x_1 + \sin(x_1) + x_1^2 + u\right).\end{aligned} \tag{7.12}$$

Uvjeti globalne asimptotske stabilnosti ravnotežnog stanja u smislu Ljapunova su $V(\mathbf{x}) > 0$, $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$, $\forall \mathbf{x} \neq 0$, koji će biti ispunjeni za zakon upravljanja u sljedećem obliku

$$u = \alpha(x_1, x_2) = -x_1 - x_1^2 - \sin(x_1) - x_2. \tag{7.13}$$

7.4 Zadatak

Dinamika mehaničkog njihala pokretanog istosmjernim elektromotorom u vertikalnoj ravnini opisana je sljedećim diferencijalnim jednadžbama

$$J\,\ddot{q} + B\,\dot{q} + K\,q^3 + m\,g\,l\,\sin(q) = K_t\,i_a, \tag{7.14}$$

$$L_a\frac{di_a}{dt} + R_a\,i_a + K_v\,\dot{q} = u_a, \tag{7.15}$$

gdje su q kut zakreta njihala [rad], T ulazni moment [Nm], J ukupni moment tromosti oko osi koja prolazi zglobom [kgm^2], B koeficijent prigušenja [Nms/rad], K koeficijent elastičnosti [Nm/rad^3], m masa njihala [kg], l udaljenost težišta od osi zgloba [m], g akceleracija sile teže [m/s^2], u_a napon armature motora [V], i_a struja armature motora [A], R_a ukupni radni otpor armaturnog kruga motora [Ω], L_a ukupni induktivitet armaturnog kruga motora [H], K_t momentna konstanta motora [Nm/A] i K_v naponska konstanta motora [Vs]. Zbog jednostavnosti promatramo slučaj za $K_t = K_v$.

Potrebno je odrediti uvjete stabilnosti, u smislu Ljapunova, zatvorenog sustava ako je zakon upravljanja $u_a = -K_R\,i_a$.

Rješenje:

U konstrukciji Ljapunovljeve funkcije primijenit ćemo koncepte disipativnosti i pasivnosti. Kod mahaničkog podsustava preslikavanje momenta $\tau = K_t\, i_a$ (ulazna varijabla) na kutnu brzinu $\dot{q}$ (izlazna varijabla) je pasivno, a kod električnog podsustava preslikavanje napona u_a (ulazna varijabla) na struju i_a (izlazna varijabla) je pasivno. Zbog toga ćemo jednadžbu (7.14) pomnožiti s $\dot{q}$, a jednadžbu (7.15) ćemo pomnožiti s i_a, čime dobivamo

$$\begin{aligned} J\, \ddot{q}\, \dot{q} + B\, \dot{q}^2 + K\, q^3\, \dot{q} + m\, g\, l\, \sin(q)\, \dot{q} &= K_t\, i_a\, \dot{q}, \\ L_a \frac{di_a}{dt}\, i_a + R_a\, i_a^2 + K_t\, \dot{q}\, i_a &= -K_R\, i_a^2. \end{aligned} \tag{7.16}$$

Zbrajanjem prethodne dvije jednadžbe dobivamo

$$J\, \ddot{q}\, \dot{q} + K\, q^3\, \dot{q} + m\, g\, l\, \sin(q)\, \dot{q} + L_a \frac{di_a}{dt}\, i_a = -B\, \dot{q}^2 - R_a\, i_a^2 - K_R\, i_a^2. \tag{7.17}$$

Nadalje, prethodni izraz možemo napisati u sljedećem obliku

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}\, J\, \dot{q}^2 + \frac{1}{4}\, K\, q^4 + m\, g\, l\, (1 - \cos(q)) + \frac{1}{2}\, L_a\, i_a^2\right] = -B\, \dot{q}^2 - (R_a + K_R)\, i_a^2. \tag{7.18}$$

Izraz u uglatoj zagradi predstavlja kandidata za Ljapunovljevu funkciju $V(q, \dot{q}, i_a) > 0$ što je ujedno i ukupna energija sustava, dok izraz na desnoj strani jednakosti predstavlja derivaciju Ljapunovljeve funkcije $\dot{V}(q, \dot{q}, i_a)$. Uvjet $\dot{V}(q, \dot{q}, i_a) \leq 0$ će biti ispunjen za $R_a + K_R > 0$.

7.5 Zadatak

Rješavanjem Ljapunovljeve jednadžbe komentirajte stabilnost ravnotežnog stanja sustava

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 - 2x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_1 - 4x_2. \end{aligned} \tag{7.19}$$

Rješenje:

Matrica koeficijenata zadanog homogenog sustava je:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}. \tag{7.20}$$

Ljapunovljeva jednadžba linearnog homogenog sustava je:

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\, \mathbf{P} + \mathbf{P}\, \mathbf{A} = -\mathbf{Q}, \;\; \mathbf{P} = \mathbf{P}^{\mathrm{T}} > 0, \quad \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} > 0. \tag{7.21}$$

Ljapunovljevu jednadžbu možemo riješiti primjenom Kroneckerovog produkta i operacije vektorizacije, čime dobivamo

$$\left[\mathbf{I}_{2\times 2} \otimes \mathbf{A}^{\mathrm{T}} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \otimes \mathbf{I}_{2\times 2}\right] \cdot \mathrm{vec}(\mathbf{P}) = -\mathrm{vec}(\mathbf{Q}). \tag{7.22}$$

