Sveučilište u Zagrebu
Fakultet strojarstva i brodogradnje

# Opća teorija sustava

Josip Kasać

Zagreb, 2007.

# Predgovor

Ovo su nerecenzirani i nelektorirani materijali za kolegij "Opća teorija sustava", koji služe kao nadopuna osnovnoj literaturi.

Sadržaj teksta će se mijenjati i nadopunjavati sve do kraja semestra.

Josip Kasač

Komentari, primjedbe, pitanja: josip.kasac@fsb.hr

Zagreb, 2007.

# Sadržaj

# 1 Pregled literature

Navodimo pregled literature po pojedinim nastavnim cjelinama. Veći dio navedene literature dostupan je u elektroničkom formatu (pdf, djvu).

*Nastavne cjeline kolegija* ***Opća teorija sustava****:*

**1. Rješenje linearnih multivarijabilnih sustava**.

Literatura: [1], Ch. 10; [2], Ch. 4, 5; [3], Ch. 9; [4], Ch. 11; [5], Ch. 11; [6], Ch. 5, 10; [7];

**2. Kontrolabilnost, observabilnost, senzitivnost**.

Literatura: [1], Ch. 10; [8], Ch. 2; [2], Ch. 8; [9], Ch. 9; [10], Ch. 4; [7];

**3. Signali i sustavi; $\mathcal{L}_2$ norma signala. Barbalat lema**.

Literatura: [1], Ch. 10; [11], Ch. 3; [12], Ch. 2; [13], Ch. 4, 5; [14], Ch. 4; [15], Ch. 2;

**4. Lyapunovljeva analiza stabilnosti. LMI**.

Literatura: [16], Ch. 3, 4; [17], Ch. 4; [2], Ch. 9; [5], Ch. 13;

**5. Lyapunov-like analiza stabilnosti. Invarijantni skupovi**.

Literatura: [18], Ch. 3; [16], Ch. 4;

**6. Analiza stabilnosti složenih sustava**.

Literatura: [17], Ch. 9;

**7. Koncept disipativnosti i pasivnosti dinamičkih sustava**.

Literatura: [17], Ch. 6; [19], Ch. 8, 11; [20], Ch. 1; [21]; [22], Ch. 2;

**8. Port-controlled Hamiltonian systems**.

Literatura: [19], Ch. 8;

**9. Perturbacijska analiza nelinearnih sustava**.

Literatura: [17], Ch. 9, 10, 11; [23], Ch. 1; [24], Ch. 2, 7, 9;

**10. Princip internog modela**.

Literatura:

**11. Robusno ($H_\infty$) upravljanje**.

Literatura: [1], Ch. 16; [8], Ch. 7, 8, 9; [11], Ch. 6; [25]; [20], Ch. 4; [26]; [14];

**12. Redukcija reda modela linearnih i nelinearnih sustava**.

Literatura: [27], Ch. 2; [28], Ch. 3, 8; [29], Ch. 9;

**13. Matematičke osnove analize dinamičkih sustava**.

Literatura: [30]; [31]; [32]; [24]; [33]; [34];

**14. Vježbe, seminari**.

Literatura: [35], Ch. 5.1;

# 2 Linearni multivarijabilni sustavi

## 2.1. Dinamički model linearnih sustava

Linearni vremenski-varijabilni kontinuirani dinamički sustavi mogu se prikazati slijedećim jednadžbama stanja

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t), \qquad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \tag{2.1}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t), \tag{2.2}$$

gdje je

$\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ - *vektor stanja*,

$\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ - *vektor upravljanja*,

$\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p$ - *vektor izlaza.*

Nadalje,

$\mathbf{A}(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je vremenski promjenjiva *matrica koeficijenata* sustava,

$\mathbf{B}(t) \in \mathbb{R}^{n\times m}$ je vremenski promjenjiva *matrica ulaza* sustava,

$\mathbf{C}(t) \in \mathbb{R}^{p\times n}$ je vremenski promjenjiva *matrica izlaza* sustava, a

$\mathbf{D}(t) \in \mathbb{R}^{p\times m}$ je vremenski promjenjiva *matrica prijenosa* sustava.

Jednadžba (2.1) naziva se *jednadžba stanja*, dok se jednadžba (2.2) naziva *jednadžba izlaza.* Obe jednadžbe zajedno nazivaju se *dinamičkim jednadžbama stanja i izlaza.*

Kada su matrice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ i $\mathbf{D}$ vremenski neovisne, tada imamo vremenski-invarijantni linearni kontinuirani sustav, prikazan slijedećim jednadžbama stanja

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \qquad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \tag{2.3}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t), \tag{2.4}$$

U slučaju kada je $\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}$, govorimo o *autonomnom linearnom sustavu.*

## 2.2. Rješenje linearnih kontinuiranih sustava

Sada ćemo razmotriti rješenje linearnih vremenski-invarijantnih i vremenski varijabilnih linearnih dinamičkih sustava u obliku tzv. *matrice prijelaza.*

### 2.2.1. Rješenje linearnih vremenski-invarijantnih sustava

Kod rješavanja dinamičkih jednadžbi stanja linearnih multivarijabilnih sustava, razmatrat ćemo odvojeno rješenje homogene i nehomogene jednadžbe stanja. Homogeni sustav je sustav bez djelovanja ulaznih varijabli, $\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}$.

#### Rješenje homogenog sustava

Zbog važnosti problema, kao i ilustracije metoda koji će u različitim varijantama koristi kasnije, navodimo tri različita pristupa nalaženju rješavenja homogenog vremenski-invarijantnog linearnog dinamičkog sustava.

***Rješenje primjenom Taylorovog reda***. Vektor stanja $\mathbf{x}(t)$ linearnog homogenog sustava

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \tag{2.5}$$

može se razviti u Taylorov red u okolišu točke $t = 0$,

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(0) + \dot{\mathbf{x}}(0)t + \ddot{\mathbf{x}}(0)\frac{t^2}{2!} + \ldots + \mathbf{x}^{(k)}(0)\frac{t^k}{k!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{x}^{(k)}(0)\frac{t^k}{k!}. \tag{2.6}$$

Ako sada uzastopno deriviramo jednadžbu $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ po vremenu dobivamo

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \tag{2.7}$$

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}^2\,\mathbf{x}(t), \tag{2.8}$$

$$\mathbf{x}^{(3)}(t) = \mathbf{A}^2\,\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}^3\,\mathbf{x}(t), \tag{2.9}$$

$$\vdots \tag{2.10}$$

$$\mathbf{x}^{(k)}(t) = \mathbf{A}^k\,\mathbf{x}(t). \tag{2.11}$$

U slučaju $t = 0$ dobivamo

$$\mathbf{x}^{(k)}(0) = \mathbf{A}^k\,\mathbf{x}(0), \tag{2.12}$$

za $k = 0, 1, \ldots, n, \ldots$. Ako sada izraz (2.12) uvrstimo u Taylorov razvoj (2.6), dobivamo

$$\mathbf{x}(t) = \left( \mathbf{I} + t\mathbf{A} + \frac{t^2\mathbf{A}^2}{2!} + \ldots + \frac{t^k\mathbf{A}^k}{k!} + \ldots \right) \mathbf{x}(0). \tag{2.13}$$

Vidimo da izraz u zagradi formalno odgovara Taylorovom razvoju eksponencijalne funkcije s matricom kao argumentom

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k\mathbf{A}^k}{k!}, \tag{2.14}$$

tako da izraz (2.13) možemo prikazati u slijedećem obliku

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0), \tag{2.15}$$

što predstavlja rješenje homogene matrične linearne diferencijalne jednadžbe (2.5). Vidimo da navedeno rješenje podsjeća na rješenje linearne diferencijalne jednadžbe prvog reda.

Ako je poznato stanje sustava u početnom trenutku $\mathbf{x}(0)$ i matrica $e^{\mathbf{A}t}$, tada možemo odrediti stanje sustava u bilo kojem kasnijem trenutku $\mathbf{x}(t)$. Stoga matricu $e^{\mathbf{A}t}$, nazivamo još i *matrica prijelaza* ili *fundamentalna matrica*

$$\mathbf{\Phi}(t) = e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + t\mathbf{A} + \frac{t^2\mathbf{A}^2}{2!} + \ldots + \frac{t^k\mathbf{A}^k}{k!} + \ldots. \tag{2.16}$$

Ako bi umjesto u trenutku $t = 0$, Taylorov red razvili oko točke $t = \tau$, dobili bi slijedeće rješenje

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{x}(\tau) = \mathbf{\Phi}(t-\tau)\mathbf{x}(\tau). \tag{2.17}$$

***Rješenje razvojem u red potencija.*** Pretpostavimo rješenje homogene jednadžbe u obliku reda potencija po vremenu $t$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 t + \mathbf{a}_2 t^2 + \ldots + \mathbf{a}_k t^k + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{a}_k t^k, \tag{2.18}$$

gdje su $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k \in \mathbb{R}^n$. Uvrštavanjem reda (2.18) u (2.5) dobivamo

$$\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 t + 3\mathbf{a}_3 t^2 + \ldots + k\mathbf{a}_k t^{k-1} + \ldots = \mathbf{A}(\mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 t + \mathbf{a}_2 t^2 + \ldots + \mathbf{a}_k t^k + \ldots). \tag{2.19}$$

Ako u prethodnom izrazu desnu stranu jednadžbe prebacimo na lijevu stranu i izjednačimo članove uz iste potencije, dobivamo

$$(\mathbf{a}_1 - \mathbf{A}\mathbf{a}_0) + (2\mathbf{a}_2 - \mathbf{A}\mathbf{a}_1)t + (3\mathbf{a}_3 - \mathbf{A}\mathbf{a}_2)t^2 + \ldots + (k\mathbf{a}_k - \mathbf{A}\mathbf{a}_{k-1})t^{k-1} + \ldots = 0. \tag{2.20}$$

Da bi prethodni izraz bio zadovoljen za svaki $t$, izrazi u zagradama moraju biti jednaki nuli

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{A}\mathbf{a}_0, \tag{2.21}$$
$$2\mathbf{a}_2 = \mathbf{A}\mathbf{a}_1 = \mathbf{A}\mathbf{A}\mathbf{a}_0 = \mathbf{A}^2\mathbf{a}_0, \tag{2.22}$$
$$3\mathbf{a}_3 = \mathbf{A}\mathbf{a}_2 = \mathbf{A}\frac{1}{2}\mathbf{A}^2\mathbf{a}_0 = \frac{1}{2}\mathbf{A}^3\mathbf{a}_0, \tag{2.23}$$
$$\vdots \tag{2.24}$$
$$k\mathbf{a}_k = \mathbf{A}\mathbf{a}_{k-1} = \frac{1}{(k-1)!}\mathbf{A}^k\mathbf{a}_0. \tag{2.25}$$

Vidimo da smo sve koeficijente reda (2.18) dobili u funkciji potencija matrice $\mathbf{A}$ i koeficijenta $\mathbf{a}_0$. S obzirom da je u $t = 0$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, na osnovu (2.18) slijedi $\mathbf{a}_0 = \mathbf{x}(0)$. Uvrštavanjem dobivenih koeficijenata u (2.18) dobivamo razvoj (2.13).

***Rješenje primjenom metode sukcesivnih aproksimacija.*** Homogenu diferencijalnu jednadžbu (2.5) možemo prebaciti u ekvivalentnu integralnu jednadžbu

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(0) + \int_0^t \mathbf{A}\mathbf{x}(\tau)d\tau. \tag{2.26}$$

Vidimo da se u navedenoj jednadžbi nepoznanica $\mathbf{x}(t)$ nalazi na lijevoj strani jednadžbe, kao i pod znakom integrala. Standardna metoda aproksimativnog rješavanja integralnih jednadžbi je metoda sukcesivnih aproksimacija.

U prvoj aproksimaciji pretpostavimo rješenje (2.26) u obliku

$$\mathbf{x}_0(t) = \mathbf{x}(0), \qquad \forall t. \tag{2.27}$$

Navedeno aproksimativno rješenje ubacimo na desnu stranu jednadžbe (2.26) da bi dobili slijedeću aproksimaciju $\mathbf{x}_1(t)$ egzaktnog rješenja $\mathbf{x}(t)$

$$\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{x}(0) + \int_0^t \mathbf{A}\mathbf{x}_0(\tau)d\tau = \mathbf{x}(0) + \mathbf{A}t\mathbf{x}(0) = (\mathbf{I} + \mathbf{A}t)\mathbf{x}(0). \tag{2.28}$$

Na sličan način, u drugoj aproksimaciji imamo

$$\mathbf{x}_2(t) = \mathbf{x}(0) + \int_0^t \mathbf{A}\mathbf{x}_1(\tau)d\tau = \left(\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \mathbf{A}^2\frac{t^2}{2}\right)\mathbf{x}(0). \tag{2.29}$$

Ponavljanjem navedenog postupka, u $k$-toj iteraciji dobivamo

$$\mathbf{x}_k(t) = \mathbf{x}(0) + \int_0^t \mathbf{A}\mathbf{x}_{k-1}(\tau)d\tau = \left(\mathbf{I} + t\mathbf{A} + \frac{t^2\mathbf{A}^2}{2!} + \ldots + \frac{t^k\mathbf{A}^k}{k!}\right)\mathbf{x}(0). \tag{2.30}$$

Konačno rješenje dobivamo kao limes prethodnog rješenja

$$\mathbf{x}(t) = \lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k(t) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k \mathbf{A}^k}{k!}\right) \mathbf{x}(0) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0). \tag{2.31}$$

Sličan pristup primjenit ćemo za određivanje matrice prijelaza linearnih vremenski-varijabilnih sustava.

***Rješenje primjenom Laplaceove transformacije***. Sada ćemo prikazati rješenje linearne homogene matrične diferencijalne jednadžbe primjenom Laplaceove transformacije. Primjenimo li Laplaceovu transformaciju na jednadžbu (2.5) dobivamo

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s), \tag{2.32}$$

gdje je $\mathbf{X}(s) = \mathcal{L}\{\mathbf{x}(t)\}$. Iz prethodne jednadžbe dobivamo

$$\mathbf{X}(s) = [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{x}(0). \tag{2.33}$$

Konačno rješenje u vremenskoj domeni dobivamo primjenom inverzne Laplaceove transformacije, $\mathbf{x}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{X}(s)\}$, odnosno $\mathbf{x}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\}\mathbf{x}(0)$. Da bi mogli izračunati navedeni izraz, prikazat ćemo $[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}$ u obliku beskonačnog reda, gdje ćemo primjeniti poznati razvoj $1/(1-x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$, za $|x| < 1$. Za dovoljno veliki $|s|$ slijedi

$$[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} = \frac{1}{s}\left[\mathbf{I} - \frac{1}{s}\mathbf{A}\right]^{-1} = \frac{1}{s}\left[\mathbf{I} + \frac{1}{s}\mathbf{A} + \frac{1}{s^2}\mathbf{A}^2 + \frac{1}{s^3}\mathbf{A}^3 + \ldots\right], \tag{2.34}$$

odnosno

$$[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} = \frac{1}{s}\mathbf{I} + \frac{1}{s^2}\mathbf{A} + \frac{1}{s^3}\mathbf{A}^2 + \frac{1}{s^4}\mathbf{A}^3 + \ldots \tag{2.35}$$

Ako sada primjenimo inverzni Laplaceov transformat na svaki član desne strane prethodnog izraza koristeći

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{k+1}}\right\} = \frac{t^k}{k!}, \tag{2.36}$$

dobivamo

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\right\} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{t^2}{2!}\mathbf{A}^2 + \frac{t^3}{3!}\mathbf{A}^3 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k \mathbf{A}^k}{k!} = e^{\mathbf{A}t}. \tag{2.37}$$

Na ovaj način smo dokazali važan identitet

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\right\} = e^{\mathbf{A}t}. \tag{2.38}$$

### Svojstva matrice prijelaza

S obzirom da matrica prijelaza ima važnu ulogu u analizi linearnih dinamičkih sustava, navest ćemo neka njena bitna svojstva. Neka od navedenih svojstava su identična sa dobro poznatim svojstvima skalarne eksponencijalne funkcije, međutim neka svojstva se i bitno razlikuju. Dakle, bitno je naglasiti da ne možemo sva svojstva skalarne eksponencijalne funkcije primjeniti na matrične eksponencijalne funkcije.

Matrica $\mathbf{\Phi}(t)$ nije nikada singularna,

$$\det \mathbf{\Phi}(t) \neq 0, \qquad \forall t. \tag{2.39}$$

Na osnovu definicije matrice prijelaza (2.16), možemo izvesti slijedeće izraze

$$\mathbf{\Phi}(t_1)\mathbf{\Phi}(t_2) = e^{\mathbf{A}t_1} \cdot e^{\mathbf{A}t_2} = e^{\mathbf{A}(t_1+t_2)} = \mathbf{\Phi}(t_1+t_2), \tag{2.40}$$

$$\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{\Phi}(-t) = e^{\mathbf{A}t} \cdot e^{-\mathbf{A}t} = \mathbf{\Phi}(0) = \mathbf{I}, \tag{2.41}$$

$$\mathbf{\Phi}(-t) = e^{-\mathbf{A}t} = \mathbf{\Phi}^{-1}(t), \tag{2.42}$$

koji definiraju tzv. *semigrupna* svojstva matrice prijelaza.

Također, na osnovu definicije (2.16), možemo izvesti izraz za derivaciju matrice prijelaza

$$\frac{d}{dt}\mathbf{\Phi}(t) = A\mathbf{\Phi}(t). \tag{2.43}$$

Navedena svojstva analogna su svojstvima skalarne eksponencijalne funkcije. Međutim, općenito vrijedi

$$e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{B}t} \neq e^{\mathbf{B}t}e^{\mathbf{A}t} \neq e^{(\mathbf{A}+\mathbf{B})t}. \tag{2.44}$$

Gornji izrazi su jednaki jedino u slučaju kada matrice $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ međusobno komutiraju, $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$. S druge strane, matrica $\mathbf{B}$ će komutirati s matricom $\mathbf{A}$ ako se može prikazati u obliku polinomialne ovisnosti o matrici $\mathbf{A}$, $\mathbf{B} = a_0\mathbf{I} + a_1\mathbf{A} + a_2\mathbf{A}^2 + \ldots$.

### Rješenje nehomogenog sustava

Pretpostavimo rješenje nehomogene jednadžbe stanja u obliku

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{z}(t), \tag{2.45}$$

gdje je vektor $\mathbf{z}(t)$ novi vektor stanja. Nakon uvrštavanja u jednadžbu (2.3), dobivamo

$$\dot{\mathbf{\Phi}}(t)\mathbf{z}(t) + \mathbf{\Phi}(t)\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t). \tag{2.46}$$

Primjenom izraza (2.43) na prethodni izraz, dobivamo

$$\mathbf{A}\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{z}(t) + \mathbf{\Phi}(t)\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t). \tag{2.47}$$

iz čega slijedi

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{\Phi}^{-1}(t)\mathbf{B}\mathbf{u}(t) = \mathbf{\Phi}(-t)\mathbf{B}\mathbf{u}(t), \tag{2.48}$$

odnosno

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{z}(0) + \int_0^t \mathbf{\Phi}(-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau. \tag{2.49}$$

Iz jednadžbe (2.45) slijedi da je $\mathbf{z}(0) = \mathbf{x}(0)$, jer je $\mathbf{\Phi}(0) = \mathbf{I}$. Ako sada uvrstimo (2.49) u (2.45), dobivamo

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}(0) + \mathbf{\Phi}(t)\int_0^t \mathbf{\Phi}(-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau. \tag{2.50}$$

S obzirom da matrica $\mathbf{\Phi}(t)$ ne ovisi o integraciji možemo ju staviti pod znak integrala. Nadalje, s obzirom da vrijedi $\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{\Phi}(-\tau) = \mathbf{\Phi}(t-\tau)$, dobivamo konačno rješenje nehomogenog sustava (2.3) u obliku

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \mathbf{\Phi}(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau. \tag{2.51}$$

### Direktna metoda rješavanja jednadžbi stanja

Ovdje ćemo prikazati direktan način izvođenja jednadžbe (2.51). Iz jednadžbi stanja slijedi: $\dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{A}\mathbf{x}(t) = \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$. Pomnožimo li navedenu jednadžbu, s lijeve strane, matricom $\mathbf{\Phi}(-t) = e^{-\mathbf{A}t}$, dobivamo

$$\mathbf{\Phi}(-t)\dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{\Phi}(-t)\mathbf{A}\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(-t)\mathbf{B}\mathbf{u}(t), \tag{2.52}$$

odnosno

$$\frac{d}{dt}\left[\mathbf{\Phi}(-t)\mathbf{x}(t)\right] = \mathbf{\Phi}(-t)\mathbf{B}\mathbf{u}(t), \tag{2.53}$$

te nakon integracije

$$\mathbf{\Phi}(-t)\mathbf{x}(t) - \mathbf{\Phi}(0)\mathbf{x}(0) = \int_0^t \mathbf{\Phi}(-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau. \tag{2.54}$$

Pomnožimo li prethodni izraz s lijeve strane sa $\mathbf{\Phi}(t)$, te imajući u vidu $\mathbf{\Phi}(0) = \mathbf{I}$ i $\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{\Phi}(-t) = \mathbf{I}$, na kraju dobivamo izraz (2.51), odnosno nakon uvrštavanja $\mathbf{\Phi}(t) = e^{\mathbf{A}t}$,

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau. \tag{2.55}$$

Sličan pristup primjenit ćemo kod rješavanja vremenski varijabilnih linearnih sustava.

### Rješenje nehomogenog sustava primjenom Laplaceove transformacije

Primjenimo li Laplaceovu transformaciju na jednadžbu $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$ dobivamo

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s) \tag{2.56}$$

gdje je $\mathbf{U}(s) = \mathcal{L}\{\mathbf{u}(t)\}$. Iz prethodne jednadžbe dobivamo

$$\mathbf{X}(s) = [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{x}(0) + [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s). \tag{2.57}$$

Inverzni Laplaceov transformat prvog člana na desnoj strani je homogeni dio rješenja diferencijalne jednadžbe (izraz (2.38)). Inverzni Laplaceov transformat drugog člana na desnoj strani, $\mathcal{L}^{-1}\left\{[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s)\right\}$, izvest ćemo primjenom *teorema konvolucije*

$$\mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)F_2(s)\} = \int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau, \tag{2.58}$$

gdje su $F_1(s) = \mathcal{L}\{f_1(t)\}$ i $F_2(s) = \mathcal{L}\{f_2(t)\}$. Primjenom izraza (2.58) i (2.38) slijedi

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s)\right\} = \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau. \tag{2.59}$$

Zbrojimo li rješenje homogenog i nehomogenog sustava dobijemo (2.55).

## 2.2.2. Matrica prijenosnih funkcija

Na sličan način kao što kod *single-input-single-output* (SISO) sustava definiramo prijenosnu funkciju $G(s) = Y(s)/U(s)$, tako i za multivarijabilne (MIMO) sustave možemo definirati matricu prijelaznih funkcija.

Kada su početni uvjeti $\mathbf{x}(0)$ i matrica prijenosa $\mathbf{D}$ jednaki nuli, linearni vremenski-invarijantni sustav ima slijedeći oblik

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{0}, \tag{2.60}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t), \tag{2.61}$$

Laplaceovim transformatom navedenog sustava jednadžbi dobivamo izraz (2.57), koji uz $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$ postaje

$$\mathbf{X}(s) = [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s). \tag{2.62}$$

te $\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s)$, odnosno

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s). \tag{2.63}$$

Ako definiramo matricu

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{B}, \tag{2.64}$$

izraz (2.63) postaje

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{U}(s). \tag{2.65}$$

Matricu $\mathbf{G}(s)$ nazivamo *matrica prijenosnih funkcija*. Primjenom izraza (6.8), matricu prijenosnih funkcija (2.64) možemo prikazati kao

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}\frac{\mathrm{adj}[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]}{\det[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]}\mathbf{B}. \tag{2.66}$$

Izraz u nazivniku $\det[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]$ je skalar, polinom $n$-tog reda po $s$ i naziva se *karakteristična jednadžba* sustava. Korijeni karakteristične jednadžbe

$$\det[s\mathbf{I} - \mathbf{A}] = 0, \tag{2.67}$$

predstavljaju *polove* sustava. Također, korijeni karakteristične jednadžbe istovremeno su i *svojstvene vrijednosti* matrice $\mathbf{A}$ (vidi 6.1.).

***Stabilnost linearnih sustava***. Linearni multivarijabilni vremenski-invarijantni sustav je stabilan ako su polovi matrice prijenosnih funkcija $\mathbf{G}(s)$, odnosno svojstvene vrijednosti matrice $\mathbf{A}$, smješteni na lijevoj polovini kompleksne $s$-ravnine. Drugim riječima, realni dijelovi korijena $s_1, \ldots, s_n$ karakteristične jednadžbe (2.67) moraju biti negativni, $Re\{s_j\} < 0$ za $j = 1, \ldots, n$. Umjesto direktnog (općenito numeričkog) računanja korijena karakteristične jednadžbe, možemo primjeniti neki od analitičkih kriterija stabilnosti (Routhov ili Hurwitzov).

### 2.2.3. Rješenje linearnih vremenski-varijabilnih sustava

Kod vremenski varijabilnih linearnih kontinuiranih sustava,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t), \tag{2.68}$$

rješenje dinamičke jednadžbe stanja dobivamo preko matrice prijelaza

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t, t_0)\mathbf{x}(t_0), \tag{2.69}$$

s tom razlikom da matrica prijelaza $\mathbf{\Phi}(t, t_0)$ ovisi o vremenu $t$ i početnom trenutku $t_0$, a ne samo o razlici $t - t_0$ kao kod vremenski invarijantnih sustava.

### Rješenje homogenog vremenski-varijabilnog sustava

Matricu $\mathbf{\Phi}(t, t_0)$ odredit ćemo na osnovu homogene diferencijalne jednadžbe $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t)$. Uvrštavanjem pretpostavljenog rješenja (2.69) u homogenu diferencijalnu jednadžbu dobivamo

$$\dot{\mathbf{\Phi}}(t, t_0) = \mathbf{A}(t)\mathbf{\Phi}(t, t_0), \tag{2.70}$$

što je diferencijalna jednadžba matrice prijelaza. Nadalje, na osnovu definicije (2.69), direktno slijedi $\mathbf{\Phi}(t_0, t_0) = \mathbf{I}$.

Također, vrijede slijedeća svojstva matrice prijelaza

$$\mathbf{\Phi}(t_2, t_0) = \mathbf{\Phi}(t_2, t_1)\mathbf{\Phi}(t_1, t_0), \tag{2.71}$$

$$\mathbf{\Phi}(t_1, t_2) = \mathbf{\Phi}^{-1}(t_2, t_1), \tag{2.72}$$

$$\mathbf{\Phi}(t_2, t_1)\mathbf{\Phi}(t_1, t_2) = \mathbf{I}. \tag{2.73}$$

Svojstvo (2.71) posljedica je principa kauzalnosti dinamičkih sustava. Pretpostavimo da je stanje sustava u trenutku $t_1$ određeno početnim stanjem $\mathbf{x}(t_0)$ i matricom prijelaza $\mathbf{\Phi}(t_1, t_0)$,

$$\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{\Phi}(t_1, t_0)\mathbf{x}(t_0). \tag{2.74}$$

Zatim stanje $\mathbf{x}(t_1)$ uzmemo kao početni uvjet za određivanje stanja $\mathbf{x}(t_2)$ u vremenskom trenutku $t_2 > t_1$. U tom slučaju imamo

$$\mathbf{x}(t_2) = \mathbf{\Phi}(t_2, t_1)\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{\Phi}(t_2, t_1)\mathbf{\Phi}(t_1, t_0)\mathbf{x}(t_0). \tag{2.75}$$

S druge strane, stanje $\mathbf{x}(t_2)$ možemo odrediti izravno na osnovu početnog uvjeta $\mathbf{x}(t_0)$,

$$\mathbf{x}(t_2) = \mathbf{\Phi}(t_2, t_0)\mathbf{x}(t_0). \tag{2.76}$$

Usporedbom (2.75) i (2.76) direktno proizlazi svojstvo (2.71). Svojstva (2.72) i (2.73) direktno slijede iz (2.71).

### Rješenje nehomogenog vremenski-varijabilnog sustava

Nakon određivanja matrice prijelaza $\mathbf{\Phi}(t, t_0)$, rješenje nehomogene diferencijalne jednadžbe (2.68) dobivamo na sličan način kao kod vremenski invarijantnih sustava.

Najprije ćemo odrediti izraz za vremensku derivaciju inverzne matrice prijelaza. Na osnovu (2.72) i (2.73) slijedi

$$\mathbf{\Phi}^{-1}(t, t_0)\mathbf{\Phi}(t, t_0) = \mathbf{I}. \tag{2.77}$$

Deriviranjem po vremenu izraza (2.77) dobivamo

$$\frac{d\mathbf{\Phi}^{-1}(t,t_0)}{dt}\mathbf{\Phi}(t,t_0)+\mathbf{\Phi}^{-1}(t,t_0)\dot{\mathbf{\Phi}}(t,t_0)=\mathbf{0}. \tag{2.78}$$

Uvrštavanjem izraza (2.70) u (2.78) te množenjem s desne strane matricom $\mathbf{\Phi}^{-1}(t,t_0)$, konačno dobivamo

$$\frac{d\mathbf{\Phi}^{-1}(t,t_0)}{dt}=-\mathbf{\Phi}^{-1}(t,t_0)\mathbf{A}(t). \tag{2.79}$$

Daljnji postupak je sličan kao u slučaju vremenski invarijantnih sustava. Iz jednadžbi stanja (2.68) slijedi: $\dot{\mathbf{x}}(t)-\mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t)=\mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t)$. Pomnožimo li navedenu jednadžbu, s lijeve strane, matricom $\mathbf{\Phi}^{-1}(t,t_0)$, dobivamo

$$\mathbf{\Phi}^{-1}(t,t_0)\dot{\mathbf{x}}(t)-\mathbf{\Phi}^{-1}(t,t_0)\mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t)=\mathbf{\Phi}^{-1}(t,t_0)\mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t), \tag{2.80}$$

odnosno

$$\frac{d}{dt}\left[\mathbf{\Phi}^{-1}(t,t_0)\mathbf{x}(t)\right]=\mathbf{\Phi}^{-1}(t,t_0)\mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t), \tag{2.81}$$

te nakon integracije

$$\mathbf{\Phi}^{-1}(t,t_0)\mathbf{x}(t)-\mathbf{\Phi}^{-1}(t_0,t_0)\mathbf{x}(0)=\int_0^t\mathbf{\Phi}^{-1}(\tau,t_0)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau. \tag{2.82}$$

Pomnožimo li prethodni izraz s lijeve strane sa $\mathbf{\Phi}(t,t_0)$, te imajući u vidu $\mathbf{\Phi}^{-1}(t_0,t_0)=\mathbf{I}$ i $\mathbf{\Phi}^{-1}(t,t_0)\mathbf{\Phi}(t,t_0)=\mathbf{I}$, na kraju dobivamo izraz

$$\mathbf{x}(t)=\mathbf{\Phi}(t,t_0)\mathbf{x}(t_0)+\int_{t_0}^t\mathbf{\Phi}(t,\tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau. \tag{2.83}$$

### Matrica prijelaza vremenski-varijabilnih sustava

***Rješenje primjenom Neumannovog razvoja.***

Metoda sukcesivnih aproksimacija može se primjeniti na sličan način kao kod rješavanja linearnog vremenski-invarijantnog sustava. Homogenu diferencijalnu jednadžbu $\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t)$ možemo prebaciti u ekvivalentnu integralnu jednadžbu

$$\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}(t_0)+\int_{t_0}^t\mathbf{A}(\tau)\mathbf{x}(\tau)d\tau. \tag{2.84}$$

U prvoj aproksimaciji pretpostavimo rješenje (2.84) u obliku $\mathbf{x}_0(t)=\mathbf{x}(t_0)$. Navedeno aproksimativno rješenje ubacimo na desnu stranu jednadžbe (2.84) da bi dobili slijedeću aproksimaciju $\mathbf{x}_1(t)$

$$\mathbf{x}_1(t)=\mathbf{x}(t_0)+\int_{t_0}^t\mathbf{A}(\tau)\mathbf{x}(t_0)d\tau=\left(\mathbf{I}+\int_{t_0}^t\mathbf{A}(\tau)d\tau\right)\mathbf{x}(t_0). \tag{2.85}$$

Na sličan način, u drugoj aproksimaciji imamo

$$\mathbf{x}_2(t) = \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{A}(\tau)\mathbf{x}_1(\tau)d\tau = \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{A}(\tau_1)\left(\mathbf{I} + \int_{t_0}^{\tau_1} \mathbf{A}(\tau_2)d\tau_2\right)\mathbf{x}(t_0)d\tau_1,$$

odnosno nakon sređivanja

$$\mathbf{x}_2(t) = \left[\mathbf{I} + \int_{t_0}^{t} \mathbf{A}(\tau)d\tau + \int_{t_0}^{t} \mathbf{A}(\tau_1)\left(\int_{t_0}^{\tau_1} \mathbf{A}(\tau_2)d\tau_2\right)d\tau_1\right]\mathbf{x}(t_0). \tag{2.86}$$

Navedenu proceduru možemo ponavljati do proizvoljnog reda, tako da konačan izraz za matricu prijelaza možemo prikazati u obliku Neumannovog reda

$$\begin{aligned}\mathbf{\Phi}(t, t_0) = \mathbf{I} + \int_{t_0}^{t} \mathbf{A}(\tau)d\tau + \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{\tau_1} \mathbf{A}(\tau_1)\mathbf{A}(\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 + \\ + \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{\tau_1}\int_{t_0}^{\tau_2} \mathbf{A}(\tau_1)\mathbf{A}(\tau_2)\mathbf{A}(\tau_3)d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 + \ldots\end{aligned} \tag{2.87}$$

Ako su elementi matrice $\mathbf{A}(t)$ ograničeni integracijskom domenom onda Neumannov red konvergira apsolutno i uniformno. Navedeni razvoj može se konciznije prikazati uvođenjem notacije

$$\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \int_{t_0}^{t} \mathbf{A}(\tau)d\tau. \tag{2.88}$$

U tom slučaju, Neumannov red (2.87) može biti prikazan u obliku

$$\mathbf{\Phi}(t, t_0) = \mathbf{I} + \mathcal{R}(\mathbf{A}) + \mathcal{R}(\mathbf{A}\mathcal{R}(\mathbf{A})) + \mathcal{R}(\mathbf{A}\mathcal{R}(\mathbf{A}\mathcal{R}(\mathbf{A}))) + \ldots \tag{2.89}$$

koji je pogodan za rekurzivno izračunavanje.

## 2.3. Rješenje linearnih diskretnih sustava

Razmotrit ćemo rješenje diskretnih jednadžbi stanja u obliku matričnih diferencijskih jednadžbi, koje dobivamo vremenskom diskretizacijom kontinuranih jednadžbi stanja. Diskretna aproksimacija se bazira na podjeli vremenske osi na diskretne intervale, $t = kT$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, gdje je $T$ period sempliranja. Pretpostavljamo da je upravljačka varijabla diskretizirana primjenom impulsnog formatora nultog reda (*zero order hold*), što znači da je $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(kT)$, za $kT \leq t < (k+1)T$.

### 2.3.1. Diskretizacija kontinuiranih jednadžbi stanja

Promotrimo diferencijalnu jednadžbu stanja linearnog kontinuiranog sustava

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \tag{2.90}$$

kojoj odgovara diferencijska jednadžba

$$\mathbf{x}[(k+1)T] = \mathbf{E}(T)\mathbf{x}(kT) + \mathbf{F}(T)\mathbf{u}(kT). \tag{2.91}$$

***Eulerova diskretizacija kontinuiranih jednadžbi stanja***. Eulerova diskretizacija je najjednostavnija metoda diskretizacije, a zasnovana je na slijedećoj aproksimaciji derivacije

$$\dot{\mathbf{x}}(t) \cong \frac{\mathbf{x}(t+T) - \mathbf{x}(t)}{T}. \tag{2.92}$$

Uvrštavanjem navedene aproksimacije u jednadžbu (2.90), uz diskretizaciju vremena $t = kT$, dobivamo

$$\mathbf{x}[(k+1)T] = (T\mathbf{A} + \mathbf{I})\mathbf{x}(kT) + T\mathbf{B}\mathbf{u}(kT), \tag{2.93}$$

iz čega slijede matrice $\mathbf{E}(T)$ i $\mathbf{F}(T)$

$$\mathbf{E}(T) = T\mathbf{A} + \mathbf{I}, \qquad \mathbf{F}(T) = T\mathbf{B}. \tag{2.94}$$

Navedena metoda diskretizacije prvog reda je jednostavna, ali nije dovoljno precizna. Točnost metode može se povečavati jedino smanjenjem perioda sempliranja $T$, što može biti problem kod *real-time* implementacije.

***Diskretizacija jednadžbi stanja primjenom egzaktnog rješenja***. Matrice $\mathbf{E}(T)$ i $\mathbf{F}(T)$ odredit ćemo korištenjem rješenja jednadžbe (2.90) u obliku

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{x}(t_0) + e^{\mathbf{A}t}\int_{t_0}^{t} e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau. \tag{2.95}$$

Razmotrimo sada prijelaz sustava iz početnog stanja u trenutku $t_0 = kT$ u konačno stanje u trenutku $t = (k+1)T$. Primjenom izraza (2.95) dobivamo

$$\mathbf{x}[(k+1)T] = e^{\mathbf{A}T}\mathbf{x}(kT) + e^{\mathbf{A}(k+1)T}\int_{kT}^{(k+1)T} e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(kT)d\tau. \tag{2.96}$$

Uvođenjem nove podintegralne varijable $s = (k+1)T - \tau$, prethodni izraz postaje

$$\mathbf{x}[(k+1)T] = e^{\mathbf{A}T}\mathbf{x}(kT) + \int_{0}^{T} e^{\mathbf{A}s}\mathbf{B}\mathbf{u}(kT)ds. \tag{2.97}$$

Ako sada definiramo

$$\mathbf{E}(T) = e^{\mathbf{A}T}, \qquad \mathbf{F}(T) = \int_0^T e^{\mathbf{A}s}\mathbf{B}ds, \tag{2.98}$$

jednadžba (2.97) poprima oblik diferencijske jednadžbe (2.91).

Ako je matrica $\mathbf{A}$ nesingularna, tada izraz za $\mathbf{F}(T)$ definiran integralom u (2.98) možemo dobiti analitički. Razvijemo li funkciju $e^{\mathbf{A}s}$ u red potencija, dobivamo

$$\mathbf{F}(T) = \int_0^T e^{\mathbf{A}s}\mathbf{B}ds = \int_0^T \left(\mathbf{I} + s\mathbf{A} + \frac{s^2\mathbf{A}^2}{2!} + \ldots + \frac{s^k\mathbf{A}^k}{k!} + \ldots\right)\mathbf{B}ds \tag{2.99}$$

Integriranjem svih članova u razvoju dobivamo

$$\mathbf{F}(T) = \left(\mathbf{I}T + \frac{T^2\mathbf{A}}{2!} + \frac{T^3\mathbf{A}^2}{3!} + \ldots + \frac{T^{k+1}\mathbf{A}^k}{(k+1)!} + \ldots\right)\mathbf{B}. \tag{2.100}$$

Ako sada prethodni izraz pomnožimo s lijeva sa $\mathbf{A}$ te zbrojimo sa $\mathbf{B}$, dobivamo

$$\mathbf{A}\mathbf{F}(T) + \mathbf{B} = e^{\mathbf{A}T}\mathbf{B}, \tag{2.101}$$

iz čega slijedi konačno rješenje

$$\mathbf{F}(T) = \mathbf{A}^{-1}[e^{\mathbf{A}T} - \mathbf{I}]\mathbf{B}. \tag{2.102}$$

Navedena metoda diskretizacije je bitno točnija od Eulerove metode, što će biti ilustrirano u slijedećem podpoglavlju.

### 2.3.2. Rješenje diskretnih vremenski-invarijantnih sustava

Rješenje diskretnog sustava (2.91) možemo dobiti metodom indukcije. Iterativnom primjenom diferencijskih jednadžbi (2.91) dobivamo

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(T) &= \mathbf{E}(T)\mathbf{x}(0) + \mathbf{F}(T)\mathbf{u}(0),\\
\mathbf{x}(2T) &= \mathbf{E}(T)\mathbf{x}(T) + \mathbf{F}(T)\mathbf{u}(T) = \mathbf{E}(T)[\mathbf{E}(T)\mathbf{x}(0) + \mathbf{F}(T)\mathbf{u}(0)] + \mathbf{F}(T)\mathbf{u}(T) =\\
&= \mathbf{E}^2(T)\mathbf{x}(0) + \mathbf{E}(T)\mathbf{F}(T)\mathbf{u}(0) + \mathbf{F}(T)\mathbf{u}(T),\\
\mathbf{x}(3T) &= \mathbf{E}(T)\mathbf{x}(2T) + \mathbf{F}(T)\mathbf{u}(2T) =\\
&= \mathbf{E}^3(T)\mathbf{x}(0) + \mathbf{E}^2(T)\mathbf{F}(T)\mathbf{u}(0) + \mathbf{E}(T)\mathbf{F}(T)\mathbf{u}(T) + \mathbf{F}(T)\mathbf{u}(2T),\\
&\vdots\\
\mathbf{x}(kT) &= \mathbf{E}^k(T)\mathbf{x}(0) + \sum_{j=0}^{k-1}\mathbf{E}^{k-j-1}(T)\mathbf{F}(T)\mathbf{u}(jT).
\end{aligned} \tag{2.103}$$

Izraz (2.103) daje nam vrijednost vektora stanja u diskretnim vremenskim trenucima $t = kT$, $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, u ovisnosti o početnom stanju $\mathbf{x}(0)$.

Ako za matrice $\mathbf{E}(T)$ i $\mathbf{F}(T)$ uzmemo izraze (2.98), dobivamo

$$\mathbf{x}(kT) = e^{\mathbf{A}kT}\mathbf{x}(0) + \sum_{j=0}^{k-1} e^{\mathbf{A}(k-j-1)T}\mathbf{F}(T)\mathbf{u}(jT). \tag{2.104}$$

U slučaju autonomnih sustava, $\mathbf{u}(jT) = \mathbf{0}$, na osnovu prethodnog izraza slijedi $\mathbf{x}(kT) = e^{\mathbf{A}kT}\mathbf{x}(0)$, što znači da metoda diskretizacije (2.98) daje egzaktno rješenje u diskretnim vremenskim trenucima $t = kT$.

**Matrica prijelaza diskretnih vremenski-invarijantnih sustava**

Rješenje diskretnih jednadžbi stanja vremenski-invarijantnih sustava možemo također prikazati primjenom matrice prijelaza

$$\mathbf{x}(kT) = \mathbf{\Phi}(kT)\mathbf{x}(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{\Phi}[(k-j-1)T]\mathbf{F}(T)\mathbf{u}(jT), \tag{2.105}$$

gdje je

$$\mathbf{\Phi}(kT) = \mathbf{E}^k(T). \tag{2.106}$$

Diskretna matrica prijelaza posjeduje slična svojstva kao kontinuirana matrica prijelaza

$$\mathbf{\Phi}(k_1T)\mathbf{\Phi}(k_2T) = \mathbf{E}^{k_1}(T) \cdot \mathbf{E}^{k_2}(T) = \mathbf{E}^{k_1+k_2}(T) = \mathbf{\Phi}[(k_1+k_2)T], \tag{2.107}$$

$$\mathbf{\Phi}(kT)\mathbf{\Phi}(-kT) = \mathbf{E}^k(T) \cdot \mathbf{E}^{-k}(T) = \mathbf{E}^0(T) = \mathbf{\Phi}(0) = \mathbf{I}, \tag{2.108}$$

$$\mathbf{\Phi}(-kT) = \mathbf{E}^{-k}(T) = [\mathbf{E}^k(T)]^{-1} = \mathbf{\Phi}^{-1}(kT). \tag{2.109}$$

## 2.3.3. Rješenje diskretnih vremenski-varijabilnih sustava

Kod diskretnih vremenski-varijabilnih sustava, matrice $\mathbf{E}$ i $\mathbf{F}$ su promjenjive u svakom diskretnom trenutku vremena $t = kT$,

$$\mathbf{x}[(k+1)T] = \mathbf{E}(kT)\mathbf{x}(kT) + \mathbf{F}(kT)\mathbf{u}(kT). \tag{2.110}$$

***Rješenje homogenih jednadžbi stanja.*** Razmotrimo prvo rješenje homogene jednadžbe stanja $\mathbf{x}[(k+1)T] = \mathbf{E}(kT)\mathbf{x}(kT)$. Iterativnom primjenom navedene jednadžbe dobivamo

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}(T) &= \mathbf{E}(0)\mathbf{x}(0), \\
\mathbf{x}(2T) &= \mathbf{E}(T)\mathbf{x}(T) = \mathbf{E}(T)\mathbf{E}(0)\mathbf{x}(0), \\
\mathbf{x}(3T) &= \mathbf{E}(2T)\mathbf{x}(2T) = \mathbf{E}(2T)\mathbf{E}(T)\mathbf{E}(0)\mathbf{x}(0), \\
&\vdots \\
\mathbf{x}(kT) &= \mathbf{E}[(k-1)T]\mathbf{E}[(k-2)T]\ldots\mathbf{E}(2T)\mathbf{E}(T)\mathbf{E}(0)\mathbf{x}(0),
\end{aligned} \tag{2.111}
$$

odnosno

$$
\mathbf{x}(kT) = \left(\prod_{j=0}^{k-1}\mathbf{E}(jT)\right)\mathbf{x}(0). \tag{2.112}
$$

Ako označimo matricu prijelaza diskretnih vremenski-varijabilnih sustava sa

$$
\mathbf{\Phi}(kT, k_0T) = \prod_{j=k_0}^{k-1}\mathbf{E}(jT), \tag{2.113}
$$

izraz (2.112) možemo prikazati na slijedeći način

$$
\mathbf{x}(kT) = \mathbf{\Phi}(kT, k_0T)\mathbf{x}(k_0T). \tag{2.114}
$$

Napomenimo ovdje da se u literaturi često koristi notacija u kojoj se period diskretizacije $T$ izostavlja kao argument vektorskih i matričnih veličina ($kT \to k$), tako da prethodni izraz kompaktnije možemo prikazati kao

$$
\mathbf{x}(k) = \mathbf{\Phi}(k, k_0)\mathbf{x}(k_0). \tag{2.115}
$$

***Rješenje nehomogenih jednadžbi stanja.*** Rješenje nehomogenih jednadžbi stanji nači ćemo također primjenom iterativne procedure na jednadžbu $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{E}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{F}(k)\mathbf{u}(k)$,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}(1) &= \mathbf{E}(0)\mathbf{x}(0) + \mathbf{F}(0)\mathbf{u}(0), \\
\mathbf{x}(2) &= \mathbf{E}(1)\mathbf{x}(1) + \mathbf{F}(1)\mathbf{u}(1) = \mathbf{E}(1)\mathbf{E}(0)\mathbf{x}(0) + \mathbf{E}(1)\mathbf{F}(0)\mathbf{u}(0) + \mathbf{F}(1)\mathbf{u}(1), \\
\mathbf{x}(3) &= \mathbf{E}(2)\mathbf{x}(2) + \mathbf{F}(2)\mathbf{u}(2) = \\
&= \mathbf{\Phi}(3,0)\mathbf{x}(0) + \mathbf{\Phi}(3,1)\mathbf{F}(0)\mathbf{u}(0) + \mathbf{\Phi}(3,2)\mathbf{F}(1)\mathbf{u}(1) + \mathbf{\Phi}(3,3)\mathbf{F}(2)\mathbf{u}(2), \\
&\vdots \\
\mathbf{x}(k) &= \mathbf{\Phi}(k,0)\mathbf{x}(0) + \sum_{j=0}^{k-1}\mathbf{\Phi}(k, j+1)\mathbf{F}(j)\mathbf{u}(j),
\end{aligned} \tag{2.116}
$$

odnosno, u slučaju početnog uvjeta u proizvoljnom diskretnom vremenskom trenutku $k_0T$, imamo

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{\Phi}(k, k_0)\mathbf{x}(k_0) + \sum_{j=k_0}^{k-1} \mathbf{\Phi}(k, j+1)\mathbf{F}(j)\mathbf{u}(j). \tag{2.117}$$

# 2.4. Metode određivanja matrice prijelaza

## 2.4.1. Primjena Cayley-Hamiltonovog teorema

Cayley-Hamiltonova metoda bazirana je na metodi redukcije matričnih polinoma (ili matričnih funkcija reprezentiranim beskonačnim redom potencija) primjenom Cayley-Hamiltonovog teorema (vidi 6.3.). S obzirom da se svak matrična funkcija može reprezentirati matričnim polinomom reda $n-1$, gdje je $n$ dimenzija kvadratne matrice $\mathbf{A}$, slijedi

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j(t)\mathbf{A}^j, \tag{2.118}$$

gdje su koeficijenti polinoma funkcije vremena $t$. Koeficijente određujemo primjenom Vandermondove matrice, kao što je pokazano u 6.2.2.

$$\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \end{bmatrix}. \tag{2.119}$$

Vektor koeficijenata $\alpha_0(t), \ldots, \alpha_{n-1}(t)$, dobivamo množenjem prethodnog izraza s lijeve strane sa inverznom Vandermondovom matricom. Iz navedenog sustava jednadžbi očigledno je da će elementi matrične eksponencijalne funkcije biti odgovarajuće linearne kombinacije funkcija $e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}$.

## 2.4.2. Primjena Sylvesterovog teorema

Za izračunavanje matrične eksponencijalne funkcije možemo primjeniti Sylvesterov teorem, prikazan u 6.2.3.. S obzirom da je matrična funkcija $f(\mathbf{A}) = e^{\mathbf{A}t}$, na osnovu (6.33) imamo

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i t} \prod_{j=1;\, j\neq i}^{n} \frac{(\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{I})}{(\lambda_i - \lambda_j)}. \tag{2.120}$$

Primjenom Sylvesterovog teorema dobivamo također rješenje u zatvorenoj formi kao i kod primjene Cayley-Hamiltonovog teorema, ali je nužno poznavati svojstvene vrijednosti matrice $\mathbf{A}$.

***Primjer.*** Treba naći rješenje linearne diferencijalne jednadžbe

$$\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = 0, \tag{2.121}$$

za proizvoljne početne uvjete $x(0)$ i $\dot{x}(0)$, primjenom Sylvesterovog teorema.

*Rješenje.* Uvedemo li varijable stanja $x_1 = x$ i $x_2 = \dot{x}$, prethodna diferencijalna jednadžba drugog reda prelazi u sustav diferencijalnih jednadžbi prvog reda

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \tag{2.122}$$

Svojstvene vrijednosti matrice $\mathbf{A}$ dobivamo rješavanjem karakteristične jednadžbe $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$, odnosno

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & (-3-\lambda) \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0. \tag{2.123}$$

Korijeni prethodne jednadžbe su $\lambda_1 = -1$ i $\lambda_2 = -2$. Primjenimo li sada formulu (2.120), dobivamo

$$e^{\mathbf{A}t} = e^{\lambda_1 t}\frac{(\mathbf{A} - \lambda_2\mathbf{I})}{(\lambda_1 - \lambda_2)} + e^{\lambda_2 t}\frac{(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})}{(\lambda_2 - \lambda_1)}. \tag{2.124}$$

Uvrštavanjem svojstvenih vrijednosti i matrice $\mathbf{A}$ dobivamo

$$e^{\mathbf{A}t} = e^{-t}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} + e^{-2t}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \tag{2.125}$$

odnosno

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2(e^{-t} - e^{-2t}) & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}. \tag{2.126}$$

Konačno rješenje je $\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0)$.

## 2.5. Modalna analiza

Izbor varijabli stanja dinamičkih sustava nije jednoznačan. Direktni izbor fizikalnih varijabli stanja (pozicija, brzina, struja, napon,...) ne mora biti najpodesniji izbor sa stanovišta analize dinamičkih sustava. Odgovarajućom transformacijom varijabli stanja moguće je bitno pojednostaviti dinamičke jednadžbe sustava i time bitno olakšati samu analizu i sintezu.

### 2.5.1. Transformacija varijabli stanja linearnih sustava

#### Transformacija linearnih vremenski-invarijantnih sustava

Linearna transformacija varijabli stanja ima slijedeći oblik

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{P}\mathbf{z}(t), \tag{2.127}$$

gdje je $\mathbf{P}$ konstantna matrica transformacije, dok je $\mathbf{z}(t)$ novi, tzv. kanonski vektor stanja. Matrica transformacije $\mathbf{P}$ mora biti nesingularna da bi bila moguća obrnuta transformacija $\mathbf{z}(t) = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}(t)$. S obzirom da vrijedi $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{P}\dot{\mathbf{z}}(t)$, uvrštavanjem transformacije (2.127) u jednadžbe stanja (2.3)-(2.4), dobivamo

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{z}(t) + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(t), \qquad \mathbf{z}(t_0) = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}_0, \tag{2.128}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{z}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t). \tag{2.129}$$

Uvedemo li slijedeću notaciju

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}, \quad \hat{\mathbf{B}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}, \quad \hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{P}, \quad \hat{\mathbf{D}} = \mathbf{D}, \tag{2.130}$$

jednadžbe stanja (2.128)-(2.129) postaju

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{z}(t) + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t), \qquad \mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}_0, \tag{2.131}$$

$$\mathbf{y}(t) = \hat{\mathbf{C}}\mathbf{z}(t) + \hat{\mathbf{D}}\mathbf{u}(t). \tag{2.132}$$

***Invarijantnost svojstvenih vrijednosti.*** Transformacija $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ naziva se *transformacija sličnosti*, a za matrice $\mathbf{A}$ i $\hat{\mathbf{A}}$ kažemo da su *slične matrice* (oznaka: $\mathbf{A} \sim \hat{\mathbf{A}}$). Osnovno svojstvo transformacije sličnosti je da ne mjenja svojstvene vrijednosti matrica $\mathbf{A}$ i $\hat{\mathbf{A}}$. Drugim riječima, svojstvene vrijednosti matrice $\mathbf{A}$ invarijantne su na operaciju sličnosti $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$. Da bi matrice $\mathbf{A}$ i $\hat{\mathbf{A}}$ imale iste svojstvene vrijednosti, moraju imati iste karakteristične jednadžbe

$$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}). \tag{2.133}$$

Drugi član prethodnog izraza možemo prikazati kao

$$\det(\lambda\mathbf{P}^{-1}\mathbf{I}\mathbf{P} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}) = \det[\mathbf{P}^{-1}(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{P}]. \tag{2.134}$$

Primjenom svojstva determinanti: $\det(\mathbf{A}\mathbf{B}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B})$, prethodni izraz postaje

$$\det\left(\mathbf{P}^{-1}\right)\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\det(\mathbf{P}) = \det\left(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}\right)\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \det(\mathbf{I})\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}).$$

S obzirom da je $\det(\mathbf{I}) = 1$, proizlazi jednakost (2.133), čime je dokaz završen.

S druge strane, invarijantnost svojstvenih vrijednosti znači da svojstva stabilnosti originalnog sustava ostaju nepromjenjena nakon transformacije varijabli stanja.

### 2.5.2. Modalna transformacija linearnih sustava

Varijabla stanja $\mathbf{z}(t)$ je *kanonska varijabla* ako transformirana matrica $\hat{\mathbf{A}}$ ima dijagonalni oblik

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{\Lambda} = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}, \tag{2.135}$$

gdje su $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ međusobno različite svojstvene vrijednosti matrice $\mathbf{A}$.

*Modalna matrica* predstavlja matricu transformacije varijabli stanja koja sustav nekanonske forme prevodi u kanonsku (dijagonalnu) formu (2.135).

Modalnu matricu dobivamo rješavanjem matrične jednadžbe

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{\Lambda}, \tag{2.136}$$

po matrici transformacije $\mathbf{P}$, gdje je $\mathbf{\Lambda} = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$. Pomnožimo li prethodnu jednadžbu s matricom $\mathbf{P}$ s desne strane dobivamo $\mathbf{AP} = \mathbf{P\Lambda}$. Ako nadalje matricu $\mathbf{P}$ prikažemo na slijedeći način

$$\mathbf{P} = [\mathbf{p}_1 \;\; \mathbf{p}_2 \;\; \cdots \;\; \mathbf{p}_n] \tag{2.137}$$

gdje vektor $\mathbf{p}_k$ predstavlja $k$-ti stupac matrice $\mathbf{P}$, tada jednadžbu $\mathbf{AP} = \mathbf{P\Lambda}$ možemo prikazati na slijedeći način

$$\mathbf{A}\,[\mathbf{p}_1 \;\; \mathbf{p}_2 \;\; \cdots \;\; \mathbf{p}_n] = [\mathbf{p}_1 \;\; \mathbf{p}_2 \;\; \cdots \;\; \mathbf{p}_n]\,\mathrm{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}, \tag{2.138}$$

odnosno

$$[\mathbf{A}\mathbf{p}_1 \;\; \mathbf{A}\mathbf{p}_2 \;\; \cdots \;\; \mathbf{A}\mathbf{p}_n] = [\lambda_1\mathbf{p}_1 \;\; \lambda_2\mathbf{p}_2 \;\; \cdots \;\; \lambda_n\mathbf{p}_n]\,. \tag{2.139}$$

Navedena matrična jednakost vrijedi ako je svaki stupac matrice na lijevoj strani jednakosti jednak odgovarajućem stupcu matrice na desnoj strani, odnosno

$$\mathbf{A}\mathbf{p}_i = \lambda_i\mathbf{p}_i, \qquad i = 1, \ldots, n \tag{2.140}$$

iz čega zaključujemo da se stupci matrice transformacije (modalne matrice) $\mathbf{P}$ sastoje od svojstvenih vektora matrice $\mathbf{A}$ (vidi 6.1.).

***Rješenje kanonskog sustava.*** Kanonski sustav nakon modalne transformacije ima slijedeći oblik

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{\Lambda z}(t) + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{Bu}(t). \tag{2.141}$$

Rješenje ne-kanonskog sustava (2.3) je

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{Bu}(\tau)d\tau. \tag{2.142}$$

dok je rješenje kanonskog sustava (2.141)

$$\mathbf{z}(t) = e^{\mathbf{\Lambda}t}\mathbf{z}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{\Lambda}(t-\tau)}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{Bu}(\tau)d\tau. \tag{2.143}$$

S obzirom da je $\mathbf{\Lambda}$ dijagonalna matrica, $\mathbf{\Lambda} = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, bilo koja njena potencija također je dijagonalna matrica, $\mathbf{\Lambda}^k = \mathrm{diag}\{\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k\}$, tako da je matrica $e^{\mathbf{\Lambda}t}$ također dijagonalna,

$$e^{\mathbf{\Lambda}t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}. \tag{2.144}$$

Na osnovu navedenog rješenja možemo dobit rješenje ne-kanonskog sustava (2.3) primjenom transformacije $\mathbf{x}(t) = \mathbf{Pz}(t)$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{P}e^{\mathbf{\Lambda}t}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}(0) + \int_0^t \mathbf{P}e^{\mathbf{\Lambda}(t-\tau)}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{Bu}(\tau)d\tau. \tag{2.145}$$

Usporedbom izraza (2.145) sa (2.142) vidimo da da matricu prijelaza možemo odrediti na osnovu izraza

$$\mathbf{\Phi}(t) = e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{P}e^{\mathbf{\Lambda}t}\mathbf{P}^{-1}. \tag{2.146}$$

### 2.5.3. Transformacija u kanonski oblik preko Vandermondove matrice

***Transformacija SISO sustava u prostor stanja.*** Ako želimo SISO sustav $n$-tog reda

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1\dot{y} + a_0 y = u, \tag{2.147}$$

prevesti u prostor stanja uvodimo slijedeće (tzv. fazne) varijable stanja: $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$, ..., $x_n = y^{(n-1)}$. Deriviranjem po vremenu navedenih varijabli stanja dobivamo slijedeći sustav od $n$ diferencijalnih jednadžbi prvog reda

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2, \\
\dot{x}_2 &= x_3, \\
&\cdots \\
\dot{x}_k &= x_{k+1}, \\
&\cdots \\
\dot{x}_n &= -a_0 x_1 - a_1 x_2 - \ldots - a_{n-1} x_n + u.
\end{aligned}$$

Uvedemo li vektor stanja $\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n]^T$ tada navedeni sustav diferencijalnih jednadžbi možemo prikazati u matričnom obliku

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \tag{2.148}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t), \tag{2.149}$$

gdje matrice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ i $\mathbf{D}$ imaju slijedeći oblik

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \tag{2.150}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}. \tag{2.151}$$

Matrica $\mathbf{A}$ iz (2.150) naziva se Frobeniusova matrica.

***Dijagonalizacija Frobeniusove matrice***. Dijagonalizacija Frobeniusove matrice $\mathbf{A}$, definirane sa (2.150), svodi se na riješavanje matrične jednadžbe $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{\Lambda}$ po matrici transformacije $\mathbf{P}$. Pomnožimo li navedenu jednadžbu s lijeve strane sa $\mathbf{P}$ dobivamo $\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}$, odnosno

$$\mathbf{A}\,[\mathbf{p}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{p}_k \quad \cdots \quad \mathbf{p}_n] = [\mathbf{p}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{p}_k \quad \cdots \quad \mathbf{p}_n]\,\mathrm{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \ldots, \lambda_n\}, \tag{2.152}$$

gdje je $\mathbf{p}_k$ $k$-ti stupac matrice $\mathbf{P}$. Prethodni izraz je zadovoljen ako je svaki stupac s lijeve strane jednakosti jednak odgovarajućem stupcu s desne strane jednakosti. Izjednačimo li $k$-ti stupac s lijeve strane s $k$-tim stupcom s desne strane, dobivamo

$$\begin{bmatrix} p_{2k} & p_{3k} & \cdots & p_{nk} & -(a_0 p_{1k} + a_1 p_{2k} + \ldots + a_{n-1} p_{nk}) \end{bmatrix}^T = \lambda_k \mathbf{p}_k. \tag{2.153}$$

Izjednačimo li sada svaki element vektora na lijevoj strani s odgovarajućim elementom vektora na desnoj strani, dobivamo

$$\begin{aligned} p_{2k} &= \lambda_k p_{1k}, & (2.154)\\ p_{3k} &= \lambda_k p_{2k} = \lambda_k^2 p_{1k}, & (2.155)\\ &\vdots & (2.156)\\ p_{nk} &= \lambda_k^{n-1} p_{1k}, & (2.157)\\ -(a_0 p_{1k} + a_1 p_{2k} + \ldots + a_{n-1} p_{nk}) &= \lambda_k p_{nk} = \lambda_k^n p_{1k}. & (2.158) \end{aligned}$$

Sada na desnoj strani izraza (2.158), zamjenimo elemente $p_{2k}, p_{3k}, \ldots, p_{nk}$ sa izrazima (2.154)-(2.157), tako da dobijemo

$$\left(a_0 + a_1\lambda_k + a_2\lambda_k^2 + \ldots + a_{n-1}\lambda_k^{n-1} + \lambda_k^n\right) p_{1k} = 0. \tag{2.159}$$

Vidimo da izraz u zagradi predstavlja karakteristični polinom sustava (2.147), odnosno matrice $\mathbf{A}$ koji je jednak nuli za svojstvene vrijednosti $\lambda_k$, pri bilo kojoj vrijednost elementa $p_{1k}$. Na osnovu navedenog te izraza (2.154)-(2.157), zaključujemo da vektor $\mathbf{p}_k$ mora imati slijedeći oblik

$$\mathbf{p}_k = p_{1k} \begin{bmatrix} 1 & \lambda_k & \lambda_k^2 & \cdots & \lambda_k^{n-1} \end{bmatrix}^T, \qquad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.160}$$

Na kraju konačni oblik matrice transformacije $\mathbf{P}$ je

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \lambda_3^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \cdot \mathrm{diag}\{p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{1n}\}, \tag{2.161}$$

odnosno

$$\mathbf{P} = \mathbf{V} \cdot \mathrm{diag}\{p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{1n}\}, \tag{2.162}$$

gdje je $\mathbf{V}$ Vandermondova matrica. S obzirom da elemente $p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{1n}$ možemo izabrati proizvoljno, izborom $p_{11} = p_{12} = \ldots = p_{1n} = 1$ dobivamo $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V}$.

### 2.5.4. Modalna dekompozicija vektora stanja

Pretpostavimo da matrica $\mathbf{A}$ ima različite svojstvene vrijednosti $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ s pripadajućim svojstvenim vektorima $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$. Pretpostavimo da su svojstveni vektori normalizirani, $\|\mathbf{u}_i\| = 1$.

#### Linearni homogeni sustav

Za linearni autonomni sustav

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \tag{2.163}$$

svojstveni vektori $\mathbf{u}_i$ definirani su sa

$$\mathbf{A}\mathbf{u}_i = \lambda_i \mathbf{u}_i, \qquad \mathbf{u}_i^T \mathbf{u}_i = 1, \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{2.164}$$

S obzirom da su korijeni različiti, svojstveni vektori su linearno nezavisni. Stoga $\mathbf{x}(t)$ možemo jedinstveno reprezentirati linearnom kombinacijom svojstvenih vektora

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(t) \mathbf{u}_i. \tag{2.165}$$

Funkcije $\alpha_i(t)$ možemo odrediti tako da izraz (2.165) uvrstimo u (2.163)

$$\sum_{i=1}^{n} \dot{\alpha}_i(t) \mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(t) \mathbf{A}\mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(t) \lambda_i \mathbf{u}_i, \tag{2.166}$$

odnosno

$$\sum_{i=1}^{n} [\dot{\alpha}_i(t) - \lambda_i \alpha_i(t)] \mathbf{u}_i = 0, \tag{2.167}$$

što je zadovoljeno jedino ako vrijedi $\dot{\alpha}_i(t) = \lambda_i \alpha_i(t)$ za $i = 1, \ldots, n$, iz čega slijedi

$$\alpha_i(t) = c_i e^{\lambda_i t}, \qquad c_i = \alpha_i(0). \tag{2.168}$$

Uvrštavanjem (2.168) u (2.165) dobivamo slijedeću modalnu dekompoziciju vektora stanja

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{\lambda_i t} \mathbf{u}_i. \tag{2.169}$$

Konstante $c_i$ možemo odrediti korištenjem *recipročne baze* $\mathbf{r}_i$ definirane izrazima

$$\mathbf{r}_i^T \mathbf{u}_j = \delta_{ij}, \quad (i, j = 1, \ldots, n). \tag{2.170}$$

gdje je $\delta_{ij}$ Kroneckerov delta simbol ($\delta_{ij} = 1$ ako je $i = j$; $\delta_{ij} = 0$ ako je $i \neq j$). Ako razvijemo (2.169) oko $t = 0$, dobivamo

$$\mathbf{x}(0) = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{u}_i. \tag{2.171}$$

Pomnožimo li prethodni izraz s lijeve strane recipročnim vektorima $\mathbf{r}_i^T$, dobivamo da je

$$c_i = \mathbf{r}_i^T \mathbf{x}(0). \tag{2.172}$$

Konačno, primjenom prethodnog izraza, modalnu dekompoziciju vektora stanja možemo prikazati kao

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} \left[\mathbf{r}_i^T \mathbf{x}(0)\right] e^{\lambda_i t} \mathbf{u}_i. \tag{2.173}$$

Skalarni produkt $\mathbf{r}_i^T \mathbf{x}(0)$ predstavlja jakost pobude $i$-tog moda sustava uvjetovan početnim uvjetima. Ako početni uvjeti leže duž $i$-tog svojstvenog vektora, tada je pobuđen samo $i$-ti mod sustava (jer je $\mathbf{x}(0) = k\mathbf{u}_i$ te stoga $\mathbf{r}_i^T \mathbf{x}(0) = k\mathbf{r}_i^T \mathbf{u}_i = k$, gdje je $k$ neki skalar). Drugim riječima, izraz (2.173) opisuje pobuđivanje dinamičkih modova ponašanja uvjetovano početnim uvjetima sustava.

### Linearni nehomogeni sustav

Za linearni neautonomni sustav

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \tag{2.174}$$

primjenit ćemo sličnu proceduru. Odredimo prvo modalnu dekompoziciju vektora $\mathbf{Bu} \in \mathbb{R}^n$ preko svojstvenih, linearno nezavisnih, vektora $\mathbf{u}_i$

$$\mathbf{B}\mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i(t) \mathbf{u}_i, \tag{2.175}$$

gdje je $f_i(t) = \mathbf{r}_i^T \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$. Ako sada primjenimo rješenje nehomogenog linearnog vremenski varijabilnog sustava, dobivamo

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} \left[\mathbf{r}_i^T \mathbf{x}(0)\right] e^{\lambda_i t} \mathbf{u}_i + \int_0^t \sum_{i=1}^{n} \left[\mathbf{r}_i^T \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)\right] e^{\lambda_i (t-\tau)} \mathbf{u}_i d\tau. \tag{2.176}$$

Iz izraza (2.176) možemo identificirati utjecaj upravljačkog vektora na svaki mod sustava posebno. Jakost pobude $i$-tog moda sustava u ovisnosti o upravljačkom vektoru određen je sa

$$\int_0^t \left[\mathbf{r}_i^T \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)\right] e^{-\lambda_i \tau} d\tau. \tag{2.177}$$

Ako je upravljački vektor $\mathbf{u}(t)$ izabran tako da $\mathbf{B}\mathbf{u}(t)$ leži duž svojstvenog vektora $\mathbf{u}_i$, tada je pobuđen jedino $i$-ti mod sustava.

Izraz (2.176) bitan je također kod modalne interpretacije kontrolabilnosti linearnih sustava, što će biti razmatrano u narednim poglavljima.

### Određivanje recipročne baze

Vidjeli smo da modalna dekompozicija vektora stanja ovisi o određivanju svojstvenih vektora $\mathbf{u}_j$ kao i vektora recipročne baze $\mathbf{r}_i$, koji su međusobno povezani izrazima $\mathbf{r}_i^T \mathbf{u}_j = \delta_{ij}$. Nadalje, znamo da modalna matrica $\mathbf{P}$ koja dijagonalizira matricu sustava $\mathbf{A}$ sadrži stupce koji predstavljaju svojstvene vektore matrice $\mathbf{A}$

$$\mathbf{P} = \left[\mathbf{u}_1 \;\; \mathbf{u}_2 \;\; \cdots \;\; \mathbf{u}_n\right]. \tag{2.178}$$

S obzirom da je matrica $\mathbf{P}$ nesingularna (jer su vektori $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ linearno nezavisni), postoji njena inverzna matrica $\mathbf{R} = \mathbf{P}^{-1}$. Prikažimo matricu $\mathbf{R}$ na slijedeći način

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1^T \\ \mathbf{r}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{r}_n^T \end{bmatrix}, \tag{2.179}$$

gdje su $\mathbf{r}_1^T, \ldots, \mathbf{r}_n^T$ vektori-retci matrice $\mathbf{R}$. S obzirom da vrijedi

$$\mathbf{R}\mathbf{P} = \mathbf{I}, \tag{2.180}$$

odnosno

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}_1^T \\ \mathbf{r}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{r}_n^T \end{bmatrix} \left[\mathbf{u}_1 \;\; \mathbf{u}_2 \;\; \cdots \;\; \mathbf{u}_n\right] = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1^T\mathbf{u}_1 & \mathbf{r}_1^T\mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{r}_1^T\mathbf{u}_n \\ \mathbf{r}_2^T\mathbf{u}_1 & \mathbf{r}_2^T\mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{r}_2^T\mathbf{u}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{r}_n^T\mathbf{u}_1 & \mathbf{r}_n^T\mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{r}_n^T\mathbf{u}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.181}$$

Usporedbom matrice dobivene vanjskim produktom (*outer product*; *dyadic produkt*) dva vektora sa jediničnom matricom slijedi da mora biti zadovoljeno

$$\mathbf{r}_i^T \mathbf{u}_j = \delta_{ij}, \qquad (i, j = 1, \ldots, n). \tag{2.182}$$

Usporedbom definicije recipročne baze (2.170) sa dobivenim uvjetom (2.182) zaključujemo da su *vektori recipročne baze jednaki (transponiranim) retcima inverzne modalne matrice.*

### Dekompozicija vektora stanja primjenom kanonskog rješenja

Vidjeli smo da rješenje autonomnog linearnog sustava (2.3) možemo dobiti primjenom modalne transformacije (izraz (2.145))

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{P}e^{\mathbf{\Lambda}t}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}(0). \tag{2.183}$$

S obzirom da vrijedi, kao što smo vidjeli predhodnom podpoglavlju,

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u}_n \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1^T \\ \mathbf{r}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{r}_n^T \end{bmatrix}, \tag{2.184}$$

imamo

$$\mathbf{P}e^{\mathbf{\Lambda}t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t}\mathbf{u}_1 & e^{\lambda_2 t}\mathbf{u}_2 & \cdots & e^{\lambda_n t}\mathbf{u}_n \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} \left[\mathbf{r}_1^T\mathbf{x}(0)\right] \\ \left[\mathbf{r}_2^T\mathbf{x}(0)\right] \\ \vdots \\ \left[\mathbf{r}_n^T\mathbf{x}(0)\right] \end{bmatrix}. \tag{2.185}$$

Uvrstimo li (2.185) u (2.183), na kraju dobivamo

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t}\mathbf{u}_1 & e^{\lambda_2 t}\mathbf{u}_2 & \cdots & e^{\lambda_n t}\mathbf{u}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left[\mathbf{r}_1^T\mathbf{x}(0)\right] \\ \left[\mathbf{r}_2^T\mathbf{x}(0)\right] \\ \vdots \\ \left[\mathbf{r}_n^T\mathbf{x}(0)\right] \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \left[\mathbf{r}_i^T\mathbf{x}(0)\right] e^{\lambda_i t}\mathbf{u}_i. \tag{2.186}$$

Usporedimo li izraz (2.186) sa dekompozicijom (2.169) vidimo da smo dobili identičan izraz.

### Spektralna reprezentacija matrice A

Vidjeli smo da modalna matrica $\mathbf{P}$ koja dijagonalizira matricu sustava $\mathbf{A}$ sadrži stupce koji predstavljaju svojstvene vektore matrice $\mathbf{A}$, dok matrica $\mathbf{R} = \mathbf{P}^{-1}$ sadrži retke koji predstavljaju recipročnu bazu. Slično kao (2.180), vrijedi

$$\mathbf{PR} = \mathbf{I}, \tag{2.187}$$

odnosno

$$[\mathbf{u}_1 \;\; \mathbf{u}_2 \;\; \cdots \;\; \mathbf{u}_n] \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1^T \\ \mathbf{r}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{r}_n^T \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \left(\mathbf{u}_i \mathbf{r}_i^T\right) = \mathbf{I}, \tag{2.188}$$

gdje je $\mathbf{u}_i \mathbf{r}_i^T$ vanjski produkt (*outer product*) vektora. Množenjem izraza (2.188) s desne strane vektorom stanja $\mathbf{x}(t)$, dobivamo

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} \left(\mathbf{u}_i \mathbf{r}_i^T\right) \mathbf{x}(t). \tag{2.189}$$

Pomnožimo li prethodni izraz s matricom $\mathbf{A}$ dobivamo

$$\mathbf{Ax}(t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(\mathbf{u}_i \mathbf{r}_i^T\right) \mathbf{x}(t), \tag{2.190}$$

gdje smo primjenili $\mathbf{Au}_i = \lambda_i \mathbf{u}_i$. Ako iz izraza (2.190) eliminiramo vektor stanja $\mathbf{x}$, na kraju dobivamo

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(\mathbf{u}_i \mathbf{r}_i^T\right). \tag{2.191}$$

Jednadžba (2.191) predstavlja spektralnu reprezentaciju matrice $\mathbf{A}$. Navedena reprezentacija matrice $\mathbf{A}$ igra važnu ulogu kod sinteze regulatora.

***Primjena spektralna reprezentacija za računanje*** $e^{\mathbf{A}t}$. S obzirom da je vektor stanja moguće dekomponirati po baznim vektorima $\mathbf{u}_i$ primjenom recipročne baze $\mathbf{r}_i$, za $i = 1, \ldots, n$, (vidi (6.53)),

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} \left[\mathbf{r}_i^T \mathbf{x}(t)\right] \mathbf{u}_i, \tag{2.192}$$

usporedbom izraza (2.192) i (2.189) slijedi identitet

$$\sum_{i=1}^{n} \left[\mathbf{r}_i^T \mathbf{x}(t)\right] \mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\mathbf{u}_i \mathbf{r}_i^T\right) \mathbf{x}(t). \tag{2.193}$$

Članovi na desnoj strani izraza $\mathbf{u}_i\mathbf{r}_i^T$ nazivaju se *dyads* ili projekcijski operatori. Navedeni izraz vrijedi općenito. Za bilo koja tri vektora $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ i $\mathbf{x}$ vrijedi

$$\left(\mathbf{a}\mathbf{b}^T\right)\mathbf{x} = \left(\mathbf{b}^T\mathbf{x}\right)\mathbf{a}. \tag{2.194}$$

Navedeni izraz možemo interpretirati kao projekciju vektora $\mathbf{x}$ primjenom opearatora $\mathbf{a}\mathbf{b}^T$ na vektor $\mathbf{a}$ s konstantnim multiplikatorom $\mathbf{b}^T\mathbf{x}$.

Ako sada na modalnu dekompoziciju vektora stanja

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i t}\left[\mathbf{r}_i^T\mathbf{x}(0)\right]\mathbf{u}_i, \tag{2.195}$$

primjenimo izraz (2.194), odnosno $\left[\mathbf{r}_i^T\mathbf{x}(0)\right]\mathbf{u}_i = \left(\mathbf{u}_i\mathbf{r}_i^T\right)\mathbf{x}(0)$, dobivamo slijedeću dekompoziciju

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i t}\left(\mathbf{u}_i\mathbf{r}_i^T\right)\mathbf{x}(0). \tag{2.196}$$

S druge strane znamo da je rješenje linearnih autonomnih sustva $\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0)$, tako da usporedbom tog rješenja s izrazom (2.196) slijedi

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i t}\left(\mathbf{u}_i\mathbf{r}_i^T\right). \tag{2.197}$$

Na ovaj način dobili smo dekompoziciju matrične eksponencijalne funkcije po projekcijskim operatorima (matricama) $\mathbf{u}_i\mathbf{r}_i^T$ sa skalarnim eksponencijalnim funkcijama $e^{\lambda_i t}$ kao multiplikatorima. Izraz (2.197) također može poslužiti za praktično izračunavanje matrične eksponencijalne funkcije $e^{\mathbf{A}t}$.

## 2.6. Kontrolabilnost linearnih sustava

Sa stanovišta sinteze regulacijskih sustava prvo pitanje koje si trebamo postaviti je: da li je određenim sustavom uopće moguće upravljati. Stoga se javlja potreba za odgovarajućim kriterijima kojima je moguće utvrditi tzv. *upravljivost* ili *kontrolabilnost* sustava, prije nego što se krene sa sintezom regulatora. Ukratko, problem kontrolabilnosti se svodi na to dali je moguće zadanim upravljačkim varijablama sustav prebaciti iz proizvoljnog početnog stanja u proizvoljno konačno stanje. Dakle, zanima nas *egzistencija rješenja* a ne konkretno određivanje upravljačkog algoritma.

***Potpuna kontrolabilnost stanja***. Sustav je potpuno kontrolabilan po stanjima, u zatvorenom vremenskom intervalu $[t_0, t_1]$, ako je moguće za zadani $t_0$ i $t_1$, svako početno stanje $\mathbf{x}(t_0)$ prevesti u svako željeno konačno stanje $\mathbf{x}(t_1)$ preko vektora upravljanja $\mathbf{u}(t)$ u konačnom vremenskom intervalu $t_0 \leq t \leq t_1 \leq \infty$. Pri tome se pretpostavlja da na vektor upravljanja nisu nametnuta nikakva dodatna ograničenja. Termin 'potpuna' znači da su sva stanja (svaka komponenta vektora stanja) upravljiva.

***Potpuna kontrolabilnost izlaza***. Sustav je potpuno kontrolabilan po izlazima, u zatvorenom vremenskom intervalu $[t_0, t_1]$, ako je moguće za zadani $t_0$ i $t_1$, svaki početni izlaz sustava $\mathbf{y}(t_0)$ prevesti u svako željeni konačni izlaz $\mathbf{y}(t_1)$ preko (neograničenog) vektora upravljanja $\mathbf{u}(t)$ u konačnom vremenskom intervalu $t_0 \leq t \leq t_1 \leq \infty$. Termin 'potpuna' znači da je svaka komponenta vektora izlaza upravljiva.

Zbog što lakšeg razumjevanja koncepta kontrolabilnosti, krenut ćemo sa razmatranjem kontrolabilnosti diskretnih linearnih vremenski-invarijantnih sustava.

## 2.6.1. Potpuna kontrolabilnost diskretnih sustava

Razmatramo linearni diskretni vremenski-invarijantni sustav opisan matričnim sustavom diferencijskih jednadžbi

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{E}\mathbf{x}(k) + \mathbf{F}\mathbf{u}(k), \tag{2.198}$$

čije rješenje je dano slijedećim izrazom

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{E}^k\mathbf{x}(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{E}^{k-j-1}\mathbf{F}\mathbf{u}(j), \tag{2.199}$$

što je detaljno razmatrano u podpoglavlju 2.3.2..

Ako je sustav potpuno kontrolabilan, tada ga je moguće prevesti iz proizvoljnog početnog stanja $\mathbf{x}(0)$ u proizvoljno konačno stanje $\mathbf{x}(k)$. Drugim riječima, ako je sustav potpuno kontrolabilan, tada postoji skup upravljačkih vektora $\mathbf{u}(0), \mathbf{u}(1), \mathbf{u}(2), \ldots, \mathbf{u}(k-1)$ koji će zadovoljiti uvijet

$$\mathbf{x}(k) - \mathbf{E}^k\mathbf{x}(0) = \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{E}^{k-j-1}\mathbf{F}\mathbf{u}(j). \tag{2.200}$$

Nadalje, na osnovu svojstava matričnog množenja vrijedi slijedeći izraz

$$\mathbf{F}\mathbf{u}(j) = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{f}_i u_i(j), \tag{2.201}$$

gdje je $\mathbf{f}_i$ $i$-ti stupac matrice $\mathbf{F}$, a $u_i(j)$ je $i$-ta komponenta vektora upravljanja u $j$-tom diskretnom vremenskom trenutku. Uvrstimo li (2.201) u (2.200) dobivamo

$$\mathbf{x}(k) - \mathbf{E}^k\mathbf{x}(0) = \sum_{j=0}^{k-1}\sum_{i=1}^{m}\mathbf{E}^{k-j-1}\mathbf{f}_i u_i(j). \tag{2.202}$$

Ako u prethodnom izrazu razvijemo sumu po diskretnim vremenskim trenucima, dobivamo

$$\mathbf{x}(k) - \mathbf{E}^k\mathbf{x}(0) = \sum_{i=1}^{m}\left[u_i(0)\mathbf{E}^{k-1}\mathbf{f}_i + u_i(1)\mathbf{E}^{k-2}\mathbf{f}_i + \ldots + u_i(k-2)\mathbf{E}\mathbf{f}_i + u_i(k-1)\mathbf{f}_i\right].$$

Vidimo da na lijevoj strani dobivenog izraza imamo $n$-dimenzionalni vektor $\mathbf{x}(k) - \mathbf{E}^k\mathbf{x}(0)$ koji može biti proizvoljan s obzirom da je i početno i konačno stanje proizvoljno. S druge strane, na desnoj strani izraza imamo linearnu kombinaciju $n$-dimenzionalnih vektora $\mathbf{E}^{k-1}\mathbf{f}_i, \mathbf{E}^{k-2}\mathbf{f}_i, \ldots, \mathbf{E}\mathbf{f}_i, \mathbf{f}_i$, za $i = 1, 2, \ldots, m$. Koeficijenti te linearne kombinacije su komponente upravljačkog vektora u diskretnim vremenskim trenucima, $u_i(0)$, $u_i(1)$, …, $u_i(k-2)$, $u_i(k-1)$, za $i = 1, 2, \ldots, m$.

Da bi proizvoljni vektor $\mathbf{x}(k)-\mathbf{E}^k\mathbf{x}(0)$ mogao biti prikazan preko linearne kombinacije od $m \cdot k$ vektora $\mathbf{E}^{k-1}\mathbf{f}_i, \mathbf{E}^{k-2}\mathbf{f}_i, \ldots, \mathbf{E}\mathbf{f}_i, \mathbf{f}_i$, mora $n$ vektora biti linearno nezavisno (vidi dodatak 6.3.). Tih $n$ linearno-nezavisnih vektora čini bazu $n$-dimenzionalnog vektorskog prostora, što znači da je svaki proizvoljni vektor moguće prikazati kao linearnu kombinaciju baznih vektora. S obzirom da su koeficijenti te linearne kombinacije komponente vektora upravljanja, slijedi da je takav sustav potpuno kontrolabilan po stanjima.

Linearnu nezavisnost vektora $\mathbf{E}^{k-1}\mathbf{f}_i, \mathbf{E}^{k-2}\mathbf{f}_i, \ldots, \mathbf{E}\mathbf{f}_i, \mathbf{f}_i$, za $i = 1, 2, \ldots, m$, možemo ispitati preko ranga matrice čiji stupci su formirani od navedenih vektora. S obzirom da $m$ stupaca $\mathbf{E}^j\mathbf{f}_i$, za $i = 1, 2, \ldots, m$ i $j = 0, 1, \ldots, k-1$, možemo prikazati matricom $\mathbf{E}^j\mathbf{F}$, slijedi uvijet linearne nezavisnosti vektora

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix}\mathbf{E}^{k-1}\mathbf{F} & \mathbf{E}^{k-2}\mathbf{F} & \cdots & \mathbf{E}^2\mathbf{F} & \mathbf{E}\mathbf{F} & \mathbf{F}\end{bmatrix} = n, \tag{2.203}$$

što je ujedno i uvijet potpune kontrolabilnosti po stanjima linearnih diskretnih sustava. Matrica u (2.203) je dimenzije $n \times mk$.

Na osnovu Cayley-Hamiltonovog teorema (6.29) slijedi da je svaku potenciju matrice $\mathbf{E}^j$, za $j > n$ moguće prikazati kao matrični polinom po $\mathbf{E}$ reda $n-1$,

$$\mathbf{E}^j = \sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i\mathbf{E}^i, \qquad j > n. \tag{2.204}$$

Iz navedenoga proizlazi da nema smisla računati matrice $\mathbf{E}^j\mathbf{F}$, za potencije $j > n$, s obzirom da se mogu izraziti kao linearna kombinacija matrica $\mathbf{E}^j\mathbf{F}$, za $j < n$, a to znači da nemaju utjecaja na rang matrice u izrazu (2.203). Stoga uvjet kontrolabilnosti (2.203) možemo reducirati na

$$\text{rank}\begin{bmatrix}\mathbf{E}^{n-1}\mathbf{F} & \mathbf{E}^{n-2}\mathbf{F} & \cdots & \mathbf{E}^2\mathbf{F} & \mathbf{E}\mathbf{F} & \mathbf{F}\end{bmatrix} = n. \tag{2.205}$$

Matrica u (2.205) je dimenzije $n \times mn$. Iz navedenog možemo zaključiti da ako je zadovoljen uvijet (2.205) tada sustav možemo prebaciti iz bilo kojeg početnog stanja $\mathbf{x}_0$ u bilo koje konačno stanje $\mathbf{x}_f$ u najviše $n$ diskretnih vremenskih intervala. Ponavljamo da je to moguće jedino ako nema ograničenja na amplitudu vektora upravljanja.

***Uvjet potpune kontrolabilnosti izlaza***. Ako je izlaz sustava definiran izrazom $\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k)$, tada množenjem izraza (2.202) s matricom $\mathbf{C}$ te ponavljanjem analogne procedure kao u slučaju uvjeta potpune kontrolabilnosti stanja, dobivamo slijedeći uvjet potpune kontrolabilnosti izlaza sustava

$$\text{rank}\begin{bmatrix}\mathbf{C}\mathbf{E}^{n-1}\mathbf{F} & \mathbf{C}\mathbf{E}^{n-2}\mathbf{F} & \cdots & \mathbf{C}\mathbf{E}^2\mathbf{F} & \mathbf{C}\mathbf{E}\mathbf{F} & \mathbf{C}\mathbf{F}\end{bmatrix} = p. \tag{2.206}$$

### Kontrolabilnost diskretnih sustava s jednim ulazom

Da bi dodatno razjasnili koncept kontrolabilnosti, razmotrimo specijalni slučaj linearnog diskretnog sustava (2.198), s jednim upravljačkim signalom

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{E}\mathbf{x}(k) + \mathbf{f}u(k), \tag{2.207}$$

gdje je $u(k)$ skalarna upravljačka varijabla u $k$-tom diskretnom vremenskom trenutku a $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ je konstantna matrica (vektor) ulaza. Rješenje sustava (2.207) je

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{E}^k\mathbf{x}(0) + \sum_{j=0}^{k-1}\mathbf{E}^{k-j-1}\mathbf{f}u(j). \tag{2.208}$$

Razmotrimo problem određivanja upravljačke varijable koja će sustav prebaciti iz proizvoljnog početnog stanja $\mathbf{x}(0)$ u proizvoljno konačno stanje $\mathbf{x}(n)$ (gdje je $n$ dimenzija vektora stanja). Drugim riječima trebamo odrediti upravljačku varijablu u prvih $n$ diskretnih vremenskih trenutaka, $u(0), u(1), u(2), \ldots, u(n-1)$, tako da bude zadovoljena slijedeća matrična jednadžba

$$\mathbf{x}(n) - \mathbf{E}^n\mathbf{x}(0) = \sum_{j=0}^{n-1}\mathbf{E}^{n-j-1}\mathbf{f}u(j). \tag{2.209}$$

Desnu stranu prethodnog izraza možemo prikazati kao umnožak dvije matrice

$$\mathbf{x}(n) - \mathbf{E}^n\mathbf{x}(0) = \mathbf{S}\mathbf{w}, \tag{2.210}$$

gdje smo označili

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}^{n-1}\mathbf{f} & \mathbf{E}^{n-2}\mathbf{f} & \cdots & \mathbf{E}^2\mathbf{f} & \mathbf{E}\mathbf{f} & \mathbf{f} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ \vdots \\ u(n-2) \\ u(n-1) \end{bmatrix}. \tag{2.211}$$

Matrica $\mathbf{S}$ je $n \times n$ kvadratna matrica. Vektor $\mathbf{w}$ možemo dobiti invertiranjem matrice $\mathbf{S}$, odnosno

$$\mathbf{w} = \mathbf{S}^{-1}[\mathbf{x}(n) - \mathbf{E}^n\mathbf{x}(0)]. \tag{2.212}$$

Da bi inverzija matrice bila moguća nužno je da matrica $\mathbf{S}$ bude nesingularna. Nužan uvjet da kvadratna matrica $\mathbf{S}$ bude nesingularna je da rang matrice bude jednak broju stupaca odnosno redaka matrice, rank $\mathbf{S} = n$, odnosno

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{E}^{n-1}\mathbf{f} & \mathbf{E}^{n-2}\mathbf{f} & \cdots & \mathbf{E}^2\mathbf{f} & \mathbf{E}\mathbf{f} & \mathbf{f} \end{bmatrix} = n. \tag{2.213}$$

Dakle, ako je zadovoljen uvijet (2.213), tada je sustav kontrolabilan i moguće je bilo koje početno stanje prebaciti u bilo koje konačno stanje u $n$ diskretnih vremenskih intervala, gdje je $n$ dimenzija vektora stanja. U specijalnom slučaju s jednim ulazom i konačnim stanjem u $n$-tom diskretnom vremenskom trenutku, moguće je na osnovu izraza (2.212) jednoznačno odrediti upravljačku varijablu, odnosno $u(0), u(1), u(2), \ldots, u(n-1)$.

### 2.6.2. Potpuna kontrolabilnost kontinuiranih sustava

Razmotrimo sada problem kontrolabilnosti linearnih kontinuiranih vremenski-invarijantnih sustava reprezentiranih jednadžbama stanja

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t). \tag{2.214}$$

Rješavanjem matrične diferencijalne jednadžbe (2.214) možemo odrediti vektor stanja u vremenskom trenutku $t_1$

$$\mathbf{x}(t_1) = e^{\mathbf{A}t_1}\mathbf{x}(0) + \int_0^{t_1} e^{\mathbf{A}(t_1-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau. \tag{2.215}$$

Množenjem prethodnog izraza s $e^{-\mathbf{A}t_1}$ te prebacivanjem $\mathbf{x}(0)$ na lijevu stranu dobivamo

$$e^{-\mathbf{A}t_1}\mathbf{x}(t_1) - \mathbf{x}(0) = \int_0^{t_1} e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau. \tag{2.216}$$

Na osnovu Cayley-Hamiltonovog teorema slijedi da matričnu funkciju $e^{-\mathbf{A}\tau}$ možemo razviti u polinom reda $n-1$ po matrici $\mathbf{A}$,

$$e^{-\mathbf{A}\tau} = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j(\tau)\mathbf{A}^j. \tag{2.217}$$

Nadalje, $\mathbf{B}\mathbf{u}(t)$ možemo dekomponirati na slijedeći način

$$\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) = \sum_{k=1}^{m} \mathbf{b}_k u_k(\tau), \tag{2.218}$$

gdje $\mathbf{b}_k$ predstavlja $k$-ti stupac matrice $\mathbf{B}$. Uvrštavanjem (2.218) i (2.217) u (2.216), dobivamo

$$e^{-\mathbf{A}t_1}\mathbf{x}(t_1) - \mathbf{x}(0) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{A}^j\mathbf{b}_k \int_0^{t_1} \alpha_j(\tau)u_k(\tau)d\tau. \tag{2.219}$$

Označimo li integral na desnoj strani sa

$$v_{jk} = \int_0^{t_1} \alpha_j(\tau)u_k(\tau)d\tau, \tag{2.220}$$

izraz (2.219) postaje

$$e^{-\mathbf{A}t_1}\mathbf{x}(t_1) - \mathbf{x}(0) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=0}^{n-1} v_{jk}\mathbf{A}^j\mathbf{b}_k. \tag{2.221}$$

Dobiveni izraz možemo interpretirati kao dekompoziciju proizvoljnog $n$-dimenzionalnog vektora $e^{-\mathbf{A}t_1}\mathbf{x}(t_1) - \mathbf{x}(0)$ (jer je početno i konačno stanje proizvoljno) po vektorima $\mathbf{A}^j\mathbf{b}_k$ ($j = 0, 1, \ldots, n-1$; $k = 1, 2, \ldots, m$). Da bi navedena dekompozicija bila moguća, od $nm$ vektora $\mathbf{A}^j\mathbf{b}_k$, njih $n$ mora biti linearno nezavisno, odnosno

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} & \mathbf{A}^{n-2}\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \mathbf{A}\mathbf{B} & \mathbf{B}\end{bmatrix} = n. \tag{2.222}$$

Izraz (2.222) predstavlja uvjet potpune kontrolabilnosti stanja linearnih kontinuiranih sustava. Ako je uvjet (2.222) zadovoljen, tada za dani skup od $n$ linearno nezavisnih vektora $\mathbf{A}^j\mathbf{b}_k$, te za proizvoljni vektor $e^{-\mathbf{A}t_1}\mathbf{x}(t_1) - \mathbf{x}(0)$, možemo odrediti koeficijente linearne kombinacije, $v_{jk}$.

S obzirom da $n$ koeficijenata $v_{jk}$ predstavljaju skup od $n$ određenih integrala (2.220), gdje su upravljačke varijable podintegralna funkcija, problem kontrolabilnosti se svodi na pitanje: dali postoji $m$ upravljačkih varijabli $u_k(\tau)$, $k = 1, 2, \ldots, m$, $0 < \tau < t_1$, koje simultano zadovoljavaju $n$ integralnih jednadžbi (2.220). Vidjet ćemo da je odgovor pozitivan čak i u slučaju sustava s jednom upravljačkom varijablom.

### Kontrolabilnost kontinuiranih sustava s jednim ulazom

S ciljem dodatnog rasvjetljavanja koncepta kontrolabilnosti linearnih kontinuiranih sustava, razmotrit ćemo problem kontrolabilnosti linearnih sustava s jednim ulazom,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t), \tag{2.223}$$

gdje je $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ matrica (vektor) ulaza sustava, a $u(t)$ je skalarna upravljačka varijabla. Rješenje sustava (2.223) je

$$\mathbf{x}(t_1) = e^{\mathbf{A}t_1}\mathbf{x}(0) + \int_0^{t_1} e^{\mathbf{A}(t_1-\tau)}\mathbf{b}u(\tau)d\tau. \tag{2.224}$$

Slijedeći sličnu proceduru kao u slučaju s više ulaza, dobivamo ekvivalentni izraz jednadžbi (2.221)

$$e^{-\mathbf{A}t_1}\mathbf{x}(t_1) - \mathbf{x}(0) = \sum_{j=0}^{n-1} v_j \mathbf{A}^j \mathbf{b}, \tag{2.225}$$

gdje je

$$v_j = \int_0^{t_1} \alpha_j(\tau)u(\tau)d\tau. \tag{2.226}$$

Desnu stranu izraza (2.225) možemo prikazati kao matrični produkt

$$e^{-\mathbf{A}t_1}\mathbf{x}(t_1) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{S}\mathbf{v}, \tag{2.227}$$

gdje smo označili

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix}\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b} & \mathbf{A}^{n-2}\mathbf{b} & \cdots & \mathbf{A}^2\mathbf{b} & \mathbf{A}\mathbf{b} & \mathbf{b}\end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_{n-1} \\ v_{n-2} \\ \vdots \\ v_1 \\ v_0 \end{bmatrix}. \tag{2.228}$$

Da bi mogli riješiti matričnu jednadžbu (2.227), $n \times n$ kvadratna matrica $\mathbf{S}$ mora biti invertibilna, odnosno nesingularna, što izražavamo uvjetom

$$\mathrm{rank}\left[\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b} \quad \mathbf{A}^{n-2}\mathbf{b} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{2}\mathbf{b} \quad \mathbf{A}\mathbf{b} \quad \mathbf{b}\right] = n. \tag{2.229}$$

Ako je matrica $\mathbf{S}$ nesingularna, odnosno vrijedi uvjet (2.229), tada vektor koeficijenata $\mathbf{v}$ možemo odrediti jednoznačno:

$$\mathbf{v} = \mathbf{S}^{-1}\left(e^{-\mathbf{A}t_1}\mathbf{x}(t_1) - \mathbf{x}(0)\right). \tag{2.230}$$

Na osnovu poznavanja $n$ komponenti vektora $\mathbf{v}$ $(v_0, v_1, \ldots, v_{n-1})$ imamo $n$ integralnih jednadžbi (2.226) koje simultano treba zadovoljiti jedna upravljačka varijabla $u(t)$ u vremenskom intervalu $0 < t < t_1$. Može se pokazati da postoji beskonačno mnogo upravljačkih funkcija $u(t)$ koje simultano zadovoljavaju konačan broj integralnih jednadžbi tipa (2.226). Ovdje ćemo samo skicirati dokaz.

Diskretizirajmo po vremenu jednadžbu (2.226), gdje smo za korak integracije uzeli $T = t_1/n$, tako da je $\tau_i = iT$

$$v_j = T\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_j(iT)u(iT). \tag{2.231}$$

Dobiveni sustav jednadžbi možemo prikazati u matričnom obliku

$$\begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_{n-1} \end{bmatrix} = T\begin{bmatrix} \alpha_0(0) & \alpha_0(T) & \cdots & \alpha_0((n-1)T) \\ \alpha_1(0) & \alpha_1(T) & \cdots & \alpha_1((n-1)T) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \alpha_{n-1}(0) & \alpha_{n-1}(T) & \cdots & \alpha_{n-1}((n-1)T) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u(0) \\ u(T) \\ \vdots \\ u((n-1)T) \end{bmatrix}. \tag{2.232}$$

S obzirom da je kvadratna matrica na desnoj strani nesingularna (u slučaju različitih svojstvenih vrijednosti matrice $\mathbf{A}$), možemo ju invertirati i naći upravljačku varijablu u diskretnim vremenskim trenucima, $u(0), u(T), u(2T), \ldots, u((n-1)T)$ kao funkciju koeficijenata $v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}$. Drugim riječima, numerički smo odredili upravljačku varijablu $u(t)$, u diskretnim vremenskim intervalima, koja simultano zadovoljava diskretiziranu verziju $n$ integralnih jednadžbi (2.226).

Ako korak diskretizacije $T$ smanjujemo, odnosno povečavamo broj diskretnih intervala, sustav jednadžbi (2.231) postaje predefiniran po upravljačkoj varijabli $u(0), u(T)$, $u(2T), \ldots, u(kT)$, gdje je $k > n$, što znači da postoji beskonačno mnogo rješenja navedene jednadžbe.

Ovim pojednostavljenim razmatranjem htijeli smo pokazati da u slučaju kada je zadovoljen uvjet kontrolabilnosti (2.222) tada uvijek postoje upravljački vektori koji će (preko izraza (2.220) i (2.221)) sustav prebaciti iz proizvoljnog početnog stanja u proizvoljno konačno stanje.