Ako za matricu $\mathbf{Q}$ izaberemo jediničnu matricu tada je rješenje prethodne jednadžbe:

$$\begin{aligned} \mathrm{vec}(\mathbf{P}) &= -\left[\mathbf{I}_{2\times 2} \otimes \mathbf{A}^{\mathrm{T}} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \otimes \mathbf{I}_{2\times 2}\right]^{-1} \cdot \mathrm{vec}(\mathbf{I}_{2\times 2}), \\ \mathrm{vec}(\mathbf{P}) &= \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ p_{12} \\ p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23/60 \\ -7/60 \\ -7/60 \\ 11/60 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 23/60 & -7/60 \\ -7/60 & 11/60 \end{bmatrix} > 0. \end{aligned} \tag{7.23}$$

Zadaci za ponavljanje gradiva s nižih godina studija

A.1 Zadatak

Odredite sljedeće derivacije ($a, b, c = const.$):

1. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[a \sin(bt)\right]$,
2. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[a \cos(bt)\right]$,
3. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[ae^{bt}\right]$,
4. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[ae^{bt} \sin(ct)\right]$,
5. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\dfrac{t^a + \sin(bt)}{e^{ct} + 1}\right]$

A.2 Zadatak

Odredite sljedeće integrale ($a, b = const.$):

1. $\displaystyle\int_0^t a\tau \mathrm{d}\tau$,
2. $\displaystyle\int_0^t \tau^2 \mathrm{d}\tau$,
3. $\displaystyle\int_0^t e^{a\tau} \mathrm{d}\tau$,
4. $\displaystyle\int_0^t \sin(a\tau) \mathrm{d}\tau$,
5. $\displaystyle\int_0^t a\tau e^{b\tau} \mathrm{d}\tau$,

6. $\displaystyle\int_0^t a\tau \sin(b\tau)\mathrm{d}\tau,$

7. $\displaystyle\int_0^t e^{a\tau} \sin(b\tau)\mathrm{d}\tau.$

A.3 Zadatak

Zbrojite sljedeće matrice:

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 \\ -7 & 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 7 & -9 \end{bmatrix} = ? \tag{A.1}$$

A.4 Zadatak

Pomnožite sljedeće matrice/vektore:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = ?,$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 14 & 16 & 18 \end{bmatrix} = ?, \tag{A.2}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 \\ -3 & 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & -1 & 8 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = ?$$

A.5 Zadatak

Transponirajte sljedeće matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \\ 5 & 1 & 8 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = ?, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = ? \tag{A.3}$$

A.6 Zadatak

Sljedeće matrice svedite na ešalonsku formu:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 9 \\ 2 & 6 & 7 & 6 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 6 & 2 \\ 3 & 6 & 6 & 9 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & -1 & 7 & 3 & 9 \\ -2 & 2 & -2 & 7 & 5 \\ -5 & 9 & 3 & 3 & 4 \\ -2 & 6 & 6 & 3 & 7 \end{bmatrix}. \tag{A.4}$$

A.7 Zadatak

Odredite rang sljedećih matrica

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & 8 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 9 & 5 & 2 & 2 \\ 7 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 8 \\ 2 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & 8 & 6 \end{bmatrix}. \tag{A.5}$$

A.8 Zadatak

Izračunajte euklidske norme sljedećih vektora

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix}. \tag{A.6}$$

A.9 Zadatak

Za matrice

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & -7 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -3 & 1 & -3 \\ 20 & 3 & 10 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \tag{A.7}$$

odredite:

a) svojstvene vrijednosti,

b) svojstvene vektore,

c) determinantu,

d) adjung,

e) inverz.

A.10 Zadatak

Riješite sljedeću diferencijalnu jednadžbu za opće početne uvjete

$$\ddot{y}(t) + g\,\dot{y}(t) + k\,y(t) = 0, \tag{A.8}$$

gdje su g i k realne pozitivne konstante.

A.11 Zadatak

Dinamika sustava opisana je sljedećom diferencijalnom jednadžbom:

$$x_i^{(4)}(t) + 8\ddot{x}_i(t) + 16x_i(t) = -\ddot{x}_u(t) + 4x_u(t), \tag{A.9}$$

gdje je $x_i(t)$ izlazna varijabla, a $x_u(t)$ ulazna varijabla. Primjenom Laplaceove transformacije odredite

a) prijenosnu funkciju sustava,

b) prijelaznu i težinsku funkciju sustava za $x_i(0) = 1$ dok su ostali početni uvjeti jednaki 0.

A.12 Zadatak

Primjenom algebarskih kriterija po Routhu i Hurwitzu komentirajte stabilnost sustava s obzirom na realne konstante K_R, K_P i K_I kojemu je karakteristična jednadžba:

1. $5s^3 + 6s^2 + (K_R + 16)s + 15 = 0$,

2. $s^3 + 6s^2 + (K_R + 6)s + 1 + 2K_R = 0$,

3. $s^4 + 35s^3 + 375s^2 + 2000s + 125K_R + 5000 = 0$,

4. $s^4 + 12s^3 + 46s^2 + (2K_P + 52)s + 2K_I = 0$.

Literatura

[1] D. Majetić, J. Kasać, and D. Brezak. *Zbirka zadataka iz teorije automatskog upravljanja. Viševarijabilni sustavi.* FSB, Zagreb, 2016.

[2] B. Novaković. *Regulacijski sistemi.* Sveučilišna naklada, Zagreb, 1990.

[3] B. Guljaš. *Matematička analiza 1 i 2.* PMF-Matematički odsjek, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 2017. Dostupno na: https://web.math.pmf.unizg.hr/~guljas/skripte/MATANALuR.pdf.

[4] A. J. Laub. *Matrix analysis for scientists and engineers.* SIAM, Philadelphia, 2005.

[5] C. D. Meyer. *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra.* SIAM, Philadelphia, 2000.

[6] G. Strang. *Linear Algebra and Its Applications.* Thomson Learning Inc., USA, 1988.

[7] Z. Vukić and Lj. Kuljača. *Automatsko upravljanje: analiza linearnih sustava.* Kigen, Zagreb, 2005.