***Uvjet potpune kontrolabilnosti izlaza.*** Ako je izlaz sustava definiran izrazom $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$, tada množenjem izraza (2.221) s matricom $\mathbf{C}$ te ponavljanjem analogne procedure kao u slučaju uvjeta potpune kontrolabilnosti stanja, dobivamo slijedeći uvjet potpune kontrolabilnosti izlaza sustava

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\mathbf{CA}^{n-1}\mathbf{B} & \mathbf{CA}^{n-2}\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{CA}^{2}\mathbf{B} & \mathbf{CAB} & \mathbf{CB}\end{bmatrix} = p. \tag{2.233}$$

Također, *potpuna kontrolabilnost izlaza* biti će zadovoljena ukoliko je zadovoljena *potpuna kontrolabilnost stanja* (2.222) i uvjet: rank $\mathbf{C} = p$.

Ukoliko je matrica prijenosa različita od nule, $\mathbf{D} \neq \mathbf{0}$, što znači da imamo direktnu transmisiju ulaza na izlaz, može se pokazati da je najopčenitiji uvjet potpune kontrolabilnosti izlaza slijedeći

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\mathbf{CA}^{n-1}\mathbf{B} & \mathbf{CA}^{n-2}\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{CA}^{2}\mathbf{B} & \mathbf{CAB} & \mathbf{CB} & \mathbf{D}\end{bmatrix} = p. \tag{2.234}$$

### Primjena Gramove matrice

Razmotrit ćemo primjenu Gramove matrice za utvrđivanje kontrolabilnosti linearnih vremenski-invarijantnih sustava, na primjeru kriterija (2.222). Označimo li sa

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix}\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} & \mathbf{A}^{n-2}\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{A}^{2}\mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{B}\end{bmatrix}, \tag{2.235}$$

gdje je $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n \times nm}$, tada kriterij (2.222) postaje

$$\operatorname{rank}\mathbf{M} = n. \tag{2.236}$$

Za velike vrijednosti $n$ i $m$ određivanje kontrolabilnosti primjenom kriterija (2.236) postaje nepraktično. U tom slučaju efikasnije je koristiti teoriju Gramovih matrica.

***Gramova matrica.*** *Gramova matrica* $\mathbf{G}$ definirana je za neku matricu $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ sa $\mathbf{G} = \mathbf{K}\mathbf{K}^T$. Važnost Gramove matrice proizlazi iz činjenice da je $\mathbf{G}$ *nesingularna ako i samo ako je* rank $\mathbf{K} = n$.

Ako za matricu $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n \times nm}$ formiramo Gramovu matricu $\mathbf{G} = \mathbf{M}\mathbf{M}^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tada je uvjet kontrolabilnosti (2.236) ekvivalentan zahtijevu da matrica $\mathbf{G}$ bude nesingularna, odnosno $\det(\mathbf{G}) \neq \mathbf{0}$.

### 2.6.3. Modalna interpretacija kontrolabilnosti

#### Modalna interpretacija primjenom dekompozicije vektora stanja

Primjenimo li izraz za modalnu dekompoziciju vektora stanja (2.176) u kombinaciji sa izrazom za dekompoziciju vektora $\mathbf{Bu}(\tau)$, (2.218), dobivamo

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} \left[\mathbf{r}_i^T \mathbf{x}(0)\right] e^{\lambda_i t}\mathbf{u}_i + \int_0^t \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} \left[\mathbf{r}_i^T \mathbf{b}_k\right] u_k(\tau) e^{\lambda_i (t-\tau)}\mathbf{u}_i d\tau. \tag{2.237}$$

gdje je $u_k(\tau)$ $k$-ta komponenta upravljačkog vektora $\mathbf{u}(\tau)$, dok je $\mathbf{u}_i$ svojstveni vektor matrice $\mathbf{A}$, ($\mathbf{A}\mathbf{u}_i = \lambda_i \mathbf{u}_i$). Ako za $i$-ti mod skalarni produkt $\mathbf{r}_i^T\mathbf{b}_k$ zadovoljava

$$\mathbf{r}_i^T \mathbf{b}_k = 0, \qquad \text{za } \forall\, k = 1, 2, \ldots, m, \tag{2.238}$$

to znači da upravljačke varijable $u_1(\tau), u_2(\tau), \ldots, u_m(\tau)$ nemaju nikakvog utjecaja na $i$-ti mod sustava i da nema načina da upravljačkim varijablama kontroliramo taj mod gibanja.

Stoga, u modalnoj interpretaciji, uvjet potpune kontrolabilnosti je da skalarni produkt $\mathbf{r}_i^T\mathbf{b}_k$ ne iščezava za sve $k = 1, 2, \ldots, m$.

#### Modalna interpretacija primjenom kanonskih jednadžbi stanja

Kanonske jednadžbe stanja, nakon primjene modalne transformacije, imaju slijedeći oblik

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{\Lambda}\mathbf{z}(t) + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t), \tag{2.239}$$

gdje je $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$, $\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}$, dok je $\mathbf{P}$ modalna matrica transformacije. S obzirom da nema sprege između kanonskih varijabli stanja, možemo odmah zaključiti da je neophodni uvjet kontrolabilnosti da matrica $\hat{\mathbf{B}}$ ne smije imati nul-retke. Ako bi $i$-ti redak matrice $\hat{\mathbf{B}}$ bio nul-redak, tada bi $i$-ti redak matrične diferencijalne jednadžbe (2.239) imao oblik: $\dot{z}_i = \lambda_i z_i$. Drugim riječima, $i$-ti mod bio bi potpuno neupravljiv. Ako primjenimo notaciju (2.184) te dekompoziciju (2.218), matričnu diferencijalnu jednadžbu (2.239) možemo raspisati po komponentama

$$\dot{z}_i = \lambda_i z_i + \sum_{k=1}^{m} \left[\mathbf{r}_i^T \mathbf{b}_k\right] u_k(t), \tag{2.240}$$

iz čega slijedi uvjet potpune kontrolabilnosti: skalarni produkt $\mathbf{r}_i^T\mathbf{b}_k$ ne smije iščezavati za sve $k = 1, 2, \ldots, m$. Drugim riječima, mora biti zadovoljeno: $\mathbf{r}_i^T\mathbf{b}_k \neq 0$ za barem jedan $k = 1, 2, \ldots, m$.

### Uvjet kontrolabilnosti u kompleksnoj domeni

Vidjeli smo u podpoglavlju 2.2.2. da je u kompleksnoj domeni veza između vektora stanja i ulaza, $\mathbf{X}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{U}(s)$, definirana matricom prijenosnih funkcija

$$\mathbf{G}(s) = [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{B} = \frac{\mathrm{adj}[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]\mathbf{B}}{\det[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]}. \tag{2.241}$$

Može se pokazati da će sustav biti potpuno kontrolabilan po stanjima ukoliko brojnik prijenosne funkcije $\mathrm{adj}[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]\mathbf{B}$ nema zajedničkih faktora sa $\det[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]$, odnosno, ukoliko nema skraćivanja polova i nula. Navedeni kriterij je usko povezan s prethodno navedenom modalnom interpretacijom kontrolabilnosti.

## 2.6.4. Kontrolabilnost vremenski-varijabilnih sustava

***Potpuna kontrolabilnost po stanjima.*** Sada ćemo razmotriti problem kontrolabilnosti linearnih vremenski-varijabilnih sustava opisanim jednadžbama stanja

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t), \tag{2.242}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t). \tag{2.243}$$

Znamo da rješenje jednadžbe stanja (2.242) možemo prikazati na slijedeći način

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t, t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{\Phi}(t, \tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau. \tag{2.244}$$

gdje je $\mathbf{\Phi}(t, t_0)$ matrica prijelaza sustava. Dakle, bilo koje početno stanje $\mathbf{x}(t_0)$ može biti prebačeno u bilo koje konačno stanje $\mathbf{x}(t_1)$ ako postoji upravljački vektor $\mathbf{u}(t) : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^m$, takav da vrijedi

$$\mathbf{x}(t_1) - \mathbf{\Phi}(t_1, t_0)\mathbf{x}(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{\Phi}(t_1, \tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau. \tag{2.245}$$

Pretpostavimo sada upravljački vektor $\mathbf{u}(t)$ u slijedećem obliku

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{B}^T(t)\mathbf{\Phi}^T(t_1, t)\mathbf{p}, \tag{2.246}$$

gdje je $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ neki konstantni vektor. Uvrstimo li (2.246) u (2.245), dobivamo

$$\mathbf{x}(t_1) - \mathbf{\Phi}(t_1, t_0)\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{W}(t_0, t_1)\mathbf{p}, \tag{2.247}$$

gdje je $\mathbf{W}(t_0, t_1) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *Gramova matrica* ili *Gramian kontrolabilnosti* definiran sa

$$\mathbf{W}(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{\Phi}(t_1, \tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{B}^T(\tau)\mathbf{\Phi}^T(t_1, \tau)d\tau. \tag{2.248}$$

Sada se problem određivanja upravljačkog vektora $\mathbf{u}(t)$ (koji zadovoljava matričnu integralnu jednadžbu (2.245)), svodi na određivanje konstantnog vektora $\mathbf{p}$ (koji zadovoljava matričnu algebarsku jednadžbu (2.247)). Da bi mogli odrediti vektor $\mathbf{p}$, matrica $\mathbf{W}(t_0, t_1)$ mora biti nesingularna, $\det[\mathbf{W}(t_0, t_1)] \neq 0$. U tom slučaju sustav je potpuno kontrolabilan, a upravljački vektor koji transformira početno stanje $\mathbf{x}(t_0)$ u bilo koje konačno stanje $\mathbf{x}(t_1)$ dan je izrazom

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{B}^T(t)\mathbf{\Phi}^T(t_1, t)\mathbf{W}^{-1}(t_0, t_1)\left[\mathbf{x}(t_1) - \mathbf{\Phi}(t_1, t_0)\mathbf{x}(t_0)\right]. \tag{2.249}$$

***Potpuna kontrolabilnost po izlazu.*** Rješenje jednadžbi stanja (2.242)-(2.243) po vektoru izlaza je

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{\Phi}(t, t_0)\mathbf{x}(t_0) + \mathbf{C}(t)\int_{t_0}^{t} \mathbf{\Phi}(t, \tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau. \tag{2.250}$$

Bilo koje početno stanje $\mathbf{x}(t_0)$ može biti prebačeno u bilo koji konačni izlaz $\mathbf{y}(t_1)$ ako postoji upravljački vektor $\mathbf{u}(t) : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^m$, takav da vrijedi

$$\mathbf{y}(t_1) - \mathbf{C}(t_1)\mathbf{\Phi}(t_1, t_0)\mathbf{x}(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{C}(t_1)\mathbf{\Phi}(t_1, \tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau. \tag{2.251}$$

Pretpostavimo sada upravljački vektor $\mathbf{u}(t)$ u slijedećem obliku

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{B}^T(t)\mathbf{\Phi}^T(t_1, t)\mathbf{C}^T(t_1)\mathbf{p}, \tag{2.252}$$

gdje je $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^p$ neki konstantni vektor. Uvrstimo li (2.252) u (2.251), dobivamo

$$\mathbf{y}(t_1) - \mathbf{C}(t_1)\mathbf{\Phi}(t_1, t_0)\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{V}(t_0, t_1)\mathbf{p}, \tag{2.253}$$

gdje je $\mathbf{V}(t_0, t_1) \in \mathbb{R}^{p\times p}$ *Gramian kontrolabilnosti* po izlazu definiran sa

$$\mathbf{V}(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{C}(t_1)\mathbf{\Phi}(t_1, \tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{B}^T(\tau)\mathbf{\Phi}^T(t_1, \tau)\mathbf{C}^T(t_1)d\tau. \tag{2.254}$$

Sličnom argumentacijom kao u slučaju kontrolabilnosti po stanju, zaključujemo da je sustav potpuno kontrolabilan po izlazu ako je matrica $\mathbf{V}(t_0, t_1)$ nesingularna.

***Gramian kontrolabilnosti vremenski-invarijantnih sustava.*** Navedeni kriterij kontrolabilnosti može poslužiti kao alternativa kriterijima kontrolabilnosti linearnih vremenski-invarijantnih sustava. U tom slučaju, matrica prijelaza ima oblik $\mathbf{\Phi}(t_1, \tau) = e^{\mathbf{A}(t_1-\tau)}$, a Gramian kontrolabilnosti je

$$\mathbf{W}(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} e^{\mathbf{A}(t_1-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T(t_1-\tau)} d\tau. \tag{2.255}$$

Smjenom granica integracije, $t_1 \to t$ i $t_0 \to 0$, te smjenom varijabli integracije $t_1 - \tau \to \tau$, dobivamo standardnu reprezentaciju Gramiana kontrolabilnosti linearnih vremenski-invarijantnih sustava

$$\mathbf{W}_c(t) = \int_0^t e^{\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T\tau} d\tau. \tag{2.256}$$

U tom slučaju, uvjet potpune kontrolabilnosti linearnih vremenski-invarijantnih sustava je nesingularnost Gramiana (2.256).

Osim kao kriterij kontrolabilnosti, Gramian (2.256) igra značajnu ulugu u analizi stabilnosti, optimalnom i robusnom upravljanju, redukciji modela, aproksimaciji Hankelovih normi, itd.

***Gramian kontrolabilnosti diskretnih sustava.*** U slučaju linearnih diskretnih vremenski-varijabilnih sustava imamo diskretnu verziju Gramiana (2.248)

$$\mathbf{W}(k_0, k_1) = \sum_{k=k_0}^{k_1} \mathbf{\Phi}(k_1, k)\mathbf{B}(k)\mathbf{B}^T(k)\mathbf{\Phi}^T(k_1, k). \tag{2.257}$$

Diskretni sustav je potpuno kontrolabilan po stanju ako je matrica $\mathbf{W}(k_0, k_1)$ nesingularna.

## 2.7. Observabilnost linearnih sustava

S obzirom da se varijable stanja sustava općenito ne moraju poklapati sa fizičkim (mjerljivim) varijablama sustava, sa stanovišta teorije upravljanja od posebnog je značaja mogućnost rekonstrukcije varijabli stanja na temelju mjerenja izlaznih varijabli sustava. To će biti moguće ako sustav posjeduje svojstvo tzv. *observabilnosti* ili *mjerljivosti*. Ukratko, sustav je potpuno observabilan ako se svaka promjena stanja sustava odražava na izlaznim varijablama.

***Potpuna observabilnost (mjerljivost) stanja.*** Sustav je potpuno observabilan po stanjima (uz $\mathbf{u} = \mathbf{0}$), u zatvorenom vremenskom intervalu $[t_0, t_1]$, ako je moguće za zadani $t_0$ i $t_1$, svako početno stanje $\mathbf{x}(t_0)$ egzaktno odrediti na osnovu poznavanja (mjerenja) vektora izlata $\mathbf{y}(t)$ u intervalu $[t_0, t_1]$. Termin 'potpuna' znači da su sva stanja (svaka komponenta vektora stanja) observabilna (mjerljiva).

### 2.7.1. Potpuna observabilnost diskretnih sustava

Razmatramo linearni diskretni vremenski-invarijantni sustav, uz $\mathbf{u}(k) = \mathbf{0}$, opisan matričnim sustavom diferencijskih jednadžbi

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{E}\mathbf{x}(k), \tag{2.258}$$

čije rješenje je dano slijedećim izrazom

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{E}^k\mathbf{x}(0), \tag{2.259}$$

odnosno, izlazna varijabla $\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k)$ je

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{E}^k\mathbf{x}(0). \tag{2.260}$$

Na osnovu definicije observabilnosti, zahtijeva se da je na osnovu mjerenja izlaza $\mathbf{y}(0)$, $\mathbf{y}(1), \mathbf{y}(2), \ldots, \mathbf{y}(N)$ moguće odrediti $n$ nepoznatih početnih uvjeta $x_1(0), x_2(0), \ldots, x_n(0)$. Za to određivanje dovoljan broj diskretnih vremenskih intervala je $N = n-1$. Detaljnim raspisivanjem jednadžbi (2.260) dobivamo

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}(0) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(0), \\
\mathbf{y}(1) &= \mathbf{C}\mathbf{E}\mathbf{x}(0), \\
\mathbf{y}(2) &= \mathbf{C}\mathbf{E}^2\mathbf{x}(0), \\
&\vdots \\
\mathbf{y}(n-1) &= \mathbf{C}\mathbf{E}^{n-1}\mathbf{x}(0),
\end{aligned}$$

ili u matričnom obliku

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}(0) \\ \mathbf{y}(1) \\ \mathbf{y}(2) \\ \vdots \\ \mathbf{y}(n-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{E} \\ \mathbf{C}\mathbf{E}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{E}^{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{x}(0). \tag{2.261}$$

Drugim riječima, dobili smo sustav od $nm$ jednadžbi s $n$ nepoznanica $x_1(0), x_2(0), \ldots, x_n(0)$. Da bi taj sustav bio rješiv, dovoljno je da postoji $n$ linearno nezavisnih jednadžbi unutar ukupnog sustava od $nm$ jednadžbi. Da bi postojao sustav od $n$ linearno nezavisnih jednadžbi, rang matrice na desnoj strani izraza mora biti jednak $n$, odnosno,

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\mathbf{C}^T & \mathbf{E}^T\mathbf{C}^T & (\mathbf{E}^T)^2\mathbf{C}^T & \cdots & (\mathbf{E}^T)^{n-1}\mathbf{C}^T\end{bmatrix} = n. \tag{2.262}$$

**Observabilnost diskretnih sustava s jednim izlazom**

Ako imamo samo jednu skalarnu izlaznu varijablu, $y(k) = \mathbf{c}^T\mathbf{x}(k)$, gdje je $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, sustav jednadžbi (2.261) postaje

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(n-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T\mathbf{E} \\ \mathbf{c}^T\mathbf{E}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{c}^T\mathbf{E}^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{bmatrix}. \tag{2.263}$$

Dobili smo sustav od $n$ jednadžbi s $n$ nepoznanica $x_1(0), x_2(0), \ldots, x_n(0)$ koje možemo jednoznačno odrediti invertiranjem $n \times n$ kvadratne matrice na desnoj strani izraza. Da bi matrica bila invertibilna, mora biti nesingularna, odnosno imati rang jednak $n$,

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\mathbf{c} & \mathbf{E}^T\mathbf{c} & (\mathbf{E}^T)^2\mathbf{c} & \cdots & (\mathbf{E}^T)^{n-1}\mathbf{c}\end{bmatrix} = n. \tag{2.264}$$

Dakle, u slučaju sustava s jednim izlazom mjerenim u $n$ diskretnih vremenskih intervala, moguće je eksplicite odrediti početni uvjet rješavanjem sustava linearnih jednadžbi, ako je ispunjen uvjet observabilnosti (2.264). U općem slučaju s više izlaza, sustav jednadžbi je predefiniran i potrebno je selektirati $n$ linearno nezavisnih jednadžbi.

### 2.7.2. Potpuna observabilnost kontinuiranih sustava

Razmatramo kontinuirani homogeni linearni sustav ($\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}$) opisan matričnim sustavom diferencijalnih jednadžbi

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \tag{2.265}$$

čije rješenje je dano slijedećim izrazom

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0), \tag{2.266}$$

odnosno, izlazna varijabla $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$ je

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0). \tag{2.267}$$

Na osnovu Cayley-Hamiltonovog teorema slijedi da matričnu funkciju $e^{\mathbf{A}\tau}$ možemo razviti u polinom reda $n-1$ po matrici $\mathbf{A}$,

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t)\mathbf{A}^k. \tag{2.268}$$

Uvrstimo li izraz (2.268) u (2.267) dobivamo

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t)\mathbf{C}\mathbf{A}^k\mathbf{x}(0). \tag{2.269}$$

ili u matričnoj interpretaciji

$$\mathbf{y}(t) = [\alpha_0(t)\mathbf{I} \;\; \alpha_1(t)\mathbf{I} \;\; \alpha_2(t)\mathbf{I} \;\; \cdots \;\; \alpha_{n-1}(t)\mathbf{I}] \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{x}(0). \tag{2.270}$$

gdje je $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{p\times p}$ jedinična matrica. Ako je sustav potpuno observabilan, tada je na bazi promatranja (mjerenja) vektora izlaza $\mathbf{y}(t)$, tijekom konačnog vremenskog intervala $0 \le t \le t_N$, moguće odrediti početno stanje $\mathbf{x}(0)$.

Pretpostavimo da imamo $N$ mjerenja izlaznog vektora $\mathbf{y}(t)$ u $N$ različitih vremenskih trenutaka $t_1, t_2, \ldots, t_N$. U tom slučaju, matričnu jednadžbu (2.270) možemo proširiti na slijedeći način

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}(t_1) \\ \mathbf{y}(t_2) \\ \vdots \\ \mathbf{y}(t_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_0(t_1)\mathbf{I} & \alpha_1(t_1)\mathbf{I} & \cdots & \alpha_{n-1}(t_1)\mathbf{I} \\ \alpha_0(t_2)\mathbf{I} & \alpha_1(t_2)\mathbf{I} & \cdots & \alpha_{n-1}(t_2)\mathbf{I} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_0(t_N)\mathbf{I} & \alpha_1(t_N)\mathbf{I} & \cdots & \alpha_{n-1}(t_N)\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{bmatrix}. \tag{2.271}$$

Dimenzija prve matrice na desnoj strani jednakosti je $Np \times np$, dok je dimenzija druge matrice $np \times n$. Da bi na osnovu dobivenog sustava od $Np$ jednadžbi odredili početne uvjete $x_1(0),\ldots,x_n(0)$, potrebno je da $n$ jednadžbi bude linearno nezavisno. Da bi $n$ jednadžbi bilo linearno nezavisno, druga matrica na desnoj strani (koja se množi s vektorom početnih uvjeta) mora imati rang $n$,

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\mathbf{C}^T & \mathbf{A}^T\mathbf{C}^T & (\mathbf{A}^T)^2\mathbf{C}^T & \cdots & (\mathbf{A}^T)^{n-1}\mathbf{C}^T\end{bmatrix} = n. \tag{2.272}$$

**Observabilnost kontinuiranih sustava s jednim izlazom**

Ako imamo samo jednu skalarnu izlaznu varijablu, $y(t) = \mathbf{c}^T\mathbf{x}(t)$, gdje je $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, te broj mjerenja $N = n$, sustav jednadžbi (2.271) postaje

$$\begin{bmatrix} y(t_1) \\ y(t_2) \\ \vdots \\ y(t_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_0(t_1) & \alpha_1(t_1) & \cdots & \alpha_{n-1}(t_1) \\ \alpha_0(t_2) & \alpha_1(t_2) & \cdots & \alpha_{n-1}(t_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_0(t_n) & \alpha_1(t_n) & \cdots & \alpha_{n-1}(t_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T\mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{c}^T\mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{bmatrix}. \tag{2.273}$$

Na desnoj strani jednadžbe imamo umnožak dvije kvadratne $n \times n$ matrice. Da bi mogli odrediti vektor početnih uvjeta, navedene patrice moraju biti invertibilne, odnosno njihov rang mora biti jednak $n$. Prva matrica koeficijenata Cayley-Hamiltonovog razvoja eksponencijalne funkcije ima rang $n$ ako su svojstvene vrijednosti matrice $\mathbf{A}$ različite (jednostruke). Ostaje uvjet na rang druge matrice

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\mathbf{c} & \mathbf{A}^T\mathbf{c} & (\mathbf{A}^T)^2\mathbf{c} & \cdots & (\mathbf{A}^T)^{n-1}\mathbf{c}\end{bmatrix} = n. \tag{2.274}$$

Dakle, ako je zadovoljen uvjet (2.274) tada možemo jednoznačno odrediti vektor početnih uvjeta (množenjem matrične jednadžbe (2.273) s lijeve strane inverzom prve matrice te zatim inverzom druge matrice).

### 2.7.3. Modalna interpretacija observabilnosti

**Modalna interpretacija primjenom dekompozicije vektora stanja**

Sustav nije observabilan ako ima dinamičke modove ponašanja koji ne mogu biti određeni na osnovi mjerenja dostupnih izlaznih varijabli. Ako razmatramo izraz (2.173) koji opisuje pobuđivanje dinamičkih modova uvjetovano početnim uvjetima, slijedi izraz za dekompoziciju vektora izlaza po modovima te u funkciji početnih uvjeta,

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\sum_{i=1}^{n}\left[\mathbf{r}_i^T\mathbf{x}(0)\right]e^{\lambda_i t}\mathbf{u}_i. \tag{2.275}$$

gdje su $\mathbf{u}_i$ svojstveni vektori matrice $\mathbf{A}$ dok su $\mathbf{r}_i$ vektori recipročne baze. S obzirom da vrijedi

$$\mathbf{C}\mathbf{u}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1^T \\ \mathbf{c}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{c}_p^T \end{bmatrix} \mathbf{u}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1^T\mathbf{u}_i \\ \mathbf{c}_2^T\mathbf{u}_i \\ \vdots \\ \mathbf{c}_p^T\mathbf{u}_i \end{bmatrix}, \tag{2.276}$$

gdje je $\mathbf{c}_k^T$ $k$-ti redak matrice $\mathbf{C}$, izraz (2.275) nadalje možemo prikazati po komponentama vektora izlaza

$$y_k(t) = \sum_{i=1}^{n} \left[\mathbf{r}_i^T\mathbf{x}(0)\right] \left(\mathbf{c}_k^T\mathbf{u}_i\right) e^{\lambda_i t}, \qquad k = 1, 2, \ldots, p. \tag{2.277}$$

Uvjet da $i$-ti mod iščezava u svakoj izlaznoj varijabli je

$$\mathbf{c}_k^T\mathbf{u}_i = 0, \qquad \text{za } \forall\, k = 1, 2, \ldots, p. \tag{2.278}$$

Drugim riječima, da bi sustav bio observabilan mora (za svaki $i$) vrijediti: $\mathbf{c}_k^T\mathbf{u}_i \neq 0$, za barem jedan $k = 1, 2, \ldots, p$.

### Modalna interpretacija primjenom kanonskih jednadžbi stanja

Kanonske jednadžbe stanja imaju slijedeći oblik

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{\Lambda}\mathbf{z}(t) + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t) \tag{2.279}$$

$$\mathbf{y}(t) = \hat{\mathbf{C}}\mathbf{z}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \tag{2.280}$$

gdje je $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$, $\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}$, $\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{P}$, dok je $\mathbf{P}$ modalna matrica transformacije.

U kanonskoj reprezentaciji, svaka komponenta vektora stanja $\mathbf{z}(t)$ reprezentira jedan mod sustava. U ovom obliku uvjet observabilnosti postaje očigledan: matrica $\hat{\mathbf{C}}$ ne smije imati nul-stupac. Ako je $i$-ti stupac matrice $\hat{\mathbf{C}}$ jednak nuli, to znači da se $i$-ti mod sustava ne pojavljuje ni u jednoj izlaznoj varijabli.

Na osnovu (2.276) te (2.178) slijedi

$$\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1^T \\ \mathbf{c}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{c}_p^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1^T\mathbf{u}_1 & \mathbf{c}_1^T\mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{c}_1^T\mathbf{u}_n \\ \mathbf{c}_2^T\mathbf{u}_1 & \mathbf{c}_2^T\mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{c}_2^T\mathbf{u}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{c}_p^T\mathbf{u}_1 & \mathbf{c}_p^T\mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{c}_p^T\mathbf{u}_n \end{bmatrix}. \tag{2.281}$$

Ako je $i$-ti stupac jednak nuli tada mora biti zadovoljen uvjet (2.278). Dakle, dobili smo isti uvjet observabilnosti: da bi sustav bio observabilan mora (za svaki $i$) vrijediti: $\mathbf{c}_k^T \mathbf{u}_i \neq 0$, za barem jedan $k = 1, 2, \ldots, p$.

**Uvjet observabilnosti u kompleksnoj domeni**

U kompleksnoj domeni (vidi 2.2.2.) veza između vektora izlaza i vektora početnih uvjeta, uz $\mathbf{U}(s) = \mathbf{0}$, dana je slijedećim izrazom

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{x}(0) = \frac{\mathbf{C}\mathrm{adj}[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]\mathbf{x}(0)}{\det[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]}. \tag{2.282}$$

Vidjeli smo da ne-observabilnost ima za posljedicu izostanak jednog ili više modova sustava u izlaznom vektoru. Na osnovu toga možemo zaključiti da kriterij observabilnosti u kompleksnoj ravnini podrazumjeva da $\mathbf{C}\mathrm{adj}[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]$ nema zajedničkih faktora sa $\det[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]$, odnosno da nema skračivanja polova i nula.

### 2.7.4. Observabilnost vremenski-varijabilnih sustava

***Observabilnost vremenski-varijabilnih diskretnih sustava***. Razmotrimo linearni vremenski-varijabilni diskretni sustav opisan matričnim diferencijskim jednadžbama stanja

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k), \tag{2.283}$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}(k)\mathbf{x}(k). \tag{2.284}$$

Rješenje sustava (2.283)-(2.284) možemo prikazati u obliku

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}(k)\mathbf{\Phi}(k, k_0)\mathbf{x}(k_0). \tag{2.285}$$

gdje je $\mathbf{\Phi}(k, k_0)$ matrica prijelaza diskretnog vremenski-varijabilnog sustava. Pomnožimo li jednadžbu (2.285) sa $\mathbf{\Phi}^T(k, k_0)\mathbf{C}^T(k)$ dobivamo

$$\mathbf{\Phi}^T(k, k_0)\mathbf{C}^T(k)\mathbf{y}(k) = \mathbf{\Phi}^T(k, k_0)\mathbf{C}^T(k)\mathbf{C}(k)\mathbf{\Phi}(k, k_0)\mathbf{x}(k_0). \tag{2.286}$$

Sumiranjem prethodnog izraza, dobivamo

$$\sum_{k=k_0}^{k_1} \mathbf{\Phi}^T(k, k_0)\mathbf{C}^T(k)\mathbf{y}(k) = \mathbf{M}(k_0, k_1)\mathbf{x}(k_0), \tag{2.287}$$

gdje je $\mathbf{M}(k_0, k_1)$ *Gramian observabilnosti* definiran sa

$$\mathbf{M}(k_0, k_1) = \sum_{k=k_0}^{k_1} \mathbf{\Phi}^T(k, k_0)\mathbf{C}^T(k)\mathbf{C}(k)\mathbf{\Phi}(k, k_0)\mathbf{x}(k_0). \tag{2.288}$$

Na osnovu izraza (2.293) vidimo da početno stanje $\mathbf{x}(k_0)$ možemo odrediti na osnovu izlaznih varijabli $\mathbf{y}(k_0), \mathbf{y}(k_0+1), \ldots, \mathbf{y}(k_1)$ jedino ako je matrica $\mathbf{M}(k_0, k_1)$ nesingularna. Ako je $\mathbf{M}(k_0, k_1)$ nesingularna, invertiranjem matrice dolazimo do konačnog rješenja

$$\mathbf{x}(k_0) = \mathbf{M}^{-1}(k_0, k_1) \sum_{k=k_0}^{k_1} \mathbf{\Phi}^T(k, k_0)\mathbf{C}^T(k)\mathbf{y}(k). \tag{2.289}$$

Dakle, ako je $\mathbf{M}(k_0, k_1)$ nesingularna tada na osnovu izraza (2.295) možemo rekonstruirati početno stanje sustava na temelju mjerenih izlaza $\mathbf{y}(k_0), \mathbf{y}(k_0 + 1), \ldots, \mathbf{y}(k_1)$, odnosno, sustav je potpuno observabilan.

***Observabilnost vremenski-varijabilnih kontinuiranih sustava***. Razmotrimo sada linearni vremenski-varijabilni kontinuirani sustav opisan jednadžbama stanja

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t), \tag{2.290}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t). \tag{2.291}$$

Rješenje sustava (2.290)-(2.291) možemo prikazati u obliku

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{\Phi}(t, t_0)\mathbf{x}(t_0). \tag{2.292}$$

gdje je $\mathbf{\Phi}(t, t_0)$ matrica prijelaza kontinuiranog vremenski-varijabilnog sustava. Nakon množenja jednadžbe (2.292) sa $\mathbf{\Phi}^T(t, t_0)\mathbf{C}^T(t)$, te integriranja dobivamo

$$\int_{t_0}^{t_1} \mathbf{\Phi}^T(t, t_0)\mathbf{C}^T(t)\mathbf{y}(t)dt = \mathbf{M}(t_0, t_1)\mathbf{x}(t_0), \tag{2.293}$$

gdje je $\mathbf{M}(t_0, t_1)$ *Gramian observabilnosti* kontinuiranih sustava definiran sa

$$\mathbf{M}(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{\Phi}^T(t, t_0)\mathbf{C}^T(t)\mathbf{C}(t)\mathbf{\Phi}(t, t_0)dt. \tag{2.294}$$

Ako je Gramian $\mathbf{M}(t_0, t_1)$ nesingularan, tada postoji njegov inverz i možemo naći rješenje jednadžbe (2.293) po početnom uvjetu $\mathbf{x}(t_0)$,

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{M}^{-1}(t_0, t_1) \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{\Phi}^T(t, t_0)\mathbf{C}^T(t)\mathbf{y}(t)dt. \tag{2.295}$$

Drugim riječima, sustav je potpuno observabilan ako je Gramian $\mathbf{M}(t_0, t_1)$ nesingularan.

***Gramian observabilnosti vremenski-invarijantnih sustava.*** Navedeni kriterij observabilnosti može poslužiti kao alternativa kriterijima observabilnosti linearnih vremenski-invarijantnih sustava. U tom slučaju, matrica prijelaza ima oblik $\mathbf{\Phi}(t_1, \tau) = e^{\mathbf{A}(t_1-\tau)}$, a Gramian observabilnosti je

$$\mathbf{M}(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} e^{\mathbf{A}^T(t_1-\tau)}\mathbf{C}^T\mathbf{C}e^{\mathbf{A}(t_1-\tau)}d\tau. \tag{2.296}$$

Smjenom granica integracije, $t_1 \to t$ i $t_0 \to 0$, te smjenom varijabli integracije $t_1 - \tau \to \tau$, dobivamo standardnu reprezentaciju Gramiana observabilnosti linearnih vremenski-invarijantnih sustava

$$\mathbf{W}_o(t) = \int_0^t e^{\mathbf{A}^T\tau}\mathbf{C}^T\mathbf{C}e^{\mathbf{A}\tau}d\tau. \tag{2.297}$$

U tom slučaju, uvjet potpune observabilnosti linearnih vremenski-invarijantnih sustava je nesingularnost Gramiana (2.297).

## 2.8. Regulacija linearnih sustava

Razmotrit ćemo neke osnovne regulacijske strukture linearnih multivarijabilnih sustava, te sintezu regulatora primjenom metode podešavanja polova.

### 2.8.1. Regulacijske strukture linearnih sustava

***Regulacija po vektoru stanja.*** Ako je kompletni vektor stanja mjerljiv, tada je moguće zatvoriti direktnu regulacijsku petlju po vektoru stanja

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) + \mathbf{w}(t), \tag{2.298}$$

gdje je $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ matrica pojačanja, a $\mathbf{w}(t) \in \mathbb{R}^m$ je referentni vektor vođenja. Uvrstimo li zakon upravljanja (2.298) u jednadžbe stanja linearnih vremenski-invarijantnih sustava (2.3)-(2.4), dobivamo

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{w}(t), \tag{2.299}$$

$$\mathbf{y}(t) = (\mathbf{C} - \mathbf{D}\mathbf{K})\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{w}(t), \tag{2.300}$$

U kompleksnoj domeni (vidi (2.65) i (2.66)), vezu između izlaznog i ulaznog vektora možemo izraziti preko matrice prijenosnih funkcija, $\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{W}(s)$,

$$\mathbf{G}(s) = \frac{(\mathbf{C} - \mathbf{DK})\mathrm{adj}[s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}]\mathbf{B}}{\det[s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}]} + \mathbf{D}, \tag{2.301}$$

gdje je $\det[s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}]$ *karakteristični polinom*, a $\det[s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}] = 0$ *karakteristična jednadžba* sustava. Rješenjem karakteristične jednadžbe po $s$, dobivamo polove sustava $s_1, s_2, \ldots, s_n$, koji su identični svojstvenim (vlastitim) vrijednostima matrice $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$, koje označavamo $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Problem sinteze regulatora metodom podešavanja polova svodi se na određivanje matrice pojačanja $\mathbf{K}$, tako da rješenja karakteristične jednadžbe $\det[s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}] = 0$ budu neke, unaprijed zadane, svojstvene vrijednosti $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Jasno, svojstvene vrijednosti biraju se tako da sustav bude stabilan. Može se pokazati da je preko regulatora stanja moguće podesiti sve polove sustava, pod uvjetom da je sustav potpuno kontrolabilan (upravljiv).

***Regulacija po vektoru izlaza***. Ako vektor stanja nije direktno mjerljiv, tada je moguće zatvoriti regulacijsku petlju po vektoru izlaza

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{y}(t) + \mathbf{w}(t), \tag{2.302}$$

gdje je $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{m \times p}$ matrica pojačanja, a $\mathbf{w}(t) \in \mathbb{R}^m$ je referentni vektor vođenja. Uvrstimo li zakon upravljanja (2.302) u jednadžbe stanja linearnih vremenski-invarijantnih sustava (2.3)-(2.4), uz $\mathbf{D} = \mathbf{0}$, dobivamo

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{BKC})\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{w}(t), \tag{2.303}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t), \tag{2.304}$$

U kompleksnoj domeni, vezu između izlaznog i ulaznog vektora možemo izraziti preko matrice prijenosnih funkcija, $\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{W}(s)$,

$$\mathbf{G}(s) = \frac{\mathbf{C}\mathrm{adj}[s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BKC}]\mathbf{B}}{\det[s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BKC}]}, \tag{2.305}$$

gdje je $\det[s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BKC}]$ *karakteristični polinom*, a $\det[s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BKC}] = 0$ *karakteristična jednadžba* sustava. Daljnje razmatranje je analogno kao u slučaju povratne veze po vektoru stanja.

Preko regulatora izlaza nije moguće uvijek podesiti sve polove sustava (bez obzira na potpunu kontrolabilnost sustava). U tom slučaju primjenjuje se *observer stanja* za estimaciju vektora stanja. Preko estimiranog vektora stanja $\hat{\mathbf{x}}(t)$ realizira se regulator stanja $\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{w}(t)$ za kojeg se može provesti sinteza metodom podešavanja polova sustava.

***Utjecaj povratne veze na osobine sustava***. Može se pokazati da povratna veza nema utjecaja na kontrolabilnost sustava. Drugim riječima rang matrice $\mathbf{M}$ sustava bez povratne veze, definirane sa (2.235), jednak je rangu matrice $\tilde{\mathbf{M}}$ sustava s povratnom vezom

$$\tilde{\mathbf{M}} = \left[(\mathbf{A}-\mathbf{B}\mathbf{K})^{n-1}\mathbf{B} \quad \cdots \quad (\mathbf{A}-\mathbf{B}\mathbf{K})^{2}\mathbf{B} \quad (\mathbf{A}-\mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{B} \quad \mathbf{B}\right]. \tag{2.306}$$

Nadalje, na osnovu izraza (2.300) vidimo da u slučaju $\mathbf{C} = \mathbf{D}\mathbf{K}$ sustav postaje neobservabilan, jer se gubi veza između stanja sustava i izlaza. Ako je $\mathbf{D} = \mathbf{0}$, tada povratna veza nema utjecaja na svojstvo observabilnosti sustava.

### 2.8.2. Sinteza regulatora podešavanjem polova sustava

Problem sinteze regulatora podešavanjem polova sustava možemo formulirati na slijedeći način: za unaprijed zadane polove sustava s povratnom vezom $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, koji su identični svostvenim vrijednostima matrice $(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})$), treba odrediti matricu pojačanja $\mathbf{K}$, uz pretpostavku da je sustav potpuno kontrolabilan.

#### Sinteza regulatora primjenom modalne transformacije

Uvedemo li oznaku $\mathbf{A}_r = \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}$, jednadžba (2.299) postaje

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_r\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{w}(t). \tag{2.307}$$

Primjenimo li sada modalnu transformaciju $\mathbf{x}(t) = \mathbf{P}\mathbf{z}(t)$, jednadžba (2.307) postaje

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{\Lambda}\mathbf{z}(t) + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{w}(t), \tag{2.308}$$

gdje je $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}_r\mathbf{P} = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$, dok je $\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}$. S obzirom da operacija sličnosti matrica ne mijenja svojstvene vrijednosti, slijedi da su svojstvene vrijednosti matrice $\mathbf{A}_r$ (ili polovi) jednaki svojstvenim vrijednostima (dijagonalnim elementima) matrice $\Lambda$.

Na osnovu izraza $\mathbf{A}_r = \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}$ i $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}_r\mathbf{P}$ dobivamo

$$\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1}. \tag{2.309}$$

Nakon množenja s desne strane matricom $\mathbf{P}$ izraz (2.309) postaje

$$\mathbf{A}\mathbf{P} - \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{P} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}. \tag{2.310}$$

Uvedemo li sada oznaku $\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{K}\mathbf{P}$, te nakon prebacivanja pojedinih članova, izraz (2.310) postaje

$$\mathbf{A}\mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{\Lambda} = \mathbf{B}\hat{\mathbf{K}}, \tag{2.311}$$

dok je

$$\mathbf{K} = \hat{\mathbf{K}}\mathbf{P}^{-1}. \tag{2.312}$$

Izraz (2.311) predstavlja linearnu matričnu jednadžbu po nepoznatoj matrici $\mathbf{P}$ dok su matrice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{\Lambda}$ i $\hat{\mathbf{K}}$ unaprijed zadane. Dijagonalna matrica $\mathbf{\Lambda}$ sadrži željene svojstvene vrijednosti zatvorenog regulacijskog kruga, a matrica $\hat{\mathbf{K}}$ je proizvoljna konstantna matrica. Na kraju, matricu pojačanja $\mathbf{K}$ regulatora stanja dobivamo na osnovu jednadžbe (2.312).

Da bi rješili jednadžbu (2.311) po matrici $\mathbf{P}$, primjenit ćemo reprezentaciju matrica preko vektora stupaca

$$\mathbf{A}[\mathbf{p}_1 \;\; \mathbf{p}_2 \;\; \cdots \;\; \mathbf{p}_n] - [\mathbf{p}_1 \;\; \mathbf{p}_2 \;\; \cdots \;\; \mathbf{p}_n]\mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\} = \mathbf{B}\hat{\mathbf{K}}, \tag{2.313}$$

odnosno

$$[\mathbf{A}\mathbf{p}_1 \;\; \mathbf{A}\mathbf{p}_2 \;\; \cdots \;\; \mathbf{A}\mathbf{p}_n] - [\lambda_1\mathbf{p}_1 \;\; \lambda_2\mathbf{p}_2 \;\; \cdots \;\; \lambda_n\mathbf{p}_n] = [\mathbf{B}\hat{\mathbf{k}}_1 \;\; \mathbf{B}\hat{\mathbf{k}}_2 \;\; \cdots \;\; \mathbf{B}\hat{\mathbf{k}}_n], \tag{2.314}$$

gdje je $\mathbf{p}_i$ $i$-ti stupac matrice $\mathbf{P}$, dok je $\hat{\mathbf{k}}_i$ $i$-ti stupac matrice $\hat{\mathbf{K}}$. Matrična jednadžba (2.314) zadovoljena je ako je $i$-ti stupac na lijevoj strani jednakosti jednak $i$-tom stupcu na desnoj strani, odnosno

$$\mathbf{A}\mathbf{p}_i - \lambda_i\mathbf{p}_i = \mathbf{B}\hat{\mathbf{k}}_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.315}$$

Na osnovu prethodnog izraza možemo odrediti $i$-ti stupac matrice $\mathbf{P}$,

$$\mathbf{p}_i = (\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{I})^{-1}\mathbf{B}\hat{\mathbf{k}}_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.316}$$

Određivanjem svih stupaca $\mathbf{p}_i$ pomoću izraza (2.316), odredili smo matricu $\mathbf{P}$, a na osnovu nje, primjenom izraza (2.312), direktno dobivamo matricu pojačanja $\mathbf{K}$.

Na osnovu izraza (2.316) zaključujemo da se željene svojstvene vrijednosti zatvorenog regulacijskog kruga moraju razlikovati od svojstvenih vrijednosti matrice $\mathbf{A}$ (jer bi inaće matrica $(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{I})$ bila singularna). Nadalje, vidimo da sinteza regulatora primjenom navedene metode nije jednoznačna jer matricu $\hat{\mathbf{K}}$ možemo izabrati proizvoljno. Od više mogućih izbora proizvoljne matrice $\hat{\mathbf{K}}$ bolji je onaj koji ima za posljedicu manja pojačanja (elemente) matrice $\mathbf{K}$.

### Sinteza regulatora primjenom karakteristične jednadžbe

Slijedeći pristup sintezi regulatora podešavanjem polova zatvorenog regulacijskog kruga baziran je na primjeni karakteristične jednadžbe regulacijskog sustava (2.307),

$$\hat{d}(\lambda) = \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}) = 0. \tag{2.317}$$

Cilj sinteze regulatora je određivanje matrice pojačanja $\mathbf{K}$, tako da rješenja karakteristične jednadžbe (2.317) budu željeni korijeni (polovi) sustava $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Može se pokazati da je to moguće ukoliko je par $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ potpuno kontrolabilan. Karakteristični polinom u (2.317) možemo prikazati na slijedeći način

$$\begin{aligned}\hat{d}(\lambda) &= \det\{(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})[\mathbf{I} + (\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{BK}]\} = \\ &= \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\det[\mathbf{I} + (\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{BK}],\end{aligned} \tag{2.318}$$

gdje $d(\lambda) = \lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}$ predstavlja karakteristični polinom sustava u otvorenoj povratnoj vezi. S obzirom da izraz $(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ ima oblik Laplaceovog transformata matrice prijelaza $e^{\mathbf{A}t}$, označit ćemo ga sa $\mathbf{\Phi}(\lambda) = (\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$. Koristeći navedene oznake, izraz (2.318) možemo prikazati kao

$$\hat{d}(\lambda) = d(\lambda)\det[\mathbf{I} + \mathbf{\Phi}(\lambda)\mathbf{BK}]. \tag{2.319}$$

Primjenom svojstva determinanti: $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B})$, gdje su $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ proizvoljne matrice odgovarajućih dimenzija, te definicijom pseudoinverza matrice $\mathbf{K}$,

$$\mathbf{K}^{\dagger} = \mathbf{K}^T\left(\mathbf{KK}^T\right)^{-1} \tag{2.320}$$

sa svojstvom $\mathbf{K}\mathbf{K}^{\dagger} = \mathbf{I}$, možemo izvesti slijedeći identitet

$$\begin{aligned}\det[\mathbf{I} + \mathbf{\Phi}(\lambda)\mathbf{B}\mathbf{K}] &= \det(\mathbf{K}\mathbf{K}^{\dagger})\det[\mathbf{I} + \mathbf{\Phi}(\lambda)\mathbf{B}\mathbf{K})] = \\ &= \det(\mathbf{K})\det[\mathbf{I} + \mathbf{\Phi}(\lambda)\mathbf{B}\mathbf{K}]\det(\mathbf{K}^{\dagger}) = \\ &= \det\left\{\mathbf{K}[\mathbf{I} + \mathbf{\Phi}(\lambda)\mathbf{B}\mathbf{K}]\mathbf{K}^{\dagger}\right\} = \\ &= \det\left[\mathbf{I} + \mathbf{K}\mathbf{\Phi}(\lambda)\mathbf{B}\right], \end{aligned} \tag{2.321}$$

tako da jednadžba (2.319) postaje

$$\hat{d}(\lambda) = d(\lambda)\det[\mathbf{I} + \mathbf{K}\mathbf{\Phi}(\lambda)\mathbf{B}]. \tag{2.322}$$

Matricu $\mathbf{K}$ treba odrediti iz uvjeta $\hat{d}(\lambda) = 0$ za svako $\lambda_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. To će biti slučaj ako je

$$\det[\mathbf{I} + \mathbf{K}\mathbf{\Phi}(\lambda_i)\mathbf{B}] = 0, \qquad i = 1, 2, \dots, n \tag{2.323}$$

pri čemu se željene svojstvene vrijednosti zatvorenog regulacijskog kruga moraju razlikovati od svojstvenih vrijednosti matrice $\mathbf{A}$ (jer bi inače bilo $d(\lambda_i) = 0$).

Uvjet (2.323) možemo postići izjednačavanjem sa nulom svih elemenata jednog stupca determinante. Ako označimo $j$-ti stupac jedinične matrice $\mathbf{I}$ sa $\mathbf{e}_j$, a $j$-ti stupac matrice $\mathbf{F}(\lambda_i) = \mathbf{\Phi}(\lambda_i)\mathbf{B}$ sa $\mathbf{f}_j(\lambda_i)$, $(j = 1, 2, \dots, m)$ tada izjednačavanje $j$-tog stupca s nulom u izrazu (2.323) možemo prikazati kao

$$\mathbf{K}\mathbf{f}_j(\lambda_i) = -\mathbf{e}_j. \tag{2.324}$$

Jednadžba (2.324) nije dovoljna za određivanje matrice pojačanja $\mathbf{K}$. Potrebno je da postoji $n$ linearno nezavisnih jednadžbi za svaki $\lambda_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Ako su svi željeni korijeni međusobno različiti (jednostruki), tada je moguće pronaći $n$ linearno nezavisnih stupaca $\mathbf{f}_{j_1}(\lambda_1), \mathbf{f}_{j_2}(\lambda_2), \dots, \mathbf{f}_{j_n}(\lambda_n)$ unutar $n \times nm$ matrice $[\mathbf{F}(\lambda_1) \quad \mathbf{F}(\lambda_2) \quad \dots \quad \mathbf{F}(\lambda_n)]$, gdje su indeksi $j_1, j_2, \dots, j_n \in \{1, 2, \dots, m\}$. U tom slučaju, $n$ vektorskih jednadžbi (2.324) može se prikazati u obliku jedne matrične jednadžbe

$$\mathbf{K}[\mathbf{f}_{j_1}(\lambda_1) \quad \mathbf{f}_{j_2}(\lambda_2) \quad \dots \quad \mathbf{f}_{j_n}(\lambda_n)] = -[\mathbf{e}_{j_1} \quad \mathbf{e}_{j_2} \quad \dots \quad \mathbf{e}_{j_n}], \tag{2.325}$$

iz koje dobivamo konačan izraz za matricu pojačanja

$$\mathbf{K} = -[\mathbf{e}_{j_1} \quad \mathbf{e}_{j_2} \quad \dots \quad \mathbf{e}_{j_n}] \cdot [\mathbf{f}_{j_1}(\lambda_1) \quad \mathbf{f}_{j_2}(\lambda_2) \quad \dots \quad \mathbf{f}_{j_n}(\lambda_n)]^{-1}. \tag{2.326}$$

Na sličan način je moguće provesti sintezu regulatora po vektoru izlaza, $\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{y}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{C}\mathbf{x}(t)$. U tom slučaju je matrica $\mathbf{F}(\lambda_i) = \mathbf{C}\mathbf{\Phi}(\lambda_i)\mathbf{B}$, a ostala procedura je slična kao u slučaju regulatora stanja.

### Sinteza regulatora primjenom Ackermannove formule

Karakteristična jednadžba zatvorenog regulacijskog kruga ima slijedeći oblik

$$\begin{aligned} \hat{d}(\lambda) &= \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}_r) = \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n) = \\ &= \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0. \end{aligned} \tag{2.327}$$

Prema Cayley-Hamiltonovom teoremu matrica $\mathbf{A}_r$ zadovoljava svoju karakterističnu jednadžbu

$$\hat{d}(\mathbf{A}_r) = \mathbf{A}_r^n + a_{n-1}\mathbf{A}_r^{n-1} + a_{n-2}\mathbf{A}_r^{n-2} + \ldots + a_1\mathbf{A}_r + a_0 = 0. \tag{2.328}$$

Ako sada u prethodnu jednadžbu uvrstimo potencije matrice $\mathbf{A}_r = \mathbf{A} - \mathbf{BK}$ (zbog jednostavnosti razmatramo slučaj za $n = 3$)

$$\mathbf{A}_r = \mathbf{A} - \mathbf{BK}, \tag{2.329}$$

$$\mathbf{A}_r^2 = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})^2 = \mathbf{A}^2 - \mathbf{ABK} - \mathbf{BKA}_r, \tag{2.330}$$

$$\mathbf{A}_r^3 = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})^3 = \mathbf{A}^3 - \mathbf{A}^2\mathbf{BK} - \mathbf{ABKA}_r - \mathbf{BKA}_r^2. \tag{2.331}$$

dobivamo slijedeći izraz

$$\begin{aligned} \hat{d}(\mathbf{A}_r) &= a_0\mathbf{I} + a_1\mathbf{A}_r + a_2\mathbf{A}_r^2 + \mathbf{A}_r^3 = \\ &= a_0\mathbf{I} + a_1(\mathbf{A} - \mathbf{BK}) + a_2(\mathbf{A}^2 - \mathbf{ABK} - \mathbf{BKA}_r) + \\ &+ \mathbf{A}^3 - \mathbf{A}^2\mathbf{BK} - \mathbf{ABKA}_r - \mathbf{BKA}_r^2 = \\ &= a_0\mathbf{I} + a_1\mathbf{A} + a_2\mathbf{A}^2 + \mathbf{A}^3 - a_1\mathbf{BK} - a_2\mathbf{ABK} - a_2\mathbf{BKA}_r - \\ &- \mathbf{A}^2\mathbf{BK} - \mathbf{ABKA}_r - \mathbf{BKA}_r^2 \\ &= d(\mathbf{A}) - a_1\mathbf{BK} - a_2\mathbf{ABK} - a_2\mathbf{BKA}_r - \mathbf{A}^2\mathbf{BK} - \mathbf{ABKA}_r - \mathbf{BKA}_r^2, \end{aligned} \tag{2.332}$$

gdje smo označili

$$d(\mathbf{A}) = \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = a_0\mathbf{I} + a_1\mathbf{A} + a_2\mathbf{A}^2 + \mathbf{A}^3. \tag{2.333}$$

S obzirom da vrijedi $\hat{d}(\mathbf{A}_r) = 0$, na osnovu izraza (2.332) slijedi

$$d(\mathbf{A}) = a_1\mathbf{BK} + a_2\mathbf{ABK} + a_2\mathbf{BKA}_r + \mathbf{A}^2\mathbf{BK} + \mathbf{ABKA}_r + \mathbf{BKA}_r^2. \tag{2.334}$$

odnosno, nakon sređivanja dobivamo

$$d(\mathbf{A}) = \mathbf{B}(a_1\mathbf{K} + a_2\mathbf{KA}_r + \mathbf{KA}_r^2) + \mathbf{AB}(a_2\mathbf{K} + \mathbf{KA}_r) + \mathbf{A}^2\mathbf{BK}. \tag{2.335}$$

Prethodni izraz možemo prikazati u matričnom obliku

$$d(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix}\mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2\mathbf{B}\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1\mathbf{K} + a_2\mathbf{KA}_r + \mathbf{KA}_r^2 \\ a_2\mathbf{K} + \mathbf{KA}_r \\ \mathbf{K} \end{bmatrix} \tag{2.336}$$

Ukoliko imamo jednu ulaznu varijablu, odnosno $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, tada je matrica

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix}\mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2\mathbf{B}\end{bmatrix} \tag{2.337}$$

kvadratna. Ako je rank$\mathbf{M} = n$, matrica je nesingularna i sustav je kontrolabilan. Ako sada jednadžbu (2.336) pomnožimo s lijeve strane sa izrazom $[0 \;\; 0 \;\; 1]\mathbf{M}^{-1}$, dobivamo matricu pojačanja

$$\mathbf{K} = [0 \;\; 0 \;\; 1] \begin{bmatrix}\mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2\mathbf{B}\end{bmatrix}^{-1} d(\mathbf{A}). \tag{2.338}$$

U slučaju proizvoljnog $n$-dimenzionalnog sustava, izraz (2.338) možemo generalizirati na slijedeći način

$$\mathbf{K} = [0 \;\; 0 \;\; \cdots \;\; 0 \;\; 1] \begin{bmatrix}\mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}\end{bmatrix}^{-1} d(\mathbf{A}). \tag{2.339}$$

Izraz (2.339) naziva se *Ackermannova formula* i koristi se za određivanje matrice pojačanja regulatora stanja multivarijabilnih sustava s jednim ulazom.

# 3 Analiza nelinearnih dinamičkih sustava

## 3.1. Dinamički model nelinearnih sustava

Nelinearni dinamički sustav s upravljačkim varijablama možemo prikazati slijedećim sustavom nelinearnih diferencijalnih jednadžbi

$$\dot{x}_1(t) = f_1\left(x_1(t), \ldots, x_n(t), u_1(t), \ldots, u_m(t), t\right), \qquad x_1(t_0) = x_{10}, \tag{3.1}$$

$$\dot{x}_2(t) = f_2\left(x_1(t), \ldots, x_n(t), u_1(t), \ldots, u_m(t), t\right), \qquad x_2(t_0) = x_{20}, \tag{3.2}$$

$$\vdots \tag{3.3}$$

$$\dot{x}_n(t) = f_n\left(x_1(t), \ldots, x_n(t), u_1(t), \ldots, u_m(t), t\right), \qquad x_n(t_0) = x_{n0}, \tag{3.4}$$

koji se može prikazati konciznije u vektorskom obliku

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t\right), \qquad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \tag{3.5}$$

gdje su

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{f}\left(\cdot\right) = \begin{bmatrix} f_1\left(\cdot\right) \\ f_2\left(\cdot\right) \\ \vdots \\ f_n\left(\cdot\right) \end{bmatrix}. \tag{3.6}$$

Pretpostavka je da su funkcije $f_1\left(\cdot\right), \ldots, f_n\left(\cdot\right)$ kontinuirane, tako da sustav jednadžbi (3.5) ima jedinstveno rješenje.

Ako nema upravljačkih varijabli, $\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}$, tada sustav (3.5) postaje *nelinearni vremenski-varijabilni sustav*

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}(t), t\right), \qquad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0. \tag{3.7}$$

Ako dinamika sustava ne ovisi eksplicite o vremenu, tada imamo *nelinearni autonomni sustav*

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}(t)\right), \qquad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0. \tag{3.8}$$

Sustav nelinearnih diferencijalnih jednadžbi (3.7) u općem slučaju ne možemo riješiti analitički. Međutim rješenja diferencijalnih jednadžbi (3.7) zadovoljavaju neka opća svojstva, poput matrice prijelaza kod linearnih sustava. Pretpostavimo da za neko početno vrijeme $t_0$ i početno stanje $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$ imamo rješenje jednadžbi (3.7) za $t \geq t_0$ u obliku $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0, t_0)$. Tada vrijede slijedeća svojstva:

- $\mathbf{x}(t_0; \mathbf{x}_0, t_0) = \mathbf{x}_0$;
- $\dfrac{d}{dt}\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0, t_0) = \mathbf{f}\left[\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0, t_0), t\right]$;
- $\mathbf{x}[t_2; \mathbf{x}(t_1; \mathbf{x}_0, t_0), t_1] = \mathbf{x}(t_2; \mathbf{x}_0, t_0)$ za svaki $t_1, t_2$ (princip kauzalnosti);
- $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0, t_0) = \mathbf{x}(t + \tau; \mathbf{x}_0, t_0 + \tau)$ za svaki $t, \tau$ (samo za autonomne sustave (3.8))

## 3.2. Linearizacija nelinearnog dinamičkog modela

U slučaju kada razmatramo male perturbacije oko nekog referentnog stanja, tada je moguće nelinearne jednadžbe stanja

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)\right), \tag{3.9}$$

linearizirati oko referentnog stanja i dobiti linearne diferencijalne jednadžbe koje opisuju dinamiku malih perturbacija.

Pretpostavimo da imamo referentno stanje $\bar{\mathbf{x}}(t)$ i odgovarajući referentni upravljački vektor $\bar{\mathbf{u}}(t)$. U slučaju bez perturbacija, referentni vektori zadovoljavaju nelinearnu jednadžbu stanja

$$\dot{\bar{x}}(t) = \mathbf{f}\left(\bar{\mathbf{x}}(t), \bar{\mathbf{u}}(t)\right), \tag{3.10}$$

U perturbiranom stanju, vektor stanja i upravljanja možemo prikazati na slijedeči način

$$\mathbf{x}(t) = \bar{\mathbf{x}}(t) + \delta\mathbf{x}(t), \tag{3.11}$$

$$\mathbf{u}(t) = \bar{\mathbf{u}}(t) + \delta\mathbf{u}(t), \tag{3.12}$$

gdje su $\delta\mathbf{x}(t)$ i $\delta\mathbf{u}(t)$ male varijacije oko referentnog vektora stanja i upravljanja, respektivno. Uvrstimo li sada (3.11)-(3.12) u (3.9), dobivamo

$$\dot{\bar{x}}(t) + \delta\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}\left(\bar{\mathbf{x}}(t) + \delta\mathbf{x}(t), \bar{\mathbf{u}}(t) + \delta\mathbf{u}(t)\right). \tag{3.13}$$

Prethodni izraz možemo razviti u Taylorov red za $i$-tu komponentu ($i = 1, \dots, n$)

$$\dot{\bar{x}}_i(t) + \delta\dot{x}_i(t) = f_i\left(\bar{\mathbf{x}}(t), \bar{\mathbf{u}}(t)\right) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\delta x_j(t) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial u_j}\delta u_j(t), \tag{3.14}$$

gdje smo zanemarili članove drugog i viših redova zbog pretpostavke da su varijacije oko referentnog stanja dovoljno male. Usporedimo li izraz (3.10) sa (3.14), na kraju dobivamo

$$\delta\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\delta x_j(t) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial u_j}\delta u_j(t), \qquad i = 1, 2, \dots, n, \tag{3.15}$$

gdje su parcijalne derivacije u prethodnom izrazu funkcije referentnog stanja i upravljanja, $\bar{\mathbf{x}}(t)$, $\bar{\mathbf{u}}(t)$. Sustav jednadžbi (3.15) možemo prikazati u matričnom obliku

$$\delta\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\delta\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\delta\mathbf{u}(t), \tag{3.16}$$

gdje su Jacobiani $\mathbf{A}(t)$ i $\mathbf{B}(t)$ definirani sa

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial u_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \frac{\partial f_n}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_m} \end{bmatrix}, \tag{3.17}$$

drugim riječima, dobili smo linearni vremenski-varijabilni sustav diferencijalnih jednadžbi. U slučaju da je referentno stanje i upravljanje konstantno, tada su i matrice $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ konstantne, odnosno imamo linearni vremenski-invarijantni sustav.

## 3.3. Specifičnosti nelinearnih dinamičkih sustava

Nelinearni dinamički sustavi imaju neka specifična svojstva koja se ne opažaju kod linearnih dinamičkih sustava. Ta svojstva je bitno istaknuti kako bi se dodatno naglasio oprez prilikom nekritičke linearizacije nelinearnih dinamičkih sustava. Linearizacijom takvih sustava razaramo navedene osobine sustave, što znači da se linearna aproksimacija može totalno (a ponekad i katastrofično) razlikovati u području gdje se dotične osobine ispoljavaju. Navodimo samo one osobine koje se ne mogu pojaviti kod linearnih sustava.

***Višestruke fiksne točke***. Nelinearni sustavi mogu imati višestruke *fiksne točke*, ili *točke ravnoteže* (engl. *equilibrium points*). Fiksne ili ravnotežne točke kod nelinearnih autonomnih sutava

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \tag{3.18}$$

su oni vektori stanja $\mathbf{x}^*$ za koje je $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$, odnosno koji zadovoljavaju

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}. \tag{3.19}$$

Kod linearnih autonomnih sustava postoji samo jedno ravnotežno stanje $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$.

*Primjer.* Jedan jednostavan primjer višestrukih fiksnih točaka je jednadžba slobodnog njihala

$$\ddot{x} + \frac{g}{l}\sin(x) = 0, \tag{3.20}$$

gdje je $x$ kut njihala od položaja ravnoteže, $g$ je gravitacijska konstanta a $l$ je duljina njihala. Ravnotežne točke definirane su jednadžbom $\sin(x^*) = 0$, čije rješenje je $x^* = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots, \pm n\pi$, gdje je $n$ bilo koji prirodni broj. Drugim riječima, imamo beskonačni broj fiksnih točaka.

***Konačno vrijeme 'bijega' (finite escape time)***. Razmotrimo slijedeći nelinearnu sustav prvog reda

$$\dot{x} = -x + x^2 = 0, \qquad x(0) = x_0. \tag{3.21}$$

Navedeni sustav ima dvije fiksne točke definirane jednadžbom $-x + x^2 = x(x-1) = 0$, odnosno $x_1^* = 0$, $x_2^* = 1$. Također, postoji analitičko rješenje u ovisnosti o početnim uvjetima

$$x(t) = \frac{x_0 e^{-t}}{1 - x_0 + x_0 e^{-t}}. \tag{3.22}$$

Na osnovu rješenja vidimo za početne uvjete $x_0 < 1$ rješenje konvergira nuli, odnosno sustav je stabilan. Za $x_0 = 1$ rješenje je konstantno $x(t) = 1$, dok za $x_0 > 1$, sustav divergira u beskonačnost i to u konačnom vremenu $t_f$ koje određujemo tako da nazivnik rješenja izjednačimo s nulom, $1 - x_0 + x_0 e^{-t_f} = 0$, odnosno $t_f = \ln \frac{x_0}{x_0 - 1}$.

***Granični krugovi (limit cycles)***. Linearni sustavi mogu imati oscilatorno ponašanje u slučaju vanjske harmoničke pobude, ili u slučaju granične stabilnosti - kada se polovi nalaze na imaginarnoj osi. S obzirom da realni i imaginarni dio svojstvenih vrijednosti ovise o parametrima sustava, svaka mala promjena parametara može sustav prebaciti iz oscilatornog moda u mod s prigušenim oscilacajama (stabilan) ili raspirenim oscilacijama (nestabilan). Također, amplituda oscilacija će direktno ovisiti o početnim uvjetima.

S druge strane, nelinearni sustavi mogu pokazivati svojstvo samopobuđenih oscilacija konstantne amplitude i frekvencije. Pri tome amplituda oscilacija ne ovisi o početnim uvjetima - svi početni uveti konvergiraju oscilacijama iste amplitude. Također, promjenama parametara sustava utječemo eventualno na amplitudu i frekvenciju ali ne 'razaramo' oscilatorno ponašanje (osim u slučaju tzv. Hopfove bifurkacije).

Primjer takvog *graničnog kruga* (*limit cycle*) je Van der Polov oscilator

$$m\ddot{x} + 2c(x^2 - 1)\dot{x} + kx = 0, \tag{3.23}$$

gdje su $m$, $c$ i $k$ pozitivne konstante. Mehanička interpretacija Van der Polove jednadžbe je mehanički oscilator s prigušenjem koje ovisi o poziciji. Kod RLC krugova, navedena jednadžba odgovara krugu s nelinearnim (negativnim) otporom.

***Viši harmonici***. Ako je pobuda linearnog sustava harmonička funkcija konstantne frekvencije i amplitude, tada će izlaz sustava biti harmonička funkcija iste frekvencije s pomakom u fazi i amplitude koja se općenito razlikuje od ulazne amplitude. Kod nelinearnih sustava harmonička pobuda odgovarajuće frekvencije rezultirat će izlazom koji će sadržavati harmonik osnovne (ulazne) frekvencije, te harmonike višeg reda.

***Bifurkacije***. Kod linearnih sustava s promjenom parametara sustava stabilna fiksna točka kod neke vrijednosti parametara postaje granično stabilna a zatim nestabilna. Kod nelinearnih sustava promjenom parametara, stabilna fiksna točka kod određene vrijednosti parametara (kritična točka ili bifurkacijska vrijednost) postaje lokalno nestabilna i sustav prelazi u novo, stabilno, ravnotežno stanje. Navedeni fenomen naziva se *bifurkacija*. Drugim riječima, bifurkacija je pojava kada kvantitativna promjena parametara sustava uzrokuje kvalitativnu promjenu ponašanja sustava.

***Kaos***. Kod linearnih sustava male razlike u početnim uvjetima uzrokuju male razlike u trajektorijama koje odgovaraju tim početnim uvjetima. Kod nelinearnih sustava moguć je tzv. kaotično ponašanje. Kaos je pojava kada dvije trajektorije s bliskim početnim uvjetima, tijekom vremena postanu potpuno različite. Drugim riječima, ponašanje sustava je ekstremno osjetljivo na početne uvjete i nemoguće je raditi dugoročne predikcije kaotičnih sustava. Tipičan primjer je Lorentzov model, krajnje pojednostavljen model vremena u obliku tri nelinearne diferencijalne jednadžbe, koji pokazuje kaotično ponašanje.

## 3.4. Analiza u faznoj ravnini

Metoda fazne ravnine ograničena je isključivo na sustave drugog, eventualno trećeg reda. Za sustave višeg reda možemo razmatrati jedino projekcije trajektorije na zadanu ravninu.

Nelinearni autonomni sustav drugog reda možemo prikazati slijedećim sustavom nelinearnih diferencijalnih jednadžbi

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2), \tag{3.24}$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2), \tag{3.25}$$

gdje su $x_1$ i $x_2$ stanja sustava dok su $f_1(\cdot)$, $f_2(\cdot)$ nelinearne kontinuirane funkcije. Fazna ravnina sustava (3.24)-(3.25) je koordinatna ravnina $x_1 - x_2$, dok je fazna trajektorija parametarski prikaz vremenske evolucije varijabli stanja $(x_1(t), x_2(t))$ u faznoj ravnini $x_1 - x_2$ sa vremenom kao parametrom.

Pretpostavimo da sustav (3.24)-(3.25) ima fiksnu točku $(x_1^*, x_2^*)$ te da želimo ispitati ponašanje sustava u okolini te točke. Linearizacijom sustava (3.24)-(3.25) dobivamo slijedeći sustav linearnih diferencijalnih jednadžbi

$$\dot{\tilde{x}}_1 = a\tilde{x}_1 + b\tilde{x}_2, \tag{3.26}$$

$$\dot{\tilde{x}}_2 = c\tilde{x}_1 + d\tilde{x}_2, \tag{3.27}$$

gdje su $\tilde{x}_1 = x_1 - x_1^*$ i $\tilde{x}_2 = x_2 - x_2^*$, dok je

$$a = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*), \qquad b = \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*), \qquad c = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*), \qquad d = \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*). \tag{3.28}$$

Svojstvene vrijednosti matrice $\mathbf{A}$,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \tag{3.29}$$

koje definiraju ponašanje sustava, odredit ćemo na osnovu karakteristične jednadžbe $det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$,

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0, \tag{3.30}$$

odnosno

$$\lambda^2 - \mathrm{tr}(\mathbf{A})\lambda + \det(\mathbf{A}) = 0, \tag{3.31}$$

gdje je

$$T = \mathrm{tr}(\mathbf{A}) = a + d$$

*trag* matrice $\mathbf{A}$, dok je

$$D = \det(\mathbf{A}) = ad - bc$$

determinanta matrice $\mathbf{A}$. Svojstvene vrijednosti dobivamo rješavanjem kvadratne jednadžbe (3.31),

$$\lambda_{1,2} = \frac{T}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{T^2 - 4D}. \tag{3.32}$$

U ovisnosti o vrijednostima parametara $T$ i $D$ imamo različite svojstvene vrijednosti koje mogu biti realne ili konjugirano kompleksne. Nadalje, realni dio može biti pozitivan, negativan ili jednak nuli. Također, korijeni mogu biti različiti (jednostruki) ili dvostruki. U ovisnosti o pojedinom slučaju, ponašanje sustava je suštinski različito.

**(I) *Svojstvene vrijednosti su realne i različite*.** Svojstvene vrijednosti su realne i različite kada je ispunjen uvjet $T^2 - 4D > 0$. U tom slučaju rješenje sustava (3.26)-(3.27) možemo prikazati na slijedeći način

$$\tilde{x}_1 = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \tag{3.33}$$

$$\tilde{x}_2 = C_3 e^{\lambda_1 t} + C_4 e^{\lambda_2 t}, \tag{3.34}$$

gdje su $C_i$, $i = 1, \ldots, 4$, konstante ovisne o početnim uvjetima.

Imamo slijedeće podslučajeve:

1. *Stabilni čvor*: $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$. Fiksna točka je asimptotski stabilna.

2. *Nestabilni čvor*: $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$. Fiksna točka je nestabilna.

3. *Nestabilno sedlo*: $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$. Fiksna točka je nestabilna.

4. $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 > 0$. Fiksna točka je nestabilna.

5. $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 < 0$. Fiksna točka je stabilna, ali nije asimptotski stabilna.

**(II)** ***Svojstvene vrijednosti su konjugirano kompleksne***. Svojstvene vrijednosti su konjugirano kompleksne kada je ispunjen uvjet $T^2 - 4D < 0$. Tada svojstvene vrijednosti (3.32) možemo prikazati na slijedeći način

$$\lambda_{1,2} = \gamma \pm j\omega, \qquad \gamma = \frac{T}{2}, \qquad \omega = \frac{1}{2}\sqrt{T^2 - 4D}. \tag{3.35}$$

gdje je $j$ imaginarna jedinica. Za konjugirano kompleksne svojstvene vrijednosti rješenje sustava (3.26)-(3.27) je u obliku

$$\tilde{x}_1 = e^{\gamma t}(C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)), \tag{3.36}$$

$$\tilde{x}_2 = e^{\gamma t}(C_3 \cos(\omega t) + C_4 \sin(\omega t)), \tag{3.37}$$

gdje su $C_i$, $i = 1, \ldots, 4$, konstante ovisne o početnim uvjetima.

Razlikujemo slijedeće podslučajeve:

1. *Stabilni fokus*: $\lambda_{1,2} = \gamma \pm j\omega$, $\gamma < 0$, $\omega \neq 0$. Imamo prigušene oscilacije i fiksna točka je asimptotski stabilna.

2. *Nestabilni fokus*: $\lambda_{1,2} = \gamma \pm j\omega$, $\gamma > 0$, $\omega \neq 0$. Imamo raspirene oscilacije i fiksna točka je nestabilna.

3. *Stabilni centar*: $\lambda_{1,2} = \gamma \pm j\omega$, $\gamma = 0$, $\omega \neq 0$. Nema prigušenja i fiksna točka je stabilna, ali nije asimptotski stabilna. Zbog periodičnosti rješenja fazna trajektorija je zatvorena krivulja sa fiksnom točkom u središtu.

**(III)** ***Svojstvene vrijednosti su jednake (dvostruke)***. Svojstvene vrijednosti su jednake $\lambda_{1,2} = \lambda$ kada je ispunjen uvjet $T^2 - 4D = 0$. U tom slučaju rješenje sustava (3.26)-(3.27) možemo prikazati na slijedeći način

$$\tilde{x}_1 = (C_1 + C_2 t)e^{\lambda t}, \tag{3.38}$$

$$\tilde{x}_2 = (C_3 + C_4 t)e^{\lambda t}, \tag{3.39}$$

gdje su $C_i$, $i = 1, \ldots, 4$, konstante ovisne o početnim uvjetima.

Razlikujemo slijedeće podslučajeve:

1. *Stabilni čvor*: $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$. Fiksna točka je asimptotski stabilna.

2. *Nestabilni čvor*: $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$. Fiksna točka je nestabilna.

3. $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Fiksna točka je nestabilna.

# 3.5. Perturbacijska analiza nelinearnih sustava

## 3.5.1. Regularna perturbacijska metoda

Egzaktno analitičko rješenje nelinearnih sustava moguće je samo za ograničen broj specijalnih klasa diferencijalnih jednadžbi. U općem slučaju možemo naći samo aproksimativno rješenje. Postoje općenito dva različita pristupa traženju aproksimativnog rješenja nelinearnih dinamičkih sustava: (a) numeričke metode i (b) asimptotske metode u koje spada perturbacijska analiza.

Pretpostavimo da imamo nelinearni dinamički sustav opisan diferencijalnim jednadžbama

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t, \varepsilon), \qquad \mathbf{x}(t_0) = \hat{\mathbf{x}}(\varepsilon), \tag{3.40}$$

gdje je $\varepsilon$ neki mali skalarni parametar a $\hat{\mathbf{x}}(\varepsilon)$ je početni uvjet općenito ovisan o parametru $\varepsilon$. Jednadžbe navedenog tipa javljaju se u mnogim aplikacijama. Pretpostavimo da je $\mathbf{x}(t, \varepsilon)$ egzaktno rješenje diferencijalne jednadžbe (3.40). Cilj asimptotskih metoda je dobiti aproksimativno rješenje $\tilde{\mathbf{x}}(t, \varepsilon)$, takvo da je odstupanje od egzaktnog riješenja malo ako je $\varepsilon$ mali. Nadalje, aproksimativno rješenje nelinearne diferencijalne jednadžbe (3.40) je izraženo jednadžbama koje su jednostavnije od originalnih jednadžbi (obično u obliku nehomogenih linearnih vremenski-varijabilnih diferencijalnih jednadžbi).

Ideja perturbacijske metode je da se iskoristi činjenica da je $\varepsilon$ neki mali parametar ($\varepsilon \ll 1$), što praktično znači da su potencije $\varepsilon^2, \varepsilon^3, ...$ još manje od $\varepsilon$.

S obzirom da riješenje $\mathbf{x}(t, \varepsilon)$ ovisi o malom parametru $\varepsilon$, prikazat ćemo ga u obliku reda potencija po parametru $\varepsilon$

$$\mathbf{x}(t, \varepsilon) = \mathbf{x}_0(t) + \varepsilon \mathbf{x}_1(t) + \varepsilon^2 \mathbf{x}_2(t) + \varepsilon^3 \mathbf{x}_3(t) + \ldots = \sum_{k=0}^{N-1} \varepsilon^k \mathbf{x}_k(t) + \mathcal{O}\left(\varepsilon^N\right), \tag{3.41}$$

gdje su $\mathbf{x}_0(t), \mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \mathbf{x}_3(t), \ldots$ nepoznate funkcije koje treba odrediti, dok je $\mathcal{O}(\varepsilon^N)$ ostatak $N$-tog reda. Početni uvjet $\hat{\mathbf{x}}(\varepsilon)$ također možemo razviti u Taylorov red

$$\hat{\mathbf{x}}(\varepsilon) = \hat{\mathbf{x}}_0 + \varepsilon \hat{\mathbf{x}}_1 + \varepsilon^2 \hat{\mathbf{x}}_2 + \varepsilon^3 \hat{\mathbf{x}}_3 + \ldots = \sum_{k=0}^{N-1} \varepsilon^k \hat{\mathbf{x}}_k + \mathcal{O}\left(\varepsilon^N\right), \tag{3.42}$$

tako da imamo slijedeće početne uvjete za funkcije $\mathbf{x}_0(t), \mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \mathbf{x}_3(t), \ldots$

$$\mathbf{x}_k(t_0) = \hat{\mathbf{x}}_k, \qquad k = 1, 2, \ldots, N-1. \tag{3.43}$$

Substitucijom izraza (3.41) u (3.40) dobivamo

$$\sum_{k=0}^{N-1} \varepsilon^k \dot{\mathbf{x}}_k(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t,\varepsilon), t, \varepsilon) + \mathcal{O}\left(\varepsilon^N\right). \tag{3.44}$$

Nadalje, funkciju $\mathbf{h}(\varepsilon, t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t,\varepsilon), t, \varepsilon)$ možemo razviti u Taylorov red po malom parametru $\varepsilon$,

$$\mathbf{h}(\varepsilon, t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t,\varepsilon), t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{h}_k(t)\varepsilon^k + \mathcal{O}\left(\varepsilon^N\right), \tag{3.45}$$

gdje su $\mathbf{h}_k(t)$ koeficijenti Taylorovog razvoja funkcije $\mathbf{h}(\varepsilon, t)$,

$$\mathbf{h}_k(t) = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k}{\partial \varepsilon^k} \mathbf{h}(\varepsilon, t)\bigg|_{\varepsilon=0}. \tag{3.46}$$

Uvrstimo li sada razvoj (3.45) u (3.44), te separiramo sve članove sa istim potencijama po parametru $\varepsilon$, dobivamo

$$\sum_{k=0}^{N-1} \varepsilon^k [\dot{\mathbf{x}}_k(t) - \mathbf{h}_k(t)] = \mathcal{O}\left(\varepsilon^N\right). \tag{3.47}$$

Zanemarivanjem članova višeg reda, $\mathcal{O}(\varepsilon^N) = 0$, prethodna jednadžba je zadovoljena ako vrijedi

$$\dot{\mathbf{x}}_k(t) = \mathbf{h}_k(t), \qquad \mathbf{x}_k(t_0) = \hat{\mathbf{x}}_k, \qquad k = 1, 2, \dots, N-1. \tag{3.48}$$

Sada ćemo odrediti prva tri koeficijenta Taylorovog razvoja (3.45). Koeficijent nultog reda $\mathbf{h}_0(t)$ dan je sa

$$\mathbf{h}_0(t) = \mathbf{h}(0, t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t, 0), t, 0) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0(t), t, 0), \tag{3.49}$$

gdje je $\mathbf{x}_0(t) = \mathbf{x}(t, 0)$ rješenje neperturbiranog ($\varepsilon = 0$) sustava (3.40), odnosno

$$\dot{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, t, 0), \qquad \mathbf{x}_0(t_0) = \hat{\mathbf{x}}_0. \tag{3.50}$$

Koeficijent prvog reda $\mathbf{h}_1(t)$ dan je sa

$$\begin{aligned}
\mathbf{h}_1(t) &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \mathbf{h}(\varepsilon, t)\bigg|_{\varepsilon=0} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \mathbf{f}(\mathbf{x}(t,\varepsilon), t, \varepsilon)\bigg|_{\varepsilon=0} = \\
&= \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}(t,\varepsilon), t, \varepsilon)\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varepsilon}(t,\varepsilon) + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \varepsilon}(\mathbf{x}(t,\varepsilon), t, \varepsilon)\right]\bigg|_{\varepsilon=0} = \\
&= \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_0(t), t, 0)\mathbf{x}_1(t) + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \varepsilon}(\mathbf{x}_0(t), t, 0),
\end{aligned} \tag{3.51}$$

gdje smo primjenili pravilo deriviranja kompozicije funkcija, činjenicu da je $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varepsilon}(t,\varepsilon)\big|_{\varepsilon=0} = \mathbf{x}_1(t)$, te definiciju $\mathbf{x}_0(t) = \mathbf{x}(t,0)$. Primjenimo li sada izraz (3.48) za $k=1$, dobivamo slijedeću diferencijalnu jednadžbu za funkciju $\mathbf{x}_1(t)$,

$$\dot{\mathbf{x}}_1(t) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_0(t),t,0)\mathbf{x}_1(t) + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \varepsilon}(\mathbf{x}_0(t),t,0), \qquad \mathbf{x}_1(t_0) = \hat{\mathbf{x}}_1. \tag{3.52}$$

Ako uvedemo slijedeće oznake

$$\mathbf{A}(t) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_0(t),t,0), \qquad \mathbf{g}_1(\mathbf{x}_0(t),t) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \varepsilon}(\mathbf{x}_0(t),t,0), \tag{3.53}$$

jednadžbu (3.52) možemo prikazati u konciznijem obliku

$$\dot{\mathbf{x}}_1(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}_1(t) + \mathbf{g}_1(\mathbf{x}_0(t),t), \qquad \mathbf{x}_1(t_0) = \hat{\mathbf{x}}_1, \tag{3.54}$$

iz kojeg direktno vidimo da se radi o nehomogenoj linearnoj vremenski varijabilnoj diferencijalnoj jednadžbi.

Navedenu proceduru možemo dalje ponavljati za članove višeg reda. To naravno uključuje računanje derivacija višeg reda funkcije $\mathbf{f}$ po vektoru $\mathbf{x}$, što će imati za posljedicu komplicirani matematički prikaz koeficijenata $\mathbf{h}_k(t)$ višeg reda. Stoga, bez dokaza navodimo još izraz za koeficijent drugog reda $\mathbf{h}_2(t)$,

$$\mathbf{h}_2(t) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2}\mathbf{h}(\varepsilon,t)\bigg|_{\varepsilon=0} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}_2(t) + \mathbf{g}_2(\mathbf{x}_0(t),\mathbf{x}_1(t),t), \tag{3.55}$$

gdje je

$$\begin{aligned}\mathbf{g}_2(\mathbf{x}_0(t),\mathbf{x}_1(t),t) = {} & \frac{1}{2}\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_0(t),t,0)\mathbf{x}_1(t) + \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_0(t),t,0)\mathbf{x}_1(t) + \\ & + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial \varepsilon^2}(\mathbf{x}_0(t),t,0),\end{aligned} \tag{3.56}$$

i

$$\mathbf{w}(\mathbf{x},\varepsilon,t) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x},t,\varepsilon)\mathbf{x}_1(t). \tag{3.57}$$

Primjenimo li sada izraz (3.48) za $k=2$, dobivamo slijedeću diferencijalnu jednadžbu za funkciju $\mathbf{x}_2(t)$,

$$\dot{\mathbf{x}}_2(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}_2(t) + \mathbf{g}_2(\mathbf{x}_0(t),\mathbf{x}_1(t),t), \qquad \mathbf{x}_2(t_0) = \hat{\mathbf{x}}_2. \tag{3.58}$$

Ponavljanjem navedene procedure za određivanje viših članova Taylorovog razvoja, dobivamo sustav diferencijalnih jednadžbi slijedećeg oblika

$$\dot{\mathbf{x}}_0(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0(t),t,0), \qquad \mathbf{x}_0(t_0) = \hat{\mathbf{x}}_0. \tag{3.59}$$

$$\dot{\mathbf{x}}_k(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}_k(t) + \mathbf{g}_k(\mathbf{x}_0(t),\mathbf{x}_1(t),\ldots,\mathbf{x}_{k-1}(t),t), \qquad \mathbf{x}_k(t_0) = \hat{\mathbf{x}}_k, \tag{3.60}$$

za $k = 1, 2, \ldots, N-1$, gdje je $\mathbf{A}(t) = \partial\mathbf{f}/\partial\mathbf{x}$ Jacobian evaluiran u $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0(t)$ i $\varepsilon = 0$, dok je član $\mathbf{g}_k(\mathbf{x}_0(t), \mathbf{x}_1(t), \ldots, \mathbf{x}_{k-1}(t), t)$ polinomialna vektorska funkcija po $\mathbf{x}_0(t)$, $\mathbf{x}_1(t)$, $\ldots$, $\mathbf{x}_{k-1}(t)$.

Po svojoj strukturi, dobivene diferencijalne jednadžbe spadaju u klasu nehomogenih linearnih diferencijalnih jednadžbi s vremenski promjenjivim parametrima. Nehomogeni član svake diferencijalne jednadžbe sadrži rješenja prethodnih članova nižeg reda, čime se omogućuje rekurzivno izračunavanje viših članova Taylorovog razvoja.

**Primjer**. Razmotrimo skalarnu nelinearnu diferencijalnu jednadžbu

$$\dot{x} = x + \varepsilon x^2, \qquad x(0) = x_0, \qquad (0 < \varepsilon \ll 1). \tag{3.61}$$

Pretpostavimo da želimo naći perturbativno riješenje, do drugog reda po $\varepsilon$, odnosno

$$x(t, \varepsilon) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \mathcal{O}\left(\varepsilon^3\right). \tag{3.62}$$

Substitucijom (3.62) u (3.61), dobivamo

$$\dot{x}_0(t) + \varepsilon\dot{x}_1(t) + \varepsilon^2\dot{x}_2(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \varepsilon[x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t)]^2 + \mathcal{O}\left(\varepsilon^3\right).$$

Kvadriranjem izraza u uglatoj zagradi, te zadržavanjem članova do drugog reda, dobivamo

$$\dot{x}_0(t) + \varepsilon\dot{x}_1(t) + \varepsilon^2\dot{x}_2(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \varepsilon x_0(t)^2 + 2\varepsilon^2 x_1(t)x_0(t) + \mathcal{O}\left(\varepsilon^3\right).$$

Ako sada prebacimo sve članove na lijevu stranu te izjednačimo članove uz iste potencije od $\varepsilon$, dobivamo

$$[\dot{x}_0(t) - x_0(t)] + \varepsilon[\dot{x}_1(t) - x_1(t) - x_0(t)^2] + \varepsilon^2[\dot{x}_2(t) - x_2(t) - 2x_1(t)x_0(t)] = \mathcal{O}\left(\varepsilon^3\right).$$

Zanemarivanjem članova višeg reda $\mathcal{O}(\varepsilon^3)$, prethodni izraz biti će zadovoljen kada su članovi u uglatim zagradama, uz potencije od $\varepsilon$, jednaki nuli

$$\dot{x}_0(t) = x_0(t), \tag{3.63}$$

$$\dot{x}_1(t) = x_1(t) + x_0(t)^2, \tag{3.64}$$

$$\dot{x}_2(t) = x_2(t) + 2x_1(t)x_0(t). \tag{3.65}$$

Drugim riječima, određivanje nepoznatih funkcija $x_0(t), x_1(t), x_2(t)$ u razvoju (3.62) svedeno je rješavanje sustava od tri nehomogene linearne diferencijalne jednadžbe s konstantnim koeficijentima. Prva jednadžba (3.63) je linearna homogena diferencijalna jednadžba na osnovu koje dobijemo nultu aproksimaciju $x_0(t)$. Kvadrat navedenog rješenja predstavlja nehomogeni dio jednadžbe (3.64). Rješavanjem nehomogene diferencijalne jednadžbe (3.64) dobivamo prvu aproksimaciju $x_1(t)$. Rješenja prve dvije jednadžbe u obliku $2x_1(t)x_0(t)$ predstavlja nehomogeni član treće jednadžbe.

S obzirom da početni uvijet $x(0) = x_0$ vrijedi za bilo koji $\varepsilon$ slijedi da u $t = 0$ imamo $x_0(0) = x_0$, $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0$. Sada možemo naći rješenje jednadžbe (3.63), odnosno rješenje neperturbiranog sustava (3.61)

$$x_0(t) = x_0 e^t. \tag{3.66}$$

Uvrštavanjem (3.66) u (3.64) dobivamo jednadžbu

$$\dot{x}_1(t) = x_1(t) + x_0^2 e^{2t}, \qquad x_1(0) = 0, \tag{3.67}$$

čije rješenje je

$$x_1(t) = x_0^2 e^t (e^t - 1). \tag{3.68}$$

Uvrštavanjem rješenja $x_0(t)$ i $x_1(t)$ u (3.65) dobivamo nehomogenu diferencijalnu jednadžbu

$$\dot{x}_2(t) = x_2(t) + 2x_0^3 e^{2t}(e^t - 1), \qquad x_2(0) = 0, \tag{3.69}$$

čije rješenje je

$$x_2(t) = x_0^3 e^t (e^t - 1)^2. \tag{3.70}$$

Na kraju, uvrštavanjem dobivenih rješenja $x_0(t)$, $x_1(t)$ i $x_2(t)$ u razvoj (3.62), dobivamo asimptotsko rješenje drugog reda po parametru $\varepsilon$,

$$x(t, \varepsilon) = x_0 e^t [1 + \varepsilon x_0 (e^t - 1) + \varepsilon^2 x_0^2 (e^t - 1)^2] + \mathcal{O}\left(\varepsilon^3\right). \tag{3.71}$$

Egzaktno rješenje jednadžbe (3.61) možemo prikazati u analitičkom obliku

$$x(t) = \frac{x_0 e^t}{1 - \varepsilon x_0 (e^t - 1)}. \tag{3.72}$$

Razvojem navedenog rješenja u Taylorov red do drugog reda dobivamo razvoj (3.71). Navedena aproksimacija vrijedi za vremenske intervale koji su manji od '*escape time*' $t_f = \ln\left(\frac{1+\varepsilon x_0}{\varepsilon x_0}\right)$. $\square$

### 3.5.2. Singularna perturbacijska metoda

# 4 Lyapunovljeva analiza stabilnosti

## 4.1. Definicije stabilnosti

Razmatramo problem stabilnosti autonomnih nelinearnih sustava opisanih vektorskom diferencijalnom jednadžbom

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \tag{4.1}$$

gdje je $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$ nelinearna kontinuirana vektorska funkcija, dok je $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ vektor stanja sustava.

**Definicija 1. (Stabilnost)** Za ravnotežno stanje $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ kažemo da je stabilno ako za neki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da iz $\|\mathbf{x}(t_0)\| < \delta$, slijedi $\|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon$ za sve $t \geq t_0$. Inače ravnotežno stanje je nestabilno.

Prethodnu definiciju možemo prikazati kompaktnije na slijedeći način

$$\forall \varepsilon > 0, \;\; \exists \delta > 0, \;\; \|\mathbf{x}(t_0)\| < \delta \;\; \Rightarrow \|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon, \;\; t \geq t_0.$$

**Definicija 2. (Asimptotska stabilnost)** Za ravnotežno stanje kažemo da je asimptotski stabilno ako je zadovoljen dodatni uvjet da za neki $\delta > 0$ iz $\|\mathbf{x}(t_0)\| < \delta$ slijedi da $\mathbf{x}(t) \to 0$ kada $t \to \infty$.

Prethodnu definiciju možemo prikazati kompaktnije na slijedeći način

$$\forall \delta > 0, \;\; \|\mathbf{x}(t_0)\| < \delta \;\; \Rightarrow \|\mathbf{x}(t)\| \to 0, \;\; t \to \infty.$$

**Definicija 3. (Eksponencijalna stabilnost)** Za ravnotežno stanje kažemo da je eksponencijalno stabilno ako postoji $\gamma > 0$ tako da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da

$$\|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon \|\mathbf{x}(t_0)\| e^{-\gamma(t-t_0)}, \qquad t > t_0$$

kad god je $\|\mathbf{x}(t_0)\| < \delta$.

## 4.2. Definicija Lyapunovljeve funkcije

**Definicija 3. (Pozitivna definitnost)**. Za skalarnu kontinuiranu funkciju $V(\mathbf{x})$ kažemo da je *lokalno pozitivno definitna* ako vrijedi $V(\mathbf{0}) = 0$ i ako unutar područja $\|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon$ vrijedi $\mathbf{x} \neq \mathbf{0} \;\Rightarrow\; V(\mathbf{x}) > 0$. Ako je $V(\mathbf{0}) = 0$ i ako navedeno svojstvo vrijedi u cijelom prostoru ($\varepsilon \to \infty$) tada je $V(\mathbf{x})$ *globalno pozitivno definitna*.

Nadalje, funkcija $V(\mathbf{x})$ je *negativno definitna* ako je $-V(\mathbf{x})$ pozitivno definitna. Funkcija $V(\mathbf{x})$ je *pozitivno semidefinitna* ako je $V(\mathbf{0}) = 0$ i $V(\mathbf{x}) \geq 0$ za $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Funkcija $V(\mathbf{x})$ je negativno semidefinitna ako je $-V(\mathbf{x})$ pozitivno semidefinitna. Prefiks "semi" se koristi da naglasi mogućnost da $V(\mathbf{x})$ može biti jednaka nuli za $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

S obzirom da $\mathbf{x}$ označava stanje sustava (4.1), skalarna funkcija $V(\mathbf{x})$ predstavlja implicitnu funkciju vremena $t$. Ako pretpostavimo da je $V(\mathbf{x})$ diferencijabilna, tada možemo odrediti njenu vremensku derivaciju

$$\dot{V} = \frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}\dot{x}_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(\mathbf{x}), \tag{4.2}$$

ili u vektorskom obliku

$$\dot{V} = \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x}). \tag{4.3}$$

gdje je parcijalna derivacija skalarne funkcije po vektoru označena kao vektor-redak

$$\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} & \frac{\partial V}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial V}{\partial x_n} \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

dok je $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ vektor-stupac, $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = [f_1(\mathbf{x}) \;\; f_2(\mathbf{x}) \;\; \cdots \;\; f_n(\mathbf{x})]^T$.

S obzirom da $\mathbf{x}$ zadovoljava autonomni sustav jednadžbi (4.1) $\dot{V}(\mathbf{x})$ ovisi jedino o $\mathbf{x}$. Zbog toga se često kaže da je $\dot{V}(\mathbf{x})$ derivacija od $V(\mathbf{x})$ uzduž trajektorije sustava.

**Definicija 4.** Ako je unutar nekog područja $\|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon$ funkcija $V(\mathbf{x})$ pozitivno definitna i ima kontinuirane parcijalne derivacije, te ako je njena vremenska derivacija $\dot{V}$ negativno semidefinitna,

$$\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0 \tag{4.5}$$

tada je $V(\mathbf{x})$ Lyapunovljeva funkcija sustava (4.1).

## 4.3. Karakterizacija stabilnosti primjenom Lyapunovljeve funkcije

**Teorem 1. (Lokalna stabilnost)** Ako unutar nekog područja $\|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon$ postoji skalarna funkcija $V(\mathbf{x})$ sa kontinuiranim prvim derivacijama tako da je

- $V(\mathbf{x})$ lokalno pozitivno definitna
- $\dot{V}(\mathbf{x})$ lokalno negativno semidefinitna

tada je ravnotežno stanje $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ stabilno. Ako je derivacija $\dot{V}$ lokalno negativno definitna unutar $\|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon$, tada je stabilnost asimptotska.

**Teorem 2. (Globalna stabilnost)** Ako imamo skalarnu funkciju $V(\mathbf{x})$ sa kontinuiranim parcijalnim derivacijama prvog reda tako da vrijedi

- $V(\mathbf{x})$ je pozitivno definitna
- $\dot{V}$ je negativno semidefinitna
- $V(\mathbf{x}) \to \infty$ kada $\|\mathbf{x}\| \to \infty$ (funkcija $V(\mathbf{x})$ je *radijalno neograničena*)

tada je ravnotežno stanje $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ globalno stabilno. Ako je $\dot{V}(\mathbf{x})$ negativno definitna tada je ravnotežno stanje *globalno asimptotski stabilno.*

## 4.4. LaSalleov princip invarijantnosti

Vidjeli smo (Teorem 1) da asimptotsku stabilnost možemo utvrditi samo u slučaju da je $\dot{V}(\mathbf{x})$ striktno negativno definitna funkcija. Ako je $\dot{V}(\mathbf{x})$ samo negativno semidefinitna, tada za dokaz asimptotske stabilnosti moramo primjeniti LaSalleov princip invarijantnosti izražen slijedećim teoremom

**Teorem 3. (Asimptotska stabilnost)** Pretpostavimo da u određenom području $\|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon$ vrijedi

- $V(\mathbf{x})$ je pozitivno definitna
- $\dot{V}(\mathbf{x})$ je negativno semidefinitna

- skup $\mathbf{R}$ definiran sa $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$ ne sadrži druga rješenja od (4.1) osim ravnotežnog stanja $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

tada je ravnotežno stanje $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ asimptotski stabilno.

Prethodni rezultat možemo proširiti za slučaj globalne asimptotske stabilnosti.

**Teorem 4. (Globalna asimptotska stabilnost)** Razmatramo autonomni sustav (4.1) gdje je $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ kontinuirana funkcija dok je $V(\mathbf{x})$ skalarna funkcija sa kontinuiranim parcijalnim derivacijama prvog reda. Ako je zadovoljeno

- $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$
- $V(\mathbf{x}) \to \infty$ kada $\|x\| \to \infty$
- skup $\mathbf{R}$ definiran sa $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$ ne sadrži druga rješenja od (4.1) osim ravnotežnog stanja $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

tada je ravnotežno stanje $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ globalno asimptotski stabilno.

# 4.5. Lyapunovljeva analiza linearnih sustava

## 4.5.1. Lyapunovljeva matrična jednadžba

Razmotrimo stabilnost linearnog vremenski-invarijantnog linearnog sustava

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \tag{4.6}$$

primjenom Lyapunovljeve metode. Razmotrimo kvadratičnu Lyapunovljevu funkciju

$$V = \mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{x}, \tag{4.7}$$

gdje je $\mathbf{P}$ simetrična pozitivno-definitna matrica. Da bi sustav bio stabilan, derivacija Lyapunovljeve funkcije mora biti negativno definitna, odnosno

$$\dot{V} = -\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x}, \tag{4.8}$$

gdje je $\mathbf{Q}$ neka simetrična pozitivno-definitna matrica.

Deriviranjem Lyapunovljeve funkcije po vremenu dobivamo

$$\dot{V} = \dot{\mathbf{x}}^T\mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{x}^T\mathbf{P}\dot{\mathbf{x}} = -\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x}. \tag{4.9}$$

Uvrstimo li (4.6) u (4.10), dobivamo

$$\dot{V} = \mathbf{x}^T\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}^T\left(\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}\right)\mathbf{x} = -\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x}. \tag{4.10}$$

iz čega proizlazi

$$\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} = -\mathbf{Q}. \tag{4.11}$$

Matrična jednadžba (4.11) naziva se *Lyapunovljeva matrična jednadžba.*

***Teorem (Egzistencija i jedinstvenost Lyapunovljeve funkcije).*** Sustav $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ je asimptotski stabilan ako za bilo koju pozitivno-definitnu simetričnu matricu $\mathbf{Q}$ postoji jedinstvena pozitivno definitna simetrična matrica $\mathbf{P}$ koja zadovoljava Lyapunovljevu jednadžbu (4.11).

*Dokaz.* Prvo ćemo dokazati egzistenciju. Za danu pozitivno-definitnu simetričnu matricu $\mathbf{Q}$ definirajmo matricu

$$\mathbf{P} = \int_0^\infty e^{\mathbf{A}^T t}\mathbf{Q}e^{\mathbf{A}t}dt, \tag{4.12}$$

koja je očigledno simetrična i pozitivno-definitna. Treba još dokazati da je (4.12) rješenje Lyapunovljeve jednadžbe (4.11). Imamo

$$\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} = \int_0^\infty \mathbf{A}^T e^{\mathbf{A}^T t}\mathbf{Q}e^{\mathbf{A}t}dt + \int_0^\infty e^{\mathbf{A}^T t}\mathbf{Q}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{A}dt = \tag{4.13}$$

$$= \int_0^\infty \frac{d}{dt}\left(e^{\mathbf{A}^T t}\mathbf{Q}e^{\mathbf{A}t}\right)dt = e^{\mathbf{A}^T t}\mathbf{Q}e^{\mathbf{A}t}\Big|_0^\infty = -\mathbf{Q}, \tag{4.14}$$

gdje smo primjenili pretpostavku da je $\mathbf{A}$ Hurwitzova matrica (da je sustav stabilan), odnosno $\lim_{t\to\infty} e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{0}$.

Još preostaje dokaz jedinstvenosti rješenja. Pretpostavimo da postoji matrica $\tilde{\mathbf{P}}$ različita od $\mathbf{P}$ koja je također rješenje Lyapunovljeve jednadžbe (4.11) za istu matricu $\mathbf{Q}$, tako da imamo

$$\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} = -\mathbf{Q}, \qquad \mathbf{A}^T\tilde{\mathbf{P}} + \tilde{\mathbf{P}}\mathbf{A} = -\mathbf{Q}. \tag{4.15}$$

Oduzimanjem navedenih jednadžbi dobivamo

$$\mathbf{A}^T(\mathbf{P} - \tilde{\mathbf{P}}) + (\mathbf{P} - \tilde{\mathbf{P}})\mathbf{A} = \mathbf{0}. \tag{4.16}$$

Pomnožimo li prethodnu jednadžbu s desne strane sa $e^{\mathbf{A}t}$ i s lijeve strane sa $e^{\mathbf{A}^T t}$ dobivamo

$$e^{\mathbf{A}^T t}\left[\mathbf{A}^T(\mathbf{P} - \tilde{\mathbf{P}}) + (\mathbf{P} - \tilde{\mathbf{P}})\mathbf{A}\right]e^{\mathbf{A}t} = \frac{d}{dt}\left(e^{\mathbf{A}^T t}(\mathbf{P} - \tilde{\mathbf{P}})e^{\mathbf{A}t}\right) = \mathbf{0}, \tag{4.17}$$

iz čega slijedi

$$e^{\mathbf{A}^T t}(\mathbf{P} - \tilde{\mathbf{P}})e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{C}, \qquad \forall t. \tag{4.18}$$

gdje je $\mathbf{C}$ matrica integracijskih konstanti koje određujemo na osnovu početnog uvjeta (za $t = 0$ slijedi $\mathbf{C} = \mathbf{P} - \tilde{\mathbf{P}}$), tako da na kraju imamo

$$e^{\mathbf{A}^T t}(\mathbf{P} - \tilde{\mathbf{P}})e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{P} - \tilde{\mathbf{P}}, \qquad \forall t. \tag{4.19}$$

Prethodni izraz može biti zadovoljen samo u slučaju $\mathbf{P} = \tilde{\mathbf{P}}$. Također, kada $t \to \infty$, lijeva strana izraza postaje jednaka nul-matrici, čime dobivamo $\mathbf{P} = \tilde{\mathbf{P}}$. Time smo dokazali da Lyapunovljeva jednadžba (4.11), za danu matricu $\mathbf{Q}$, ima jedinstveno rješenje. □

Drugim riječima, nužan i dovoljan uvjet asimptotske stabilnosti linearnog sustava (4.6) je da za neku danu pozitivno definitnu realnu simetričnu matricu $\mathbf{Q}$ postoji pozitivno definitna simetrična matrica $\mathbf{P}$, takva da je $\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} = -\mathbf{Q}$.

Stabilnost linearnih sustava određujemo primjenom Lyapunovljeve matrične jednadžbe (4.11) na slijedeći način: (a) izabere se neka pozitivno definitna matrica $\mathbf{Q}$; (b) riješi se Lyapunovljeva jednadžba (4.6) po matrici $\mathbf{P}$; (c) provjeri se da li je matrica $\mathbf{P}$ pozitivno definitna (primjenom Sylvesterovog teorema ili određivanjem svojstvenih vrijednosti koje moraju biti pozitivne - vidi 6.5.).

### 4.5.2. Ocjena konvergencije Lyapunovljeve funkcije

Za pozitivno definitne matrice $\mathbf{P}$ i $\mathbf{Q}$ vrijede slijedeće ocjene kvadratnih formi

$$\lambda_m\{\mathbf{P}\}\|\mathbf{x}\|^2 \le \mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{x} \le \lambda_M\{\mathbf{P}\}\|\mathbf{x}\|^2, \tag{4.20}$$

$$\lambda_m\{\mathbf{Q}\}\|\mathbf{x}\|^2 \le \mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x} \le \lambda_M\{\mathbf{Q}\}\|\mathbf{x}\|^2. \tag{4.21}$$

Primjenimo li navedene ocjene na izraze (4.7) i (4.8) dobivamo

$$\dot{V} = -\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x} \le -\lambda_m\{\mathbf{Q}\}\|\mathbf{x}\|^2 \le -\frac{\lambda_m\{\mathbf{Q}\}}{\lambda_M\{\mathbf{P}\}}\mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{x} \le -\gamma V, \tag{4.22}$$

gdje je

$$\gamma = \frac{\lambda_m\{\mathbf{Q}\}}{\lambda_M\{\mathbf{P}\}}. \tag{4.23}$$

Dobili smo skalarnu diferencijalnu nejednadžbu

$$\dot{V} \le -\gamma V, \tag{4.24}$$

čije rješenje je

$$V(t) \leq V(0)e^{-\gamma t}. \tag{4.25}$$

Nadalje, na osnovu ocjene Lyapunovljeve funkcije (4.25), možemo naći ocjenu konvergencije norme vektora stanja $\|\mathbf{x}(t)\|$. Primjenimo li ocjene (4.20) i (4.21) na izraz (4.25), dobivamo

$$\lambda_m\{\mathbf{P}\}\|\mathbf{x}\|^2 \leq V(t) \leq V(0)e^{-\gamma t} \leq \lambda_M\{\mathbf{P}\}\|\mathbf{x}(0)\|^2 e^{-\gamma t}, \tag{4.26}$$

odnosno

$$\|\mathbf{x}\| < \varepsilon\|\mathbf{x}(0)\|\; e^{-\frac{\gamma}{2}t} \tag{4.27}$$

gdje je

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\lambda_M\{\mathbf{P}\}}{\lambda_m\{\mathbf{P}\}}}. \tag{4.28}$$

**Eksponencijalna stabilnost nelinearnih sustava**

Prethodno dobiveni rezultat možemo poopćiti na nelinearne neautonomne sustave $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ u obliku slijedećeg teorema.

***Teorem (Eksponencijalna stabilnost).*** Dinamički sustav $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ je *eksponencijalno stabilan* ako postoji funkcija $V(\mathbf{x}, t)$ i neke pozitivne konstante $\alpha_1$, $\alpha_2$ i $\alpha_3$, takvi da vrijedi

$$\alpha_1\|\mathbf{x}\|^2 \leq V(\mathbf{x}, t) \leq \alpha_2\|\mathbf{x}\|^2 \tag{4.29}$$

$$\dot{V}(\mathbf{x}, t) \leq -\alpha_3\|\mathbf{x}\|^2. \tag{4.30}$$

*Dokaz.* Na osnovu (4.29) imamo $-\|\mathbf{x}\|^2 \leq -\frac{1}{\alpha_2}V$, te usporedbom sa (4.30) dobivamo

$$\dot{V} \leq -\frac{\alpha_3}{\alpha_2}V, \tag{4.31}$$

iz čega slijedi

$$V(\mathbf{x}, t) \leq V(\mathbf{x}(t_0), t_0)e^{-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}(t-t_0)}. \tag{4.32}$$

Nadalje, na osnovu izraza (4.29) imamo $\|\mathbf{x}\|^2 \leq \frac{1}{\alpha_1}V$, kao i $V(\mathbf{x}(t_0), t_0) \leq \alpha_2\|\mathbf{x}(t_0)\|^2$. Usporedbom sa (4.33) dobivamo

$$\|\mathbf{x}(t)\|^2 \leq \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\|\mathbf{x}(t_0)\|^2 e^{-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}(t-t_0)}, \tag{4.33}$$

odnosno, stanje sustava konvergira eksponencijalno prema nuli. □

### 4.5.3. Analiza stabilnosti perturbiranog sustava

Pretpostavimo da je provedena analiza stabilnosti asimptotski stabilnog linearnog sustava $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, pomoću Lyapunovljeve funkcije $V = \mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{x}$, te da je matrica $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T \geq 0$ određena rješavanjem Lyapunovljeve jednadžbe $\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} = -\mathbf{Q}$, gdje je $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T \geq 0$.

Međutim, treba naglasiti da je prethodno navedena analiza stabilnosti provedena uz pretpostavku potpunog poznavanja modela sustava reprezentiranog matricom $\mathbf{A}$. U realnosti, navedena pretpostavka je rijetko ispunjena. Stoga je od velikog praktičnog interesa analizirati robusnost sustava na nemodeliranu dinamiku sustava.

Pretpostavimo da je realni dinamički model sustava opisan slijedećim jednadžbama stanja

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x}), \tag{4.34}$$

gdje je $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ neka nepoznata funkcija (koja reprezentira nemodeliranu dinamiku sustava) za koju je poznata samo ocjena

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\| \leq k\|\mathbf{x}\|, \tag{4.35}$$

gdje je $k$ neki poznati konstantni parametar. Ako razmatramo linearni sustav s nepoznatim parametrima,

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} + \tilde{\mathbf{A}})\mathbf{x}, \tag{4.36}$$

gdje matrica $\tilde{\mathbf{A}}$ reprezentira nepoznate parametre, tada je $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x}$ a parametar $k = \|\tilde{\mathbf{A}}\|_2$, zbog

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\| = \|\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x}\| \leq \|\tilde{\mathbf{A}}\|_2\|\mathbf{x}\| = k\|\mathbf{x}\|. \tag{4.37}$$

Postavlja se pitanje pod kojim uvjetima će sustav biti asimptotski stabilan, ako znamo matrice $\mathbf{A}$, $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$, ta parametar $k$ kojim preko (4.35) ocjenjujemo nepoznatu funkciju $\mathbf{f}(\mathbf{x})$.

Uzmimo Lyapunovljevu funkciju $V = \mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{x}$, te odredimo njenu vremensku derivaciju

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= \dot{\mathbf{x}}^T\mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{x}^T\mathbf{P}\dot{\mathbf{x}} \\
&= [\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x})]^T\mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{x}^T\mathbf{P}[\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x})] \\
&= \mathbf{x}^T(\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A})\mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x})^T\mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{f}(\mathbf{x}) \\
&= -\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x} + 2\mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{f}(\mathbf{x}).
\end{aligned} \tag{4.38}$$

Vidimo da je prvi član na desnoj strani negativno definitan, međutim, drugi član je indefinitan i moramo ga ocjeniti primjenom vektorskih normi. Prvo ćemo ocjeniti prvi član na desnoj strani. S obzirom da vrijedi

$$\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x} \geq \lambda_m\{\mathbf{Q}\}\|\mathbf{x}\|^2, \tag{4.39}$$

slijedi da je

$$-\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x} \leq -\lambda_m\{\mathbf{Q}\}\|\mathbf{x}\|^2. \tag{4.40}$$

Nadalje vrijedi

$$\mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{f}(\mathbf{x}) \leq \|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{P}\mathbf{f}(\mathbf{x})\| \leq \|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{P}\|_2\,\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\| \leq k\|\mathbf{P}\|_2\,\|\mathbf{x}\|^2. \tag{4.41}$$

Uvrstimo li ocjene (4.41) i (4.40) u (4.38), dobivamo

$$\dot{V} \leq -(\lambda_m\{\mathbf{Q}\} - 2k\|\mathbf{P}\|_2)\|\mathbf{x}\|^2. \tag{4.42}$$

Da bi sustav bio stabilan, mora biti $\dot{V} \leq 0$, odnosno

$$\lambda_m\{\mathbf{Q}\} - 2k\|\mathbf{P}\|_2 > 0, \tag{4.43}$$

iz čega proizlazi konačni uvjet stabilnosti

$$k < \frac{\lambda_m\{\mathbf{Q}\}}{2\,\|\mathbf{P}\|_2}. \tag{4.44}$$

S obzirom da je matrica $\mathbf{P}$ simetrična i pozitivno definitna, vrijedi $\|\mathbf{P}\|_2 = \lambda_M\{\mathbf{P}\}$, tako da prethodni uvijet možemo zapisati kao

$$k < \frac{\lambda_m\{\mathbf{Q}\}}{2\,\lambda_M\{\mathbf{P}\}}. \tag{4.45}$$

S obzirom da gornja granica ocjene (4.45) ovisi o izboru matrice $\mathbf{Q}$, postavlja se pitanje koji izbor matrice $\mathbf{Q}$ maksimizira omjer $\lambda_m\{\mathbf{Q}\}/\lambda_M\{\mathbf{P}\}$. Može se pokazati da je to izbor $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$.

# 4.6. Analiza stabilnosti složenih sustava

## 4.6.1. Stabilnost nelinearnih perturbiranih sustava

Razmotrimo nelinearni neautonomni sustav opisan jednadžbama stanja

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{g}(\mathbf{x}, t), \tag{4.46}$$

gdje

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \tag{4.47}$$

predstavlja nominalnu, poznatu dinamiku sustava dok perturbacijski član $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$ reprezentira nemodeliranu dinamiku, i/ili poremečaje koji egzistiraju u realnim sustavima. Funkcija $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$ je nepoznata ali je poznata gornja granica na $\|\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)\|$. Vidimo da je nepoznata dinamika reprezentirana kao aditivni član izraza (4.46). To je uvijek moguće za nepoznatu dinamiku koja ne mijenja red sustava.

Pretpostavimo da vrijedi $\mathbf{g}(\mathbf{0}, t) = \mathbf{0}$ i da je $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ eksponencijalno stabilno ravnotežno stanje nominalnog sustava (4.47), s Lyapunovljevom funkcijom $V(\mathbf{x}, t)$ koja zadovoljava

$$\alpha_1\|\mathbf{x}\|^2 \leq V(\mathbf{x}, t) \leq \alpha_2\|\mathbf{x}\|^2 \tag{4.48}$$

$$\dot{V}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \leq -\alpha_3\|\mathbf{x}\|^2, \tag{4.49}$$

$$\left\|\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}\right\| \leq \alpha_4\|\mathbf{x}\|. \tag{4.50}$$

dok nemodelirani dinamički član zadovoljava

$$\|\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)\| \leq \gamma\|\mathbf{x}\|. \tag{4.51}$$

Sada ćemo iskoristiti već postojeću Lyapunovljevu funkciju $V(\mathbf{x}, t)$ neperturbiranog sustava (4.47) da bi dobili uvijete stabilnosti perturbiranog sustava (4.46). Vremenska derivacija Lyapunovljeve funkcije $V(\mathbf{x}, t)$ je

$$\dot{V}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{g}(\mathbf{x}, t). \tag{4.52}$$

Primjenjujući svojstva (4.49)-(4.50), prethodni izraz možemo ocjeniti sa

$$\dot{V}(\mathbf{x}, t) \leq -\alpha_3\|\mathbf{x}\|^2 + \left\|\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}\right\| \|\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)\| \leq -\alpha_3\|\mathbf{x}\|^2 + \alpha_4\gamma\|\mathbf{x}\|^2 = -(\alpha_3 - \alpha_4\gamma)\|\mathbf{x}\|^2, \tag{4.53}$$

što je negativno definitna funkcija ako je zadovoljen uvijet $\alpha_3 - \alpha_4\gamma > 0$, odnosno

$$\gamma < \frac{\alpha_3}{\alpha_4}. \tag{4.54}$$

Dobiveni rezultat je značajan zbog toga što nam ukazuje na to da je eksponencijalna stabilnost ravnotežnog stanja robusna na klasu perturbacija koje zadovoljavaju uvijet (4.51) i (4.54).

### 4.6.2. Stabilnost složenih sustava primjenom M-matrice

Kod analize stabilnosti nelinearnih dinamičkih sustava, složenost analize rapidno raste s povečanjem dimenzije sustava. Ako neki složeni dinamički sustav možemo modelirati kao međusobno spregnute podsustave nižih dimenzija, tada analizu stabilnosti možemo podijeliti u dvije faze. U prvoj fazi analiziramo stabilnost izoliranih podsustava. U drugoj fazi koristimo razultate prve faze u kombinaciji s informacijama o međusobnim spregama, da bi došli do zaključka o stabilnosti spregnutog sustava.

Razmotrimo slijedeći složeni sustav koji se sastoji od $m$ međusobno spregnutih podsustava,

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i, t) + \mathbf{g}_i(\mathbf{x}, t), \qquad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{4.55}$$

gdje je $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ vektor stanja $i$-tog podsustava, $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_m$ je dimenzija spregnutog sustava, dok je $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1 \ \ \mathbf{x}_2 \ \ \cdots \ \ \mathbf{x}_m]^T$ vektor stanja spregnutog sustava. Funkcija $\mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i, t)$ reprezentira internu dinamiku podsustava dok funkcija $\mathbf{g}_i(\mathbf{x}, t)$ reprezentira sprege među podsustavima. Navedene funkcije zadovoljavaju $\mathbf{f}_i(\mathbf{0}, t) = \mathbf{0}$ i $\mathbf{g}_i(\mathbf{0}, t) = \mathbf{0}$ tako da je $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ravnotežno stanje sustava. Ako ignoriramo međusobne sprege, dobivamo sustav od $m$ izoliranih podsustava

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i, t), \qquad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{4.56}$$

koji imaju ravnotežno stanje $\mathbf{x}_i = \mathbf{0}$. Pretpostavimo da znamo Lyapunovljeve funkcije izoliranih podsustava $V_i(\mathbf{x}, t)$ čije vremenske derivacije su negativno definitne, te da vrijede ocijene

$$c_{1i}\|\mathbf{x}_i\|^2 \leq V_i(\mathbf{x}_i, t) \leq c_{2i}\|\mathbf{x}_i\|^2, \tag{4.57}$$

$$\dot{V}_i(\mathbf{x}_i, t) = \frac{\partial V_i}{\partial t} + \frac{\partial V_i}{\partial \mathbf{x}_i}\mathbf{f}_i(\mathbf{x}, t) \leq -\alpha_i\|\mathbf{x}_i\|^2, \tag{4.58}$$

$$\left\|\frac{\partial V_i}{\partial \mathbf{x}_i}\right\| \leq \beta_i\|\mathbf{x}_i\|, \tag{4.59}$$

gdje su $c_{1i}$, $c_{2i}$, $\alpha_i$ i $\beta_i$ neke pozitivne konstante. Nadalje, pretpostavimo da član koji definira spregu među podsustavima zadovoljava ocjenu

$$\|\mathbf{g}_i(\mathbf{x}, t)\| \leq \sum_{j=1}^{m} \gamma_{ij}\|\mathbf{x}_j\|. \tag{4.60}$$

Da bi analizirali stabilnost složenog (kompozitnog) sustava, pretpostavit ćemo tzv. *kompozitnu Lyapunovljevu funkciju* u obliku linearne kombinacije Lyapunovljevih funkcija izoliranih podsustava,

$$V(\mathbf{x},t) = \sum_{i=1}^{m} d_i V_i(\mathbf{x}_i,t), \qquad d_i > 0. \tag{4.61}$$

Drugim riječima, tretirat ćemo spregu $\mathbf{g}_i(\mathbf{x},t)$ kao perturbaciju izoliranog podsustava (4.56). Vremenska derivacija Lyapunovljeve funkcije (4.61) dana je sa

$$\dot{V}(\mathbf{x},t) = \sum_{i=1}^{m} d_i \left[\frac{\partial V_i}{\partial t} + \frac{\partial V_i}{\partial \mathbf{x}_i}\mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i,t)\right] + \sum_{i=1}^{m} d_i \frac{\partial V_i}{\partial \mathbf{x}_i}\mathbf{g}_i(\mathbf{x},t). \tag{4.62}$$

Prvi član na desnoj strani je negativno definitan zbog (4.58), dok je drugi član općenito nedefinitan. S obzirom da znamo ocjene svih članova prethodnog izraza, imamo

$$\dot{V}(\mathbf{x},t) \le \sum_{i=1}^{m} d_i \left[-\alpha_i\|\mathbf{x}_i\|^2 + \sum_{j=1}^{m} \beta_i\gamma_{ij}\|\mathbf{x}_i\|\|\mathbf{x}_j\|\right]. \tag{4.63}$$

Dobiveni izraz možemo prikazati matrično u obliku kvadratne forme po funkcijama $\|\mathbf{x}_i\|$,

$$\dot{V}(\mathbf{x},t) \le -\frac{1}{2}\phi^T(\mathbf{DS} + \mathbf{S}^T\mathbf{D})\phi, \tag{4.64}$$

gdje su

$$\phi = [\|\mathbf{x}_1\| \;\; \|\mathbf{x}_2\| \;\; \cdots \;\; \|\mathbf{x}_m\|]^T, \qquad \mathbf{D} = \mathrm{diag}\{d_1, d_2, \ldots, d_m\}, \tag{4.65}$$

a matrica $\mathbf{S}$ je $m \times m$ matrica čiji elementi su definirani sa

$$s_{ij} = \begin{cases} \alpha_i - \beta_i\gamma_{ii}, & i = j \\ -\beta_i\gamma_{ij}, & i \ne j \end{cases}. \tag{4.66}$$

Da bi $\dot{V}(\mathbf{x},t)$ bila negativno definitna mora postojati pozitivna dijagonalna matrica $\mathbf{D}$, takva da vrijedi

$$\mathbf{DS} + \mathbf{S}^T\mathbf{D} > 0. \tag{4.67}$$

Stoga, dovoljan uvijet asimptotske stabilnosti ravnotežnog stanja spregnutog sustava je postojanje pozitivne dijagonalne matrice $\mathbf{D}$ takve da je $\mathbf{DS} + \mathbf{S}^T\mathbf{D}$ pozitivno definitna matrica. Matrica $\mathbf{S}$ je specifična po tome što su njeni nedijagonalni elementi negativni. Za navedeni tip matrica vrijedi slijedeća lema.

***Lema (M-matrica).*** Postoji pozitivna dijagonalna matrica $\mathbf{D}$ takve da je $\mathbf{DS} + \mathbf{S}^T\mathbf{D}$ pozitivno definitna ako i samo ako je $\mathbf{S}$ tzv. M-matrica; odnosno da su sve glavne subdeterminante matrice $\mathbf{S}$ pozitivne

$$\det \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1k} \\ s_{21} & s_{22} & \cdots & s_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{k1} & s_{k2} & \cdots & s_{kk} \end{bmatrix} > 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, m. \tag{4.68}$$

Drugim riječima, dovoljan uvijet asimptotske stabilnosti ravnotežnog stanja spregnutog sustava je da je matrica $\mathbf{S}$, definirana sa (4.66), M-matrica.

### 4.6.3. Stabilnost složenih sustava - direktan pristup

Provjera stabilnosti primjenom M-matrica može biti računski zahtijevna kako broj podsustava raste (a time i dimenzija M-matrice). Ovdje ćemo prikazati drugi pristup analizi stabilnosti složenih sustava, bez primjene M-matrice.

Sve pretpostavke navedene u prethodnom podpoglavlju su iste, osim ocjene (4.60), koja u ovom slučaju ima oblik

$$\|\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)\| \leq \gamma \|\mathbf{x}\|, \tag{4.69}$$

gdje je

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, t) = [\mathbf{g}_1(\mathbf{x}, t) \;\; \mathbf{g}_2(\mathbf{x}, t) \;\; \cdots \;\; \mathbf{g}_m(\mathbf{x}, t)]^T$$

Ključna razlika je u drugačijem tretiranju nedefinitnih članova u izrazu za vremensku derivaciju Lyapunovljeve funkcije (4.62). Navedeni član (uz $d_i = 1$) možemo ocijeniti na slijedeći način

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial V_i}{\partial \mathbf{x}_i} \mathbf{g}_i(\mathbf{x}, t) \leq \left\| \begin{bmatrix} \frac{\partial V_1}{\partial \mathbf{x}_1} & \frac{\partial V_2}{\partial \mathbf{x}_2} & \cdots & \frac{\partial V_m}{\partial \mathbf{x}_m} \end{bmatrix} \right\| \|\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)\| \tag{4.70}$$

gdje smo primjenili svojstvo skalarnog produkta vektora, $\mathbf{z}^T \mathbf{y} \leq \|\mathbf{z}\| \, \|\mathbf{y}\|$. Primjenom definicije vektorske norme te svojstva (4.69), izraz (4.70) postaje

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial V_i}{\partial \mathbf{x}_i} \mathbf{g}_i(\mathbf{x}, t) &\leq \gamma \left( \sum_{i=1}^{m} (\beta_i \|\mathbf{x}_i\|)^2 \right)^{1/2} \|\mathbf{x}\| \leq \\ &\leq \gamma \beta_{\max} \left( \sum_{i=1}^{m} \|\mathbf{x}_i\|^2 \right)^{1/2} \|\mathbf{x}\| = \gamma \beta_{\max} \|\mathbf{x}\|^2, \end{aligned} \tag{4.71}$$

tako da izraz (4.62) konačno postaje

$$\begin{aligned}\dot{V}(\mathbf{x},t) &\leq -\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\|\mathbf{x}_i\|^2 + \gamma\beta_{\max}\|\mathbf{x}\|^2 \leq \\ &\leq -\alpha_{\min}\|\mathbf{x}\|^2 + \gamma\beta_{\max}\|\mathbf{x}\|^2 = -(\alpha_{\min} - \gamma\beta_{\max})\|\mathbf{x}\|^2,\end{aligned} \tag{4.72}$$

gdje su

$$\alpha_{\min} = \min\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\}, \qquad \beta_{\max} = \max\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m\}. \tag{4.73}$$

Da bi derivacija Lyapunovljeve funkcije (4.72) bila negativno-definitna mora biti zadovoljen uvjet

$$\alpha_{\min} - \gamma\beta_{\max} > 0, \tag{4.74}$$

koji je bitno jednostavniji od uvjeta za ispitivanje M-matrice.

## 4.7. Barbalat lema. Lyapunov-like analiza

Za autonomne sustave, LaSalleov princip invarijantnosti je dovoljan za dokazivanje asimptotske stabilnosti, u slučaju kada je vremenska derivacija Lyapunovljeve funkcije samo negativno semidefinitna. Međutim, LaSalleov princip invarijantnosti ne može se primjeniti na neautonomne sustave. Stoga je dokazivanje asimptotske stabilnosti neautonomnih sustava bitno zahtjevnije nego autonomnih sustava, s obzirom da nije lako naći Lyapunovljevu funkciju ćija derivacija je striktno negativno definitna.

U takvim situacijama, za dokazivanje asimptotske stabilnosti koristi se tzv. Barbalat lema. Barbalat lema razmatra asimptotska svojstva funkcija i njenih derivacija. Prije formulacije Barbalat leme, razmotrit ćemo neka svojstva funkcija, koja na prvi mogu pogled djelovati kontraintuitivno. Kontraintuitivnost navedenih svojstava proizlazi prvenstveno zbog naše "linearne" percepcije realnosti, koja nam npr. kaže da ako derivacija funkcije po vremenu teži nuli da to znači da sama funkcija teži nekoj konstantnoj stacionarnoj vrijednosti.

### 4.7.1. Asimptotska svojstva funkcija i njihovih derivacija

Pretpostavimo da imamo diferencijabilnu funkciju $f(t)$. Slijedeće tri važne činjenice treba imati u vidu.

***Činjenica* 1.** $\lim_{t\to\infty} \dot{f}(t) = 0 \quad \neq> \quad \lim_{t\to\infty} f(t) = c$, gdje je $|c| < \infty$.

Činjenica da $\lim\limits_{t\to\infty} \dot{f}(t) = 0$ ne mora značiti da $f(t)$ ima limes kada $t \to \infty$.

*Primjer* 1:

$f(t) = \sin(\ln(t))$; $\dot{f}(t) = \dfrac{\cos(\ln(t))}{t} \to 0$ kada $t \to \infty$.

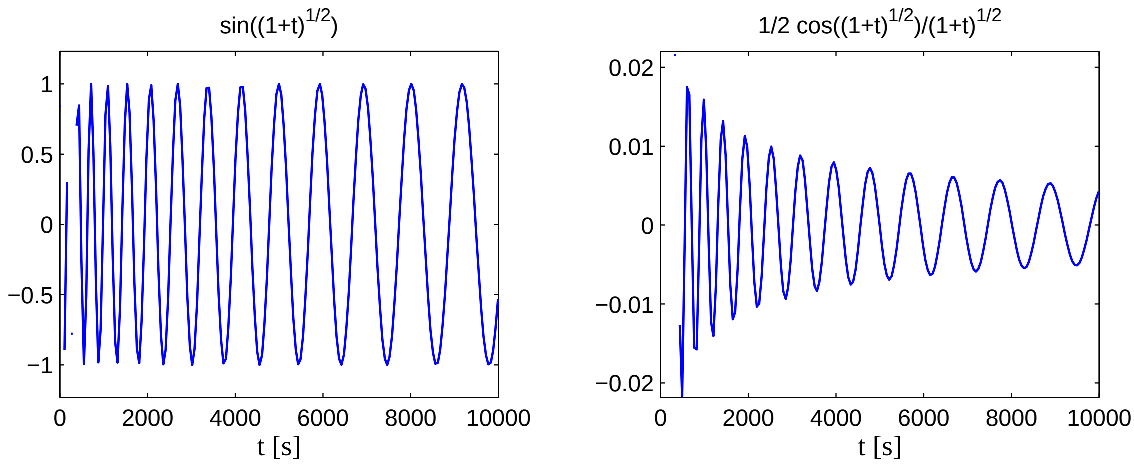
*Primjer* 2:

$f(t) = \sin(\sqrt{1+t})$; $\dot{f}(t) = \dfrac{\cos(\sqrt{1+t})}{2\sqrt{1+t}} \to 0$ kada $t \to \infty$.

*Primjer* 3:

$f(t) = \sqrt{t}\sin(\ln(t))$; $\dot{f}(t) = \dfrac{\cos(\ln(t))}{\sqrt{t}} + \dfrac{\sin(\ln(t))}{2\sqrt{t}} \to 0$ kada $t \to \infty$.

Iz navedenih primjera vidimo da bez obzira što derivacija funkcija teži nuli, same funkcije ne konvergiraju nekoj konstantnoj stacionarnoj vrijednosti kada $t \to \infty$ (u zadnjem primjeru, funkcija $f(t)$ čak divergira).




Slika 4.1: Funkcija $f(t) = \sin(\sqrt{1+t})$ i njena derivacija.

***Činjenica* 2.** $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = c$ gdje je $|c| < \infty$, $\quad \not=> \quad \lim\limits_{t\to\infty} \dot{f}(t) = 0$

Činjenica da $f(t)$ ima konačan limes kada $t \to \infty$ ne mora značiti da $\dot{f}(t) \to 0$.

*Primjer* 1:

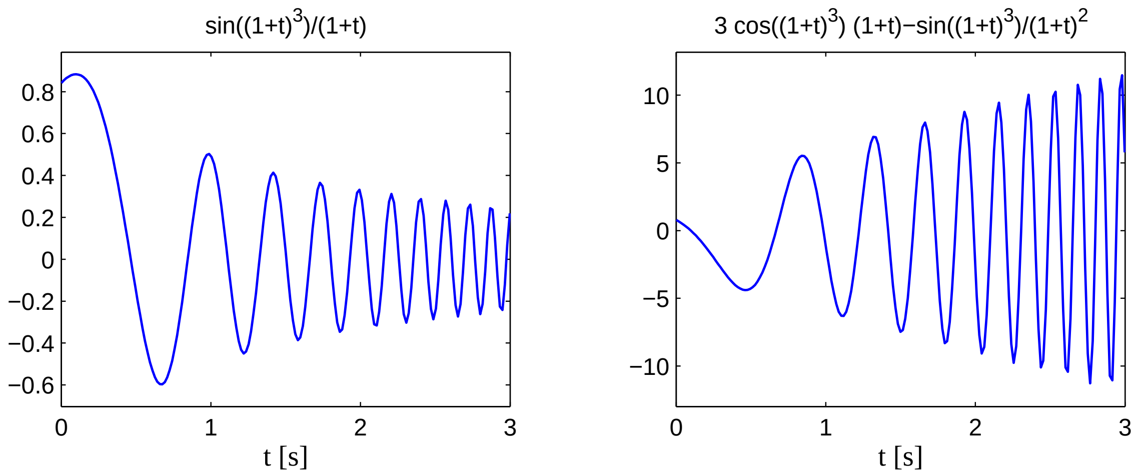
$f(t) = e^{-t}\sin(e^{2t})$; $\dot{f}(t) = -e^{-t}\sin(e^{2\,t}) + 2\,e^{t}\cos(e^{2\,t}) \to \pm\infty$ kada $t \to \infty$.

*Primjer* 2:

$f(t) = \dfrac{\sin(1+t)^n}{(1+t)}$; $\dot{f}(t) = n\,(1+t)^{n-2}\cos{(1+t)^n} - \dfrac{\sin{(1+t)^n}}{(1+t)^2} \to \pm\infty$ kada $t \to \infty$ za $n > 2$.

***Činjenica* 3.** Ako je funkcija $f(t)$ ograničena s donje strane, $\min_t f(t) = c > -\infty$, i opadajuća, $\dot{f}(t) \leq 0$, tada funkcija $f(t)$ konvergira nekoj konačnoj vrijednosti.

Navodimo još neke definicije koje su vezane uz pojam kontinuiranosti funkcija.




Slika 4.2: Funkcija $f(t) = \frac{\sin(1+t)^3}{(1+t)}$ i njena derivacija.

***Definicija (kontinuiranost).*** Funkcija $f(t)$ je *kontinuirana* na intervalu $[0, \infty\rangle$ ako

$$\forall\, t_1 \geq 0, \varepsilon > 0, \quad \exists \delta(\varepsilon, t_1) > 0, \;\; \forall\, t \geq 0, \quad |t - t_1| < \delta \;\Rightarrow\; |f(t) - f(t_1)| < \varepsilon.$$

***Definicija (uniformna kontinuiranost).*** Funkcija $f(t)$ je *uniformno kontinuirana* na intervalu $[0, \infty\rangle$ ako

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0, \;\; \forall\, t \geq 0, t_1 \geq 0, \quad |t - t_1| < \delta \;\Rightarrow\; |f(t) - f(t_1)| < \varepsilon.$$

Drugim riječima, $f(t)$ je uniformno kontinuirana ako se može naći $\delta(\varepsilon)$ koji ne ovisi o $t_1$ i gdje se $\delta(\varepsilon)$ ne smanjuje kako $t \to \infty$.

***Definicija (Lipschitzova funkcija).*** Funkcija $f(t)$ je *Lipschitzova funkcija* na intervalu $[0, \infty\rangle$ ako vrijedi

$$|f(t) - f(t_1)| < L|t - t_1|, \qquad \forall\, t, t_1,$$

gdje je $L$ neka konačna pozitivna konstanta.

***Lema.*** Ako je funkcija $f(t)$ Lipschitzova tada je $f(t)$ uniformno kontinuirana.

***Lema.*** Da bi funkcija $f(t)$ bila uniformno kontinuirana dovoljno je da njena derivacija $\dot{f}(t)$ bude ograničena, $|\dot{f}(t)| < \infty$, za svaki $t$.

*Dokaz.* Dokaz slijedi direktno iz teorema konačne diferencije (*finite difference theorem*)

$$\forall\, t, t_1 > t, \quad \exists t_2 \;\; (t \leq t_2 \leq t_1), \qquad f(t) - f(t_1) = \dot{f}(t_2)(t - t_1).$$

Ako postoji konačan $L$ takav da vrijedi $|\dot{f}(t)| < L$ za svaki $t$, tada je funkcija $f(t)$ Lipschitzova, a iz prethodne leme proizlazi da je tada $f(t)$ uniformno kontinuirana. $\square$

### 4.7.2. Barbalat lema

Ako je derivacija Lyapunovljeve funkcije $V(t) \geq 0$ samo negativno semidefinitna, $\dot{V}(t) \leq 0$, tada možemo garantirati samo da će funkcija $V(t)$ konvergirati nekom konačnom stacionarnom stanju, $\lim_{t\to\infty} V(t) = V_\infty$. Nema garancije da će $\dot{V}(t) \to 0$ kako $t \to \infty$. Da bi to utvrdili potrebni su nam dodatni uvjeti definirani Barbalat lemom.

***Barbalat lema (I)***. Ako diferencijabilna funkcija $f(t)$ ima konačan limes kako $t \to \infty$ i ako je $\dot{f}(t)$ uniformno kontinuirana, tada $\dot{f}(t) \to 0$ kako $t \to \infty$. $\square$

S obzirom da uvjet uniformne kontinuiranosti funkcije $\dot{f}(t)$ možemo zamjeniti uvjetom ograničenosti njene derivacije $\ddot{f}(t)$, prethodnu lemu možemo preformulirati na slijedeći način

***Barbalat lema (II)***. Ako diferencijabilna funkcija $f(t)$ ima konačan limes kako $t \to \infty$ i ako postoji ograničena $\ddot{f}(t)$, tada $\dot{f}(t) \to 0$ kako $t \to \infty$. $\square$

Navedene formulacije Barbalat leme definiraju uvjete pod kojima $\dot{f}(t) \to 0$. Ako želimo dobiti uvjete pod kojima $f(t) \to 0$, (nakon transformacije $f(t) \to \int_0^t f(\tau)d\tau$) imamo slijedeću verziju Barbalat leme

***Barbalat lema (III)***. Ako postoji konačan limes $\lim_{t\to\infty} \int_0^t f(\tau)d\tau$ i ako je $f(t)$ uniformno kontinuirana, tada je $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$. $\square$

Na osnovu prethodno navedene formulacije možemo postaviti još jednu, koristeći notaciju $\mathcal{L}_p$ vektorskih prostora funkcija.

***Barbalat lema (IV)***. Ako je $f(t) \in \mathcal{L}_\infty$, $\dot{f}(t) \in \mathcal{L}_\infty$ i $f(t) \in \mathcal{L}_p$, za neki konačan $p = 1, 2, \ldots$, tada je $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$. $\square$ (za definicije $\mathcal{L}_p$ prostora vidi 6.7.1.)

Ako Barbalat lemu (verziju I, odnosno II) primjenimo na Lyapunovljevu funkciju dobivamo tzv. Lyapunov-like lemu.

***Lyapunov-like lemu***. Ako skalarna funkcija $V(\mathbf{x}, t)$ zadovoljava slijedeće uvjete

- $V(\mathbf{x}, t)$ je ograničena s donje strane ($\min V(\mathbf{x}, t) > -\infty$)
- $\dot{V}(\mathbf{x}, t)$ je negativno-semidefinitna
- $\dot{V}(\mathbf{x}, t)$ je uniformno kontinuirana u vremenu ($\ddot{V}(\mathbf{x}, t)$ je ograničena)

tada $\dot{V}(\mathbf{x}, t) \to 0$ kako $t \to \infty$.

Navedena lema primjenjuje se za dokazivanje asimptotske stabilnosti pojedinih varijabli stanja (onih koje su sadržane u $\dot{V}(\mathbf{x}, t)$) kod neautonomnih sustava (kod kojih se ne može primjeniti LaSalleov princip invarijantnosti).

Analiza stabilnosti zasnovana na Barbalat lemi obično se naziva Lyapunov-like analiza. Međutim, treba naglasiti dvije bitne razlike u odnosu na standardnu Lyapunovljevu analizu. Prvo, zahtijev pozitivne definitnosti funkcije funkcije $V(\mathbf{x}, t)$ zamjenjen je manje restriktivnim zahtijevom - ograničenosti s donje strane. Druga razlika je dodatni zahtijev na uniformnu kontinuiranost funkcije $\dot{V}(\mathbf{x}, t)$ što se svodi na izračunavanje $\ddot{V}(\mathbf{x}, t)$ i provjeru ograničenosti.

Sada ćemo na nekoliko primjera ilustrirati primjenu navedenih koncepata.

***Primjer (Adaptivno upravljanje)***. Dinamika adaptivnog upravljanja sustavom prvog reda dana je slijedećim jednadžbama

$$\begin{aligned} \dot{e} &= -e + \theta u(t) \\ \dot{\theta} &= -eu(t), \end{aligned}$$

gdje je $e$ pogreška praćenja, $\theta$ je pogreška parametara sustava a $u(t)$ je ograničena kontinuirana funkcija. Razmotrimo funkciju (ograničenu s donje strane)

$$V = \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2}\theta^2,$$

čija derivacija je

$$\dot{V} = e\dot{e} + \theta\dot{\theta} = e(-e + \theta u(t)) + \theta(-eu(t)) = -e^2 \leq 0.$$

Vidimo da je $\dot{V}$ samo negativno semidefinitna što znači da je sustav stabilan ali ne i asimptotski stabilan. Međutim, ne možemo primjeniti LaSalleov princip invarijantnosti jer sustav nije autonoman (zbog eksterne funkcije $u(t)$).

Da bi primjenili Barbalat lemu moramo provjeriti dali je $\dot{V}$ uniformno kontinuirana. To ćemo provjeriti tako da izračunamo $\ddot{V}$ i provjerimo ograničenost dobivene funkcije. Imamo

$$\ddot{V} = -2e(-e + \theta u(t)).$$

S obzirom da je $u(t)$ po definiciji ograničen, dok su $e$ i $\theta$ ograničeni jer je sustav (samo) stabilan, slijedi da je i $\ddot{V}$ ograničeno, odnosno da je $\dot{V}$ uniformno kontinuirana funkcija. Primjenom Lyapunov-like leme slijedi $\dot{V} \to 0$, odnosno $e \to 0$ kako $t \to \infty$.

Napomenimo da, bez obzira što $e \to 0$, sustav nije asimptotski stabilan zbog toga što za $\theta$ možemo garantirati samo ograničenost. □

***Primjer (Lyapunov-like funkcija)***. S obzirom da Lyapunovljevu funkciju nije lako naći, u mnogim situacijama (posebno kod adaptivnog upravljanja) je moguće naći tzv. Lyapunov-like funkciju. Takva funkcija ne posjeduje sva svojstva koja se traže da bi bila Lyapunovljeva funkcija - npr. funkcija je samo pozitivno semidefinitna. Međutim i u takvim slučajevima je moguće doći do nekih zaključaka o asimptotskom ponašanju pojedinih varijabli stanja primjenom Barbalat leme.

Razmotrimo sustav trečeg reda

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 - x_2 x_3, & x_1(0) &= x_{10}, \\ \dot{x}_2 &= x_1 x_3, & x_2(0) &= x_{20}, \\ \dot{x}_3 &= x_1^2, & x_3(0) &= x_{30}, \end{aligned}$$

koji ima dvije ravnotežne točke: $x_1 = 0$, $x_2 = const.$ i $x_3 = 0$, odnosno $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ i $x_3 = const.$ Standardna Lyapunovljeva analiza stabilnosti zahtijeva pronalaženje pozitivno definitne Lyapunovljeve funkcije $V(x_1, x_2, x_3)$ čija vremenska derivacija je negativno (semi)-definitna. Umjesto toga, razmotrit ćemo Lyapunov-like funkciju

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2,$$

koja je samo pozitivno semidefinitna (u $\mathbb{R}^3$). Vremenska derivacija Lyapunovljeve funkcije $V(x_1, x_2)$ je

$$\dot{V}(x_1, x_2) = x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 = x_1(-x_1 - x_2x_3) + x_2(x_1x_3) = -x_1^2 \leq 0,$$

negativno semidefinitna što implicira da je $V(x_1, x_2)$ opadajuća funkcija u vremenu, odnosno

$$V(x_1(t), x_2(t)) \leq V(x_1(0), x_2(0)) = V_0.$$

To znači da su $V, x_1, x_2 \in \mathcal{L}_\infty$. Nadalje, $V(x_1(t), x_2(t))$ ima limes kako $t \to \infty$, odnosno

$$\lim_{t\to\infty} V(x_1(t), x_2(t)) = V_\infty.$$

Na osnovu izraza $\dot{V} = -x_1^2$ dobivamo

$$\int_0^t x_1^2(\tau)d\tau = V_0 - V(t),$$

odnosno

$$\int_0^\infty x_1^2(\tau)d\tau = V_0 - V_\infty < \infty.$$

Dakle integral od $x_1^2$ je konačan što znači da je $x_1 \in \mathcal{L}_2$. Na osnovu $x_1 \in \mathcal{L}_2$ te jednadžbe $\dot{x}_3 = x_1^2$, slijedi da je

$$x_3(t) = \int_0^t x_1^2(\tau)d\tau = V_0 - V(t),$$

ograničen, odnosno $x_3 \in \mathcal{L}_\infty$. Nadalje, na osnovu $x_1, x_2, x_3 \in \mathcal{L}_\infty$ te jednadžbe $\dot{x}_1 = -x_1 - x_2x_3$ slijedi da je $\dot{x}_1 \in \mathcal{L}_\infty$.

Sada imamo da je $x_1 \in \mathcal{L}_\infty$, $x_1 \in \mathcal{L}_2$ i $\dot{x}_1 \in \mathcal{L}_\infty$ pa primjenom Barbalat leme (verzija IV) zaključujemo da $x_1(t) \to 0$ kako $t \to \infty$. Dakle, na osnovu navedene analize zaključili smo da su $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ ograničeni te da $x_1(t) \to 0$ kako $t \to \infty$.

# 5 $\mathcal{L}_p$ stabilnost i pasivnost dinamičkih sustava

## 5.1. $\mathcal{L}_p$ stabilnost

Razmotrimo ulazno-izlazno preslikavanje reprezentirano simbolički operatorskim izrazom

$$\mathbf{y} = H\mathbf{u}, \tag{5.1}$$

gdje je $\mathbf{u} : [0, \infty\rangle \to \mathbb{R}^m$ ulazni vektor, $\mathbf{y} : [0, \infty\rangle \to \mathbb{R}^n$ izlazni vektor (ulazni i izlazni vektori pripadaju prostoru signala koji preslikavaju vremenski interval $[0, \infty\rangle$ u Euklidski prostor $\mathbb{R}^m$ i $\mathbb{R}^n$), dok je $H : \mathcal{L}_{pe}^m \to \mathcal{L}_{pe}^n$ operator koji preslikava ulazni vektor u izlazni (za definicije $\mathcal{L}_p$ prostora vidi 6.7.1. i 6.7.2.).

***Definicija (kauzalnost operatora).*** Za operator $H : \mathcal{L}_{pe}^m \to \mathcal{L}_{pe}^n$ kažemo da je kauzalan ako vrijednost izlaza $(H\mathbf{u})(t)$ u nekom trenutku $t$ ovisi jedino o vrijednostima ulaza do trenutka $t$. To možemo izraziti na slijedeći način

$$(H\mathbf{u})_\tau = (H\mathbf{u}_\tau)_\tau, \tag{5.2}$$

gdje je $\mathbf{u}_\tau(t)$ tzv. odsječak (*truncation*) od $\mathbf{u}(t)$ (vidi 6.7.2.). Kauzalnost je fundamentalno svojstvo dinamičkih sustava reprezentiranih modelom u obliku prostora stanja.

### 5.1.1. Definicija $\mathcal{L}_p$ stabilnosti

***Definicija ($\mathcal{L}_p$ stabilnost).*** Sustav reprezentiran operatorom $H : \mathcal{L}_{pe}^m \to \mathcal{L}_{pe}^n$ je $\mathcal{L}_p$ stabilan (*finite-gain $\mathcal{L}_p$ stable*) ako postoje nenegativne konstante $\gamma$ i $\beta$ takve da vrijedi

$$\|(H\mathbf{u})_\tau\|_{\mathcal{L}_p} \le \gamma \|\mathbf{u}_\tau\|_{\mathcal{L}_p} + \beta \tag{5.3}$$

za svaki $\mathbf{u} \in \mathcal{L}_{pe}^m$ i $\tau \in [0, \infty\rangle$. Parametar $\gamma$ naziva se $\mathcal{L}_p$ pojačanje, dok se parametar $\beta$ naziva bias.

Na osnovu navedene definicije slijedi da za kauzalni $\mathcal{L}_p$ stabilni sustav vrijedi slijedeća implikacija

$$\mathbf{u} \in \mathcal{L}_p^m \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y} = H\mathbf{u} \in \mathcal{L}_p^n, \tag{5.4}$$

odnosno

$$\|\mathbf{y}\|_{\mathcal{L}_p} = \|H\mathbf{u}\|_{\mathcal{L}_p} \leq \gamma\|\mathbf{u}\|_{\mathcal{L}_p} + \beta, \tag{5.5}$$

što slijedi iz (5.3) u limesu $\tau \to \infty$.

Od posebnog su interesa $\mathcal{L}_2$ i $\mathcal{L}_\infty$ stabilnost.

$\mathcal{L}_2$ ***stabilnost***. Za $p = 2$ izraz (5.5) postaje

$$\|\mathbf{y}\|_{\mathcal{L}_2} \leq \gamma\|\mathbf{u}\|_{\mathcal{L}_2} + \beta, \tag{5.6}$$

gdje je $\gamma$ tzv. $\mathcal{L}_2$ pojačanje ($\mathcal{L}_2$ *gain*). Značenje $\mathcal{L}_2$ stabilnosti je da ulazni signal konačne energije uzrokuje izlazni signal konačne energije. Ako imamo sustav u ravnotežnom stanju i sustav je globalno asimptotski stabilan, tada vanjski signal ili poremečaj konačne energije (što praktično znači signal konačnog vremenskog trajanja) uzrokuje regulacijsku pogrešku konačne energije. To znači da će sustav nakon izbacivanja iz ravnotežnog stanja s vremenom ponovo konvergirati ravnotežnom stanju.

$\mathcal{L}_\infty$ ***stabilnost***. Za $p = \infty$ izraz (5.5) postaje

$$\|\mathbf{y}\|_{\mathcal{L}_\infty} \leq \gamma\|\mathbf{u}\|_{\mathcal{L}_\infty} + \beta. \tag{5.7}$$

Značenje $\mathcal{L}_\infty$ stabilnosti je da ulazni signal konačne amplitude uzrokuje izlazni signal konačne amplitude. Drugim riječima imamo tzv. bounded-input-bounded-output (BIBO) stabilnost. Ako imamo sustav u ravnotežnom stanju i sustav je globalno asimptotski stabilan, tada vanjski signal ili poremečaj konačne (ograničene) amplitude (što praktično znači permanentni signal neograničenog trajanja) uzrokuje regulacijsku pogrešku ograničene amplitude. To znači da sustav nakon izbacivanja iz ravnotežnog stanja s vremenom neće asimptotski konvergirati ravnotežnom stanju ali će odstupanje biti ograničeno.

### 5.1.2. Primjeri izračunavanja $\mathcal{L}_p$ pojačanja

Utvrđivanje $\mathcal{L}_p$ stabilnosti svodi se na računanje $\mathcal{L}_p$ pojačanja $\gamma$. Računanje $\mathcal{L}_p$ pojačanja bitno je zbog niza razloga: (a) ako je ulazni signal poremećaj tada na osnovu izraza za $\mathcal{L}_p$ pojačanja možemo utvrditi način podešavanja parametara sustava (pojačanja regulatora) s ciljem minimizacije pojačanja a time i minimizacije utjecaja poremečaja na izlazne varijable; (b) ako imamo sustav koji se sastoji od spregnutih podsustava za koje znamo odgovarajuća $\mathcal{L}_p$ pojačanja, tada stabilnost sustava možemo utvrditi primjenom tzv. *small-gain teorema*.

***Inducirana norma operatora***. Na sličan način kao što je definirana inducirana norma matrice (vidi 6.6.) možemo definirati i induciranu normu operatora u $\mathcal{L}_p$ prostoru. Na osnovu izraza za ulazno izlazno preslikavanje, $\mathbf{y} = H\mathbf{u}$, slijedi

$$\|\mathbf{y}\|_{\mathcal{L}_p} \leq \|H\|_{\mathcal{L}_p} \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{L}_p}, \tag{5.8}$$

gdje je $\|H\|_{\mathcal{L}_p}$ inducirana $\mathcal{L}_p$ norma operatora.

Usporedimo li operatorsku jednadžbu $\mathbf{y} = H\mathbf{u}$ s definicijskim izrazom za $\mathcal{L}_p$ stabilnost, $\|\mathbf{y}\|_{\mathcal{L}_p} \leq \gamma\|\mathbf{u}\|_{\mathcal{L}_p}$ (za $\beta = 0$) slijedi da pojačanje $\gamma$ možemo interpretirati kao $\mathcal{L}_p$ induciranu normu operatora $H$, odnosno $\gamma = \|H\|_{\mathcal{L}_p}$.

### Kauzalni linearni konvolucijski operator

Razmotrimo single-input-single-output (SISO) sustav $y(s) = G(s)u(s)$, gdje je $G(s)$ prijenosna funkcija. Rješenje u vremenskoj domeni dobivamo primjenom inverznog Laplaceovog transformata i teorema konvolucije (2.58),

$$y(t) = \int_0^t g(t-\sigma)u(\sigma)d\sigma \tag{5.9}$$

gdje je $g(t)$ inverzni Laplaceov transformat prijenosne funkcije, $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$, odnosno *težinska funkcija* (odziv na Diracovu $\delta$ funkciju).

Konvolucijski integral je tipičan primjer linearnog operatora, tako da simbolički operatorski izraz $y(t) = Hu(t)$ ima slijedeće značenje

$$y(t) = \left(\int_0^t g(t-\sigma)(\cdot)d\sigma\right)u(t), \tag{5.10}$$

gdje je

$$H \equiv \left(\int_0^t g(t-\sigma)(\cdot)d\sigma\right), \tag{5.11}$$

linearni operator. Dakle, $H$ nije ni funkcija ni matrica nego u ovom slučaju operacija integriranja. Nadalje, $Hu(t)$ nije množenje nego djelovanje operatora (5.11) na funkciju $u(t)$ koje je jednako integralu na desnoj strani izraza (5.9).

Pretpostavimo sada da je $g \in \mathcal{L}_{1e}$ za svaki $\tau \in [0, \infty\rangle$, odnosno

$$\|g_\tau\|_{\mathcal{L}_1} = \int_0^\infty |g_\tau(\sigma)|d\sigma = \int_0^t |g(\sigma)|d\sigma < \infty. \tag{5.12}$$

Ako je $u \in \mathcal{L}_{\infty e}$ i $t \leq \tau$, tada imamo

$$|y(t)| \leq \int_0^t |g(t-\sigma)|\,|u(\sigma)|d\sigma \leq \left(\sup_{0\leq\sigma\leq t} |u(\sigma)|\right) \int_0^t |g(t-\sigma)|d\sigma. \tag{5.13}$$

Uvedemo li novu varijablu integracije $\xi = t - \sigma$, integral na desnoj strani prethodnog izraza postaje

$$\int_0^t |g(t-\sigma)|d\sigma = -\int_t^0 |g(\xi)|d\xi = \int_0^t |g(\xi)|d\xi, \tag{5.14}$$

tako da konačno dobivamo

$$|y(t)| \leq \left(\sup_{0\leq\sigma\leq t} |u(\sigma)|\right) \int_0^t |g(\xi)|d\xi. \tag{5.15}$$

S obzirom da je po definiciji

$$\|u_\tau\|_{\mathcal{L}_\infty} = \sup_{0\leq\sigma\leq t} |u(\sigma)|, \qquad \|g_\tau\|_{\mathcal{L}_1} = \int_0^t |g(\sigma)|d\sigma, \tag{5.16}$$

na osnovu izraza (5.15) slijedi

$$\|y_\tau\|_{\mathcal{L}_\infty} = \|g_\tau\|_{\mathcal{L}_1}\,\|u_\tau\|_{\mathcal{L}_\infty}, \qquad \forall\tau \in [0, \infty\rangle. \tag{5.17}$$

Da bi izraz (5.17) bio usporediv sa definicijom (5.5) pojačanje $\gamma$, odnosno $\|g_\tau\|_{\mathcal{L}_1}$ ne smije ovisiti o $\tau$. Dok je $\|g_\tau\|_{\mathcal{L}_1}$ konačno za svaki konačni $\tau$, ne mora značiti da je ograničeno uniformno u ovisnosti o $\tau$. Npr. $g(t) = e^t$ ima normu $\|g_\tau\|_{\mathcal{L}_1} = e^t - 1$ koja je konačna za svaki $\tau \in [0, \infty\rangle$ ali nije uniformno ograničen u ovisnosti o $\tau$. Stoga, definiciju (5.5) možemo uspoređivati sa (5.17) jedino ako je

$$\|g\|_{\mathcal{L}_1} = \int_0^\infty |g(\sigma)|d\sigma < \infty, \tag{5.18}$$

odnosno ako je $g \in \mathcal{L}_1$. U tom slučaju, nejednadžba

$$\|y_\tau\|_{\mathcal{L}_\infty} = \|g\|_{\mathcal{L}_1}\,\|u_\tau\|_{\mathcal{L}_\infty}, \qquad \forall\tau \in [0, \infty\rangle, \tag{5.19}$$

pokazuje da je sustav $\mathcal{L}_\infty$ stabilan (poremečaj konačne amplitude uzrokuje odziv konačne amplitude). Na osnovu izraza (5.19) slijedi da u limesu $\tau \to \infty$ imamo

$$\|y\|_{\mathcal{L}_\infty} = \|g\|_{\mathcal{L}_1}\,\|u\|_{\mathcal{L}_\infty}, \qquad \forall\tau \in [0, \infty\rangle, \tag{5.20}$$

odnosno, $u \in \mathcal{L}_\infty \;\Rightarrow\; y \in \mathcal{L}_\infty$.

Usporedimo li (5.20) sa (5.8), vidimo da je inducirana $\mathcal{L}_\infty$ norma operatora $H$ definiranog izrazom (5.11) jednaka $\|H\|_{\mathcal{L}_\infty} = \|g\|_{\mathcal{L}_1}$.

Nadalje, može se pokazati da uvijet $\|g\|_{\mathcal{L}_1} < \infty$ garantira $\mathcal{L}_p$ stabilnost za bilo koji $p \in [1, \infty\rangle$,

$$\|y\|_{\mathcal{L}_p} = \|g\|_{\mathcal{L}_1} \|u\|_{\mathcal{L}_p}, \qquad \forall \tau \in [0, \infty\rangle. \tag{5.21}$$

### $\mathcal{L}_2$ norma linearnih multivarijabilnih sustava

$\mathcal{L}_2$ stabilnost ima posebno značajnu ulogu u analizi dinamičkih sustava. Kvadratno integrabilni signali su signali konačne energije kojima se često reprezentiraju kratkotrajni poremećaji koji djeluju na sustav. Stoga je od interesa ne samo pokazati da je $\mathcal{L}_2$ pojačanje konačno ($\mathcal{L}_2$ stabilnost) nego izračunati i gornju granicu tog pojačanja (kako bi ga mogli minimizirati i smanjiti utjecaj poremečaja na izlazne varijable sustava).

***Teorem.*** Razmotrimo linearni multivarijabilni sustav s konstantnim koeficijentima

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \tag{5.22}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}, \tag{5.23}$$

kojeg u kompleksnoj domeni možemo reprezentirati matricom prijenosnih funkcija

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}. \tag{5.24}$$

Ako je $\mathbf{A}$ Hurwitzova matrica, tada je $\mathcal{L}_2$ pojačanje sustava jednako

$$\gamma = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \|\mathbf{G}(j\omega)\|_2, \tag{5.25}$$

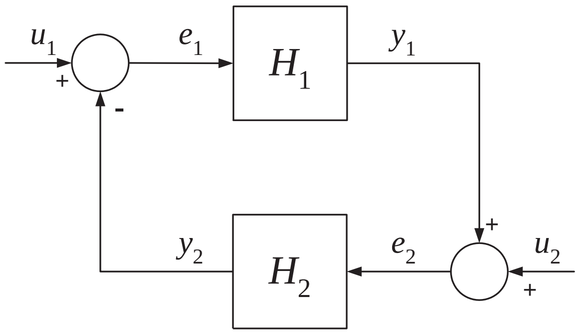
gdje je $\|\mathbf{G}(j\omega)\|_2$ inducirana $L_2$ norma kompleksne matrice $\mathbf{G}(j\omega)$, odnosno

$$\|\mathbf{G}(j\omega)\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}[\mathbf{G}^T(-j\omega)\mathbf{G}(j\omega)]},$$

a naziva se još i $H_\infty$ norma od $\mathbf{G}(j\omega)$.

*Dokaz.* Na osnovu izraza $\mathbf{Y}(j\omega) = \mathbf{G}(j\omega)\mathbf{U}(j\omega)$, te Parsevalovog teorema koji kaže da za kauzalni signal $\mathbf{y} \in \mathcal{L}_2$ vrijedi izraz

$$\int_0^\infty \mathbf{y}^T(t)\mathbf{y}(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{Y}^*(j\omega)\mathbf{Y}(j\omega)d\omega, \tag{5.26}$$




Slika 5.1: Povratna sprega dva sustava.

slijedi

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{y}\|_{\mathcal{L}_2}^2 &= \int_0^\infty \mathbf{y}^T(t)\mathbf{y}(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \mathbf{Y}^*(j\omega)\mathbf{Y}(j\omega)d\omega = \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \mathbf{U}^*(j\omega)\mathbf{G}^T(-j\omega)\mathbf{G}(j\omega)\mathbf{U}(j\omega)d\omega \leq \\
&\leq \left(\sup_{\omega\in\mathbb{R}} \|\mathbf{G}(j\omega)\|_2\right)^2 \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \mathbf{U}^*(j\omega)\mathbf{U}(j\omega)d\omega = \\
&= \left(\sup_{\omega\in\mathbb{R}} \|\mathbf{G}(j\omega)\|_2\right)^2 \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{L}_2}^2,
\end{aligned}$$

čime smo pokazali da je $\mathcal{L}_2$ pojačanje manje ili jednako $(\sup_{\omega\in\mathbb{R}} \|\mathbf{G}(j\omega)\|_2)$. □

### 5.1.3. Small-Gain teorem

Formalizam ulazno-izlazne stabilnosti posebno je koristan pri analizi stabilnosti međusobno spregnutih sustava. Razmotrimo dva sustava u povratnoj vezi, $H_1 : \mathcal{L}_{pe}^m \to \mathcal{L}_{pe}^n$ i $H_2 : \mathcal{L}_{pe}^n \to \mathcal{L}_{pe}^m$. Pretpostavimo da su oba sustava $\mathcal{L}_p$ stabilna, odnosno

$$\|\mathbf{y}_{1\tau}\|_{\mathcal{L}_p} \leq \gamma_1\|\mathbf{e}_{1\tau}\|_{\mathcal{L}_p} + \beta_1 \tag{5.27}$$

$$\|\mathbf{y}_{2\tau}\|_{\mathcal{L}_p} \leq \gamma_2\|\mathbf{e}_{2\tau}\|_{\mathcal{L}_p} + \beta_2. \tag{5.28}$$

Postavlja se pitanje pod kojim uvijetima je preslikavanje ulaza $\mathbf{u} = [\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2]^T$ na izlaz $\mathbf{e} = [\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2]^T$ (ili ulaza $\mathbf{u}$ na izlaz $\mathbf{y} = [\mathbf{y}_1\ \mathbf{y}_2]^T$) $\mathcal{L}_p$ stabilno.

Na osnovu slike 5.1 vidimo da vrijedi

$$\mathbf{e}_{1\tau} = \mathbf{u}_{1\tau} - (H_2\mathbf{e}_2)_\tau, \qquad \mathbf{e}_{2\tau} = \mathbf{u}_{2\tau} + (H_1\mathbf{e}_1)_\tau, \tag{5.29}$$

tako da imamo

$$\begin{aligned}\|\mathbf{e}_{1\tau}\|_{\mathcal{L}_p} &\leq \|\mathbf{u}_{1\tau}\|_{\mathcal{L}_p} + \|(H_2\mathbf{e}_2)_\tau\|_{\mathcal{L}_p} \leq \\ &\leq \|\mathbf{u}_{1\tau}\|_{\mathcal{L}_p} + \gamma_2\|\mathbf{e}_{2\tau}\|_{\mathcal{L}_p} + \beta_2 \leq \\ &\leq \|\mathbf{u}_{1\tau}\|_{\mathcal{L}_p} + \gamma_2(\|\mathbf{u}_{2\tau}\|_{\mathcal{L}_p} + \gamma_1\|\mathbf{e}_{1\tau}\|_{\mathcal{L}_p} + \beta_1) + \beta_2 = \\ &= \gamma_1\gamma_2\|\mathbf{e}_{1\tau}\|_{\mathcal{L}_p} + (\|\mathbf{u}_{1\tau}\|_{\mathcal{L}_p} + \gamma_2\|\mathbf{u}_{2\tau}\|_{\mathcal{L}_p} + \beta_2 + \gamma_2\beta_1).\end{aligned}$$

Na temelju prethodnog izraza, konačno dobivamo

$$\|\mathbf{e}_{1\tau}\|_{\mathcal{L}_p} \leq \frac{1}{1-\gamma_1\gamma_2}\left(\|\mathbf{u}_{1\tau}\|_{\mathcal{L}_p} + \gamma_2\|\mathbf{u}_{2\tau}\|_{\mathcal{L}_p} + \beta_2 + \gamma_2\beta_1\right), \tag{5.30}$$

za svaki $\tau \in [0, \infty\rangle$. Na sličan način dobivamo

$$\|\mathbf{e}_{2\tau}\|_{\mathcal{L}_p} \leq \frac{1}{1-\gamma_1\gamma_2}\left(\|\mathbf{u}_{2\tau}\|_{\mathcal{L}_p} + \gamma_1\|\mathbf{u}_{1\tau}\|_{\mathcal{L}_p} + \beta_1 + \gamma_1\beta_2\right), \tag{5.31}$$

za svaki $\tau \in [0, \infty\rangle$. Na kraju još imamo ocjenu

$$\|\mathbf{e}_\tau\|_{\mathcal{L}_p} \leq \|\mathbf{e}_{1\tau} + \mathbf{e}_{2\tau}\|_{\mathcal{L}_p} \leq \|\mathbf{e}_{1\tau}\|_{\mathcal{L}_p} + \|\mathbf{e}_{2\tau}\|_{\mathcal{L}_p}. \tag{5.32}$$

Da bi sustav bio $\mathcal{L}_p$ stabilan pojačanje mora biti pozitivno i ograničeno, što znači da je uvijet $\mathcal{L}_p$ stabilnosti spregnutih sustava

$$\gamma_1\gamma_2 < 1. \tag{5.33}$$

Ukoliko su $\mathbf{u}_{1\tau}, \mathbf{u}_{2\tau} \in \mathcal{L}_p$ ($\|\mathbf{u}_{1\tau}\|_{\mathcal{L}_p} < \infty, \|\mathbf{u}_{2\tau}\|_{\mathcal{L}_p} < \infty$) tada su $\mathbf{e}_{1\tau}, \mathbf{e}_{2\tau}, \mathbf{y}_{1\tau}, \mathbf{y}_{2\tau} \in \mathcal{L}_p$ i izrazi (5.30)-(5.31) vrijede za $\tau \to \infty$ (odnosno, bez subscripta $\tau$).

Struktura sustava u obliku povratne veze prikazana na slici 5.1 je standardna prilikom analize robustnosti dinamičkih sustava. Dinamički sustavi koji sadrže nemodelirane (nepoznate) dinamičke članove mogu se prikazati u obliku povratne veze gdje je $H_1$ poznati (nominalni) stabilni sustav, dok sustav $H_2$ reprezentira nepoznatu stabilnu dinamiku (perturbacijski član). U tom slučaju, uvjet $\gamma_1\gamma_2 < 1$ je zadovoljen kada je $\gamma_2$ dovoljno mali.

Mnogi rezultati analize robustnosti dobiveni Lyapunovljevom metodom mogu biti interpretirani kao specijalan slučaj small-gain teorema. Nadalje, small-gain teorem omogućuje analizu stabilnosti sustava koji bi se vrlo teško mogli analizirati primjenom Lyapunovljeve metode, poput npr. sustava s vremenskim pomacima, diskontinuiranim nelinearnostima, itd.

# 5.2. Disipativnost i pasivnost

Pojam disipativnosti usko je vezan uz pojam energije fizikalnih sustava. Ako energija sustava opada u vremenu, to znaći da ju sustav predaje okolini u obliku disipacije (ili transformacije). Npr. ako imamo (relativno) izolirani mehanički sustav kojem energija (kinetička plus potencijalna) opada u vremenu, to znači da se energija disipira zbog viskoznog ili suhog trenja, te u obliku toplinske energije (transformacija mehaničke energije u toplinsku) odlazi izvan sustava u okolinu. Slično kod (izoliranih) pasivnih električnih RLC krugova, opadanje energije tijekom vremene znači disipaciju električne energije na otpornicima (transformacija električne energije u toplinsku). Slično je i kod svih ostalih fizikalnih sustava (pneumatskih, hidrauličkih, kemijskih, termalnih,...).

Možemo reči da disipativne sustave karakterizira svojstvo da u svakom vremenskom trenutku, količina energije koju sustav predaje okolini ne može prijeći količinu energije koju je sustav primio iz okoline.

## 5.2.1. Primjeri i definicije disipativnih sustava

***Primjer 1 (Prigušeni mehanički oscilator)***. Razmotrimo jednodimenzionalni linerni prigušeni mehanički oscilator opisan diferencijalnom jednadžbom

$$M\ddot{x}(t) + D\dot{x}(t) + Kx(t) = F(t), \qquad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0, \tag{5.34}$$

gdje je $x(t)$ pozicija, $M$ je masa, $D$ je konstanta viskoznog trenja, $K$ je konstanta opruge, a $F(t)$ je vanjska sila koja djeluje na sustav.

Energija sustava je

$$V(x(t), \dot{x}(t)) = \frac{1}{2}M\dot{x}^2(t) + \frac{1}{2}Kx^2(t). \tag{5.35}$$

Vremenska derivacija energije je

$$\dot{V}(x(t), \dot{x}(t)) = M\dot{x}(t)\ddot{x}(t) + Kx(t)\dot{x}(t). \tag{5.36}$$

Uvrštavanjam diferencijalne jednadžbe (5.34) u prethodni izraz, konačno dobivamo

$$\dot{V}(x(t), \dot{x}(t)) = F(t)\dot{x}(t) - D\dot{x}^2(t). \tag{5.37}$$

Integriranjem prethodne jednadžbe od $t = t_0$ do $t = t_1$ dobivamo

$$V(x(t_1), \dot{x}(t_1)) = V(x(t_0), \dot{x}(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} F(t)\dot{x}(t)dt - \int_{t_0}^{t_1} D\dot{x}^2(t)dt. \tag{5.38}$$

Prethodni izraz možemo interpretirati na slijedeći način. Energija sustava u trenutku $t = t_1$ jednaka je početnoj energiji sustava plus energija primljena od strane vanjske sile $F(t)$, minus energija disipirana zbog viskoznog trenja. Ako nema vanjske sile i viskoznog trenja, energija sustava je konstantna (konzervativni sustav).

S obzirom da je $D > 0$, izraz (5.38) možemo prikazati u obliku slijedeće nejednakosti

$$V(x(t_0), \dot{x}(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} F(t)\dot{x}(t)dt \geq V(x(t_1), \dot{x}(t_1)), \tag{5.39}$$

koja nam kaže da je energija sustava u nekom trenutku uvijek manja ili jednaka početnoj energiji sustava plus energiji primljenoj iz okoline (dok je razlika tih energija disipirana u okolinu).

Ako na dinamički sustav (5.34) gledamo kao na preslikavanje ulazne varijable $u(t) = F(t)$ na izlaznu varijablu $y(t) = \dot{x}(t)$, te uvedemo funkciju

$$s(u(t), y(t)) = u(t)y(t) = F(t)\dot{x}(t), \tag{5.40}$$

koja predstavlja *snagu* sustava, tada izraz (5.39) možemo prikazati na slijedeći način

$$V(\mathbf{x}(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} s(u(t), y(t))dt \geq V(\mathbf{x}(t_1)), \tag{5.41}$$

gdje je $\mathbf{x} = [x \ \ \dot{x}]^T$ vektor stanja sustava. $\square$

Izraz (5.41) naziva se disipacijska nejednakost (*dissipation inequality*) i može se poopćiti na sve realne fizikalne sustave. Sada uvodimo opću definiciju disipativnih sustava.

***Disipativni sustavi.*** Razmotrimo kontinuirani, vremenski invarijantni dinamički sustav opisan diferencijalnim jednadžbama

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \tag{5.42}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \tag{5.43}$$

gdje je $\mathbf{x} \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ vektor stanja, $\mathbf{u} \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m$ je vektor ulaza (upravljanja), a $\mathbf{y} \in \mathcal{Y} \subseteq \mathbb{R}^p$ je vektor izlaza.

Definirajmo sada funkciju koja preslikava ulazno-izlazni par $(\mathbf{u}, \mathbf{y})$ u skalarnu veličinu,

$$s : \mathcal{U} \times \mathcal{Y} \to \mathbb{R}, \tag{5.44}$$

koju nazivamo *supply rate* (snaga, tok energije).

***Definicija (Disipativnost)***. Sustav (5.42)-(5.43) je disipativan u odnosu na *supply rate* $s(\mathbf{u}, \mathbf{y})$, (abstrakciju fizikalnog pojma snage) ako postoji funkcija $V : \mathcal{X} \to \mathbb{R}_+$ koju nazivamo *storage function* (abstrakcija fizikalnog pojma energije akumulirane u sustavu), takva da za $\forall\, \mathbf{x}(t_0) \in \mathcal{X}$, $\forall\, t_1 \geq t_0$, i $\forall\, \mathbf{u} \in \mathcal{U}$, vrijedi

$$V(\mathbf{x}(t_1)) \leq V(\mathbf{x}(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} s(\mathbf{u}(t), \mathbf{y}(t))dt. \tag{5.45}$$

Nejednakost (5.45) nazivamo *integralna disipacijska nejednakost*, a izražava činjenicu da je 'akumulirana energija' $V(\mathbf{x}(t_1))$ sustava (5.42)-(5.43) u bilo kojem vremenskom trenutku $t_1$ jednaka sumi 'akumulirane energije' $V(\mathbf{x}(t_0))$ u početnom trenutku i ukupne eksterno primljene energije $\int_{t_0}^{t_1} s(\mathbf{u}(t), \mathbf{y}(t))dt$ tijekom vremenskog intervala $[t_0, t_1]$. Drugim riječima, nije muguća 'interna kreacija energije' nego samo 'interna disipacija energije'.

***Diferencijalna disipacijska nejednakost***. Na osnovu *integralne disipacijske nejednakosti* (5.45) možemo dobiti tzv. *diferencijalnu disipacijsku nejednakost* (u limesu $t_1 \to t_0$)

$$\frac{dV(\mathbf{x})}{dt} \leq s(\mathbf{u}, \mathbf{y}), \qquad \forall \mathbf{x}, \mathbf{u}. \tag{5.46}$$

Prethodni izraz možemo interpretirati na slijedeći način: *prirast energije sustava ne može biti veći od ulazne snage.* Izraz (5.46) možemo nadalje prikazati kao

$$\frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = V_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \leq s(\mathbf{u}, \mathbf{y}), \qquad \forall \mathbf{x}, \mathbf{u}, \tag{5.47}$$

gdje je

$$V_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} & \frac{\partial V}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial V}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Definicija disipativnosti u obliku (5.46), odnosno (5.47) koristi se pri uspostavljanju analogije između koncepta disipativnosti i Lyapunovljeve analize stabilnosti.

### 5.2.2. Pasivnost dinamičkih sustava

Disipativne sustave možemo nadalje klasificirati prema obliku funkcije snage (*supply rate*) $s(\mathbf{u}, \mathbf{y})$. Jedan važan izbor navedene funkcije je

$$s(\mathbf{u}(t), \mathbf{y}(t)) = \mathbf{y}^T(t)\mathbf{u}(t). \tag{5.48}$$

Pretpostavimo da je sustav (5.42)-(5.43) disipativan u odnosu na $s(\mathbf{u}, \mathbf{y}) = \mathbf{y}^T\mathbf{u}$. Tada vrijedi

$$\int_{t_0}^{t_1} \mathbf{y}^T(t)\mathbf{u}(t)dt \geq V(\mathbf{x}(t_1)) - V(\mathbf{x}(t_0)) \geq -V(\mathbf{x}(t_0)), \tag{5.49}$$

$\forall\, \mathbf{x}(t_0) \in \mathcal{X}$, $\forall\, t_1 \geq t_0$, i $\forall\, \mathbf{u}(t) \in \mathcal{U}$.

***Definicija (Skalarni produkt funkcija)***. Neka su $\mathbf{u}, \mathbf{y} \in \mathcal{L}_{2e}^m$ i $T > 0$. Skalarni produkt vektorskih funkcija $\mathbf{u}$ i $\mathbf{y}$ definiran je za svaki $T > 0$ slijedećim izrazom

$$\langle \mathbf{y}|\mathbf{u}\rangle_T = \int_0^T \mathbf{y}^T(t)\mathbf{u}(t)dt. \tag{5.50}$$

Ako stavimo $t_0 = 0$ i $t_1 = T$, te $\beta = -V(\mathbf{x}(t_0))$, izraz (5.49) postaje $\langle \mathbf{y}|\mathbf{u}\rangle_T \geq \beta$. Na osnovu navedenoga navodimo slijedeću abstraktnu definiciju pasivnosti.

***Definicija (Pasivnost)***. Za sustav (5.42)-(5.43) kažemo da je pasivan ako postoji konačna konstanta $\beta \in \mathbb{R}$, takva da vrijedi

$$\langle \mathbf{y}|\mathbf{u}\rangle_T \geq \beta. \tag{5.51}$$

Konstanta $\beta$ ovisi o početnim uvjetima sustava. $\square$

Pojam pasivnosti važan je zbog toga što većina realnih fizikalnih sustava ima funkciju snage (*supply rate*) u obliku skalarnog produkta međusobno konjugiranih ulazno-izlaznih varijabli. Kod translacijskih mehaničkih sustava (primjer 1), sila $F(t)$ i brzina $\dot{x}(t)$ međusobno su konjugirane varijable ($u(t) = F(t)$, $y(t) = \dot{x}(t)$) jer njihov produkt predstavlja snagu definiranu izrazom $s(u(t), y(t)) = u(t)y(t) = F(t)\dot{x}(t)$, iz čega zaključujemo da su mehanički sustavi pasivni za navedeni izbor ulazno-izlaznih varijabli. Za neki drugi izbor ulazno-izlaznih varijabli (npr. $u(t) = F(t)$, $y(t) = x(t)$) sustav nije pasivan.

U tablici 5.1 navodimo konjugirane ulazno-izlazne varijable nekih fizikalnih sustava (čiji produkt ima dimenziju snage).

### Diferencijalni oblik definicija pasivnosti

Integralni oblik definicije pasivnosti (5.51), odnosno (5.49) u limesu $t_1 \to t_0$ poprima diferencijalni oblik $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{y}^T(t)\mathbf{u}(t)$. Navodimo slijedeće definicije pasivnosti.

***Pasivnosti***. Ako postoji pozitivno semidefinitna funkcija $V(\mathbf{x}(t)) \geq 0$ i ako vrijedi

$$\dot{V}(\mathbf{x}(t)) \leq \mathbf{y}^T(t)\mathbf{u}(t), \tag{5.52}$$

Tablica 5.1: Konjugirane ulazno-izlazne varijable nekih fizikalnih sustava

| **Fizikalni sustav** | **Ulazna varijabla** $\mathbf{u}(t)$ | **Izlazna varijabla** $\mathbf{y}(t)$ | **Snaga** $s(\mathbf{u}, \mathbf{y})$ |
|---|---|---|---|
| Mehanički (translacijski) | Sila $F(t)$ [N] | Brzina $v(t)$ [m/s] | $F(t)v(t)$ [N m/s] |
| Mehanički (rotacijski) | Moment $M(t)$ [N m] | Kutna brzina $\omega(t)$ [rad/s] | $M(t)\omega(t)$ [N m/s] |
| Električni | Napon $U(t)$ [V] | Struja $I(t)$ [A] | $U(t)I(t)$ [V A] |
| Hidraulički | Tlak $p(t)$ [N/m$^2$] | Volumni tok $\varphi(t)$ [m$^3$/s] | $p(t)\varphi(t)$ [N m/s] |
| Kemijski | Kemijski potencijal $\mu(t)$ [J/mole] | Molarni tok $\nu(t)$ [mole/s] | $\mu(t)\nu(t)$ [J/s] |
| Termodinamički | Temperatura $T$ [K] | Tok entropije $dS/dt$ [W/K] | $TdS/dt$ [W] |

za svaki $t \geq 0$ i za sve funkcije $\mathbf{u}(t)$ tada kažemo da je sistem *pasivan*. Ako vrijedi jednakost $\dot{V}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{y}^T(t)\mathbf{u}(t)$ sustav je bez gubitaka energije (*lossless*). $\square$

***Ulazna striktna pasivnosti***. Ako postoji funkcija $V(\mathbf{x}(t)) \geq 0$ i parametar $\delta > 0$, te ako vrijedi

$$\dot{V}(\mathbf{x}(t)) \leq \mathbf{y}^T(t)\mathbf{u}(t) - \delta\mathbf{u}^T(t)\mathbf{u}(t), \tag{5.53}$$

za svaki $t \geq 0$ i za sve funkcije $\mathbf{u}(t)$ tada kažemo da je sistem *ulazno striktno pasivan* (*input strictly passive*). $\square$

***Izlazna striktna pasivnosti***. Ako postoji funkcija $V(\mathbf{x}(t)) \geq 0$ i parametar $\epsilon > 0$, te ako vrijedi

$$\dot{V}(\mathbf{x}(t)) \leq \mathbf{y}^T(t)\mathbf{u}(t) - \epsilon\mathbf{y}^T(t)\mathbf{y}(t), \tag{5.54}$$

za svaki $t \geq 0$ i za sve funkcije $\mathbf{u}(t)$ tada kažemo da je sistem *izlazno striktno pasivan* (*output strictly passive*). $\square$

***Striktna pasivnosti***. Ako postoje pozitivno semidefinitna funkcija $V(\mathbf{x}(t)) \geq 0$, parametar $\rho > 0$, te pozitivno definitna funkcija $\psi(\mathbf{x}(t)) > 0$, koji zadovoljavaju

$$\dot{V}(\mathbf{x}(t)) \leq \mathbf{y}^T(t)\mathbf{u}(t) - \rho\psi(\mathbf{x}(t)), \tag{5.55}$$

za svaki $t \geq 0$ i za sve funkcije $\mathbf{u}(t)$ tada kažemo da je sistem *striktno pasivan* (*strictly passive*). $\square$

Ako se ponovo vratimo na primjer prigušenog mehaničkog oscilatora, vidimo da se radi o izlazno striktno pasivnom sustavu. To vidimo na osnovu derivacije funkcije energije $\dot{V}(x(t), \dot{x}(t)) = F(t)\dot{x}(t) - D\dot{x}^2(t)$. Konjugirane varijable su $u(t) = F(t)$ i $y(t) = \dot{x}(t)$, te ako stavimo $\epsilon = D$, dobivamo $\dot{V}(x(t), \dot{x}(t)) = u(t)y(t) - \epsilon y^2(t)$ iz čega slijedi da je sustav izlazno striktno pasivan. Ako je $D = 0$, dobivamo $\dot{V}(x(t), \dot{x}(t)) = u(t)y(t)$, odnosno sustav je konzervativan i sva predana energija akumulira se u sustavu bez gubitaka.

### $\mathcal{L}_2$-gain supply rate

Pored navedenih oblika funkcije $s(\mathbf{u}, \mathbf{y})$ u definicijama pasivnosti, bitan je također i tzv. *$\mathcal{L}_2$-gain supply rate*,

$$s(\mathbf{u}, \mathbf{y}) = \gamma^2\mathbf{u}^T(t)\mathbf{u}(t) - \mathbf{y}^T(t)\mathbf{y}(t), \tag{5.56}$$

pomoću kojega uspostavljamo ekvivalenciju između činjenice da je neki sustav izlazno striktno pasivan te činjenice da sustav ima konačno $\mathcal{L}_2$ pojačanje.

***Lema.*** Ako je sustav disipativan u odnosu na $\mathcal{L}_2$-*gain supply rate*, tada je sustav $\mathcal{L}_2$ stabilan i ima konačno $\mathcal{L}_2$ pojačanje koje je manje ili jednako $\gamma$.

*Dokaz.* Po definiciji (5.45) imamo

$$V(\mathbf{x}(t_1)) \leq V(\mathbf{x}(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} [\gamma^2 \mathbf{u}^T(t)\mathbf{u}(t) - \mathbf{y}^T(t)\mathbf{y}(t)]dt, \tag{5.57}$$

odnosno

$$\int_{t_0}^{t_1} \mathbf{y}^T(t)\mathbf{y}(t))dt \leq \gamma^2 \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{u}^T(t)\mathbf{u}(t)dt + V(\mathbf{x}(t_0)) - V(\mathbf{x}(t_1)). \tag{5.58}$$

S obzirom da vrijedi $V(\mathbf{x}(t_1)) \geq 0$, slijedi

$$\left(\int_{t_0}^{t_1} \mathbf{y}^T(t)\mathbf{y}(t)dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq \gamma \left(\int_{t_0}^{t_1} \mathbf{u}^T(t)\mathbf{u}(t)dt\right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{V(\mathbf{x}(t_0))}, \tag{5.59}$$

gdje smo iskoristili nejednakost $\sqrt{a^2+b^2} \leq a + b$ za nenegativne $a$ i $b$. Ako stavimo $t_0 = 0$ i $t_1 = T$, dobiveni izraz je ekvivalentan sa

$$\|\mathbf{y}_T\|_{\mathcal{L}_2} \leq \gamma \|\mathbf{u}_T\|_{\mathcal{L}_2} + \beta, \tag{5.60}$$

gdje je $\beta = \sqrt{V(\mathbf{x}(t_0))}$. $\square$

***Lema.*** Ako je sustav izlazno striktno pasivan sa $\dot{V} \leq \mathbf{u}^T\mathbf{y} - \epsilon \mathbf{y}^T(t)\mathbf{y}(t)$, tada je sustav $\mathcal{L}_2$ stabilan i ima konačno $\mathcal{L}_2$ pojačanje koje je manje ili jednako $1/\epsilon$.

*Dokaz.* Derivacija funkcije energije zadovoljava

$$\begin{aligned}\dot{V} &\leq \mathbf{u}^T\mathbf{y} - \epsilon \mathbf{y}^T(t)\mathbf{y}(t) = \frac{1}{2\epsilon}(\mathbf{u} - \epsilon\mathbf{y})^T(\mathbf{u} - \epsilon\mathbf{y}) + \frac{1}{2\epsilon}\mathbf{u}^T\mathbf{u} - \frac{\epsilon}{2}\mathbf{y}^T\mathbf{y} \leq \\ &\leq \frac{1}{2\epsilon}\mathbf{u}^T\mathbf{u} - \frac{\epsilon}{2}\mathbf{y}^T\mathbf{y}.\end{aligned}$$

Integriranjem prethodnog izraza dobivamo

$$\int_0^T \mathbf{y}^T(t)\mathbf{y}(t)dt \leq \frac{1}{\epsilon^2}\int_0^T \mathbf{u}^T(t)\mathbf{u}(t)dt - \frac{2}{\epsilon}[V(\mathbf{x}(T)) - V(\mathbf{x}(0))]. \tag{5.61}$$

Na osnovu prethodnog izraza slijedi

$$\|\mathbf{y}_T\|_{\mathcal{L}_2} \leq \frac{1}{\epsilon}\|\mathbf{u}_T\|_{\mathcal{L}_2} + \sqrt{\frac{2}{\epsilon}V(\mathbf{x}(0))}, \tag{5.62}$$

gdje smo iskoristili činjenicu $V(\mathbf{x}(T)) \geq 0$ i $\sqrt{a^2+b^2} \leq a + b$ za nenegativne $a$ i $b$. $\square$

Vidjeli smo da je prigušeni mehanički oscilator izlazno striktno pasivan a na osnovu prethodnog rezultata to znači da je i $\mathcal{L}_2$ stabilan sa $\mathcal{L}_2$ pojačanjem koje je manje ili jednako $1/D$, gdje je $D$ koeficijent prigušenja. Velika vrijednost koeficijenta prigušenja $D$ znači spor odziv sustavi ali i malo $\mathcal{L}_2$-pojačanje (veliko prigušenje vanjskih poremećaja). Vrijedi i obrnuto. Mala vrijednost koeficijenta prigušenja $D$ znači brz odziv i veliko $\mathcal{L}_2$-pojačanje (slabo prigušenje vanjskih poremećaja). Drugim riječima, imamo trade-off između između robustnosti i performansi prijelaznog odziva.

### 5.2.3. Uvjeti pasivnosti afinih i linearnih sustava

***Karakterizacija pasivnosti.*** Sada ćemo na osnovu navedenih definicija pasivnosti odrediti uvijete pod kojima je neki sustav pasivan. Razmotrimo klasu nelinearnih afinih sustava

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u}, \tag{5.63}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}), \tag{5.64}$$

gdje je $\mathbf{g}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n$ i $\mathbf{h}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^m$.

Navedeni sustav je *pasivan* ako vrijedi $\dot{V} \leq \mathbf{u}^T\mathbf{y}$, odnosno

$$V_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})[\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u}] \leq \mathbf{u}^T\mathbf{h}(\mathbf{x}). \tag{5.65}$$

Prethodno navedeni uvjet ekvivalentan je *Hill-Moylandovim uvjetima*

$$V_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x}) \leq 0, \tag{5.66}$$

$$V_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{h}^T(\mathbf{x}). \tag{5.67}$$

Ako imamo linearni sustav

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \tag{5.68}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}, \tag{5.69}$$

i funkciju energije (*storage function*) $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{x}$, tada *Hill-Moylandovi uvjeti* postaju

$$\mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\mathbf{P} \leq 0, \tag{5.70}$$

$$\mathbf{P}\mathbf{B} = \mathbf{C}^T, \tag{5.71}$$

koji se zovu još i *Kalman-Yakubovich-Popov uvjeti.* Dakle, osim što matrica $\mathbf{P}$ mora biti rješenje Lyapunovljeve matrične nejednadžbe, mora zadovoljiti i matričnu jednadžbu $\mathbf{PB} = \mathbf{C}^T$.

***Karakterizacija izlazne striktne pasivnosti.*** Da bi sustav bio *izlazno striktno pasivan*, $\dot{V} \leq \mathbf{u}^T\mathbf{y} - \epsilon\mathbf{y}^T(t)\mathbf{y}(t)$, mora biti zadovoljen slijedeći uvjet

$$V_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})[\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u}] \leq \mathbf{u}^T\mathbf{h}(\mathbf{x}) - \epsilon\mathbf{h}^T(\mathbf{x})\mathbf{h}(\mathbf{x}). \tag{5.72}$$

Prethodno navedeni uvjet ekvivalentan je *Hill-Moylandovim uvjetima*

$$V_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x}) \leq -\epsilon\mathbf{h}^T(\mathbf{x})\mathbf{h}(\mathbf{x}), \tag{5.73}$$

$$V_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{h}^T(\mathbf{x}). \tag{5.74}$$

Ako imamo linearni sustav (5.68)-(5.69) i funkciju energije (*storage function*) $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{x}$, tada uvjeti prethodno dobiveni uvjeti striktne izlazne pasivnosti afinih sustava postaju

$$\mathbf{PA} + \mathbf{A}^T\mathbf{P} \leq -\epsilon\mathbf{C}^T\mathbf{C}, \tag{5.75}$$

$$\mathbf{PB} = \mathbf{C}^T. \tag{5.76}$$

### 5.2.4. $H_\infty$ upravljanje linearnim sustavima

***$\mathcal{L}_2$ norma linearnih sustava.*** Vidjeli smo da ako je sustav disipativan u odnosu na $\mathcal{L}_2$-*gain supply rate*,

$$\dot{V}(\mathbf{x}) \leq \gamma^2\mathbf{u}^T(t)\mathbf{u}(t) - \mathbf{y}^T(t)\mathbf{y}(t), \tag{5.77}$$

tada je sustav $\mathcal{L}_2$ stabilan sa $\mathcal{L}_2$ pojačanjem manjim ili jednakim $\gamma$.

Za linerni sustav (5.68)-(5.69) sa funkcijom energije (*storage function*) $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{x}$, možemo dobiti uvjete za izračunavanje $\mathcal{L}_2$ pojačanja $\gamma$.

Deriviranjem funkcije energije $V(\mathbf{x})$ dobivamo

$$\dot{V} = \dot{\mathbf{x}}^T\mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{x}^T\mathbf{P}\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{Ax} + \mathbf{Bu})^T\mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{x}^T\mathbf{P}(\mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}). \tag{5.78}$$

Uvrštavanjem prethodnog izraza u (5.77), te nakon množenja i prebacivanja svih članova na lijevu stranu, dobivamo

$$\mathbf{x}^T\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{x}^T\mathbf{PA}\mathbf{x} + \mathbf{u}^T\mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{x}^T\mathbf{PB}\mathbf{u} - \gamma^2\mathbf{u}^T\mathbf{u} + \mathbf{x}^T\mathbf{C}^T\mathbf{C}\mathbf{x} \leq 0, \tag{5.79}$$

odnosno

$$\mathbf{x}^T[\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{C}^T\mathbf{C}]\mathbf{x} + \mathbf{u}^T\mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{u} - \gamma^2\mathbf{u}^T\mathbf{u} \leq 0, \tag{5.80}$$

ili u matričnom obliku

$$\begin{bmatrix}\mathbf{x}^T & \mathbf{u}^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{C}^T\mathbf{C} & \mathbf{P}\mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T\mathbf{P} & -\gamma^2\mathbf{I}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x} \\ \mathbf{u}\end{bmatrix} \leq 0. \tag{5.81}$$

Da bi gornja kvadratna forma bila negativno definitna, mora biti zadovoljena slijedeća linearna matrična nejednakost (LMI)

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{C}^T\mathbf{C} & \mathbf{P}\mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T\mathbf{P} & -\gamma^2\mathbf{I}\end{bmatrix} < 0. \tag{5.82}$$

***Bounded real lemma.*** Ako postoji $\mathbf{P} \geq 0$ takav da vrijedi (5.82), tada je $\mathcal{L}_2$ pojačanje linearnog sustava (5.68)-(5.69) manje ili jednako $\gamma$. □

Primjenimo li Schurov komplement (vidi 6.5.4.) na izraz (5.82), dobivamo Riccati-like kvadratnu matričnu nejednadžbu

$$\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{C}^T\mathbf{C} + \frac{1}{\gamma^2}\mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{B}^T\mathbf{P} < 0. \tag{5.83}$$

### Linearni $H_\infty$ regulator

Razmotrimo nejednadžbu (5.80) koja predstavlja kvadratnu formu po vektorima $\mathbf{x}$ i $\mathbf{u}$. Ako želimo na osnovu navedene kvadratne forme dobiti kvadratnu formu samo po vektoru $\mathbf{x}$, moramo na neki način eliminirati vektor $\mathbf{u}$. To ćemo učiniti maksimizacijom desne strane izraza (5.80) po vektoru $\mathbf{u}$ (deriviranjem po $\mathbf{u}$, te izlučivanjem $\mathbf{u}$ u ovisnosti o $\mathbf{x}$). Dobivamo

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\gamma^2}\mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{x}. \tag{5.84}$$

Uvrštavanjem prethodnog izraza u (5.80), dobivamo

$$\mathbf{x}^T\left[\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{C}^T\mathbf{C} + \frac{1}{\gamma^2}\mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{B}^T\mathbf{P}\right]\mathbf{x} < 0, \tag{5.85}$$

što će biti zadovoljeno ako postoji takav $\mathbf{P} \geq 0$ koji zadovoljava Riccati-like kvadratnu matričnu nejednadžbu (5.83).

Drugim riječima, zakon upravljanja (5.84) garantira da je $\mathcal{L}_2$ pojačanje zatvorenog kruga manje ili jednako $\gamma$. S obzirom da je $\mathcal{L}_2$ pojačanje linearnog sustava (5.68)-(5.69) ekvivalentno $H_\infty$ normi matrice prijenosnih funkcija, uprvljanje (5.84) i (5.83) nazivamo još i $H_\infty$ upravljanje.

### 5.2.5. Pasivnost spregnutih sustava

Razmotrimo dva sustava u povratnoj vezi, prikazana na slici 5.1.

***Teorem***. Sustav koji se sastoji od dva pasivna podsustava u povratnoj vezi je također pasivan sustav.

*Dokaz.* Neka su $V_1(\mathbf{x}_1)$ i $V_2(\mathbf{x}_2)$ funkcije energije (storage functions) podsustava $H_1$ i $H_2$ respektivno. Zbog povratne veze vrijedi $\mathbf{e}_2 = \mathbf{u}_2 + \mathbf{y}_1$ i $\mathbf{e}_1 = \mathbf{u}_1 - \mathbf{y}_2$. Uvjeti pasivnosti oba podsustava imaju slijedeći oblik

$$\dot{V}_1(\mathbf{x}_1) \leq \mathbf{y}_1^T \mathbf{e}_1, \qquad \dot{V}_2(\mathbf{x}_2) \leq \mathbf{y}_2^T \mathbf{e}_2. \tag{5.86}$$

Ako za funkciju energije spregnutog sustava uzmemo sumu funkcija energija pojedinih podsustava $V(\mathbf{x}) = V_1(\mathbf{x}_1) + V_2(\mathbf{x}_2)$, dobivamo

$$\dot{V}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{y}_1^T \mathbf{e}_1 + \mathbf{y}_2^T \mathbf{e}_2 = \mathbf{y}_1^T(\mathbf{u}_1 - \mathbf{y}_2) + \mathbf{y}_2^T(\mathbf{u}_2 + \mathbf{y}_1) = \mathbf{y}_1^T \mathbf{u}_1 + \mathbf{y}_2^T \mathbf{u}_2. \tag{5.87}$$

Ako označimo vektore ulaza i izlaza spregnutog sustava sa $\mathbf{u} = [\mathbf{u}_1^T \ \ \mathbf{u}_2^T]^T$ i $\mathbf{y} = [\mathbf{y}_1^T \ \ \mathbf{y}_2^T]^T$, prethodni izraz postaje

$$\dot{V}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{y}^T \mathbf{u}, \tag{5.88}$$

odnosno, spregnuti sustav je pasivan u odnsu na supply rate $\mathbf{y}^T \mathbf{u}$. $\Box$

***Lema***. Sustav koji se sastoji od dva izlazno striktna pasivna podsustava u povratnoj vezi, sa

$$\dot{V}_1(\mathbf{x}_1) \leq \mathbf{y}_1^T \mathbf{e}_1 - \epsilon_1 \mathbf{y}_1^T \mathbf{y}_1, \qquad \dot{V}_2(\mathbf{x}_2) \leq \mathbf{y}_2^T \mathbf{e}_2 - \epsilon_2 \mathbf{y}_2^T \mathbf{y}_2, \tag{5.89}$$

također je izlazno striktno pasivan sustav, te je $\mathcal{L}_2$ stabilan sa $\mathcal{L}_2$ pojačanjem manjim ili jednakim $1/\min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$.

*Dokaz.* Zbog povratne veze vrijedi $\mathbf{e}_2 = \mathbf{u}_2 + \mathbf{y}_1$ i $\mathbf{e}_1 = \mathbf{u}_1 - \mathbf{y}_2$. Ako za funkciju energije spregnutog sustava uzmemo sumu funkcija energija pojedinih podsustava $V(\mathbf{x}) = V_1(\mathbf{x}_1) + V_2(\mathbf{x}_2)$, dobivamo

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}) &\leq \mathbf{y}_1^T(\mathbf{u}_1 - \mathbf{y}_2) + \mathbf{y}_2^T(\mathbf{u}_2 + \mathbf{y}_1) - \epsilon_1 \mathbf{y}_1^T \mathbf{y}_1 - \epsilon_2 \mathbf{y}_2^T \mathbf{y}_2 \leq \\ &\leq \mathbf{y}_1^T \mathbf{u}_1 + \mathbf{y}_2^T \mathbf{u}_2 - \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}(\mathbf{y}_1^T \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2^T \mathbf{y}_2) = \\ &= \mathbf{y}^T \mathbf{u} - \epsilon \mathbf{y}^T \mathbf{y} \end{aligned}$$

gdje je $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$. Ovim smo pokazali da je spregnuti sustav izlazno striktno pasivan. U prthodnom podpoglavlju smo dokazali da ako je sustav izlazno striktno pasivan tada je sustav $\mathcal{L}_2$ stabilan i ima $\mathcal{L}_2$ pojačanje koje je manje ili jednako $1/\epsilon$, odnosno $1/\min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$. □

***Lema.*** Sustav koji se sastoji od jednog pasivnog podsustava i jednog izlazno striktno pasivnog podsustava u povratnoj vezi, sa

$$\dot{V}_1(\mathbf{x}_1) \leq \mathbf{y}_1^T \mathbf{e}_1, \qquad \dot{V}_2(\mathbf{x}_2) \leq \mathbf{y}_2^T \mathbf{e}_2 - \epsilon \mathbf{y}_2^T \mathbf{y}_2, \tag{5.90}$$

također je izlazno striktno pasivan sustav, te je $\mathcal{L}_2$ stabilan sa $\mathcal{L}_2$ pojačanjem manjim ili jednakim $1/\epsilon$.

*Dokaz.* Slijedi direktno na osnovu prethodne leme. □

### 5.2.6. Stabilnost pasivnih sustava

***Definicija (Zero-state observability).*** Kažemo da je sustav (5.42)-(5.43) *zero-state observable* ako na osnovu $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ slijedi $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (ako je jedino rješenje jednadžbe $\mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$ trivijalno rješenje $\mathbf{x} = \mathbf{0}$). □

***Lema.*** Razmotrimo sustav (5.42)-(5.43). Ravnotežno stanje sustava $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{0})$ je asimptotski stabilno ako je sustav

- striktno pasivan, ili
- izlazno striktno pasivan i *zero-state observable*.

Nadalje, ako je storage function radijalno neograničena, ravnotežno stanje je globalno asimptotski stabilno. □

### 5.2.7. Passivity-based control (PBC)

Pretpostavimo da imamo pasivni sustav sa funkcijom energije $V(\mathbf{x})$, tako da vrijedi

$$\dot{V}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{y}^T \mathbf{u}. \tag{5.91}$$

Ako sustav nije izlazno striktno pasivan, tada je najjednostavniji način da ga učinimo izlazno striktno pasivnim, izbor statičke povratne veze

$$\mathbf{u} = -k\mathbf{v} + \mathbf{v}, \qquad k > 0, \tag{5.92}$$

gdje je $\mathbf{v}$ nova ulazna varijabla. Uvrstimo li (5.92) u (5.91), dobivamo

$$\dot{V}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{y}^T \mathbf{v} - k\|\mathbf{y}\|^2, \tag{5.93}$$

odnosno sustav u zatvorenoj upravljačkoj petlji je izlazno striktno pasivan. Uz dodatni uvjet observabilnosti nultog stanja (zero-state observability), zaključujemo da je sustav asimptotski stabilan.

# 5.3. Hamiltonski sustavi

U prethodnom podpoglavlju vidjeli smo da svi realni fizikalni sustavi spadaju u klasu disipativnih, odnosno pasivnih sustava. U ovom podpoglavlju vidjet ćemo da jednadžbe gibanja svih realnih sustava imaju specijalnu, tzv. Hamiltonsku strukturu. Pri tome pretpostavljamo da su dinamičke jednadžbe izvedene na temelju fundamentalnih zakona sačuvanja energije i mase, bez aproksimacija i linearizacija.

## 5.3.1. Euler-Lagrangeove i Hamiltonove jednadžbe

Svi elektro-mehanički sustavi mogu se modelirati Euler-Lagrangeovim jednadžbama koje su izvedene na temelju zakona sačuvanja energije. Razmatramo mehanički sustav s $n$ stupnjeva slobode gibanja čiju dinamiku možemo prikazati primjenom Euler-Lagrangeovih jednadžbi

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{u}, \tag{5.94}$$

gdje je $\mathbf{q} = [q_1 \ q_2 \ ... \ q_n]^T$ vektor unutrašnjih (poopćenih) koordinata, $\dot{\mathbf{q}} = [\dot{q}_1 \ \dot{q}_2 \ ... \ \dot{q}_n]^T$ je vektor unutrašnjih (poopćenih) brzina, dok je $\mathbf{u} = [u_1 \ u_2 \ ... \ u_n]^T$ vektor upravljačkih momenata/sila. Lagrangeova funkcija sustava $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - U(\mathbf{q})$ jednaka je razlici kinetičke $T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ i potencijalne $U(\mathbf{q})$ energije sustava. Kinetička energija je kvadratična forma po poopćenim brzinama

$$T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}, \tag{5.95}$$

gdje je $M(\mathbf{q})$ pozitivno definitna simetrična inercijska matrica mehaničkog sustava dimenzije $n \times n$.

Da bi sustav od $n$ jednadžbi drugog reda (5.94) transformirali u sustav od $2n$ jednadžbi prvog reda, uvodimo slijedeću smjenu koordinata:

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = M(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}, \tag{5.96}$$

tako da jednadžbe (5.94) postaju

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{q}} &= \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}},\\ \dot{\mathbf{p}} &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{u},\end{aligned} \tag{5.97}$$

gdje je

$$H(\mathbf{q},\mathbf{p}) = \frac{1}{2}\mathbf{p}^T M^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{p} + U(\mathbf{q}) \tag{5.98}$$

totalna energija sustava koju zovemo *Hamiltonian*, dok jednadžbe (5.97) zovemo *Hamiltonske jednadžbe gibanja*. Sustave, čija dinamika se može prikazati u obliku (5.97) nazivamo *Hamiltonski sustavi*.

***Pasivnost hamiltonskih sustava***. S obzirom da Hamiltonian odgovara totalnoj energiji sutava možemo ga uzeti kao storage function. Deriviranjem Hamiltoniana (5.98) po vremenu dobivamo

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial^T H}{\partial \mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial^T H}{\partial \mathbf{p}}\dot{\mathbf{p}} = \frac{\partial^T H}{\partial \mathbf{q}}\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} + \frac{\partial^T H}{\partial \mathbf{p}}\left(-\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{u}\right) = \frac{\partial^T H}{\partial \mathbf{p}}\mathbf{u} = \dot{\mathbf{q}}^T\mathbf{u}, \tag{5.99}$$

gdje je $\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} = M^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{p}$.

Ako kao izlaznu varijablu sustava definiramo

$$\mathbf{y} = \dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \tag{5.100}$$

tada imamo

$$\dot{H} = \mathbf{y}^T\mathbf{u}, \tag{5.101}$$

što znači da je sustav pasivan i bez gubitaka (*lossless*, konzervativan) s obzirom na preslikavanje ulazne varijable $\mathbf{u}$ na izlaznu varijablu $\mathbf{y} = \dot{\mathbf{q}}$. Izraz (5.98) znači da je prirast energije jednak snazi $\mathbf{y}^T\mathbf{u}$.

Ako mehanički sustav ima viskozno trenje, tada Euler-Lagrangeove jednadžbe moramo nadopuniti derivacijom Rayleighove disipacijske funkcije

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial R}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \mathbf{u}, \tag{5.102}$$

gdje Rayleighova disipacijska funkcije zadovoljava

$$\dot{\mathbf{q}}^T\frac{\partial R}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \geq 0. \tag{5.103}$$

U tom slučaju, deriviranjem Hamiltoniana (5.98) po vremenu dobivamo

$$\dot{H} = \dot{\mathbf{q}}^T\mathbf{u} - \dot{\mathbf{q}}^T\frac{\partial R}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \leq \mathbf{y}^T\mathbf{u}. \tag{5.104}$$

što znači da je sustav pasivan (s disipacijom energije).

Ako Rayleighovu disipacijsku funkciju možemo ocjeniti na slijedeći način

$$\dot{\mathbf{q}}^T\frac{\partial R}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \geq \delta\|\dot{\mathbf{q}}\|^2, \tag{5.105}$$

tada imamo

$$\dot{H} = \dot{\mathbf{q}}^T\mathbf{u} - \dot{\mathbf{q}}^T\frac{\partial R}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \leq \mathbf{y}^T\mathbf{u} - \delta\|\mathbf{y}\|^2, \tag{5.106}$$

odnosno, mehanički sustav je izlazno striktno pasivan.

### 5.3.2. Port-controlled Hamiltonian systems

Ako sada uvedemo vektor stanja cijelog sustava kao $\mathbf{x} = [\mathbf{q} \quad \mathbf{p}]^T$, tada jednadžbe (5.97) možemo konciznije zapisati kao

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u}, \tag{5.107}$$

gdje je

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \tag{5.108}$$

$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = [\mathbf{0} \quad \mathbf{I}]^T$, dok je $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ jedinična matrica. Matrica $\mathbf{J}$ naziva se *Poissonova strukturna matrica*, i ima fundamentalno svojstvo antisimetričnosti

$$\mathbf{J} = -\mathbf{J}^T, \tag{5.109}$$

odnosno

$$\mathbf{z}^T\mathbf{J}\mathbf{z} = 0. \tag{5.110}$$

Pogledajmo sada derivaciju Hamiltoniana po vremenu,

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial^T H}{\partial \mathbf{x}}\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial^T H}{\partial \mathbf{x}}\left(\mathbf{J}\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u}\right) = \frac{\partial^T H}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{J}\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial^T H}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u}, \tag{5.111}$$

odnosno

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial^T H}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u} = \frac{\partial^T H}{\partial \mathbf{p}}\mathbf{u} = \dot{\mathbf{q}}^T\mathbf{u}, \tag{5.112}$$

gdje smo iskoristili svojstvo antisimetričnosti strukturne matrice $\mathbf{J}$.

Ako definiramo izlaznu varijablu

$$\mathbf{y} = \mathbf{g}^T(\mathbf{x})\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}, \tag{5.113}$$

tada izraz (5.112) postaje

$$\dot{H} = \mathbf{y}^T\mathbf{u}, \tag{5.114}$$

odnosno, sustav je pasivan (lossless).

Stoga, mehaničke sustave možemo prikazati u slijedećem Hamiltonskom obliku, primjenom strukturne matrice, i definiranjem konjugiranog ulazno-izlaznog para varijabli u odnosu na koje je sustav pasivan,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u}, \tag{5.115}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{g}^T(\mathbf{x})\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}. \tag{5.116}$$

Sustav opisan jednadžbama (5.115)-(5.116) naziva se *port-controlled Hamiltonian systems* (PCH). Jednadžbe (5.115)-(5.116 izvedene su na temelju Hamiltonovih jednadžbi klasične mehanike. Međutim, svi realni fizikalni sustavi, čije dinamičke jednadžbe su izvedene na temelju fundamentalnih zakona sačuvanja, mogu se prikazati u slijedećem obliku

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}(\mathbf{x})\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u}, \tag{5.117}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{g}^T(\mathbf{x})\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}, \tag{5.118}$$

gdje je $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ antisimetrična matrična funkcija, $\mathbf{J}(\mathbf{x}) = -\mathbf{J}^T(\mathbf{x})$. Razlika u odnosu na (5.115)-(5.116) je u strukturnoj matrici $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ koja ne mora biti konstantna niti imati oblik (5.108).

***PCH sustavi sa disipacijom.*** Pretpostavimo da je Rayleighova disipacijska funkcija kvadratična po brzinama, $R(\dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T\mathbf{S}\dot{\mathbf{q}}$, gdje je $\mathbf{S}$ pozitivno semidefinitna matrica. Tada izraz (5.106) postaje

$$\dot{H} = \dot{\mathbf{q}}^T\mathbf{u} - \dot{\mathbf{q}}^T\frac{\partial R}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \dot{\mathbf{q}}^T\mathbf{u} - \dot{\mathbf{q}}^T\mathbf{S}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{y}^T\mathbf{u} - \mathbf{y}^T\mathbf{S}\mathbf{y}. \tag{5.119}$$

Ako u prethodni izraz uvrstimo $\mathbf{y} = \mathbf{g}^T(\mathbf{x})\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}$, dobivamo

$$\dot{H} = \mathbf{y}^T\mathbf{u} - \frac{\partial^T H}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{R}(\mathbf{x})\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}, \tag{5.120}$$

gdje je

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{S}\mathbf{g}^T(\mathbf{x}) \geq 0. \tag{5.121}$$

Da bi derivacija Hamiltoniana u slučaju disipativnih sustava imala oblik (5.120), jednadžbe konzervativnih PCH sustava (5.117)-(5.118) moramo poopčiti na slijedeći način

$$\dot{\mathbf{x}} = [\mathbf{J}(\mathbf{x}) - \mathbf{R}(\mathbf{x})]\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u}, \tag{5.122}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{g}^T(\mathbf{x})\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}. \tag{5.123}$$

Lako možemo vidjeti da je derivacija Hamiltoniana sustava (5.122)-(5.123) jednaka (5.120). Jednadžbe (5.122)-(5.123) predstavljaju standardnu reprezentaciju PCH sustava. Dinamičke jednadžbe praktično svih fizikalnih disipativnih sustava mogu biti reprezentirane u obliku (5.122)-(5.123), gdje je $\mathbf{J}(\mathbf{x}) = -\mathbf{J}^T(\mathbf{x})$ i $\mathbf{R}(\mathbf{x}) = \mathbf{R}^T(\mathbf{x}) \geq 0$.

***Linearni PCH sustavi bez disipacije.*** Razmotrit ćemo sada reprezentaciju linearnih konzervativnih (lossless) sustava u obliku PCH sustava. Vidjeli smo da je linearni sustav

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \tag{5.124}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}, \tag{5.125}$$

pasivan (lossles, konzervativan) ako postoji funkcija energije (*storage function*), odnosno Hamiltonian $H(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{x}$ sa $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T >$, takva da vrijede slijedeći uvjeti

$$\mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\mathbf{P} = 0, \tag{5.126}$$

$$\mathbf{B}^T\mathbf{P} = \mathbf{C}. \tag{5.127}$$

Da bi linearni sustav (5.124)-5.125) mogli prikazati u PCH obliku (5.115)-(5.116), mora vrijediti

$$\mathbf{J}\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}. \tag{5.128}$$

S obzirom da je $\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{P}\mathbf{x}$, slijedi da je strukturna matrica $\mathbf{J} = \mathbf{A}\mathbf{P}^{-1}$. Da bi $\mathbf{J}$ bila strukturna matrica, moramo provjeriti da li vrijedi svojstvo antisimetričnosti, $\mathbf{J} = -\mathbf{J}^T$. Da bi to dokazali, iskoristit ćemo prvi uvjet pasivnosti (5.126) iz kojeg slijedi $\mathbf{A}^T = -\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1}$. Slijedi

$$\mathbf{J}^T = [\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1}]^T = (\mathbf{P}^{-1})^T\mathbf{A}^T = -(\mathbf{P}^{-1})^T\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1} = -\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1} = -\mathbf{J}, \tag{5.129}$$

čime smo dokazali da je $\mathbf{J} = \mathbf{A}\mathbf{P}^{-1}$ antisimetrična matrica. Stoga, PCH reprezentacija linearnih konzervativnih sustava ima slijedeći oblik

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}\mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \tag{5.130}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{x}. \tag{5.131}$$

### 5.3.3. Povratna sprega PCH sustava

Pretpostavimo da želimo upravljati PCH sustavom s disipacijom

$$\dot{\mathbf{x}} = [\mathbf{J}(\mathbf{x}) - \mathbf{R}(\mathbf{x})]\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u}, \tag{5.132}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{g}^T(\mathbf{x})\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}. \tag{5.133}$$

te da je regulator također PCH sustav s disipacijom, opisan slijedećim jednadžbama

$$\dot{\mathbf{z}} = [\mathbf{J}_c(\mathbf{z}) - \mathbf{R}_c(\mathbf{z})]\frac{\partial H_c}{\partial \mathbf{z}} + \mathbf{g}_c(\mathbf{z})\mathbf{u}_c, \tag{5.134}$$

$$\mathbf{y}_c = \mathbf{g}_c^T(\mathbf{z})\frac{\partial H_c}{\partial \mathbf{z}}. \tag{5.135}$$

Na sličan način kao kod small-gain i passivity teorema, povratna veza među sustavima definirana je izrazima

$$\mathbf{u} = -\mathbf{y}_c + \mathbf{v}, \qquad \mathbf{u}_c = \mathbf{y} + \mathbf{v}_c, \tag{5.136}$$

gdje su $\mathbf{v}$ i $\mathbf{v}_c$ vanjski referentni signali. Sustav u zatvorenoj petlji ima oblik

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{z}} \end{bmatrix} &= \left( \begin{bmatrix} \mathbf{J}(\mathbf{x}) & -\mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{g}_c^T(\mathbf{z}) \\ \mathbf{g}_c(\mathbf{z})\mathbf{g}^T(\mathbf{x}) & \mathbf{J}_c(\mathbf{z}) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{R}(\mathbf{x}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_c(\mathbf{z}) \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \\ \frac{\partial H_c}{\partial \mathbf{z}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{g}(\mathbf{x}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{g}_c(\mathbf{z}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{v}_c \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{y}_c \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{g}^T(\mathbf{x}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{g}_c^T(\mathbf{z}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \\ \frac{\partial H_c}{\partial \mathbf{z}} \end{bmatrix},
\end{aligned} \tag{5.137}$$

što je ponovo PCH sustav s disipacijom, totalnim Hamiltonijanom jednakim $H(\mathbf{x}) + H_c(\mathbf{z})$, ulaznim vektorom $[\mathbf{v}^T \quad \mathbf{v}_c^T]^T$ i izlaznim vektorom $[\mathbf{y}^T \quad \mathbf{y}_c^T]^T$. Dakle povratna sprega dva PCH sustava također je PCH sustav (kao što je povratna sprega dva pasivna sustava ponovo pasivan sustav).

### 5.3.4. Interconnection and Damping Assignment Passivity-Based Control (IDA-PBC)

Prilikom upravljanja PCH sustavima cilj je da regulacijski sustav, pored stabilizacije sustava, ostaje i dalje PCH sustav.

Pretpostavimo za početak da želimo naći zakon upravljanja $\mathbf{u} = \beta(\mathbf{x})$, koji će omogućiti da nelinearni afini sustav

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u} \tag{5.138}$$

poprimi PCH oblik

$$\dot{\mathbf{x}} = [\mathbf{J}_d(\mathbf{x}) - \mathbf{R}_d(\mathbf{x})]\frac{\partial H_d}{\partial \mathbf{x}}, \tag{5.139}$$

gdje je $H_d(\mathbf{x})$ željeni Hamiltonian koji ima minimum u ravnotežnoj točki $\mathbf{x}^*$.

Pretpostavimo da je $\mathbf{g}^{\perp}(\mathbf{x})$ lijevi anhilator punog ranga od $\mathbf{g}(\mathbf{x})$, odnosno da vrijedi

$$\mathbf{g}^{\perp}(\mathbf{x})\mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0. \tag{5.140}$$

Pomnožimo li jednadžbe (5.138)-(5.139) sa $\mathbf{g}^{\perp}(\mathbf{x})$ i međusobno usporedimo, dobivamo

$$\mathbf{g}^{\perp}(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}^{\perp}(\mathbf{x})[\mathbf{J}_d(\mathbf{x}) - \mathbf{R}_d(\mathbf{x})]\frac{\partial H_d}{\partial \mathbf{x}}. \tag{5.141}$$

Izraz (5.141) predstavlja parcijalnu diferencijalnu jednadžbu po $H_d(\mathbf{x})$. Sada trebamo odrediti upravljanje $\mathbf{u} = \beta(\mathbf{x})$ koje će omogućiti poklapanje modela (5.138) i (5.139),

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\beta(\mathbf{x}) = [\mathbf{J}_d(\mathbf{x}) - \mathbf{R}_d(\mathbf{x})]\frac{\partial H_d}{\partial \mathbf{x}}. \tag{5.142}$$

Pomnožimo li prethodni izraz sa pseudoinverzom $[\mathbf{g}^T(\mathbf{x})\mathbf{g}(\mathbf{x})]^{-1}\mathbf{g}^T(\mathbf{x})$, dobivamo na kraju

$$\beta(\mathbf{x}) = \left[\mathbf{g}^T(\mathbf{x})\mathbf{g}(\mathbf{x})\right]^{-1}\mathbf{g}^T(\mathbf{x})\left[[\mathbf{J}_d(\mathbf{x}) - \mathbf{R}_d(\mathbf{x})]\frac{\partial H_d}{\partial \mathbf{x}} - \mathbf{f}(\mathbf{x})\right]. \tag{5.143}$$

Dobiveni zakon upravljanja transformira nelinearni sustav (5.138) u PCH sustav (5.139) a time i stabilizira sustav s obzirom da vrijedi

$$\dot{H}_d = -\frac{\partial^T H_d}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{R}_d(\mathbf{x})\frac{\partial H_d}{\partial \mathbf{x}} \leq 0, \tag{5.144}$$

što znači da je Hamiltonian $H_d(\mathbf{x})$ ujedno i Lapunovljeva funkcija čija derivacija je negativno semidefinitna. Asimptotska stabilnost slijedi pozivanjem LaSalleovog principa invarijantnosti.

Ključni dio dizajna navedenog regulatora je rješavanje parcijalne diferencijalne jednadžbe (5.141). Pri tome trebamo imati slijedeće činjenice u vidu

- Matrice $\mathbf{J}_d(\mathbf{x})$ i $\mathbf{R}_d(\mathbf{x})$ su slobodne, uz uvjet antisimetričnosti i simetričnosti
- Hamiltonian $H_d(\mathbf{x})$ može biti totalno ili djelomično fiksiran uz uvjet da minimum Hamiltoniana odgovara željenom ravnotežnom stanju
- Postoji dodatni stupanj slobode u izboru anhilatora $\mathbf{g}^{\perp}(\mathbf{x})$ s obzirom da on nije jedinstveno definiran s $\mathbf{g}(\mathbf{x})$

Na osnovu navedenih činjenica, mogući su slijedeći pristupi.

*Neparametrizirana IDA*. Unaprijed se zadaju matrice $\mathbf{J}_d(\mathbf{x})$, $\mathbf{R}_d(\mathbf{x})$ i $\mathbf{g}^{\perp}(\mathbf{x})$ i riješava parcijalna diferencijalna jednadžba (5.141) po $H_d(\mathbf{x})$. Od svih mogućih rješenja odabire se ono koje ima minimum u željenom ravnotežnom stanju.

*Algebarska IDA*. Unaprijed se zadaje Hamiltonian $H_d(\mathbf{x})$, tako da jednadžba (5.141) postaje algebarska po $\mathbf{J}_d(\mathbf{x})$, $\mathbf{R}_d(\mathbf{x})$ i $\mathbf{g}^{\perp}(\mathbf{x})$.

# 6 Dodatak A: Osnove linearne algebre

## 6.1. Neke definicije

Ovdje navodimo neke osnovne definicije i svojstva kvadratnih $n \times n$ matrica.

***Minor***. Ako se $i$-ti redak i $j$-ti stupac determinante $\det(\mathbf{A})$ eliminiraju, preostalih $n-1$ redaka i $n-1$ stupaca formiraju determinantu $\det(\mathbf{M}_{ij})$. Ta determinanta naziva se *minor* od elementa $a_{ij}$. Npr. ako je determinanta matrice $\mathbf{A}$ dana sa

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \tag{6.1}$$

tada je minor elementa $a_{12}$

$$\det(\mathbf{M}_{ij}) = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}. \tag{6.2}$$

***Kofaktor***. Kofaktor od elementa $a_{ij}$, definiran je sa

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \det(\mathbf{M}_{ij}). \tag{6.3}$$

Kofaktor elementa $a_{12}$ iz prethodnog primjera jednak je

$$C_{12} = (-1) \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}. \tag{6.4}$$

***Laplaceov razvoj determinanti***. Determinantu matrice $\mathbf{A}$ možemo izračunati primjenom jednog od $2n$ mogućih razvoja

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} C_{ij}, \qquad j = 1, \text{ili } 2, \text{ili } 3, \ldots, \text{ili } n, \quad \text{(razvoj po stupcu)} \tag{6.5}$$

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij}, \qquad i = 1, \text{ili } 2, \text{ili } 3, \ldots, \text{ili } n, \quad \text{(razvoj po retku)} \tag{6.6}$$

Razvojem determinante po stupcu ili retku s najvećim brojem nul-elemenata dobivamo najjednostavniji prikaz te determinante.

***Adjungirana matrica.*** Adjungirana matrica od matrice $\mathbf{A}$ definirana je sa

$$\text{adj}(\mathbf{A}) = \mathbf{C}^T, \tag{6.7}$$

gdje su elementi matrice $\mathbf{C}$ kofaktori $C_{ij}$ elemenata $a_{ij}$ matrice $\mathbf{A}$.

***Inverzna i adjungirana matrica.*** Inverznu matricu matrice $\mathbf{A}$ možemo prikazati preko adjungirane matrice na slijedeći način

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\text{adj}(\mathbf{A})}{\det(\mathbf{A})}. \tag{6.8}$$

Za matricu $\mathbf{A}$ kažemo da je *regularna* ako vrijedi $\det(\mathbf{A}) \neq 0$. Ako vrijedi $\det(\mathbf{A}) = 0$, kažemo da je matrica $\mathbf{A}$ *singularna*. Inverzna matrica $\mathbf{A}^{-1}$ postoji samo ako je $\mathbf{A}$ regularna matrica.

***Svojstvene vrijednosti matrice.*** Matričnu jednadžbu

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \tag{6.9}$$

gdje su $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, možemo geometrijski interpretirati kao transformaciju vektora $\mathbf{x}$ u vektor $\mathbf{y}$ unutar $n$-dimenzionalnog vektorskog prostora. Unutar vektorskog prostora postoje vektori koji nakon navedene transformacije mijenjaju samo duljinu ali ne i smjer, odnosno $\mathbf{y} = \lambda \mathbf{x}$, gdje skalar $\lambda$ definira produljenje ($\lambda > 1$) ili smanjenje ($\lambda < 1$) vektora $\mathbf{x}$ nakon transformacije. Vektore s navedenim svojstvom nazivamo *svojstvenim* ili *karakterističnim vektorima*, dok skalare $\lambda$ nazivamo *svojstvenim* ili *karakterističnim vrijednostima* matrice $\mathbf{A}$.

Svojstvene vrijednosti matrice $\mathbf{A}$ nalazimo rješavanjem jednadžbe

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}, \tag{6.10}$$

odnosno

$$(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = 0. \tag{6.11}$$

Navedeni sustav jednadžbi ima netrivijalno rješenje jedino ako vrijedi

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0. \tag{6.12}$$

***Karakteristična jednadžba matrice.*** Razvojem determinante (6.12) dobivamo polinom $n$-tog reda po $\lambda$ koji zovemo *karakterističnom jednadžbom matrice* $\mathbf{A}$

$$p(\lambda) = \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0. \tag{6.13}$$

Rješavanjem jednadžbe $p(\lambda) = 0$ dobivamo $n$ karakterističnih vrijednosti (korijena) $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Ako poznajemo korijene sustava, tada karakteristični polinom (6.13) možemo faktorizirati na slijedeći način

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n). \tag{6.14}$$

***Svojstveni vektori matrice.*** Pretpostavimo da matrica $\mathbf{A}$ ima $n$ različitih svojstvenih vrijednosti $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Tada navedenim svojstvenim vrijednostima možemo pridružiti $n$ linearno nezavisnih *svojstvenih vektora* $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$, koji predstavljaju netrivijalna riješenja homogene linearne matrične jednadžbe

$$(\lambda_i\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{u}_i = \mathbf{0}. \tag{6.15}$$

S obzirom da je (6.15) homogena jednadžba, svaki vektor proporcionalan s $\mathbf{u}_i$, odnosno $c_i\mathbf{u}_i$ također je rješenje od (6.15) za $c_i \neq 0$.

***Matrične funkcije.*** Matrične funkcije možemo definirati na osnovu Taylorovog razvoja u beskonačni red potencija. Navodimo primjere nekih matričnih funkcija:

*Matrični polinom.* Ako je zadan polinom $k$-tog reda u funkciji skalarne varijable $x$,

$$n(x) = x^k + b_{k-1}x^{k-1} + \ldots + b_1x + b_0, \tag{6.16}$$

tada matrični polinom u funkciji kvadratne matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ima slijedeći oblik

$$n(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^k + b_{k-1}\mathbf{A}^{k-1} + \ldots + b_1\mathbf{A} + b_0\mathbf{I}. \tag{6.17}$$

*Matrična eksponencijalna funkcija.* Na sličan način kao kod matričnog polinoma, matričnu eksponencijalnu funkciju dobivamo da u Taylorovom razvoju funkcije $e^x$, skalarnu varijablu $x$ zamjenimo matricom $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$,

$$e^{\mathbf{A}} = \mathbf{I} + \mathbf{A} + \frac{\mathbf{A}^2}{2!} + \ldots + \frac{\mathbf{A}^k}{k!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k}{k!}. \tag{6.18}$$

*Matrična sinusna funkcija.* Matrična sinusna funkcija ima slijedeći oblik

$$\sin(\mathbf{A}) = \mathbf{A} - \frac{\mathbf{A}^3}{3!} + \frac{\mathbf{A}^5}{5!} + \ldots + (-1)^k \frac{\mathbf{A}^{2k+1}}{(2k+1)!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\mathbf{A}^{2k+1}}{(2k+1)!}. \tag{6.19}$$

*Matrična kosinusna funkcija.* Matrična kosinusna funkcija ima slijedeći oblik

$$\cos(\mathbf{A}) = \mathbf{I} - \frac{\mathbf{A}^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^4}{4!} + \ldots + (-1)^k \frac{\mathbf{A}^{2k}}{(2k)!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \mathbf{A}^{2k}}{(2k)!}. \tag{6.20}$$

## 6.2. Svojstva matričnih polinoma

### 6.2.1. Cayley-Hamiltonov teorem

***Cayley-Hamiltonov teorem***: Svaka matrica $\mathbf{A}$ zadovoljava vlastitu karakterističnu jednadžbu:

$$p(\mathbf{A}) = \mathbf{0}, \tag{6.21}$$

gdje je karakteristični polinom $p(\lambda)$ definiran sa (6.13). □

*Dokaz.* Prikažimo karakteristični polinom $p(\lambda)$ u faktoriziranom obliku (6.14), te nađemo matrični polinom $p(\mathbf{A})$,

$$p(\mathbf{A}) = (\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I}) \cdots (\mathbf{A} - \lambda_n \mathbf{I}). \tag{6.22}$$

S obzirom da su $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ svojstvene vrijednosti matrice $\mathbf{A}$, na osnovu definicije (6.11) slijedi da je svaki član $(\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{I})$, $j = 1, \ldots, n$, jednak nuli, iz čega direktno slijedi Cayley-Hamiltonov teorem (6.21). □

Napomenimo da za primjenu Cayley-Hamiltonovog teorema nije nužno poznavanje svojstvenih vrijednosti matrice $\mathbf{A}$. Npr. Cayley-Hamiltonov teorem možemo iskoristiti za nalaženje inverzne matrice $\mathbf{A}^{-1}$ u zatvorenom obliku. S obzirom da vrijedi $p(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$, imamo

$$\mathbf{A}^n + a_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} + \ldots + a_1 \mathbf{A} + a_0 \mathbf{I} = 0. \tag{6.23}$$

Množenjem prethodnog izraza sa $\mathbf{A}^{-1}$, dobivamo

$$\mathbf{A}^{-1} = -\frac{1}{a_0} \left( \mathbf{A}^{n-1} + a_{n-1}\mathbf{A}^{n-2} + \ldots + a_1 \mathbf{I} \right), \tag{6.24}$$

odnosno, dobili smo izraz za inverznu matricu u funkciji konačne sume potencija te matrice.

### 6.2.2. Cayley-Hamiltonova metoda redukcije polinoma

Za matricu $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ moguće je reducirati matrični polinom $n(\mathbf{A})$ definiran sa (6.17) $k$-tog reda, gdje je $k > n$.

***Cayley-Hamiltonov teorem redukcije polinoma***: Ako je $p(\mathbf{A})$ karakteristični polinom $n$-tog reda matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, a $f(\mathbf{A})$ matrični polinom $k$-tog reda ($k > n$) kojeg trebamo reducirati, tada je $f(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A})$, gdje je $r(\lambda)$ ostatak dijeljenja polinoma $f(\lambda)$ i $p(\lambda)$. $\square$

*Dokaz.* Dijeljenje polinoma $f(\lambda)$ i $p(\lambda)$ možemo prikazati kao

$$\frac{f(\lambda)}{p(\lambda)} = q(\lambda) + \frac{r(\lambda)}{p(\lambda)}, \tag{6.25}$$

gdje je $q(\lambda)$ polinom reda $k - n$, a $r(\lambda)$ polinom reda $n - 1$. Pomnožimo li prethodni izraz sa $p(\lambda)$ dobivamo

$$f(\lambda) = q(\lambda)p(\lambda) + r(\lambda). \tag{6.26}$$

Stoga matrični polinom $f(\mathbf{A})$ ima slijedeći oblik

$$f(\mathbf{A}) = q(\mathbf{A})p(\mathbf{A}) + r(\mathbf{A}). \tag{6.27}$$

Na osnovu Cayley-Hamiltonovog teorema imamo $p(\mathbf{A}) = 0$, tako da prethodni izraz postaje

$$f(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}), \tag{6.28}$$

čime smo dokazali teorem. $\square$

Na osnovu prethodnog teorema direktno slijedi da se svaki matrični polinom ili svaka matrična funkcija $f(\mathbf{A})$, u obliku beskonačnog reda potencija, može prikazati kao matrični polinom reda $n - 1$,

$$f(\mathbf{A}) = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j \mathbf{A}^j. \tag{6.29}$$

Izraz (6.29) je od fundamentalnog značaja, kako za izračunavanje matrične eksponencijalne funkcije, tako i za izvod uvjeta kontrolabilnosti kontinuiranih sustava.

Koeficijente polinoma (6.29), $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}$, možemo odrediti na temelju svojstvenih vrijednosti matrice $\mathbf{A}$. Funkciju $f(\lambda)$ možemo primjenom (6.26) prikazati na slijedeći način

$$f(\lambda) = q(\lambda)p(\lambda) + \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j \lambda^j. \tag{6.30}$$

S obzirom da je karakteristični polinom $p(\lambda)$ jednak nuli za svojstvene vrijednosti, $p(\lambda_1) = 0, \ldots, p(\lambda_n) = 0$, slijedi da je

$$f(\lambda_i) = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j \lambda_i^j, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{6.31}$$

Izraz (6.31) predstavlja sustav od $n$ linearnih jednadžbi po koeficijentima $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}$. Stoga navedeni sustav možemo prikazati u matričnom obliku

$$\begin{bmatrix} f(\lambda_1) \\ f(\lambda_2) \\ \vdots \\ f(\lambda_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \end{bmatrix}. \tag{6.32}$$

Matrica na desnoj strani prethodnog izraza naziva se Vandermondova matrica. Vektor koeficijenata $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}$, dobivamo množenjem prethodnog izraza s lijeve strane sa inverznom Vandermondovom matricom.

### 6.2.3. Sylvesterov teorem

Sylvesterov teorem je korisna metoda za dobivanje zatvorenog izraza neke matrične funkcije koja se može izraziti u obliku matričnog polinoma (konačnog ili beskonačnog reda).

***Sylvesterov teorem***: Ako je $f(\mathbf{A})$ matrična funkcija i ako matrica $\mathbf{A}$ ima $n$ različitih svojstvenih vrijednosti, tada matričnu funkciju $f(\mathbf{A})$ možemo prikazati na slijedeći način

$$f(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i) \frac{\prod\limits_{j=1;\ j\neq i}^{n} (\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{I})}{\prod\limits_{j=1;\ j\neq i}^{n} (\lambda_i - \lambda_j)}, \tag{6.33}$$

gdje su $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ svojstvene vrijednosti matrice $\mathbf{A}$. $\square$

*Dokaz.* Na temelju Cayley-Hamiltonovog teorema znamo da matričnu funkciju možemo prikazati kao matrični polinom reda $n-1$, (6.29). Da bi dokazali Sylvesterov teorem, prikazat ćemo matrični polinom (6.29) na slijedeći način

$$\begin{aligned} f(\mathbf{A}) = {} & c_1[(\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I})(\mathbf{A}-\lambda_3\mathbf{I})\cdots(\mathbf{A}-\lambda_n\mathbf{I})]+ \\ & + c_2[(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})(\mathbf{A}-\lambda_3\mathbf{I})\cdots(\mathbf{A}-\lambda_n\mathbf{I})]+ \\ & \vdots \\ & + c_k \prod_{j=1;\, j\neq k}^{n} (\mathbf{A}-\lambda_j\mathbf{I}) + \\ & \vdots \\ & + c_n[(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})(\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I})\cdots(\mathbf{A}-\lambda_{n-1}\mathbf{I})], \end{aligned}$$

gdje su $c_1, \ldots, c_n$ nepoznati koeficijenti koje treba odrediti da bi navedeni polinom bio identičan sa (6.29). Navedeni polinom možemo konciznije prikazati slijedećim izrazom

$$f(\mathbf{A}) = \sum_{k=1}^{n} c_k \prod_{j=1;\, j\neq k}^{n} (\mathbf{A}-\lambda_j\mathbf{I}). \tag{6.34}$$

Vidimo da se radi o plinomu reda $n-1$. Ako svojstvene (karakteristične) vektore matrice $\mathbf{A}$ označimo sa $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$, te pomnožimo (6.34) sa svojstvenim vektorom $\mathbf{u}_i$ s desne strane, dobivamo

$$f(\mathbf{A})\mathbf{u}_i = \left[\sum_{k=1}^{n} c_k \prod_{j=1;\, j\neq k}^{n} (\mathbf{A}-\lambda_j\mathbf{I})\right]\mathbf{u}_i. \tag{6.35}$$

S obzirom da po definiciji svojstvenih vektora imamo $\mathbf{A}\mathbf{u}_i = \lambda_i\mathbf{u}_i$, odnosno $(\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{I})\mathbf{u}_i = \mathbf{0}$, svi članovi sume, osim $i$-tog člana, jednaki su nuli. Član sume s koeficijentom $c_i$ nije jednak nuli jer ne sadrži faktor $(\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{I})$. Stoga dobivamo

$$f(\mathbf{A})\mathbf{u}_i = \left[c_i \prod_{j=1;\, j\neq i}^{n} (\mathbf{A}-\lambda_j\mathbf{I})\right]\mathbf{u}_i = \left[c_i \prod_{j=1;\, j\neq i}^{n} (\lambda_i-\lambda_j)\right]\mathbf{u}_i. \tag{6.36}$$

Ako su svojstvene vrijednosti $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ matrice $\mathbf{A}$ različite, tada vrijedi

$$f(\mathbf{A})\mathbf{u}_i = f(\lambda_i)\mathbf{u}_i. \tag{6.37}$$

Na osnovu (6.36) i (6.37) slijedi

$$c_i = \frac{f(\lambda_i)}{\displaystyle\prod_{j=1;\, j\neq i}^{n} (\lambda_i-\lambda_j)}. \tag{6.38}$$

Ako sada izraz (6.38) uvrstimo u (6.34) dobivamo (6.33) čime je teorem dokazan. □

# 6.3. Vektorski prostori. Rang matrice

## 6.3.1. Linearna nezavisnost vektora

***Linearno nezavisni vektori***. Za skup od $m$ vektora $\mathbf{x}_i$, $(i = 1, \ldots, m)$, koji imaju $n$ komponenti

$$\mathbf{x}_i = [x_{1i} \;\; x_{2i} \;\; \cdots \;\; x_{ni}]^T \tag{6.39}$$

kažemo da je *linearno nezavisan* ako ne postoji skup konstanti $k_1, k_2, \ldots, k_m$ (od kojih je barem jedan različit od nule) takav da

$$k_1\mathbf{x}_1 + k_2\mathbf{x}_2 + \cdots + k_m\mathbf{x}_m = \mathbf{0}. \tag{6.40}$$

Ako postoje konstante $k_1, k_2, \ldots, k_m$ (od kojih je barem jedan različit od nule) takve da je izraz (6.40) zadovoljen, tada kažemo da su vektori $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m$ *linearno zavisni*. Vektori $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m$ mogu biti linearno nezavisni samo ako je broj vektora $m$ manji ili jednak dimenziji vektorskog prostora $n$, odnosno $m \leq n$.

***Rang matrice***. Formirajmo matricu čiji su stupci jednaki vektorima $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m$,

$$\mathbf{H} = [\mathbf{x}_1 \;\; \mathbf{x}_2 \;\; \cdots \;\; \mathbf{x}_m] = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nm} \end{bmatrix} \tag{6.41}$$

gdje je $m \leq n$. Kažemo da matrica $\mathbf{H}$ ima rang $r$ ako ima $r$ linearno nezavisnih stupaca (odnosno vektora $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m$). Na ovaj način je ispitivanje linearne nazivisnosti vektora $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m$ ekvivalentno ispitivanju ranga matrice $\mathbf{H}$. Stoga, da bi skup vektora $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m$ bio linearno nezavisan, rang matrice $\mathbf{H}$ mora biti jednak $m$.

***Gramian (Gramova determinanta)***. Da bi konkretno utvrdili linearnu (ne)zavisnost vektora $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m$, trebamo odrediti konstante $k_1, k_2, \ldots, k_m$. Navedene konstante možemo odrediti sukcesivnim množenjem jednadžbe (6.40) sa vektorima $\mathbf{x}_i^T$, $(i = 1, \ldots, m)$,

$$\begin{aligned} &k_1\left(\mathbf{x}_1^T\mathbf{x}_1\right) + k_2\left(\mathbf{x}_1^T\mathbf{x}_2\right) + \cdots + k_m\left(\mathbf{x}_1^T\mathbf{x}_m\right) = 0, \\ &k_1\left(\mathbf{x}_2^T\mathbf{x}_1\right) + k_2\left(\mathbf{x}_2^T\mathbf{x}_2\right) + \cdots + k_m\left(\mathbf{x}_2^T\mathbf{x}_m\right) = 0, \\ &\vdots \\ &k_1\left(\mathbf{x}_m^T\mathbf{x}_1\right) + k_2\left(\mathbf{x}_m^T\mathbf{x}_2\right) + \cdots + k_m\left(\mathbf{x}_m^T\mathbf{x}_m\right) = 0. \end{aligned} \tag{6.42}$$

Navedeni sustav homogenih linearnih jednadžbi možemo prikazati u matričnom obliku

$$\mathbf{G}\mathbf{k} = \mathbf{0}, \tag{6.43}$$

gdje je $\mathbf{k} = [k_1 \;\; k_2 \;\; \cdots \;\; k_m]^T$, dok je

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} (\mathbf{x}_1^T\mathbf{x}_1) & (\mathbf{x}_1^T\mathbf{x}_2) & \cdots & (\mathbf{x}_1^T\mathbf{x}_m) \\ (\mathbf{x}_2^T\mathbf{x}_1) & (\mathbf{x}_2^T\mathbf{x}_2) & \cdots & (\mathbf{x}_2^T\mathbf{x}_m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\mathbf{x}_m^T\mathbf{x}_1) & (\mathbf{x}_m^T\mathbf{x}_2) & \cdots & (\mathbf{x}_m^T\mathbf{x}_m) \end{bmatrix}. \tag{6.44}$$

Sustav homogenih linearnih jednadžbi (6.43) ima netrivijalno riješenje za koeficijentima $k_1, k_2, \ldots, k_m$ jedino ako determinanta

$$G = \det(\mathbf{G}) = 0, \tag{6.45}$$

iščezava. Navedena determinanta naziva se *Gramian* ili *Gramova determinanta*. Dakle, ako su vektori $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m$ linearno zavisni, tada je Gramian jednak nuli.

***Baza vektorskog prostora.*** Ako imamo skup od $n$ linearno nezavisnih vektora $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ unutar $n$-dimenzionalnog vektorskog prostora, tada te vektore možemo iskoristiti kao bazu tog vektorskog prostora. Drugim riječima, svaki vektor $\mathbf{y}$ tog vektorskog prostora možemo na jedinstven način prikazati kao linearnu kombinaciju baznih vektora $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$,

$$\mathbf{y} = k_1\mathbf{x}_1 + k_2\mathbf{x}_2 + \cdots + k_n\mathbf{x}_n. \tag{6.46}$$

Stoga, dimenzija vektorskog prostora definirana je maksimalnim brojem linearno nezavisnih vektora unutar tog vektorskog prostora.

***Ortonormirana baza vektorskog prostora.*** Ako $n$-dimenzionalni vektori $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$, osim linearne nezavisnosti zadovoljavaju svojstvo

$$\mathbf{x}_i^T\mathbf{x}_j = \delta_{ij}, \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n, \tag{6.47}$$

gdje je $\delta_{ij}$ Kroneckerov delta simbol,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ako je} \;\; i = j \\ 0 & \text{ako je} \;\; i \neq j \end{cases} \tag{6.48}$$

kažemo da su vektori *ortonormirani* (ortogonalni i normirani).

***Recipročna baza vektorskog prostora.*** Pretpostavimo da imamo bazu vektorskog prostora $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$. Skup linearno nezavisnih vektora $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_n$ nazivamo *recipročnom bazom* ako vrijedi

$$\mathbf{r}_i^T \mathbf{x}_j = \delta_{ij}, \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n. \tag{6.49}$$

U slučaju kada je baza $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ ortonormirana tada je recipročna baza jednaka originalnoj bazi, $\mathbf{r}_i = \mathbf{x}_i$.

***Dekompozicija vektora po bazi vektorskog prostora.*** Da bi prikazali neki vektor kao linearnu kombinaciju baznih vektora, moramo odrediti koeficijente $k_1, k_2, \ldots, k_n$ izraza (6.46).

*Slučaj 1: Ortonormirana baza.* Ako je baza ortonormirana, tada sukcesivnim množenjem izraza (6.46) sa $\mathbf{x}_i^T$, $i = 1, \ldots, n$ dobivamo

$$k_i = \mathbf{x}_i^T \mathbf{y}. \tag{6.50}$$

Uvrstimo li (6.50) u (6.46) dobivamo slijedeću dekompoziciju vektora $\mathbf{y}$

$$\mathbf{y} = \left(\mathbf{x}_1^T \mathbf{y}\right) \mathbf{x}_1 + \left(\mathbf{x}_2^T \mathbf{y}\right) \mathbf{x}_2 + \cdots + \left(\mathbf{x}_n^T \mathbf{y}\right) \mathbf{x}_n = \sum_{i=1}^{n} \left(\mathbf{x}_i^T \mathbf{y}\right) \mathbf{x}_i. \tag{6.51}$$

*Slučaj 2: Primjena recipročne baze.* Ako baza $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ nije ortonormirana ali je poznata recipročna baza, tada sukcesivnim množenjem izraza (6.46) sa $\mathbf{r}_i^T$, $i = 1, \ldots, n$ dobivamo

$$k_i = \mathbf{r}_i^T \mathbf{y}. \tag{6.52}$$

Uvrstimo li (6.52) u (6.46) dobivamo slijedeću dekompoziciju vektora $\mathbf{y}$

$$\mathbf{y} = \left(\mathbf{r}_1^T \mathbf{y}\right) \mathbf{x}_1 + \left(\mathbf{r}_2^T \mathbf{y}\right) \mathbf{x}_2 + \cdots + \left(\mathbf{r}_n^T \mathbf{y}\right) \mathbf{x}_n = \sum_{i=1}^{n} \left(\mathbf{r}_i^T \mathbf{y}\right) \mathbf{x}_i. \tag{6.53}$$

*Slučaj 3: Primjena Gramove matrice.* Ako baza $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ nije ortonormirana tada sukcesivnim množenjem izraza (6.46) sa $\mathbf{x}_i^T$, $i = 1, \ldots, n$ dobivamo

$$\begin{bmatrix} \left(\mathbf{x}_1^T \mathbf{y}\right) \\ \left(\mathbf{x}_2^T \mathbf{y}\right) \\ \vdots \\ \left(\mathbf{x}_n^T \mathbf{y}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\mathbf{x}_1^T \mathbf{x}_1\right) & \left(\mathbf{x}_1^T \mathbf{x}_2\right) & \cdots & \left(\mathbf{x}_1^T \mathbf{x}_n\right) \\ \left(\mathbf{x}_2^T \mathbf{x}_1\right) & \left(\mathbf{x}_2^T \mathbf{x}_2\right) & \cdots & \left(\mathbf{x}_2^T \mathbf{x}_n\right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\mathbf{x}_n^T \mathbf{x}_1\right) & \left(\mathbf{x}_n^T \mathbf{x}_2\right) & \cdots & \left(\mathbf{x}_n^T \mathbf{x}_n\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix}. \tag{6.54}$$

S obzirom da su vektori $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ linearno nezavisni, Gramova matrica $\mathbf{G}$ je nesingularna, što znači da ju možemo invertirati te naći vektor $\mathbf{k} = [k_1 \;\; k_2 \;\; \cdots \;\; k_n]^T$.

## 6.4. Definicije i svojstva vektorskih normi

Navodimo neke osnovne definicije i rezultate vezane uz norme vektora.

Norma vektora $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ je funkcija koja preslikava vektorski prostor $\mathbb{R}^n$ u prostor nenegativnih realnih brojeva $\mathbb{R}_+$, odnosno $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$. Funkcija $\|\cdot\|$ naziva se vektorska norma ako vrijede slijedeća svojstva

1. $\|\mathbf{x}\| \geq 0, \quad \forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$
2. $\|\mathbf{x}\| = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{0}$
3. $\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha|\, \|\mathbf{x}\|, \quad \forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R}$
4. $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|, \quad \forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ (nejednakost trokuta)

Nadalje, vrijedi slijedeće svojstvo vektorskih normi

$$\|\mathbf{x}^T\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\|\, \|\mathbf{y}\|. \tag{6.55}$$

Moguće su različite definicije normi koje zadovoljavaju navedena svojstva, međutim u ovom radu su posebno interesantne tzv. $L_p$ norme vektora koje su definirane slijedećim izrazom

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left( \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \geq 1 \tag{6.56}$$

gdje je $\mathbf{x} = [x_1 \;\; x_2 \;\; \cdots \;\; x_n]^T$.

U specijalnom slučaju za $p = 1$ dobivamo $L_1$ normu vektora

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|. \tag{6.57}$$

Za $p = 2$ dobivamo $L_2$ ili Euklidsku normu vektora

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}, \tag{6.58}$$

koja se, s obzirom da se najčešće koristi, označava bez indeksa $\|\mathbf{x}\|_2 = \|x\|$. Nadalje, za $p = \infty$ dobivamo $L_\infty$ normu vektora

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_i |x_i|. \tag{6.59}$$

Označavanje $\|\mathbf{x}\|_\infty$ je opravdano jer vrijedi

$$\lim_{p\to\infty} \|\mathbf{x}\|_p = \max_i |x_i|. \tag{6.60}$$

Za navedene norme vrijede slijedeće međusobne relacije

$$\|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_1 \leq n\ \|\mathbf{x}\|_\infty, \tag{6.61}$$

$$\|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_2 \leq \sqrt{n}\ \|\mathbf{x}\|_\infty, \tag{6.62}$$

$$\|\mathbf{x}\|_2 \leq \|\mathbf{x}\|_1 \leq \sqrt{n}\ \|\mathbf{x}\|_2. \tag{6.63}$$

## 6.5. Svojstva kvadratnih formi

### 6.5.1. Definicije kvadratnih formi

Polinom slijedećeg oblika

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}, \tag{6.64}$$

gdje je $\mathbf{x} = [x_1\ x_2\ ...\ x_n]^T$ i $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n\times n}$ simetrična matrica, naziva se kvadratna forma po varijablama $x_1, x_2, ..., x_n$.

Realna kvadratna forma $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ (matrica $\mathbf{A}$) je:

- *pozitivno definitna* ako i samo ako je $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} > 0, \quad \forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$
- *pozitivno semidefinitna* ako i samo ako je $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} \geq 0, \quad \forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$
- *negativno definitna* ako i samo ako je $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} < 0, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$
- *negativno semidefinitna* ako i samo ako je $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} \leq 0, \quad \forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

***Kriterij pozitivne definitnosti matrice - Sylvesterov teorem***. Algebarski kriterij pozitivne definitnosti matrice $\mathbf{A}$ daje nam Sylvesterov teorem: sve vodeće subdeterminante (*leading principal minors*) matrice $\mathbf{A}$, moraju biti pozitivne

$$\Delta_1 = a_{11} > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0, \quad \dots \quad \Delta_n > 0,$$

gdje je $\Delta_n = \det(\mathbf{A})$. Navedeni uvjet ekvivalentan je zahtijevu da svojstvene vrijednosti matrice $\mathbf{A}$ budu pozitivne.

***Kriterij negativne definitnosti matrice A.*** Algebarski kriterij negativne definitnosti matrice $\mathbf{A}$ je slijedeći: vodeće subdeterminante matrice $\mathbf{A}$, moraju zadovoljavati: $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 < 0$, ... ,$(-1)^n \Delta_n > 0$.

## 6.5.2. Svojstva realnih simetričnih matrica

***Svojstvene vrijednosti simetrične matrice***. Svojstvene vrijednosti realne simetrične matrice $\mathbf{A}$ su realne.

*Dokaz.* Dokaz je zasnovan na principu kontradikcije. Pretpostavimo da su svojstvene vrijednosti kompleksne. U tom slučaju svojstvene vrijednosti (i svojstveni vektori) javljaju se u konjugirano kompleksnim parovima, $\lambda = \sigma + j\omega$, $\lambda^* = \sigma - j\omega$. Stoga slijedi: $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$ i $\mathbf{Ax}^* = \lambda^*\mathbf{x}^*$. Pomnožimo li prvu jednadžbu (s lijeve strane) sa $(\mathbf{x}^*)^T$ a transponirani oblik druge jednadžbe (s desne strane) sa $\mathbf{x}$, dobivamo:

$$(\mathbf{x}^*)^T \mathbf{Ax} = \lambda(\mathbf{x}^*)^T \mathbf{x} = \lambda\|\mathbf{x}\|^2,$$

$$(\mathbf{x}^*)^T \mathbf{A}^T \mathbf{x} = \lambda^*(\mathbf{x}^*)^T \mathbf{x} = \lambda^*\|\mathbf{x}\|^2.$$

Oduzimanjem prethodnih jednadžbi, imajući u vidu uvjet simetričnosti, $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$, dobivamo

$$(\lambda - \lambda^*)\|\mathbf{x}\|^2 = 0.$$

S obzirom da je $\|\mathbf{x}\|^2 \neq 0$, slijedi $\lambda = \lambda^*$, što je moguće samo ako je imaginarni dio kompleksnog broja jednak nuli, odnosno ako je $\lambda$ realan broj. □

***Svojstvene vrijednosti pozitivno-definitne simetrične matrice***. Svojstvene vrijednosti realne pozitivno-definitne simetrične matrice $\mathbf{A}$ su pozitivne.

*Dokaz.* Neka je $\lambda_i$ svojstvena vrijednost matrice $\mathbf{A}$ dok je $\mathbf{u}_i$ pripadajući svojstveni vektor, odnosno: $\mathbf{Au}_i = \lambda_i \mathbf{u}_i$. Pomnožimo li navedenu jednadžbu (s lijeve strane) sa $\mathbf{u}_i^T$ dobivamo

$$\mathbf{u}_i^T \mathbf{Au}_i = \lambda_i \mathbf{u}_i^T \mathbf{u}_i = \lambda_i \|\mathbf{u}_i\|^2.$$

S obzirom da je $\mathbf{A}$ pozitivno-definitna, $\mathbf{u}_i^T \mathbf{Au}_i \geq 0$, te da vrijedi $\|\mathbf{u}_i\|^2 \geq 0$, direktno slijedi da mora biti zadovoljeno $\lambda_i > 0$. □

***Svojstveni vektori simetrične matrice***. Svojstveni vektori realne simetrične matrice $\mathbf{A}$ međusobno su ortogonalni.

*Dokaz.* Neka su $\lambda_i$ i $\lambda_j$ dvije različite svojstvene vrijednosti matrice $\mathbf{A}$ dok su $\mathbf{u}_i$ i $\mathbf{u}_j$ pripadajući svojstveni vektori. Stoga vrijedi: $\mathbf{A}\mathbf{u}_i = \lambda_i \mathbf{u}_i$ i $\mathbf{A}\mathbf{u}_j = \lambda_j \mathbf{u}_j$. Ako prvu jednadžbu transponiramo i pomnožimo (s desne strane) sa $\mathbf{u}_j$, dobivamo

$$\mathbf{u}_i^T \mathbf{A}^T \mathbf{u}_j = \lambda_i \mathbf{u}_i^T \mathbf{u}_j.$$

Nadalje ako drugu jednadžbu pomnožimo (s lijeve strane) sa $\mathbf{u}_i^T$, dobivamo

$$\mathbf{u}_i^T \mathbf{A} \mathbf{u}_j = \lambda_j \mathbf{u}_i^T \mathbf{u}_j.$$

Imajući u vidu uvjet simetričnosti, $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$, oduzimanjem prethodnih jednadžbi dobivamo

$$(\lambda_j - \lambda_i)\mathbf{u}_i^T \mathbf{u}_j = 0.$$

S obzirom da vrijedi $\lambda_j \neq \lambda_i$ slijedi

$$\mathbf{u}_i^T \mathbf{u}_j = 0,$$

čime smo dokazali da svojstveni vektori simetrične matrice (s jednostrukim svojstvenim vrijednostima) formiraju ortogonalnu bazu $n$-dimenzionalnog vektorskog prostora. □

Ako ortogonalne svojstvene vektore normiramo, dobivamo ortonormirane vektore

$$\hat{\mathbf{u}}_i = \frac{\mathbf{u}_i}{\|\mathbf{u}_i\|},$$

koji su također rješenje svojstvene jednadžbe $\mathbf{A}\hat{\mathbf{u}}_i = \lambda_i \hat{\mathbf{u}}_i$.

***Modalna matrica pozitivno-definitne simetrične matrice.*** Modalna matrica $\mathbf{P}$ pozitivno-definitne simetrične matrice $\mathbf{A}$ je ortogonalna matrica, odnosno $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^T$.

*Dokaz.* Modalnu matricu pozitivno-definitne simetrične matrice formiramo od ortonormiranih svojstvenih vektora matrice $\mathbf{A}$

$$\mathbf{P} = [\hat{\mathbf{u}}_1 \;\; \hat{\mathbf{u}}_2 \;\; \cdots \;\; \hat{\mathbf{u}}_n] \tag{6.65}$$

Na osnovu navedene definicije modalne matrice, treba provjeriti da li vrijedi svojstvo ortogonalne matrice $\mathbf{P}^T\mathbf{P} = \mathbf{I}$. Dobivamo

$$\mathbf{P}^T\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_1^T \\ \hat{\mathbf{u}}_2^T \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{u}}_n^T \end{bmatrix} [\hat{\mathbf{u}}_1 \;\; \hat{\mathbf{u}}_2 \;\; \cdots \;\; \hat{\mathbf{u}}_n] = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_1^T\hat{\mathbf{u}}_1 & \hat{\mathbf{u}}_1^T\hat{\mathbf{u}}_2 & \cdots & \hat{\mathbf{u}}_1^T\hat{\mathbf{u}}_n \\ \hat{\mathbf{u}}_2^T\hat{\mathbf{u}}_1 & \hat{\mathbf{u}}_2^T\hat{\mathbf{u}}_2 & \cdots & \hat{\mathbf{u}}_2^T\hat{\mathbf{u}}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\mathbf{u}}_n^T\hat{\mathbf{u}}_1 & \hat{\mathbf{u}}_n^T\hat{\mathbf{u}}_2 & \cdots & \hat{\mathbf{u}}_n^T\hat{\mathbf{u}}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

iz čega zaključujemo da je $\mathbf{P}$ ortogonalna matrica. □

***Transformacija kongruencije (congruent transformation)***. S obzirom da je modalna matrica pozitivno-definitne simetrične matrice ortogonalna, slijedi da dijagonalizaciju matrice $\mathbf{A}$, primjenom transformacije sličnosti $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{\Lambda}$, možemo prikazati na slijedeći način

$$\mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{\Lambda}, \tag{6.66}$$

jer vrijedi $\mathbf{P}^T = \mathbf{P}^{-1}$. Transformacija (6.66) naziva se *transformacija kongruencije* (*congruent transformation*).

### 6.5.3. Dijagonalizacija kvadratne forme

Kvadratnu formu $Q = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$, gdje je $\mathbf{A}$ pozitivno-definitna simetrična matrica, moguće je transformirati u oblik linearne kombinacije kvadratnih članova (bez nedefinitnih članova) pomoću linearne transformacije $\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{y}$, gdje je $\mathbf{P}$ ortogonalna modalna matrica (6.65). Primjenimo li navedenu transformaciju, dobivamo

$$Q = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}^T\mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{y} = \mathbf{y}^T\mathbf{\Lambda}\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i y_i^2, \tag{6.67}$$

gdje su $\lambda_i$ pozitivne svojstvene vrijednosti matrice $\mathbf{A}$.

***Ocjena kvadratne forme***. Ako su $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ vlastite vrijednosti realne simetrične matrice $\mathbf{A}$, dok su

$$\lambda_m\{\mathbf{A}\} = \min\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}, \qquad \lambda_M\{\mathbf{A}\} = \max\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\},$$

minimalna i maksimalna svojstvena vrijednost matrice $\mathbf{A}$, tada za svaki realni vektor $x$ vrijedi

$$\lambda_m\{\mathbf{A}\}\|\mathbf{x}\|^2 \leq \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \lambda_M\{\mathbf{A}\}\|\mathbf{x}\|^2 \tag{6.68}$$

gdje je $\|\mathbf{x}\|^2 = \mathbf{x}^T\mathbf{x}$ kvadrat Euklidske $L_2$ norme vektora.

*Dokaz.* Transformacija $\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{y}$, gdje je $\mathbf{P}$ ortogonalna modalna matrica (6.65), ima svojstvo

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \mathbf{x}^T\mathbf{x} = \mathbf{y}^T\mathbf{P}^T\mathbf{P}\mathbf{y} = \mathbf{y}^T\mathbf{y} = \|\mathbf{y}\|^2, \tag{6.69}$$

gdje smo iskoristili svojstvo unitarne matrice $\mathbf{P}^T\mathbf{P} = \mathbf{I}$. Nadalje, na osnovu (6.67) slijede nejednakosti

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i y_i^2 \leq \lambda_M\{\mathbf{A}\}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \lambda_M\{\mathbf{A}\}\|\mathbf{y}\|^2, \tag{6.70}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 \geq \lambda_m\{\mathbf{A}\} \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \lambda_m\{\mathbf{A}\}\|\mathbf{y}\|^2, \tag{6.71}$$

odnosno

$$\lambda_m\{\mathbf{A}\}\|\mathbf{y}\|^2 \leq \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}^T\mathbf{\Lambda}\mathbf{y} \leq \lambda_M\{\mathbf{A}\}\|\mathbf{y}\|^2. \tag{6.72}$$

Uvrstimo li u prethodni izraz jednakost $\|\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2$ koja proizlazi iz (6.69), dobivamo

$$\lambda_m\{\mathbf{A}\}\|\mathbf{x}\|^2 \leq \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \lambda_M\{\mathbf{A}\}\|\mathbf{x}\|^2, \tag{6.73}$$

čime smo dokazali ocjenu kvadratne forme (6.68). □

### 6.5.4. Schurova lema

Matrična nejednažba

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{C} \end{bmatrix} \geq 0, \tag{6.74}$$

ekvivalentna je slijedećim matričnim nejednadžbama

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &\geq 0, \\ \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^T &\geq 0. \end{aligned} \tag{6.75}$$

## 6.6. Inducirana norma matrice

Induciranu normu matrice definiramo indirektno preko norme vektora. Pretpostavimo da imamo ovisnost dva vektora preko linearne transformacije, $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Kvadrat norme vektora $\mathbf{y}$ jednak je

$$\|\mathbf{y}\|^2 = \mathbf{y}^T\mathbf{y} = \mathbf{x}^T\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \lambda_M\left\{\mathbf{A}^T\mathbf{A}\right\}\|\mathbf{x}\|^2, \tag{6.76}$$

odnosno

$$\|\mathbf{y}\| \leq \sqrt{\lambda_M\left\{\mathbf{A}^T\mathbf{A}\right\}}\|\mathbf{x}\|. \tag{6.77}$$

Ako sa $\|\mathbf{A}\|_2$ označimo tzv. $L_2$ *induciranu normu matrice* $\mathbf{A}$

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{\lambda_M\left\{\mathbf{A}^T\mathbf{A}\right\}}, \tag{6.78}$$

imamo

$$\|\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{A}\|_2\|\mathbf{x}\|. \tag{6.79}$$

***Definicija inducirane norme matrice***. Pojam inducirane matrične norme možemo generalizirati za proizvoljnu vektorsku $L_p$ normu. Ako imamo linearno preslikavanje $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, tada inducirana matrična $L_p$ norma mora zadovoljavati

$$\|\mathbf{y}\|_p \leq \|\mathbf{A}\|_p \|\mathbf{x}\|_p. \tag{6.80}$$

Induciranu matričnu normu možemo shvatiti kao maksimalno "pojačanje" linearnog operatora definiranog matricom $\mathbf{A}$. Na osnovu prethodnog izraza možemo postaviti slijedeću definiciju

$$\|\mathbf{A}\|_p = \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_p}{\|\mathbf{x}\|_p} \tag{6.81}$$

Navedena definicija može se pojednostaviti na slijedeći način. Uvedimo normirani vektor

$$\hat{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{\alpha}, \qquad \alpha = \|\mathbf{x}\|,$$

tako da je $\mathbf{x} = \alpha\hat{\mathbf{x}}$. Uvrstimo li navedeni izraz za $\mathbf{x}$ u (6.81), dobivamo

$$\|\mathbf{A}\|_p = \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{A}\alpha\hat{\mathbf{x}}\|_p}{\|\alpha\hat{\mathbf{x}}\|_p} = \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{|\alpha|\,\|\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}\|_p}{|\alpha|\,\|\hat{\mathbf{x}}\|_p} = \sup_{\hat{\mathbf{x}} \neq \mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}\|_p}{\|\hat{\mathbf{x}}\|_p}. \tag{6.82}$$

S obzirom da je, po definiciji, $\|\hat{\mathbf{x}}\|_p = 1$, definiciju (6.81) možemo prikazati na slijedeći način

$$\|\mathbf{A}\|_p = \sup_{\|\mathbf{x}\|_p = 1} \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_p. \tag{6.83}$$

Ako je $p = 2$ imamo $L_2$ normu, i određivanje inducirane norme po definiciji (6.83) možemo shvatiti kao maksimizaciju norme $\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|$ po jediničnoj kružnici $\|\mathbf{x}\| = 1$.

***Standardne matrične inducirane norme***. Najčešće korišćene matrične inducirane norme su $L_1$, $L_2$ i $L_\infty$ norme definirane na slijedeći način:

$L_1$ norma definirana je sa

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|, \tag{6.84}$$

odnosno, kao maksimum sume elemenata po stupcima (*max column sum*).

$L_2$ norma definirana je sa

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{\lambda_M \left\{\mathbf{A}^T\mathbf{A}\right\}}, \tag{6.85}$$

odnosno, kao korijen maksimalne svojstvene vrijednosti matrice $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$.

Tablica 6.1: Vektorske norme i odgovarajuće inducirane matrične norme

| $p$ | Vektorska norma | Inducirana matrična norma |
|---|---|---|
| 1 | $\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|$ | $\|\mathbf{A}\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{n} \|a_{ij}\|$ |
| 2 | $\|\mathbf{x}\|_2 = \left( \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 \right)^{1/2}$ | $\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{\lambda_M \left\{ \mathbf{A}^T \mathbf{A} \right\}}$ |
| $\infty$ | $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_i \|x_i\|$ | $\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} \|a_{ij}\|$ |

$L_\infty$ norma definirana je sa

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|. \tag{6.86}$$

odnosno, kao maksimum sume elemenata po retcima (*max row sum*).

U tablici 6.1 prikazane su usporedno vektorske norme i odgovarajuće matrične inducirane norme

***Svojstva induciranih matričnih normi.*** Inducirane matrične norme općenito zadovoljavaju slijedeća svojstva

- $\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_p \leq \|\mathbf{A}\|_p \, \|\mathbf{x}\|_p, \qquad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$
- $\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\|_p \leq \|\mathbf{A}\|_p + \|\mathbf{B}\|_p$
- $\|\mathbf{A}\mathbf{B}\|_p \leq \|\mathbf{A}\|_p \, \|\mathbf{B}\|_p$

gdje su matrice $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ odgovarajućih dimenzija.

U analizi stabilnosti najčešće se koristi $L_2$ inducirana norma. Međutim, konkretno izračunavanje $L_2$ inducirane norme bitno je složenije od izračunavanja $L_1$ i $L_\infty$ inducirane norme. Stoga su od interesa veze među različitim induciranim normama, koje omogućavaju jednostavniju ocjenu $L_2$ inducirane norme. Jedna takva veza dana je slijedećim izrazom

$$\|\mathbf{A}\|_2 \leq \sqrt{\|\mathbf{A}\|_1 \, \|\mathbf{A}\|_\infty} \tag{6.87}$$

***Inducirana $L_2$ norma simetrične matrice.***

U Lyapunovljevoj analizi stabilnosti često nailazimo na induciranu $L_2$ normu simetrične pozitivno-definitne matrice $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0$. Na osnovu definicije slijedi

$$\|\mathbf{P}\|_2 = \sqrt{\lambda_M \left\{\mathbf{P}^T\mathbf{P}\right\}} = \sqrt{\lambda_M \left\{\mathbf{P}^2\right\}} = \lambda_M \left\{\mathbf{P}\right\}, \tag{6.88}$$

gdje smo iskoristili svojstvo $\lambda_M \left\{\mathbf{P}^2\right\} = (\lambda_M \left\{\mathbf{P}\right\})^2$ koje proizlazi iz

$$\mathbf{P}^2\mathbf{u}_i = \mathbf{P}(\mathbf{P}\mathbf{u}_i) = \mathbf{P}(\lambda_i\mathbf{u}_i) = \lambda_i(\mathbf{P}\mathbf{u}_i) = \lambda_i(\lambda_i\mathbf{u}_i) = \lambda_i^2\mathbf{u}_i. \tag{6.89}$$

Dakle, inducirana $L_2$ norma simetrične pozitivno-definitne matrice $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T$ jednaka je maksimalnoj svojstvenoj vrijednosti matrice,

$$\|\mathbf{P}\|_2 = \lambda_M \left\{\mathbf{P}\right\}, \tag{6.90}$$

Na osnovu navedenog svojstva simetrične pozitivno-definitne matrice, možemo direktno izvesti ocjenu kvadratne forme $\mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{x}$,

$$\mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{x} \leq \|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{P}\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{P}\|_2 \, \|\mathbf{x}\| = \lambda_M \left\{\mathbf{P}\right\} \|\mathbf{x}\|^2. \tag{6.91}$$

# 6.7. $\mathcal{L}_p$ vektorski prostori funkcija

U ovom poglavlju proširujemo pojam vektorskih prostora na pojam tzv. "funkcijskih prostora" ili *vektorskih prostora funkcija*. Za razliku od "klasičnih" vektorskih prostora gdje vektore tretiramo kao orijentirane duljine unutar $n$-dimenzionalnog prostora, vektori funkcijskih prostora su funkcije koje zadovoljavaju određena svojstva.

## 6.7.1. Normirani vektorski prostori funkcija

Norma funkcije analogna je pojmu duljine vektora. S obzirom da razmatrane funkcije imaju argument vrijeme $t \in [0, \infty\rangle$, definicija norme funkcija sadrži integraciju preko navedenog vremenskog intervala.

***$\mathcal{L}_p^n$ norma funkcije***. $\mathcal{L}_p^n$ norma funkcije $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ definirana je slijedećim izrazom

$$\|\mathbf{x}(t)\|_{\mathcal{L}_p} = \left(\int_0^\infty \|\mathbf{x}(t)\|^p dt\right)^{1/p}. \tag{6.92}$$

Indeks $p$ u $\mathcal{L}_p^n$ odnosi se na $p$-normu kojom definiramo funkcijski prostor, dok se indeks $n$ u $\mathcal{L}_p^n$ odnosi na dimenziju vektorske funkcije $\mathbf{x}(t)$. Ako je jasno iz konteksta, neki indeksi se mogu ispustiti, tako da se koriste i oznake $\mathcal{L}_p$, $\mathcal{L}^n$ ili samo $\mathcal{L}$.

Da bi razlikovali normu funkcije $\|\mathbf{x}(t)\|_{\mathcal{L}_p}$ od vektorske norme $\|\mathbf{x}(t)\|$ uveli smo subscript $\mathcal{L}_p$ koji se u literaturi često izostavlja, odnosno koristi se notacija $\|\mathbf{x}(t)\|_p$ što može izazvati konfuziju sa običnom vektorskom $L_p$ normom. Vektorska norma $\|\mathbf{x}(t)\|$ u definiciji (6.92) može biti bilo koja $L_p$ vektorska norma.

Kao i kod vektorskih normi, najčešće se koriste $\mathcal{L}_2$ i $\mathcal{L}_\infty$ funkcijske norme.

***$\mathcal{L}_2$ norma funkcije.*** $\mathcal{L}_2$ norma funkcije $\mathbf{x}(t)$ definirana je slijedećim izrazom

$$\|\mathbf{x}(t)\|_{\mathcal{L}_2} = \left( \int_0^\infty \|\mathbf{x}(t)\|^2 dt \right)^{1/2} = \sqrt{\int_0^\infty \mathbf{x}(t)^T \mathbf{x}(t) dt}. \tag{6.93}$$

Ako neki signal $\mathbf{x}(t)$ ima konačnu $\mathcal{L}_2$ normu, $\|\mathbf{x}(t)\|_{\mathcal{L}_2} < \infty$, kažemo da je $\mathbf{x}(t)$ element $\mathcal{L}_2$ vektorskog prostora funkcija, odnosno

$$\mathbf{x}(t) \in \mathcal{L}_2. \tag{6.94}$$

Fizikalno značenje činjenice $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{L}_2$ je da signal $\mathbf{x}(t)$ ima konačnu energiju.

***$\mathcal{L}_\infty$ norma funkcije.*** $\mathcal{L}_\infty$ norma funkcije $\mathbf{x}(t)$ definirana je slijedećim izrazom

$$\|\mathbf{x}(t)\|_{\mathcal{L}_\infty} = \sup_{t \geq 0} \|\mathbf{x}(t)\|. \tag{6.95}$$

Ako neki signal $\mathbf{x}(t)$ ima konačnu $\mathcal{L}_\infty$ normu, $\|\mathbf{x}(t)\|_{\mathcal{L}_\infty} < \infty$, kažemo da je $\mathbf{x}(t)$ element $\mathcal{L}_\infty$ vektorskog prostora funkcija, odnosno

$$\mathbf{x}(t) \in \mathcal{L}_\infty. \tag{6.96}$$

Fizikalno značenje činjenice $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{L}_\infty$ je da signal $\mathbf{x}(t)$ ima konačnu amplitudu za sve $t \geq 0$, odnosno signal $\mathbf{x}(t)$ je ograničen.

Navodimo bez dokaza neka bitna svojstva funkcijskih normi.

***Propozicija.*** Ako je $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_\infty$ ($\mathbf{x}(t)$ pripada i $\mathcal{L}_1$ i $\mathcal{L}_\infty$) tada je $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{L}_p$ za $1 \leq p \leq \infty$.

***Hölderova nejednakost.*** Ako su $p, q \in [1, \infty]$ i $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, tada za funkcije $f(t) \in \mathcal{L}_p$, $g(t) \in \mathcal{L}_q$ slijedi da je $f(t)g(t) \in \mathcal{L}_1$ i

$$\|f(t)g(t)\|_{\mathcal{L}_1} \leq \|f(t)\|_{\mathcal{L}_p} \|g(t)\|_{\mathcal{L}_q}. \tag{6.97}$$

Kada su $p = q = 2$, Hölderova nejednakost postaje Schwartzova nejednakost

$$\|f(t)g(t)\|_{\mathcal{L}_1} \leq \|f(t)\|_{\mathcal{L}_2} \|g(t)\|_{\mathcal{L}_2}. \tag{6.98}$$

Tablica 6.2: Pripadnost funkcija odgovarajućim $\mathcal{L}_p$ prostorima

| Funkcija | $\mathcal{L}_1$ | $\mathcal{L}_2$ | $\mathcal{L}_\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f_1 = \sin(3\,t)$ | $f_1 \notin \mathcal{L}_1$ | $f_1 \notin \mathcal{L}_2$ | $f_1 \in \mathcal{L}_\infty$ |
| $f_2 = e^{-t}\sin(3\,t)$ | $f_2 \in \mathcal{L}_1$ | $f_2 \in \mathcal{L}_2$ | $f_2 \in \mathcal{L}_\infty$ |
| $f_3 = \frac{1}{1+t}$ | $f_3 \notin \mathcal{L}_1$ | $f_3 \in \mathcal{L}_2$ | $f_3 \in \mathcal{L}_\infty$ |
| $f_4 = \frac{1+\sqrt[4]{t}}{\sqrt[4]{t}(1+t)}$ | $f_4 \notin \mathcal{L}_1$ | $f_4 \in \mathcal{L}_2$ | $f_4 \notin \mathcal{L}_\infty$ |
| $f_5 = \frac{1+\sqrt[4]{t}}{(1+t^2)\sqrt[4]{t}}$ | $f_5 \in \mathcal{L}_1$ | $f_5 \in \mathcal{L}_2$ | $f_5 \notin \mathcal{L}_\infty$ |
| $f_6 = \frac{1+\sqrt{t}}{(1+t^2)\sqrt{t}}$ | $f_6 \in \mathcal{L}_1$ | $f_6 \notin \mathcal{L}_2$ | $f_6 \notin \mathcal{L}_\infty$ |

***Nejednakost Minkowskog***. Za $p \in [1, \infty]$, $f(t), g(t) \in \mathcal{L}_p$, slijedi da je $f(t)+g(t) \in \mathcal{L}_p$ i

$$\|f(t) + g(t)\|_{\mathcal{L}_1} \leq \|f(t)\|_{\mathcal{L}_p} + \|g(t)\|_{\mathcal{L}_p}. \tag{6.99}$$

***Primjer***. Razmotrimo funkciju $x(t) = \frac{1}{1+t}$. Tada je

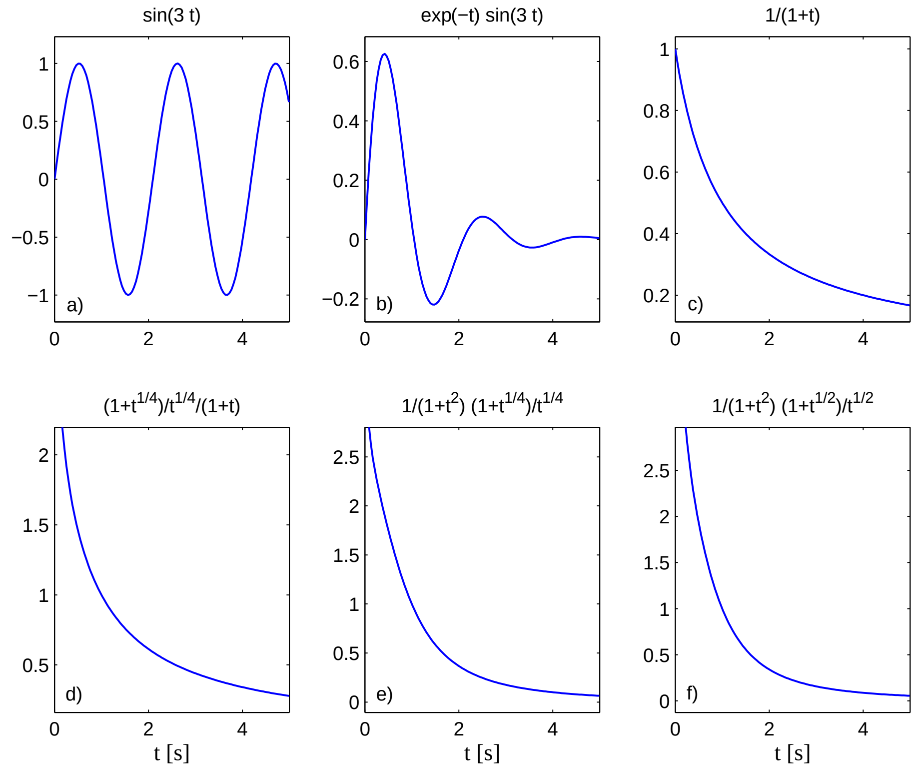
$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}(t)\|_{\mathcal{L}_\infty} &= \sup_{t\geq 0} \frac{1}{1+t} = 1, \\ \|\mathbf{x}(t)\|_{\mathcal{L}_2} &= \left(\int_0^\infty \frac{1}{(1+t)^2} dt\right)^{1/2} = 1, \\ \|\mathbf{x}(t)\|_{\mathcal{L}_1} &= \int_0^\infty \left|\frac{1}{1+t}\right| dt = \lim_{t\to\infty} \ln(1+t) \to \infty. \end{aligned}$$

Dakle, $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{L}_\infty$, $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{L}_2$ (odnosno $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{L}_2 \cap \mathcal{L}_\infty$) ali $\mathbf{x}(t) \notin \mathcal{L}_1$ jer $\mathcal{L}_1$ norma signala nije konačna. □

***Primjer***. U tablici 6.2 i slici 6.1 navodimo različite funkcije kao i njihovu pripadnost (odnosno ne-pripadnost) odgovarajućim $\mathcal{L}_p$ prostorima.

## 6.7.2. Prošireni $\mathcal{L}_{pe}$ prostori funkcija

U prethodno navedenim definicijama $\mathcal{L}_p$ prostora imamo integraciju po vremenu u intervalu od $[0, \infty]$. Direktna primjena tih definicija na dinamičke sustave može biti problematična zbog principa kauzalnosti - vrijednost izlaznih varijabli sustava u




Slika 6.1: (a) $f_1 = \sin(3\,t)$; (b) $f_2 = e^{-t}\sin(3\,t)$; (c) $f_3 = \frac{1}{1+t}$; (d) $f_4 = \frac{1+\sqrt[4]{t}}{\sqrt[4]{t}(1+t)}$; (e) $f_5 = \frac{1+\sqrt[4]{t}}{(1+t^2)\sqrt[4]{t}}$; (f) $f_6 = \frac{1+\sqrt{t}}{(1+t^2)\sqrt{t}}$

trenutku $t$ ovisi o vrijednostima ulaznih varijabli do trenutka $t$. Stoga se uvodi pojam tzv. proširenih prostora (*extended space*) $\mathcal{L}_{pe}$, definiranih sa

$$\mathcal{L}_{pe} = \{\mathbf{x}(t) \;\mid\; \mathbf{x}_\tau(t) \in \mathcal{L}_p, \;\; \forall\,\tau \in [0,\infty\rangle\} \tag{6.100}$$

gdje je $\mathbf{x}_\tau(t)$ tzv. odsječak (*truncation*) od $\mathbf{x}(t)$ definiran sa

$$\mathbf{x}_\tau(t) = \begin{cases} \mathbf{x}(t) & 0 \le t \le \tau \\ \mathbf{0} & t > \tau \end{cases} \tag{6.101}$$

Prošireni $\mathcal{L}_{pe}$ prostor sadrži $\mathcal{L}_p$ prostor kao podskup, $\mathcal{L}_p \subset \mathcal{L}_{pe}$. Navedena definicija proširenih prostora omogućuje tretiranje i neograničenih signala. Npr. signal $x(t) = t$ ne pripada skupu $\mathcal{L}_\infty$ ali njegov odsječak

$$x_\tau(t) = \begin{cases} t & 0 \le t \le \tau \\ 0 & t > \tau \end{cases} \tag{6.102}$$

pripada skupu $\mathcal{L}_\infty$ za svaki konačni $\tau$. Stoga, $x(t) = t$ pripada proširenom prostoru $\mathcal{L}_{\infty e}$.

Općenito je $\|\mathbf{x}_\tau(t)\|_{\mathcal{L}_p}$ rastuća funkcija od $\tau$ i vrijedi

$$\|\mathbf{x}(t)\|_{\mathcal{L}_p} = \lim_{\tau\to\infty} \|\mathbf{x}_\tau(t)\|_{\mathcal{L}_p} \tag{6.103}$$

kad god je $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{L}_p$.

# 7 Dodatak B: Linearne matrične jednadžbe

U ovom poglavlju razmatrat ćemo metode rješavanja linearnih matričnih jednadžbi općeg tipa

$$\mathbf{A}_1\mathbf{X}\mathbf{B}_1 + \mathbf{A}_2\mathbf{X}\mathbf{B}_2 + \ldots + \mathbf{A}_p\mathbf{X}\mathbf{B}_p = \mathbf{C}, \tag{7.1}$$

gdje su $\mathbf{A}_j \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $\mathbf{B}_j \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $(j = 1, 2, ..., p)$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ poznate matrice, a $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ nepoznata matrica.

Silvesterova matrična jednadžba

$$\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{B} = \mathbf{C}, \tag{7.2}$$

te Lyapunovljeva matrična jednadžba

$$\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} = -\mathbf{Q}, \tag{7.3}$$

gdje su $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ i $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ poznate matrice, a $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nepoznata matrica, predstavljaju specijalne slučajeve generalne matrične jednadžbe (7.1).

## 7.1. Kroneckerov produkt

### 7.1.1. Kroneckerov produkt matrica

Kroneckerov produkt matrica $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ i $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{p\times q}$ definiran je na slijedeći način

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{B} & a_{12}\mathbf{B} & \cdots & a_{1n}\mathbf{B} \\ a_{21}\mathbf{B} & a_{22}\mathbf{B} & \cdots & a_{2n}\mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}\mathbf{B} & a_{n2}\mathbf{B} & \cdots & a_{mn}\mathbf{B} \end{bmatrix} \tag{7.4}$$

gdje je $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{mp \times nq}$.

Za Kroneckerov produkt vrijede svojstva bilinearnosti i asocijativnosti

$$\begin{aligned}
&\mathbf{A} \otimes (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \otimes \mathbf{B} + \mathbf{A} \otimes \mathbf{C}, \\
&(\mathbf{B} + \mathbf{C}) \otimes \mathbf{A} = \mathbf{B} \otimes \mathbf{A} + \mathbf{C} \otimes \mathbf{A}, \\
&(k\mathbf{A}) \otimes \mathbf{B} = \mathbf{A} \otimes (k\mathbf{B}) = k(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}), \\
&\mathbf{A} \otimes (\mathbf{B} \otimes \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) \otimes \mathbf{C}.
\end{aligned} \tag{7.5}$$

Nadalje, vrijede slijedeća svojstva

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) = \mathbf{AC} \otimes \mathbf{BD}, \\
&(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \otimes \mathbf{B}^{-1}.
\end{aligned} \tag{7.6}$$

U slućaju kvadratnih matrica, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ i $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times m}$, vrijede slijdeća svojstva

$$\begin{aligned}
&\mathrm{tr}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) = \mathrm{tr}(\mathbf{A})\mathrm{tr}(\mathbf{B}), \\
&\det(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) = \det(\mathbf{A})^n \det(\mathbf{B})^m, \\
&\mathrm{rank}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) = \mathrm{rank}(\mathbf{A})\mathrm{rank}(\mathbf{B}), \\
&(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T \otimes \mathbf{B}^T.
\end{aligned} \tag{7.7}$$

### 7.1.2. Kroneckerova suma matrica

Ako su $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times m}$, te ako sa $\mathbf{I}_k \in \mathbb{R}^{k \times k}$ označimo jediničnu matricu dimenzije $k \times k$, tada možemo definirati Kroneckerovu sumu matrica na slijedeći način

$$\mathbf{A} \oplus \mathbf{B} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{I}_m + \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{B}. \tag{7.8}$$

Za Kroneckerovu sumu matrica imamo slijedeći matrični eksponencijal

$$e^{\mathbf{A} \oplus \mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}} \otimes e^{\mathbf{B}}. \tag{7.9}$$

### 7.1.3. Vektorizacija matrica

Vektorizacija matrice je transformacija matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ u vektor $\mathrm{vec}(\mathbf{A}) \in \mathbb{R}^{mn}$,

$$\mathrm{vec}(\mathbf{A}) = [a_{11} \ \ldots \ a_{m1} \ a_{12} \ \ldots \ a_{m2} \ \ldots a_{1n} \ \ldots \ a_{mn} \,]^T. \tag{7.10}$$

Za operator vektorizacije vrijedi standardno svojstvo linearnih operatora

$$\mathrm{vec}(\alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{B}) = \alpha\mathrm{vec}(\mathbf{A}) + \beta\mathrm{vec}(\mathbf{B}). \tag{7.11}$$

Slijedeća svojstva operatora vektorizacije matrice i Kroneckerovog produkta matrica su ključna za njihovu primjenu u rješavanju linearnih matričnih jednadžbi:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{vec}(\mathbf{AX}) = (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{A})\mathrm{vec}(\mathbf{X}),\\
&\mathrm{vec}(\mathbf{XB}) = (\mathbf{B}^T \otimes \mathbf{I}_m)\mathrm{vec}(\mathbf{X}),\\
&\mathrm{vec}(\mathbf{AX}+\mathbf{XB}) = (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{A} + \mathbf{B}^T \otimes \mathbf{I}_m)\mathrm{vec}(\mathbf{X}),\\
&\mathrm{vec}(\mathbf{AXB}) = (\mathbf{B}^T \otimes \mathbf{A})\mathrm{vec}(\mathbf{X}).
\end{aligned} \tag{7.12}$$

# 7.2. Rješavanje linearnih matričnih jednadžbi

## 7.2.1. Silvesterova matrična jednadžba

### Indirektno rješenje

Razmotrimo Silvesterovu matričnu jednadžbu

$$\mathbf{AX} + \mathbf{XB} = \mathbf{C}, \tag{7.13}$$

gdje su $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ poznate matrice, a $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nepoznata matrica. Rješenje Lyapunovljeve jednadžbe proizlazi kao specijalni slučaj rješenja Silvesterove jednadžbe.

Ako vrijedi matrična jednadžba (7.13) tada vrijedi i slijedeća vektorska jednadžba

$$\mathbf{Ax}_i + \mathbf{Xb}_i = \mathbf{c}_i, \tag{7.14}$$

gdje $\mathbf{x}_i$, $\mathbf{b}_i$ i $\mathbf{c}_i$ predstavljaju $i$-ti stupac matrica $\mathbf{X}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$, respektivno. Vektor $\mathbf{Xb}_i$ možemo prikazati kao dekompoziciju po stupcima matrice $\mathbf{X}$

$$\mathbf{Xb}_i = b_{1i}\mathbf{x}_1 + b_{2i}\mathbf{x}_2 + \ldots + b_{ni}\mathbf{x}_n, \tag{7.15}$$

tako da izraz (7.14) postaje

$$\mathbf{Ax}_i + b_{1i}\mathbf{x}_1 + b_{2i}\mathbf{x}_2 + \ldots + b_{ni}\mathbf{x}_n = \mathbf{c}_i, \tag{7.16}$$

za $i = 1, 2, ..., n$. Drugim riječima, dobili smo sustav od $n$ vektorskih jednadžbi s $n$ nepoznatih vektora (stupaca matrice $\mathbf{X}$)

$$\begin{aligned}
&\mathbf{Ax}_1 + b_{11}\mathbf{x}_1 + b_{21}\mathbf{x}_2 + \ldots + b_{n1}\mathbf{x}_n = \mathbf{c}_1,\\
&\mathbf{Ax}_2 + b_{12}\mathbf{x}_1 + b_{22}\mathbf{x}_2 + \ldots + b_{n2}\mathbf{x}_n = \mathbf{c}_2,\\
&\vdots,\\
&\mathbf{Ax}_n + b_{1n}\mathbf{x}_1 + b_{2n}\mathbf{x}_2 + \ldots + b_{nn}\mathbf{x}_n = \mathbf{c}_n.
\end{aligned} \tag{7.17}$$

ili u matričnom obliku

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11}\mathbf{I}_n & b_{21}\mathbf{I}_n & \cdots & b_{n1}\mathbf{I}_n \\ b_{12}\mathbf{I}_n & b_{22}\mathbf{I}_n & \cdots & b_{n2}\mathbf{I}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1n}\mathbf{I}_n & b_{2n}\mathbf{I}_n & \cdots & b_{nn}\mathbf{I}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{c}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{c}_n \end{bmatrix}. \tag{7.18}$$

Ako usporedimo matrice unutar izraza (7.18) sa definicijom Kroneckerovog produkta slijedi da je

$$\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{A} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B}^T \otimes \mathbf{I}_n = \begin{bmatrix} b_{11}\mathbf{I}_n & b_{21}\mathbf{I}_n & \cdots & b_{n1}\mathbf{I}_n \\ b_{12}\mathbf{I}_n & b_{22}\mathbf{I}_n & \cdots & b_{n2}\mathbf{I}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1n}\mathbf{I}_n & b_{2n}\mathbf{I}_n & \cdots & b_{nn}\mathbf{I}_n \end{bmatrix}, \tag{7.19}$$

Isto tako, ako usporedimo vektore unutar izraza (7.18) sa definicijom vektorizacije matrice, slijedi da je

$$\mathrm{vec}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{vec}(\mathbf{C}) = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{c}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{c}_n \end{bmatrix}. \tag{7.20}$$

Koristeći navedenu notaciju, izraz (7.18) možemo napisati na slijedeći način

$$(\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{A} + \mathbf{B}^T \otimes \mathbf{I}_n)\mathrm{vec}(\mathbf{X}) = \mathrm{vec}(\mathbf{C}), \tag{7.21}$$

tako da je konačno rješenje

$$\mathrm{vec}(\mathbf{X}) = (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{A} + \mathbf{B}^T \otimes \mathbf{I}_n)^{-1}\mathrm{vec}(\mathbf{C}), \tag{7.22}$$

odnosno, samu matricu $\mathbf{X}$ dobivamo inverznim postupkom od vektorizacije matrice,

$$\mathbf{X} = \mathrm{vec}^{-1}\left[(\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{A} + \mathbf{B}^T \otimes \mathbf{I}_n)^{-1}\mathrm{vec}(\mathbf{C})\right]. \tag{7.23}$$

### Direktno rješenje

Ako primjenimo operator vektorizacije na jednadžbu (7.13) dobivamo

$$\mathrm{vec}(\mathbf{AX} + \mathbf{XB}) = \mathrm{vec}(\mathbf{C}), \tag{7.24}$$

odnosno

$$\mathrm{vec}(\mathbf{AX}) + \mathrm{vec}(\mathbf{XB}) = \mathrm{vec}(\mathbf{C}). \tag{7.25}$$

Ako primjenimo svojstva (7.12) na gornji izraz dobivamo direktno izraz (7.21).

### 7.2.2. Lyapunovljeva matrična jednadžba

Lyapunovljeva matrična jednadžba

$$\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{PA} = -\mathbf{Q}, \tag{7.26}$$

gdje su $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ i $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ poznate matrice, a $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nepoznata matrica, predstavljaja specijalni slućaj Silvesterove matrične jednadžbe (7.13), kada je $\mathbf{A} \to \mathbf{A}^T$, $\mathbf{B} \to \mathbf{A}$ i $\mathbf{C} \to -\mathbf{Q}$. Usporedbom s rješenjem (7.21), dobivamo

$$(\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{A}^T + \mathbf{A}^T \otimes \mathbf{I}_n)\mathrm{vec}(\mathbf{P}) = -\mathrm{vec}(\mathbf{Q}), \tag{7.27}$$

odnosno, konačno rješenje je

$$\mathrm{vec}(\mathbf{P}) = -(\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{A}^T + \mathbf{A}^T \otimes \mathbf{I}_n)^{-1}\mathrm{vec}(\mathbf{Q}). \tag{7.28}$$

Da bi dobivena matrica $\mathbf{P}$ bila rješenje Lyapunovljeve matrične jednadžbe moramo još provjeriti njenu pozitivnu definitnost (npr. preko Silvesterovog kriterija - sve dijagonalne subdeterminante moraju biti pozitivne).

### 7.2.3. Opća linearna matrična jednadžba

Sada ćemo razmotriti rješavanje linearne matrične jednadžbe općeg tipa

$$\sum_{j=1}^{p} \mathbf{A}_j\mathbf{X}\mathbf{B}_j = \mathbf{C}, \tag{7.29}$$

gdje su $\mathbf{A}_j \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $\mathbf{B}_j \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $(j = 1, 2, ..., p)$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ poznate matrice, a $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ nepoznata matrica.

Ako primjenimo operator vektorizacije na prethodnu jednadžbu dobivamo

$$\sum_{j=1}^{p} \mathrm{vec}(\mathbf{A}_j\mathbf{X}\mathbf{B}_j) = \mathrm{vec}(\mathbf{C}), \tag{7.30}$$

te primjenimo svojstvo: $\mathrm{vec}(\mathbf{AXB}) = (\mathbf{B}^T \otimes \mathbf{A})\mathrm{vec}(\mathbf{X})$ iz (7.12), dobivamo

$$\left(\sum_{j=1}^{p} (\mathbf{B}_i^T \otimes \mathbf{A}_i)\right) \mathrm{vec}(\mathbf{X}) = \mathrm{vec}(\mathbf{C}), \tag{7.31}$$

odnosno

$$\mathrm{vec}(\mathbf{X}) = \left(\sum_{j=1}^{p} (\mathbf{B}_i^T \otimes \mathbf{A}_i)\right)^{-1} \mathrm{vec}(\mathbf{C}), \tag{7.32}$$

### 7.2.4. Matlab kod za rješavanje Lyapunovljeve jednadžbe

```
% rjesavanje Lyapunovljeve jednadzbe primjenom Kroneckerovog produkta
% Lyapunovljeva jednadzba: A'*P + P*A + Q = 0

A = [0 1 0; 0 0 1; -1 -3 -3]
Q = [1 0 0; 0 1 0; 0 0 1]

n=length(A)

I=eye(n)

b=Q(:)                          % vektorizacija matrice Q: b=vec(Q)

H = kron(I,A') + kron(A',I)     % Kroneckerova suma matrica A' i A

x = -inv(H)*b                   % rjesenje linerne jednadzbe (x=vec(P))

P = reshape(x,n,n)              % inverzna vektorizacija: P=vec^{-1}(x)

% provjera da matrica P zadovoljava Lyapunovljevu jednadzbu:
nula=A'*P + P*A + Q
```

# Literatura


[1] J. R. Leigh. *Control Theory.* The Institution of Electrical Engineers, London, 2004.

[2] D. G. Luenberger. *Introduction to Dynamic Systems.* John Wiley, 1979.

[3] S. Engelberg. *A Mathematical Introduction to Control Theory.* Imperial College Press, 2005.

[4] C. T. Chen. *Analog and Digital Control System Design.* Saunders College Publishing, 1991.

[5] K. Ogata. *Modern Control Engeneering.* Prentice-Hall, 1997.

[6] P. N. Paraskevopoulos. *Modern Control Engeneering.* Marcel Dekker, Inc., 2002.

[7] L. Perko. *Differential Equations and Dynamical Systems.* Springer-Verlag, 1991.

[8] G. E. Dullerud and F. G. Paganini. *A Course In Robust Control Theory.*

[9] K. J. Astrom. *Introduction to Control.* 2004.

[10] S. Skogestad and I. Postlethwaite. *Multivariable Feedback Control - Analysis And Design.* John Wiley, 1992.

[11] M. Green and D. J. N. Limebeer. *Linear Robust Control.* Pearson Education, Inc.

[12] G. Tao. *Adaptive Control Design and Analysis.* Wiley, 2003.

[13] S. Boyd and C. Barratt. *Linear Controller Design: Limits of Performance.* Prentice-Hall, 1991.

[14] K. Zhou, J. C. Doyle, and K. Glover. *Robust and Optimal Control.* Prentice-Hall.

[15] J. Doyle, B. Francis, and A. Tannenbaum. *Feedback Control Theory.* Macmillan Publishing Co., 1990.

[16] J. J. E. Slotine and W. Li. *Control Theory.* Prentice Hall, NJ, 1991.

[17] H. K. Khalil. *Nonlinear Systems.* Prentice Hall, 3rd edition, 2002.

[18] P. A. Ioannou and J. Sun. *Robust Adaptive Control.* Prentice Hall, 1995.

[19] K. M. Hangos, J. Bokor, and G. Szederkenyi. *Analysis and Control of Nonlinear Process Systems.* Springer, 2004.

[20] M. A. Khalaf, J. Huang, and F. L. Lewis. *Nonlinear $H_2/H_\infty$ Constrained Feedback Control.* Springer, 2006.

[21] B. Brogliato, R. Lozano, B. Maschke, and O. Egeland. *Dissipative Systems Analysis and Control.* Springer, 2007.

[22] C. Scherer and S. Weiland. *Linear Matrix Inequalities in Control.* Eindhoven University of Technology, 2004.

[23] V. D. Yurkevich. *Design of Nonlinear Control Systems with the Highest Derivative in Feedback.* World Scientific, 2004.

[24] C. C. Lin and L. L. Segel. *Mathematics Applied to Deterministic Problems in the Natural Sciences.* SIAM, 1988.

[25] T. T. Tay, I. M. Y. Mareels, and J. B. Moore. *High Performance Control.* 1997.

[26] D. W. Gu, P. Hr. Petkov, and M. M. Konstantinov. *Robust Control Design with MATLAB.* Springer, 2005.

[27] S. Wiggins. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos.* Springer, 1990.

[28] W. Perruquetti and J. P. Barbot. *Chaos in Automatic Control.* Taylor and Francis, 2006.

[29] R. S. S. Pena and M. Sznaier. *Robust Systems - Theory And Applications*. John Wiley, 1998.

[30] M. Sen and J. M. Powers. *Mathematical Methods of Dynamical Systems*.

[31] F. Brauer and J. A. Nohel. *The Qualitative Theory Of Ordinary Differential Equations*. Dover, 1969.

[32] U. Helmke and J. B. Moore. *Optimization and Dynamical Systems*. 1996.

[33] R. Bellman. *Stability Theory Of Differential Equations*. McGraw Hill, 1953.

[34] B. N. Datta. *Numerical Methods for Linear Control Systems*. Elsevier Science and Technology Books, 2003.

[35] V. D. Blondel and A. Megretski. *Unsolved Problems in Mathematical Systems and Control Theory*. Princeton University Press, 2004.